und die natürliche Gleichung unserer Kurve lautet

$$\varrho = \frac{1}{2} a \left\{ \mathfrak{Cos}\left(\frac{s}{a}\sqrt{2}\right) + \frac{1}{\mathfrak{Cos}\left(\frac{s}{a}\sqrt{2}\right)} \right\}, \tag{4c}$$

enthält also gar keine elliptischen Funktionen; dann liegt der Fall der Figur 3 vor. Der Scheitel der Kurve entspricht der Annahme $s = 0$.

§ 5.

Schließlich sei noch angedeutet, wie man auch für die Raumkurven, die durch Aufbiegen der soeben betrachteten ebenen Kurven auf die zugehörige gerade Kreiszylinderfläche entstehen, die natürlichen Gleichungen aufstellen kann. Hierbei wird es, da die Flexion dieser Raumkurven konstant ist — der Flexionsradius R hat den von der Bogenlänge s unabhängigen Wert λa — lediglich darauf ankommen, die Torsion der betreffenden Kurve als Funktion von s darzustellen. Den Anfangspunkt der Bogenlänge s wählen wir wie im vorigen Paragraphen; den Torsionsradius bezeichnen wir mit T.

Die in Frage kommende Zylinderfläche kann wie in § 1 durch die drei Gleichungen

$$X = a \cos\frac{u}{a},\quad Y = a \sin\frac{u}{a},\quad Z = v \tag{1}$$

dargestellt werden; und jede auf ihr gelegene Kurve können wir dadurch erhalten, daß wir v als eine Funktion von u betrachten; die Ableitungen der letzteren mögen wieder mit v', v'', v''', ... bezeichnet werden.

Dann ergibt sich für die Torsion der fraglichen Kurve nach den Sätzen der Differentialgeometrie die Gleichung

$$\frac{1}{T} = \frac{a^2 v''' + v'}{a(a^2 v''^2 + v'^2 + 1)}, \tag{2}$$

während für ihre Flexion die schon in § 1 angegebene Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2 v''^2 + v'^2 + 1}{(v'^2 + 1)^3}}$$

gilt. Nun sei die Flexion unserer Kurve konstant, d. h. unabhängig von u. In diesem Falle besteht die Relation

$$\frac{a^2 v''^2 + v'^2 + 1}{(v'^2 + 1)^3} = \text{const},$$

und aus dieser folgt durch logarithmische Differentiation nach u die weitere Gleichung

$$\frac{(a^2 v''' + v')\, v''}{a^2 v''^2 + v'^2 + 1} = \frac{3 v' v''}{v'^2 + 1}.$$

In letzterer unterdrücken wir den Faktor v'', dessen Nullsetzen auf die Schraubenlinien und Kreise unserer Zylinderfläche führen würde; dann zeigt diese Gleichung im Verein mit der vorhin aufgestellten Formel (2), daß für die Torsion einer jeden auf der Zylinderfläche (1) verlaufenden Kurve konstanter Flexion die Beziehung