Multipliziert man diese Gleichung mit η und ergänzt die beiden ersten Glieder zum vollständigen Quadrat, so ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$(h\xi - p\eta)^2 y^2 - m^2 h^2 (y - \eta)^2 = 0,$$

deren Wurzeln die Ordinaten y_a und y_b von U und V sind, nämlich

$$\left.\begin{matrix} y_a \\ y_b \end{matrix}\right\} = \frac{mh}{mh \mp (h\xi - p\eta)} \eta.$$

Für einen der Punkte $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ als Berührungspunkt, wenn also $h\xi - p\eta = 0$ ist, ergibt sich

$$y_a = y_b = \eta,$$

d. h. die in den Endpunkten des Durchmessers $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ gelegten Tangenten sind mit AB, also mit dem konjugierten Durchmesser parallel.

Aus der geordneten quadratischen Gleichung

(5) $$[2 m^2 h - (m^2 - k^2)\eta] y^2 - 2 m^2 h^2 y + m^2 h^2 \eta = 0$$

ersieht man, dafs

$$\frac{2 y_a y_b}{y_a + y_b} = \eta$$

ist, d. h. dafs das Stück der beweglichen Tangente zwischen den beiden festen Tangenten durch den Berührungspunkt und den Schnittpunkt mit der Berührungsehne harmonisch geteilt wird.

8. Verbindet man A mit U, B mit V, so gilt für den Schnittpunkt y die Gleichung von AU:

$$y_a (x - m) - (x_a - m) y = 0$$

und da U auf BC liegt, so mufs

$$h x_a - p y_a + m(h - y_a) = 0$$

sein, so dafs man

$$y_a = -h \frac{2my}{hx - py - m(h + y)}, \quad \frac{y_a}{h - y_a} = -\frac{2my}{hx - py - m(h - y)}$$

erhält. Ebenso ergibt sich aus der Gleichung von BV:

$$y_b (x + m) - (x_b + m) y = 0$$

und da V ein Punkt von CA ist:

$$h x_b - p y_b - m(h - y_b) = 0$$

$$y_b = h \frac{2my}{hx - py + m(h + y)}, \quad \frac{y_b}{h - y_b} = \frac{2my}{hx - py + m(h - y)}.$$

Nun ist aber (Nr. 3)

$$\frac{BU}{UC} : \frac{CV}{VA} = \frac{y_a}{h - y_a} \cdot \frac{y_b}{h - y_b} = \frac{m^2}{k^2},$$

folglich erhält man als Gleichung des geometrischen Ortes des Schnittpunkts:

$$(hx - py)^2 - m^2 (h - y)^2 + 4 k^2 y^2 = 0.$$

Dieser ist also ein $\mathfrak{K}$, der demselben Büschel angehört.

Ist der ursprüngliche $\mathfrak{K}$ die Parabel, also $k^2 = m^2$, so ist der geometrische Ort mit der Gleichung

$$(hx - py)^2 - m^2 (h - y)^2 + 4 m^2 y^2 = 0$$

eine Ellipse, deren Schnittpunkte $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$ nach Nr. 4 bestimmt sind durch