Von diesen Kurven soll im folgenden abgesehen werden.

Um weitere auf unserer Zylinderfläche gelegene Kurven konstanter Flexion zu finden, müssen wir nunmehr die vollständige Integralgleichung von (6) ermitteln. Dieselbe wird, wie aus dem Bau der Differentialgleichung (6) hervorgeht, die Form einer nichtlinearen Relation zwischen den beiden Größen $x - x_0$ und $y - y_0$ haben, wobei x_0 und y_0 die Integrationskonstanten sind; d. h. alle Integralkurven sind miteinander kongruent und gleichgestellt, können also aus einer einzigen unter ihnen durch Translation erhalten werden.

§ 2.

Zur vollständigen Integration unserer Differentialgleichung

$$\lambda a \cdot y'' = \sqrt{(y'^2 + 1)^3 - \lambda^2 (y'^2 + 1)}\,, \tag{1}$$

die offenbar zwei Quadraturen erfordern wird, wollen wir ein Verfahren anwenden, das bei jeder von x und y freien gewöhnlichen Differentialgleichung II. Ordnung benutzt werden kann. Dasselbe beruht darauf, daß an Stelle von y'' und y' der Krümmungsradius ϱ der Integralkurve und der Richtungswinkel τ ihrer Tangente eingeführt wird, was mittels der beiden aus der Differentialrechnung bekannten Formeln

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad \tan \tau = y'$$

geschehen kann; dann verwandelt sich unsere Differentialgleichung in eine Relation zwischen ϱ und τ, nämlich in die Gleichung

$$\varrho = \frac{\lambda a}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^4 \tau}}, \tag{2}$$

aus der wir nunmehr alle weiteren Schlüsse zu ziehen haben[1].

Da für jede ebene Kurve, wenn die Bogenlänge derselben mit s bezeichnet wird, die Formeln

$$\frac{dx}{ds} = \cos \tau, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \tau \quad \text{und} \quad \frac{ds}{d\tau} = \varrho,$$

also auch die Formeln

$$\frac{dx}{d\tau} = \varrho \cos \tau, \quad \frac{dy}{d\tau} = \varrho \sin \tau$$

gelten, muß für die Integralkurven unserer Differentialgleichung (1)

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\lambda a \cdot \cos \tau}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^4 \tau}}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{\lambda a \sin \tau}{\sqrt{1 - \lambda^2 \cos^4 \tau}}$$

[1] Einige bemerkenswerte geometrische Eigenschaften der Integralkurven lassen sich unmittelbar aus Gleichung (2) erkennen. So kann man sofort die Krümmung angeben, welche diese Kurven an denjenigen Stellen besitzen, wo ihre Tangenten parallel zur x-Achse oder zur y-Achse gehen; dabei zeigt sich, daß Stellen der ersten Art unmöglich sind, wenn $\lambda > 1$ ist. So erkennt man ferner ohne weiteres, daß der Richtungswinkel τ einer jeden Wendetangente unserer Kurven der Relation

$$\cos^2 \tau = \frac{1}{\lambda}$$

Genüge leisten muß, und daß mithin diejenigen Kurven, für welche $\lambda < 1$ ist, keine Wendepunkte besitzen können.