Wählt man die Zahlen ξ, η, ζ, ϑ so, daß $x - p\xi$ usw. ohne alle zu verschwinden, absolut kleiner als $\frac{p}{2}$ werden, dann ist $pm' < 4 \cdot \frac{p^2}{4}$, also $m' < p$. Wir können also gleich in 3.) das $m < p$ voraussetzen.

Nun nehmen wir irgend vier neue ganze Zahlen x_1, y_1, z_1, t_1 und erhalten aus 3.) die Gleichung

$$5.)\quad (x - m x_1)^2 + (y - m y_1)^2 + (z - m z_1)^2 + (t - m t_1)^2 = m m_1.$$

Dann kann man x_1, y_1, z_1, t_1 so wählen, daß $x - m x_1$ usw. ohne alle zu verschwinden absolut kleiner als $\frac{m}{2}$ werden; mithin wird $m m_1 < 4 \cdot \frac{m^2}{4}$, also[1] $m_1 < m$.

V. Man rechnet leicht aus, daß die folgende Identität besteht:

$$\begin{aligned} 6.)\quad &(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2) \\ &= (x\xi + y\eta + z\zeta + t\vartheta)^2 + (x\eta - y\xi + z\vartheta - t\zeta)^2 \\ &+ (x\zeta - z\xi - y\vartheta + t\eta)^2 + (x\vartheta - t\xi + y\zeta - z\eta)^2 \end{aligned}$$

d. h. zwei Summen von je vier Quadraten ergeben mit einander multipliziert abermals eine Summe von vier Quadraten.

Multipliziert man daher die Gleichungen 3.) und 5.) mit einander, so erhält man:

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)\left[(x - m x_1)^2 + (y - m y_1)^2 + (z - m z_1)^2 + (t - m t_1)^2\right] = p m^2 m_1 \\ &\quad = \left[x(x - m x_1) + y(y - m y_1) + z(z - m z_1) + t(t - m t_1)\right]^2 \\ &\quad + \left[x(y - m y_1) - y(x - m x_1) + z(t - m t_1) - t(z - m z_1)\right]^2 \\ &\quad + \left[x(z - m z_1) - z(x - m x_1) - y(t - m t_1) + t(y - m y_1)\right]^2 \\ &\quad + \left[x(t - m t_1) - t(x - m x_1) + y(z - m z_1) - z(y - m y_1)\right]^2 \\ &= \left[p m - m(x x_1 + y y_1 + z z_1 + t t_1)\right]^2 + \left[-m(x y_1 - y x_1 + z t_1 - t z_1)\right]^2 \\ &\quad + \left[-m(x z_1 - z x_1 - y t_1 + t y_1)\right]^2 + \left[-m(x t_1 - t x_1 + y z_1 - z y_1)\right]^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich aber durch m^2 dividieren und wir erhalten schließlich:

$$\begin{aligned} 7.)\quad &\left[p - (x x_1 + y y_1 + z z_1 + t t_1)\right]^2 + \left[x y_1 - y x_1 + z t_1 - t z_1\right]^2 \\ &+ \left[x z_1 - z x_1 - y t_1 + t y_1\right]^2 + \left[x t_1 - t x_1 + y z_1 - z y_1\right]^2 = p m_1. \end{aligned}$$

Durch diese Umformung ist erreicht, daß aus den vier ursprünglich erhaltenen Zahlen x, y, z, t, deren Quadratsumme pm ist, vier neue ganze Zahlen — eben die Klammerausdrücke in 7.) — gebildet werden können, deren Quadratsumme $p m_1$ ist. Da nun m_1 kleiner als m ist, so hat man hier ein kleineres Vielfaches von p als Quadratsumme dargestellt. Wenn die ganze Zahl m_1 nicht gleich 1 ist, so kann man dies Verfahren solange fortsetzen, bis man endlich vier Zahlen X, Y, Z, T, erhält, deren Quadratsumme gleich p ist:

$$8.)\quad X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = p.$$

Dabei brauchen die Zahlen nicht alle verschieden zu sein, auch können einige Null sein. Da nun $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ ist, so gilt die

[1] Beispiel: $2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 = 5 \cdot 13$; $x_1 = 0$, $y_1 = z_1 = t_1 = 1$ ergibt $2^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (+1)^2 = 5 \cdot 2$.