Zweckmäßigkeitsgründen sollen hierbei die drei Fälle $c \lesseqgtr a$ getrennt behandelt werden.

Auf Grund der erhaltenen Gleichungen ist es nicht schwer, in jedem der drei Fälle die Gestalt der betreffenden Kurven zu beurteilen und zu beschreiben. Ferner können für jede auf einer geraden Kreiszylinderfläche gelegene Kurve konstanter Flexion die natürlichen Gleichungen angegeben werden. Schließlich ist es auch möglich, für jede der ebenen Kurven, in welche sich die genannten Linien durch Verbiegung der betreffenden Zylinderfläche verwandeln, die natürliche Gleichung aufzustellen.

§ 1.

Jede gerade Kreiszylinderfläche kann bei geeigneter Wahl eines rechtwinkligen Raumkoordinatensystems (XYZ) durch eine Gleichung von der Form

$$X^2 + Y^2 = a^2 \tag{1}$$

oder — nach Einführung von zwei Parametern u und v — durch drei Gleichungen von der Form

$$X = a \cos \frac{u}{a}, \quad Y = a \sin \frac{u}{a}, \quad Z = v \tag{1*}$$

dargestellt werden. Die geometrische Bedeutung von u und v liegt hierbei unmittelbar auf der Hand.

Wir wollen nun eine auf der Zylinderfläche verlaufende Kurve betrachten, indem wir uns v als eine noch näher zu bestimmende Funktion von u denken, deren Ableitungen mit v', v'' v''', ... bezeichnet werden mögen. Dann ergibt sich für den Flexionsradius R dieser Kurve nach bekannten Sätzen der Differentialgeometrie die Formel

$$R = a \frac{(\sqrt{v'^2 + 1})^3}{\sqrt{a^2 v''^2 + v'^2 + 1}}. \tag{2}$$

Jetzt verlangen wir, daß längs unserer Kurve R beständig denselben gegebenen Wert c besitzen soll. Dann wird die Formel (2) zu einer Differentialgleichung II. Ordnung für die vorhin genannte Funktion v von u, und wir erhalten, indem wir diese Gleichung etwas umformen, das folgende Ergebnis:

Damit die Gleichungen (1*) eine Kurve mit dem vorgeschriebenen konstanten Flexionsradius c darstellen, ist notwendig und hinreichend, daß v, als Funktion von u betrachtet, der gewöhnlichen Differentialgleichung II. Ordnung

$$av'' = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 \left(v'^2 + 1\right)^3 - \left(v'^2 + 1\right)} \tag{3}$$

Genüge leistet.

Die auf unserer Zylinderfläche gelegenen Raumkurven konstanter Flexion können wir in ebene Kurven verwandeln, indem wir diese Fläche in eine Ebene verbiegen, z. B. in diejenige Ebene, von der die Zylinderfläche längs der Geraden $u = 0$ berührt wird. Dann geht jeder Punkt der genannten Fläche in einen Punkt dieser Ebene über; und es kann,