G. L. H. Spohr's

Pastors zu Woltershausen,

Anfangsgründe der Algebra.

Frankfurt am Mayn,
bey den Eichenbergischen Erben,
1776.

Vorrede.

In dieser kleinen Schrift findet man die vier Rechnungsarten mit Buchstaben, die Auflösung der einfachen und der quadratischen Gleichungen, die Auflösung der höhern Gleichungen, in so fern sie rationale Wurzeln haben, die Summirung endlicher und unendlicher Reihen, die Regeln, die Logarithmen zu finden, und das nöthigste von der Differential- und Integralrechnung.

Man hat alles auf eine leichte Art, aus seinen Gründen hergeleitet, und die Anwendung der Regeln, in einer hinlänglichen Anzahl bestimmter und unbestimmter Aufgaben, gezeiget.

In Ansehung dieses Inhalts, hoffet man, von der Algebra so viel vorgetragen zu haben, als in Anfangsgründen derselben gefodert werden kann, das ist, so viel als nöthig ist, Anfängern zur Erlernung dieser edlen Wissenschaft Lust zu machen, und sie in den Stand zu setzen, in derselben ohne Anstoß weiter zu gehen. Woltershausen, den 17. August. 1776.

Anfangs-

Anfangsgründe
der
Algebra.

§ 1.

Die Algebra ist eine Wissenschaft, aus gegebenen oder bekannten Grössen, durch Gleichungen, das ist, dadurch, daß man eine und eben dieselbe Größe auf zwey verschiedene Arten benennet, unbekannte Größen zu finden.

§ 2. Wenn man die Eigenschaften der Zahlen entdecken, das ist, wenn man einsehen will, wie eine aus der andern entstehet, oder durch die andere bestimmet wird, so sind zu solcher Untersuchung die Ziffern 1. 2. 3. u. s. w. allein nicht hinlänglich; sondern man muß Zeichen haben, die eine Zahl überhaupt vorstellen oder ausdrücken können. Man nimmt dazu die lateinischen Buchstaben. Also kann a die Zahl 3, 7, oder eine jede andere Zahl bedeuten. Man pflegt die gegebenen oder bekannten Zahlen mit den erstern Buchstaben des Alphabets, und die gesuchten oder unbekannten mit den letztern zu bezeichnen.

§ 3. Wenn man anzeigen will, daß eine Zahl oder Größe zu einer andern **addiret** werden soll, so wird dieses Zeichen + (plus) vor dieselbe gesetzet. Vor eine Zahl, die **subtrahiret** werden soll, wird — (minus) gesetzet. In der **Multiplication** setzet man entweder die Factores neben einander, oder man schreibet einen Punkt dazwischen. Viele bedienen sich auch dieses Zeichens ×; welches aber nicht gut ist, indem es mit dem Buchstaben x leicht verwechselt werden kann. In der **Division** werden die zu dividirende Zahl und der Divisor oder Theiler entweder wie ein Bruch geschrieben, oder es wird dieses Zeichen : dazwischen gesetzet. Das Zeichen der **Gleichheit** ist $=$. $>$ bedeutet grösser, $<$ aber kleiner.

Z. E. $12+7=19$; $12-7=5$; $6.7=42$; ab bedeutet, a soll mit b multipliciret werden. $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ heißt, a soll mit b dividiret werden. $8>5$ heißt, 8 ist größer als 5; und $5<8$ bedeutet, 5 ist kleiner als 8.

Endlich, da zwey Brüche, die einander gleich sind, eine Proportion machen, und $a:b=c:d$ so viel bedeutet als $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, so ist $a:b=c:d$ das Zeichen einer Proportion, und wird ausgesprochen: a verhält sich zu b, wie c zu d.

§ 4. Wenn in der Multiplication ein Factor aus 2 oder mehrern Zahlen oder Größen bestehet, so müßen dieselben in eine Parenthese ( ) eingeschlossen werden. Z. E. $(12+2)3$ bedeutet 14 mahl 3; schriebe man aber $12+2.3$, so hieße es 12 und 2 mahl 3.

In

In der Division macht man es eben so. Z. E. $(12+6):3 = 18:3 = 6$; aber $12+6:3 = 12+2 = 14$.

Man kann auch über eine zusammengesetzte Zahl eine Linie setzen. Z. E. $\overline{1+3+5} \cdot 8 = 72$; $\overline{6-2+8} : \overline{9-6} = 4$.

Erklärung.

§ 5. Eine Zahl oder Größe, welche das Zeichen $+$ hat, wird **positiv**, oder **affirmativ**; hingegen eine Größe, die das Zeichen $-$ hat, wird **negativ** genennet. Wenn eine Zahl ohne Zeichen gesetzet wird; welches aber nur geschicht, wenn sie in der ersten Stelle stehet, so wird eine positive Zahl darunter verstanden.

Die negativen Zahlen können mit den Schulden verglichen werden. Wenn ich -6 Rthlr habe, so bin ich 6 Rthlr schuldig.

Eine positive Zahl ist > 0, und eine negative ist < 0.

Grundsätze.

§ 6. 1) Wenn Gleiches zu Gleichem addiret wird, so kommen gleiche Summen; wenn Gleiches von Gleichem subtrahiret wird, so kommen gleiche Differenzen, u. s. w.

2) Zwey Größen, deren jede eben derselben Dritten gleich ist, sind einander selbst gleich.

3) Eine jede Größe ist sich selbst gleich; oder $a = a$, oder $a - a = 0$ das ist, wenn eine positive

Größe von einer positiven Größe, die ihr gleich ist, abgezogen wird, so kommt 0

Eben dieses kann auch so ausgedrückt werden: wenn eine negative Zahl zu einer positiven, die ohne Absicht auf ihr Zeichen, eben so groß ist, addiret wird, so kommt 0

§ 7. In so fern als eine positive Zahl betrachtet wird, als eine Zahl die subtrahiret werden soll, wird sie negativ; das ist, aus $+ a$ wird $- a$

Denn man subtrahire $+ a$ von 0, und nenne die Differenz x. Weil nun die zu vermindernde Zahl wieder entstehet, wann die Differenz und die subtrahirende Zahl addiret werden, so ist $0 = x + a$

$$\begin{array}{r} 0 \\ +a \\ \hline x \end{array}$$

Es ist aber $0 = a - a$ (§ 6. Num. 3.)

und demnach $x + a = a - a$ (§ 6. Num. 2.)

Man subtrahire $+ a = + a$

so kommt $x = - a$ (§ 6. Num. 1.)

das ist, wenn $+ a$ von 0 subtrahiret wird, so ist die Differenz $= - a$

§ 8. Wenn aber eine negative Zahl subtrahiret wird, so wird sie positiv; das ist aus $- a$ wird $+ a$

Denn man subtrahire $- a$ von 0, und nenne die Differenz x; so ist $x - a = 0$

$$\begin{array}{r} 0 \\ -a \\ \hline x \end{array}$$

Man addire $+ a = + a$

so kommt $x + a - a = + a$ (§ 6. Num. 1.)

Da nun $a - a = 0$ ist (§ 6. Num. 3.)

so ist $x = + a$

§ 9.

§ 9. Wenn eine negative Zahl $-a$ von einer eben so großen negativen Zahl $-a$ subtrahiret wird, so kommt 0

Denn man stelle sich die Zahl, von welcher subtrahiret werden soll, unter $0-a$ vor, und subtrahire $-a$ von 0; so kommt in so fern zur Differenz $+a$ (§ 8.); und demnach ist die Differenz $x=+a-a$, das ist $x=0$ (§ 6.)

$$\begin{array}{l} -a = 0-a \\ -a = -a \\ \hline x = +a-a \\ \hline \end{array}$$

Aufgabe.

§ 10. Größen zu einander addiren.

Auflösung.

Die Größen, welche addiret werden sollen, haben entweder einerley Zeichen, $+$ und $+$, oder $-$ und $-$, oder verschiedene Zeichen $+$ und $-$;

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zähle man sie zusammen, oder man addire sie wirklich, wie in der gemeinen Rechenkunst, und setze vor die Summen eben dasselbe Zeichen.

2. Wenn sie aber verschiedene Zeichen haben, so subtrahire man die kleinere von der größern, und gebe dem übergebliebenen das Zeichen der grössern Größe.

Z. E. Wenn man	$7a-5b+6c-8d$
und	$3a-2b-4c+5d$
addiren soll	
so ist die Summe	$10a-7b+2c-3d$

Beweis.

1. Im ersten Falle, da die zu addirenden Grössen einerley Zeichen haben, ist es evident, daß $7a+3a=10a$, und $-5b-2b=-7b$

2. Im zweyten Falle, wenn die Zeichen verschieden sind, so zertheile man die größere Zahl in solche zwey Theile, daß der eine Theil der kleinern Zahl gleich sey.

Man setze nemlich $+6c = +4c + 2c$
und $-8d = -5d - 3d$
Wenn nun $+6c - 8d$
und $-4c + 5d$
addiret werden soll, so ist dieses eben so viel als
wenn $+4c + 2c - 5d - 3d$
und $-4c \quad +5d$
addiret werden sollen.

Es ist aber $+4c - 4c = 0$ und $-5d + 5d = 0$ (§ 6.) und demnach ist die Summe $= +2c - 3d$

Es sey z. E. $a = 4$, $b = 2$, $c = 6$, $d = 5$;
so ist $7a - 5b + 6c - 8d = 28 - 10 + 36 - 40 = 14$
und $3a - 2b - 4c + 5d = 12 - 4 - 24 + 25 = 9$
und folglich die Summe $= 23$
Und $10a - 7b + 2c - 3d = 40 - 14 + 12 - 15 = 23$

§ 11. Daß man in der Rechnung mit Buchstaben, im addiren, subtrahiren, u. s. w. anfangen darf, wo man will, zur rechten oder zur linken, weil die Buchstaben keine Bedeutung von der Stelle haben, in welcher sie stehen, ist kaum nöthig zu erinnern.

Aufgabe.

§ 12. Größen von einander subtrahiren.

Auflösung.

Man gebe einer jeden Größe, die subtrahiret werden soll, ein ander Zeichen; nemlich man gebe derselben

selben —, wenn sie + hat, und + wenn sie — hat; und alsdann addire man; so ist die Subtraction geschehen. Z.E.

Wann von	$8a+3b-9c-2d+12f-11g$
subtrahiret werden soll	$2a+10b-4c-7d-6f+4g$
so addire man (§ 10.)	$8a+3b-9c-2d+12f\ 11g$
zu	$-2a-10b+4c+7d+6f-4g$
Es kommt	$6a-7b-5c+5d+18f-15g$

und dieses ist die gesuchte Differenz.

Beweis.

Man nenne die Zahl, von welcher subtrahiret werden soll, M, und die Zahl, welche subtrahiret werden soll, S, und setze:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} M= & 8a & +0 & +3b & +0 & -9c & +0 & -2d & +0 & +12f & +0 & -11g & +0 \\ \text{u.}S= & & +2a & & +10b & & -4c & & -7d & & -6f & & +4g \end{array}$$

so ist $M-S=8a-2a+3b-10b-9c+4c-2d+7d+12f+6f-11g-4g$ vermöge der Grundsätze § 7. und § 8.

das ist $M-S=6a-7b-5c+5d+18f-15g$

Oder: man setze, die zu vermindernde Zahl bestehe aus 3 Theilen, aus sich selbst, aus der zu subtrahirenden Zahl mit +, und eben derselben mit —; welches geschehen kann, weil $a-a=0$, $2a-2a=0$ u. s. w. (§ 6.)

Von $8a+2a-2a+3b+10b-10b-9c+4c-4c-2d+7d-7d+12f+6f-6f-11g+4g-4g$

subtrahire man nun $2a+10b-4c-7d-6f+4g$; so kommt $8a-2a+3b-10b-9c+4c-2d+7d+12f+6f-11g-4g$. Nemlich, wenn die zu subtrahirende Zahl + hat, so folget es aus § 6, und wenn sie — hat, aus § 9.

Man siehet, daß, nachdem die zu subtrahirende Zahl ein ander Zeichen bekommen hat, die Subtraction in eine Addition verwandelt wird.

Es sey z. E. $a=7$, $b=6$, $c=3$, $d=5$, $f=4$, $g=2$; so ist $8a+3b-9c-2d+12f-11g=56+18-27-10+48-22=63$ und $2a+10b-4c-7d-6f+4g=14+60-12-35-24+8=11$ folglich die Differenz $=52$.

Und $6a-7b-5c+5d+18f-15g=42-42-15+25+72-30=52$.

Grundsätze.

§ 13. Wenn eine positive Größe $+a$ mit einer positiven $+b$ multipliciret wird, so ist das Product positiv, nemlich $\frac{+ab}{+a}=+b$

§ 14. Wenn aber eine positive Größe $+a$ mit einer negativen $-b$ multipliciret wird, so ist das Product negativ, nemlich $-ab$.

Denn wenn man es nicht zugeben will, so nehme man an, $+a$ mahl $-b$ gebe $+ab$. Man dividire das Product $+ab$ mit seinem Factor $+a$; so kommt der andere Factor b. Und zwar muß $-b$ kommen (per hypothesin), aber auch $+b$, weil a positiv ist, und man auch ab positiv angenommen

hat

hat (§ 13.). Da nun b nicht zugleich positiv und negativ seyn kann, so ist das Product nicht $+ ab$, sondern $- ab$.

§ 15. Wenn eine positive Größe $+ ab$ mit einer negativen $- b$ dividiret wird, so ist der Quotient negativ, nemlich $- a$.

Denn wenn man es läugnet, so sey der Quotient $+ a$. Man multiplicire den Quotienten $+ a$ mit dem Divisor $- b$, so muß die zu dividirende Größe ab kommen, und zwar negativ, $- ab$, wie eben gezeiget worden (§ 14.), aber auch positiv, $+ ab$ (per hyp.). Da nun dieses ungereimt ist, so ist der Quotient nicht $+ a$, sondern $- a$.

Also auch, $\frac{- ab}{+ a} = - b$. Denn wenn der Quotient $+ b$ seyn solte, so würde, wenn man $+ b$ mit $+ a$ multiplicirte, zugleich $- ab$ (per hyp.) und $+ ab$ (§ 13.) kommen, welches unmöglich ist.

§ 16. Wenn eine negative Größe mit einer negativen multipliciret wird, so ist das Produkt positiv; nemlich $- a . - b = + ab$. Denn man dividire $+ ab$ mit $- b$; so ist der Quotient $= - a$ (§ 15.) Folglich, wenn $- a$ mit $- b$ multipliciret wird, so kommt $+ ab$.

§ 17. Wenn eine negative Größe mit einer negativen dividiret wird, so ist der Quotient positiv; nemlich $\frac{- ab}{- b} = + a$. Denn man multiplicire $+ a$ mit $- b$; so kommt $- ab$ (§ 14.) Folglich, wenn $- ab$ mit $- b$ dividiret wird, so muß $+ a$ kommen.

§ 18. Hieraus fliessen nun folgende Regeln:

1. In der Multiplication geben einerley Zeichen, im Product +, aber verschiedene Zeichen geben —

$$\left.\begin{array}{r} +a=+12 \\ +b=+\ 3 \\ \hline +ab=+36 \end{array}\right\}\ \S\ 13. \qquad \left.\begin{array}{r} -a=-12 \\ -b=-\ 3 \\ \hline +ab=+36 \end{array}\right\}\ \S\ 16.$$

$$\begin{array}{r} +a=+12 \\ -b=-\ 3 \\ \hline -ab=-36 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} -a=-12 \\ +b=+\ 3 \\ \hline -ab=-36 \end{array}\right\}\ \S\ 14.$$

2. Und in der Division geben einerley Zeichen im Quotienten +, aber verschiedene Zeichen —

$$\frac{+ab}{+a}=+b\ (\S\ 13.)\quad \frac{-ab}{-a}=+b\ (\S\ 17.)$$

$$\frac{+ab}{-a}=-b\quad \frac{-ab}{+a}=-b\ (\S\ 15.)$$

Aufgabe.

§ 19. Größen miteinander multipliciren.

Auflösung.

Die Multiplication geschicht, wie in der gemeinen Rechenkunst, nur daß man diese Regel merke: Einerley Zeichen geben im Product + und verschiedene Zeichen — (§ 18.), und daß man die gefundenen Producte nach der Vorschrift des § 10. addire.

$$\begin{array}{rl} \text{Z. E. Der eine Factor sey} & = a+b-c \\ \text{Der andere Factor} & = a-b \\ \hline & aa+ab-ac \\ & \quad\ -ab-bb+bc \\ \hline \text{so ist das Product} & = aa-bb-ac+bc \end{array}$$

Ein

Ein ander Exempel.

Der eine Factor sey	$= 3a - 5b + c$
Der andere sey	$= 2a + 4b - 2c$

$$\begin{array}{l} 6aa - 10ab + 2ac \\ \quad + 12ab - 20bb + 4bc \\ \qquad\qquad - 6ac + 10bc - 2cc \end{array}$$

so ist das Product $= 6aa + 2ab - 20bb - 4ac + 14bc - 2cc$

Aufgabe.

§ 20. Eine Größe mit der andern dividiren.

Auflösung.

Die Division geschicht, wie in der gemeinen Rechenkunst; nur daß man diese Regel merke: Einerley Zeichen geben im Quotienten $+$, und verschiedene Zeichen $-$ (§ 18.), und daß man sich nach den Regeln der Multiplication (§ 19.) und der Subtraction (§ 12) richte. Z. E.

$$\begin{array}{l|l|l} a - b & aa - bb - ac + bc & a + b - c \\ & aa - ab & \\ \hline & 0 + ab - bb - ac + bc & \\ & + ab - bb & \\ \hline & 0 \quad 0 - ac + bc & \\ & \qquad - ac + bc & \\ \hline & \qquad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Man machet es also: a stecket in aa, a mahl; da nun so wohl a als aa $+$ hat, so bekommt auch der Quotient a $+$. Dieser gefundene Quotient a wird mit

mit dem Divisor $a - b$ multipliciret; so kommt $aa - ab$; Dieses Product wird subtrahiret; so bleibet $+ab - bb - ac + bc$. a stecket in $+ab$, $+b$ mahl. Der gefundene Quotient $+b$ wird mit dem Divisor $a - b$ multipliciret; so kommt $+ab - bb$. Dieses Product wird subtrahiret; so bleibet $-ac + bc$. $+a$ stecket in $-ac$, $-c$ mahl. Der gefundene Quotient $-c$ wird mit dem Divisor $a - b$ multipliciret; so kommt $-ac + bc$. Dieses Product wird subtrahiret, so bleibet 0; und der Quotient ist $a + b - c$.

Ein ander Exempel.

$$
\begin{array}{l}
4a-3b \left.\begin{array}{l} 12aa-17ab+6bb+4ac-2bc \\ 12aa-9ab \end{array}\right\} 3a-2b+c+\frac{bc}{4a-3b} \\
\hline
\quad 0-8ab+6bb+4ac-2bc \\
\quad\;\; -8ab+6bb \\
\hline
\qquad\; 0 \qquad 0 \quad +4ac-2bc \\
\qquad\qquad\qquad\;\; +4ac-3bc \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad +bc
\end{array}
$$

§ 21. Von den Brüchen ist nicht nöthig zu handeln; denn man verfähret bey denselben, wie in der gemeinen Rechenkunst.

Erklärung.

§ 22. Wenn ein Product aus gleichen Factoren bestehet, (die Einheit nicht mit gerechnet,) so wird es eine **Potenz** oder **Dignität** genennet; und der eine Factor heisset die **Wurzel der Potenz** oder **Dignität**.

Ins

Ins besondere heisset ein solches Product die zwente Potenz, wenn es aus zwey gleichen Factoren; die dritte Potenz, wenn es aus drey gleichen Factoren; die vierte Potenz, wenn es aus vier gleichen Factoren bestehet, u. s. f.

Z. E. Wenn die Wurzel a ist, so ist aa die zwente, aaa die dritte, aaaa die vierte Potenz u. s. w.

Die Wurzel a wird auch oft die erste Potenz genennet.

Die Zahl, welche anzeiget, aus wie vielen gleichen Factoren die Potenz bestehet, nennet man den **Exponenten der Potenz.** Also ist 1 der Exponent der ersten Potenz oder der Wurzel; 2 ist der Exponent der zwenten; 3 der dritten; 4 der vierten Potenz u. s. w.

Die zwente Potenz wird auch das **Quadrat**, die dritte der **Cubus**, oder die **Cubikzahl**, und die vierte das **Biquadrat** genennet.

§ 23. Um die Unbequemlichkeit im schreiben und aussprechen zu vermeiden, schreibet man die Potenzen, nicht aa, aaa, aaaa u. s. w. sondern man setzet die Wurzel, und oben zur rechten den Exponenten der Potenz, und schreibet a^2, a^3, a^4 u. s. f. Die erste Potenz oder Wurzel schreibet man gemeiniglich ohne den Exponenten; zuweilen aber auch a^1.

Aufgabe.

§ 24. Potenzen mit Potenzen multipliciren.

Auflösung.

1. Wenn die Potenzen, die miteinander multipliciret werden sollen, nicht einerley Wurzeln haben,

ben, so werden die Factores nur nebeneinander geschrieben; z. E. b^2 mit a^3 multipliciret, gibt b^2a^3.

2. Wenn sie aber einerley Wurzeln haben, so addire man ihre Exponenten, und setze die Summe derselben oben an die Wurzel; so hat man das Product. Z. E. a^2 mit a^3 multipliciret, gibt $a^{2+3} = a^5$

Denn $a^2 = aa$ und $a^3 = aaa$ } § 23.

folglich $a^2 . a^3 = aaaaa$ (§ 3.)
aber $aaaaa = a^5$ (§ 23.)

und demnach ist $a^2 . a^3 = a^5$
und überhaupt $a^m . a^n = a^{m+n}$

Aufgabe.

§ 25. Eine Potenz, die man als eine Wurzel betrachtet, zu einer verlangten Potenz erheben.

Auflösung.

Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem Exponenten der Potenz, zu welcher sie erhoben werden soll; das Product gebe man der Wurzel zum Exponenten; so hat man die verlangte Potenz.

Beweis.

Denn wenn z. E. a^2 zur dritten Potenz erhoben wird, so kommt $a^2 . a^2 . a^2$ (§ 22.). Es ist aber $a^2 . a^2 . a^2 = a^{2+2+2}$ (§ 24.). Und $2 + 2 + 2 = 2.3$, wie aus dem Begriffe von der Multiplication bekannt ist. Und demnach ist $a^2 . a^2 . a^2 = a^{2.3}$.

Also

Also auch wenn a^3 zur vierten Potenz erhoben werden soll, so kommt $a^{3 \cdot 4} = a^{12}$.

Und überhaupt, wenn a^m zur Potenz, deren Exponent $= r$ ist, erhoben wird, so kommt a^{mr}.

Aufgabe.

§ 26. Potenzen mit Potenzen dividiren.

Auflösung.

1. Wenn sie nicht mit eben demselben Buchstaben bezeichnet sind, oder wenn sie nicht einerley Wurzel haben, so kann die Division nicht anders, als mit dem Zeichen geschehen.

Z. E. b^3 mit c^2 dividiret, gibt $\frac{b^3}{c^2}$ oder $b^3 : c^2$ (§ 3.).

2. Wenn sie aber einerley Wurzel haben, so subtrahire man den Exponenten des Divisors von dem Exponenten der Potenz, die dividiret werden soll. Die Differenz gebe man der Wurzel zum Exponenten; so hat man den Quotienten. Z. E.

$$\frac{b^6}{b^2} = b^{6-2} = b^4$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Denn} & b^6 = bbbbbb \\ \text{und} & b^2 = bb \end{array}\right\} \text{§ 23.}$$

$$\text{folglich } \frac{b^6}{b^2} = \frac{bbbbbb}{bb} = bbbb$$

$$\text{Aber } bbbb = b^4$$

$$\text{Und demnach } \frac{b^6}{b^2} = b^4 = b^{6-2}$$

$$\text{Also auch überhaupt } \frac{b^m}{b^r} = b^{m-r}$$

§ 27. Eine jede Potenz; die zum Exponenten o hat, gilt so viel als 1; oder $a^0 = 1$, $b^0 = 1$, $c^0 = 1$, u. s. w.

Denn $\frac{a^1}{a^1} = 1$, $\frac{a^2}{a^2} = 1$, $\frac{a^3}{a^3} = 1$, u. s. w.

Nun ist aber $\frac{a^1}{a^1} = a^{1-1}$, $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2}$, u. s. f. (§ 26.)

Folglich ist $1 = a^{1-1}$, $1 = a^{2-2}$, $1 = a^{3-3}$ u. s. w.

Das ist $1 = a^0$

Aufgabe.

§ 28. Aus einer Potenz eine verlangte Wurzel ziehen.

Auflösung.

Man dividire den Exponenten der Potenz, aus welcher eine Wurzel gezogen werden soll, mit der Zahl, welche anzeiget, aus der wievielsten Potenz die Wurzel gezogen werden soll; der Quotient ist der Exponent der verlangten Wurzel. Z. E.

Wenn aus a^6 die Quadratwurzel gezogen werden soll, so ist dieselbe $= a^{6:2} = a^3$; die Cubikwurzel a^6 ist $= a^{6:3} = a^2$, denn wenn a^3 als eine □ Wurzel angesehen wird, so ist das Quadrat derselben $= a^3 . a^3$ (§ 22.) $= a^{3.2}$ (§ 25.)

Also auch, wenn a^2 als eine Cubikwurzel betrachtet wird, so ist der Cubus derselben $= a^2 . a^2 . a^2$ (§ 22.) $= a^{2.3}$ (§ 25.) Es ist demnach überhaupt die Wurzel der Potenz ^{r} aus a^m, $a^{m:r}$.

§ 29. Das Wurzelzeichen ist $\sqrt{}$. Und zwar bedeutet $\sqrt[2]{}$ die Quadratwurzel, $\sqrt[3]{}$ die Cubikwurzel, $\sqrt[4]{}$ die Biquadratische Wurzel, $\sqrt[5]{}$ die Wurzel der fünften Potenz u. s. w. Wenn $\sqrt{}$ ohne Ziffer oder Buchstaben stehet, so bedeutet es allezeit die Quadratwurzel. $\sqrt{a}$ oder $\sqrt[2]{a}$ bedeutet die Quadratwurzel aus a, $\sqrt[3]{a}$ die Cubikwurzel aus a u. s. w.

§ 30. Die Wurzeln der Potenzen können also auf zweyerley Art bezeichnet werden. Denn z. E. die Quadratwurzel aus a ist $= \sqrt{a}$ oder $\sqrt[2]{a}$; (§ 29.)

Und ebendieselbe ist auch $= a^{1:2}$ (§ 28.)

Und demnach ist $\sqrt{a}$ oder $\sqrt[2]{a} = a^{1:2}$.

Also auch $\sqrt[3]{a^2} = a^{2:3}$ u. s. w. und überhaupt $\sqrt[r]{a^m} = a^{m:r}$.

§ 31. Wenn eine Potenz einen negativen Exponenten hat, so gilt dieselbe so viel als ein Bruch, dessen Zähler 1 ist, und dessen Nenner eben dieselbe Potenz ist, jedoch mit einem positiven Exponenten.

Z. E. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{-2:3} = \frac{1}{a^{2:3}}$ oder $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

Denn $a^{-2} = a^{0-2}$

und $a^{0-2} = \frac{a^0}{a^2}$ (§ 26. 7.)

Folglich $a^{-2} = \frac{a^0}{a^2}$

Es ist aber $a^0 = 1$ (§ 27.)

Und demnach $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
Also auch $a^{-2:3} = a^{0-2:3}$
und $a^{0-2:3} = \frac{a^0}{a^{2:3}}$ (§ 26. 7.

Also ist $a^{-2:3} = \frac{a^0}{a^{2:3}} = \frac{1}{a^{2:3}}$ (§ 27.) $= \sqrt[3]{a^2}$ (§ 30.)

Und überhaupt $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; und $a^{-m:r} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^m}}$

Erklärung.

§ 32. Wenn aus einer Potenz die Wurzel nicht vollkommen gezogen werden kann, so wird solche unvollkommene Wurzel eine Irrationalzahl, oder eine surdische Zahl (numerus surdus) genennet. Z. E. Wenn 7 als ein Quadrat angesehen wird, so ist $\sqrt{7}$ eine Irrationalzahl. Denn es stehet keine Zahl zu finden, die mit sich selbst multipliciret, genau oder vollkommen 7 mache. Also auch $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{31}$, $\sqrt[5]{31}$ u. s. w. sind Irrationalzahlen.

§ 33. Wie man Irrationalzahlen addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren müße, das wird aus dem, was bisher vorgetragen worden, leicht nachzudenken seyn.

Wenn Irrationalzahlen mit einander multipliciret werden sollen, so haben sie entweder einerley

Benennung, oder nicht; das ist, sie sind entweder Wurzeln aus Potenzen, die eben denselben Exponenten haben, oder nicht.

1. Wenn sie Wurzeln aus Potenzen sind, die eben denselben Exponenten haben, so multiplicire man sie, und gebe dem Produkt das Wurzelzeichen der Factoren.

Z. E. $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{15}$ multipliciret, gibt $\sqrt{45}$. Und überhaupt $\sqrt[m]{a^r}$ mit $\sqrt[m]{b^n}$ multipliciret, gibt $\sqrt[m]{a^r b^n}$; und $\sqrt[m]{a^r} \cdot \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{r+n}}$ (§ 24.)
Probe. $\sqrt{3} = \frac{173205}{100000}$; $\sqrt{15} = \frac{387298}{100000}$; $\sqrt{45} = \frac{670820}{100000}$ und $\frac{173205}{100000} \cdot \frac{387298}{100000} = \frac{67081950090}{10000000000}$.

2. Wenn aber die Irrationalzahlen nicht einerley Benennung haben, so müßen ihre Exponenten erst zu einerley Benennung gebracht werden. Z. E. Wenn man $\sqrt{8}$ mit $\sqrt[3]{9}$ multipliciren soll, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{8} = 8^{1:2} \\ \sqrt[3]{9} = 9^{1:3} \end{array}\right\} \text{§ 30.}$$

und also $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{9} = 8^{1:2} \cdot 9^{1:3}$
Es ist aber $8^{1:2} \cdot 9^{1:3} = 8^{3:6} \cdot 9^{2:6}$
das ist $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{9} = 512^{1:6} \cdot 81^{1:6} = \sqrt[6]{512 \cdot 81}$
$= \sqrt[6]{41472}$.

§ 34. Bey der Division der Irrationalzahlen ist eben das zu merken, was bey der Multiplication derselben zu merken ist; nemlich wenn sie schon einerley Benennung haben, oder dazu gebracht sind, so dividiret man die Zahlen unter dem Wurzelzeichen, und gibt dem Quotienten eben dasselbe Wurzelzeichen.

$$\text{Z. E. } \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}} = \sqrt{15}; \frac{\sqrt[6]{41472}}{\sqrt{8}} = \frac{41472^{1:6}}{8^{3:6}}$$

$$= \frac{41472^{1:6}}{512^{1:6}} = 81^{1:6} = 9^{2:6} = 9^{1:3} = \sqrt[3]{9}$$

§ 35. Wann eine Rationalzahl mit einer Irrationalzahl multipliciret werden soll, z. E. a mit $\sqrt{b}$; so kann es entweder blos mit dem Zeichen geschehen, oder wenn man wirklich multipliciren, und die Rationalzahl mit unter das Wurzelzeichen bringen will, so muß man sie erst zu der Potenz erheben, die einerley Exponenten mit dem Wurzelzeichen hat.

$$\text{Z. E. } a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}; \; c\sqrt[3]{d} = \sqrt[3]{c^3d}; \; 3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}; \; 2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}.$$

Denn $a^1 = a^{2:2} = \sqrt{a^2}$ (§ 30.); folglich $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ (§ 33.)

Eben dieses gilt auch von der Division. $\frac{1}{a}\sqrt{b} = \sqrt{\frac{b}{a^2}}$;

$$\frac{1}{a}\sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{c}{a^3}}; \; \frac{1}{3}\sqrt{54} = \sqrt{\frac{54}{9}} = \sqrt{6}.$$

§ 36. Wenn man Irrationalzahlen addiren, oder von einander subtrahiren will, so untersuche man, ob sie sich mit vollkommenen Potenzen, die einerley Exponenten mit dem Wurzelzeichen haben, dividiren lassen, und ob zum Quotienten einerley

komme,

komme, oder nicht. Im ersten Falle kann man wirklich addiren, oder subtrahiren; im zweyten Falle kann es nur mit dem Zeichen geschehen.

Z. E. $\sqrt{a^2b}$ und $\sqrt{c^2b}$ können durch vollkommene Quadrate a^2 und c^2 dividiret werden; und bey jeder Irrationalzahl kommt eben derselbe Quotient $\sqrt{b}$. Folglich ist $\sqrt{a^2b} + \sqrt{c^2b} = a\sqrt{b} + c\sqrt{b}$ (§ 35.) $= (a+c)\sqrt{b}$, und $\sqrt{a^2b} - \sqrt{c^2b} = (a-c)\sqrt{b}$. Also auch $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4.2} + \sqrt{9.2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{25.2} = \sqrt{50}$.

Aufgabe.

§ 37. Zu finden, wie vielmahl aus etlichen Dingen z. E. aus abcde etliche z. E. 2, 3, 4 u. s. w. genommen werden können, so daß man eben dieselben zusammen genommen, niemahls mehr als einmahl nehme.

Auflösung.

I. Wenn aus den gegebenen Dingen immer 1 genommen werden soll, so ist offenbar, daß dieses so vielmahl geschehen kann, als Dinge gegeben sind. Die Zahl der Dinge sey $= n$; so ist die Zahl, welche anzeiget, wie vielmahl immer 1 Ding aus denselben genommen werden kann, auch $= n$.

II. Wenn aus den Dingen abcde, immer 2 genommen werden sollen; so laße man anfangs a weg; so bleibt die Anzahl der Dinge $= n - 1$; und aus denselben kann man $n - 1$ mahl 1 nehmen (Num. 1.), nemlich

b, oder c, oder d, oder e,

 Eben

Eben so viel Verbindungen oder Combinationen entstehen, wenn das weggelassene a zu jedem von diesen Dingen hinzu gesetzet wird; nemlich

ab ac ad ae

Wenn man b mit jedem von den übrigen Dingen combiniret, so entstehen nochmahls $n-1$ Combinationen, nemlich

ba bc bd be

Eben so viel, wenn c, d, e mit den übrigen combiniret werden; nemlich

ca	cb	cd	ce
da	db	dc	de
ea	eb	ec	ed

Die Zahl aller dieser Combinationen ist demnach $= n(n-1)$. Nun ist aber hier jedes Ding mit einem jeden von den übrigen 2mahl combiniret; man hat ab und ba, ac und ca, ad und da, ae und ea u. s. f. und solche 2 Combinationen gelten, vermöge der Aufgabe, nur für 1 Combination. Folglich, wenn $n(n-1)$ mit 2 dividiret wird, so zeiget $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ an, wie vielmahl aus den Dingen, deren Anzahl $= n$ ist, 2 genommen werden können.

III. Wenn aus den Dingen abcde immer 3 genommen werden sollen, so laße man a weg; die Anzahl der übrigen ist denn $= n-1$; und man hat schon gesehen, daß aus $n-1$ Dingen $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \quad 2}$ mahl 2 genommen werden können. (Num. II.)

bc bd be
cd ce de

Wenn

Wenn nun a dazu gesetzet wird, so bleibt die Zahl der Combinationen eben dieselbe, und man bekommt

abc	abd	abe
acd	ace	ade

Eben so viel Combinationen entstehen, wenn b, c, d, e, mit den übrigen combiniret werden, nemlich

bac	bad	bae	cab	cad	cae
bcd	bce	bde	cbd	cbe	cde
dab	dac	dae	eab	eac	ead
dbc	dbe	dce	ebc	ebd	ecd

Nun ist aber a mit jeden zweyen von den übrigen Dingen, 3mahl combiniret; man hat abc, bac, cab u. s. w. Und eben so verhält es sich mit b, c, d und e. Da nun vermöge der Aufgabe, abc, bac, cab nur für abc gilt, u. s. w. so muß die Zahl aller dieser Combinationen, nemlich $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ mit 3 dividiret werden; und demnach ist $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-2)}{3}$ die Zahl welche anzeiget, wie vielmahl aus n Dingen 3 genommen werden können.

IV. Auf gleiche Weise findet man, daß aus n Dingen 4 genommen werden können $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4}$ mahl; 5 Dinge $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{4 \cdot 5}$ mahl u. s. f.

Z. E. Aus 24 verschiedenen Dingen können 10 genommen werden,

$$\frac{24.23.22.21.20.19.18.17.16.15}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.10}\text{ mahl, das ist}$$

1961256mahl

Durch Hülfe dieses jetzt bewiesenen Satzes kann eine der schönsten und nützlichsten Aufgaben aufgelöset werden, welche nun folget.

Aufgabe.

§ 38. Eine Regel zu finden, nach welcher eine jede zweytheilige Wurzel (binomium) $a+b$ oder $a-b$ zu einer verlangten Potenz erhoben werden könne.

Auflösung.

Man erhebe $a+b$ zum Quadrat, zum Cubus, zum Biquadrat u. s. f.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Man multiplicire das Quadrat $a^2+2ab+b^2$ mit $a+b$, um den Cubus zu bekommen.

$$\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ \quad +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \text{ Cubus} \\ a+b \\ \hline \end{array}$$

a⁴

$$\begin{array}{l} a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{array}$$ Biquadrat

u. s. w.

Man siehet aus dieser Multiplication, daß das erste Glied die höchste Potenz von a ist, und daß in jedem folgenden Gliede der Exponent von a um 1 kleiner ist, als in dem nächst vorhergehenden Gliede; daß hingegen im zweyten Gliede, die erste Potenz von b ist, und daß in den folgenden der Exponent von b allezeit um 1 größer wird, und endlich daß der Conficient des zweyten Gliedes dem Exponenten der höchsten Potenz gleich ist.

Wenn man also die Conficienten des dritten Gliedes und der übrigen Glieder nicht in Betrachtung ziehet, so ist

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$

$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$

und überhaupt

$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$ u. s. w.

Von a—b gilt eben dieses, nur daß das 1, 3, 5, 7te Glied u. s. w. +, und das 2, 4, 6, 8te Glied u. s. w. — bekommt, wie aus der Multiplication zu sehen ist.

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$ Quadrat

$$\begin{array}{l} a-b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b + ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ Cubus} \end{array}$$

u. s. w.

Es ist also noch übrig, die Conficienten des dritten Gliedes, und der folgenden Glieder (einige nennen diese Conficienten **Unzen**) zu finden.

Um dieselben zu finden, multiplicire man

$$\begin{array}{l} a+b \\ \text{mit } a+c \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ac+bc \end{array} = A$$

A mit $a+d$

$$\begin{array}{l} a^3+a^2b+abc+bcd \\ \quad +a^2c+abd \\ \quad +a^2d+acd \end{array} = B$$

B mit $a+e$

$$\begin{array}{l} a^4+a^3b+a^2bc+abcd+bcde \\ \quad +a^3c+a^2bd+abce \\ \quad +a^3d+a^2cd+abde \\ \quad +a^3e+a^2be+acde \\ \qquad\quad +a^2ce \\ \qquad\quad +a^2de \end{array} = C$$

C mit $a+f$

a^5

$$\begin{array}{llllllll}
a^5 & +a^4b & +a^3bc & +a^2bcd & +abcde & +bcdef & & \\
 & +a^4c & +a^3bd & +a^2bce & +abcdf & & & \\
 & +a^4d & +a^3cd & +a^2bde & +abcef & & & \\
 & +a^4e & +a^3be & +a^2cde & +abdef & & & = D \\
 & +a^4f & +a^3ce & +a^2bcf & +acdef & & & \\
 & & +a^3de & +a^2bdf & & & & \\
 & & +a^3bf & +a^2cdf & & & & \\
 & & +a^3cf & +a^2bef & & & & \\
 & & +a^3df & +a^2cef & & & & \\
 & & +a^3ef & +a^2def & & & &
\end{array}$$

u. s. w.

Wenn man nun setzet, $b = c = d = e = f$; so wird aus dem Product A die zweyte Potenz von $a + b$ nemlich

$$a^2 + 2ab + b^2$$

aus dem Product B die dritte Potenz,

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

aus dem Product C die vierte Potenz,

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

aus dem Product D die fünfte Potenz,

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

u. s. w.

Man merke nun

1. Daß in jeder Potenz so viel Buchstaben sind, (a nicht mit gerechnet,) als der höchste Exponent, oder der Exponent dieser Potenz Einheiten hat. In der zweyten Potenz sind 2 Buchstaben b und c; in der dritten Potenz 3 Buchstaben b, c, d; in der vierten 4, b, c, d, e; in der fünften 5, b, c, d, e, f; u. s. w.

2. Daß im dritten Gliede, aus diesen Buchstaben immer 2; im vierten Gliede immer 3; im

5ten

5ten immer 4; im 6ten immer 5 genommen sind, u. s. f.

Denn in der zweyten Potenz ist das 3te Glied bc; und aus 2 Dingen b und c können 2 genommen werden $\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}$ das ist 1mahl (§ 37.)

In der dritten Potenz ist im 3ten Gliede bc + bd + cd; und aus 3 Dingen b, c, d können 2 genommen werden $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}$ das ist 3mahl (§ 37.)

In der vierten Potenz ist im 3ten Gliede bc + bd + cd + be + ce + de; und aus 4 Dingen b, c, d, e können 2 genommen werden $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ das ist 6mahl.

In der fünften Potenz sind im 3ten Gliede 10 Combinationen, bc + bd + cd + be + ce + de + bf + cf + df + ef; und wenn aus 5 Dingen b c d e f, 2 genommen werden; so ist die Zahl aller möglichen Combinationen $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$ (§ cit.)

In der zweyten Potenz ist kein 4tes Glied.

In der dritten Potenz ist das 4te Glied bcd; und wenn aus 3 Dingen b c d 3 genommen werden, so ist die Zahl der Combinationen $= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$.

In

In der vierten Potenz ist im 4ten Gliede bcd + bce + bde + cde; und wenn aus 4 Dingen bcde 3 genommen werden, so ist die Zahl der Combinationen $= \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$.

In der fünften Potenz sind im 4ten Glied 10 Combinationen; bcd + bce + bde + cde + bcf + bdf + cdf + bef + cef + def; und wenn aus 5 Dingen b c d e f 3 genommen werden, so ist die Zahl der Combinationen $= \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ u. s. w.

Da nun, wie man offenbar siehet, die Coefficienten mit der Zahl der Combinationen überein kommen, so ist z. E.

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \frac{6.5}{1.2}a^4b^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}a^3b^3 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}a^2b^4 + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}ab^5 + \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}b^6$$

und überhaupt

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 \text{ u. s. w.}$$

Und $(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4$ u. s. w.

oder

oder $(a-b)^m = a^m + ma^{m-1} \cdot -b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$
$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} \cdot -b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
$a^{m-4} b^4$ u. s. w.

§ 39. Eine jede Wurzel, sie sey rational oder irrational, kann als eine Potenz, die einen gebrochenen Exponenten hat, angesehen werden. Z. E. $\sqrt[3]{a} = a^{1:3}$ (§ 30.)

Folglich kann, durch Hülfe der Formel $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b$ u. s. f. (§ 38.) auch eine jede Wurzel ausgezogen werden. Z. E. Setzet man $m = \frac{1}{2}$, so bekommt man die Quadratwurzel; setzet man $m = \frac{1}{3}$, so bekommt man die Cubikwurzel aus $a+b$.

Jedoch bekommt man alsdann die Wurzel nicht vollkommen, sondern nur durch **Näherung** (per approximationem), wenn gleich die Potenz vollkommen ist.

Die unendliche Reihe muß aber aus Gliedern bestehen, die immer abnehmen; sonst würde sie unbrauchbar seyn. Z. E. Wenn man aus 4 die Quadratwurzel ziehen will, so setze man $\sqrt{4} = (9-5)^{1:2}$ (§ 30.); und man bekommt (§ 38.)

$$(9-5)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 9^{\frac{1}{2}-1} \cdot -5 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2)}{2}}{1 \cdot 2} \cdot 9^{\frac{1}{2}-2} \cdot 5^2$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2)(1-4)}{2 \cdot 2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 9^{\frac{1}{2}-3} \cdot -5^3 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2)(1-4)(1-6)}{2 \cdot 2 \cdot 2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 9^{\frac{1}{2}-4} \cdot 5^4$$

u. s. f.

Das

Das ist: $(9-5)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2}\cdot 9^{-1:2}\cdot 5 - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot 9^{-3:2}\cdot 5^2$
$- \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 9^{-5:2}\cdot 5^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 9^{-7:2}\cdot 5^4$ u. s. w.

Oder, weil $9^{-1:2} = \frac{1}{\sqrt{9}}$, $9^{-3:2} = \frac{1}{\sqrt{9^3}}$ u. s. w. (§31.) und $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{9^3} = 3^3$ u. s. w.

so ist $(9-5)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1\cdot 5}{2\cdot 3} - \frac{1\cdot 1\cdot 5^2}{2\cdot 4\cdot 3^3} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3^5}$
$- \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 5^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 3^7}$ u. s. f.

Wenn man diese Glieder mit einander vergleichet, so siehet man, daß die folgenden sind:
$- \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 5^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 3^9} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 5^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 3^{11}}$
$- \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 5^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14\cdot 3^{13}}$ u. s. w.

Man nenne, um der Bequemlichkeit willen, wenn man will, das erste Glied 3, A, das 2te $\frac{1\cdot 5}{2\cdot 3}$, B, das 3te $\frac{1\cdot 1\cdot 5^2}{2\cdot 4\cdot 3^3}$, C u. s. w. Man siehet, daß $C = \frac{1\cdot 1\cdot 5^2}{2\cdot 4\cdot 3^3}$ entstehet, wenn $B = \frac{1\cdot 5}{2\cdot 3}$ mit $\frac{1\cdot 5}{4\cdot 3^2}$ multipliciret wird, daß folglich $C = \frac{1\cdot 5}{4\cdot 3^2}B$, ferner, daß $D = \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5^3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3^5}$ entstehet, wenn $C = \frac{1\cdot 1\cdot 5^2}{1\cdot 4\cdot 3^3}$ mit $\frac{3\cdot 5}{6\cdot 3^2}$ multipliciret wird, daß also $D = \frac{3\cdot 5}{6\cdot 3^2}C$ u. s. w.

Und

Und demnach ist $(9-5)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1.5}{2.3} - \frac{1.5}{4.3^2} B$

$$- \frac{3.5}{6.3^2} C - \frac{5.5}{8.3^2} D - \frac{7.5}{10.3^2} E - \frac{9.5}{12.3^2} F$$

$$- \frac{11.5}{14.3^2} G - \frac{13.5}{16.3^2} H \text{ u. s. w.}$$

Nun setze man $1 = \frac{10000}{10000}$, oder, wenn man den Werth der Reihe genauer haben will, $1 = \frac{100000}{100000}$, oder noch genauer, $1 = \frac{1000000}{1000000}$ u. s. w.

Es ist also $A = \frac{30000}{10000}$

$$B = \frac{1.5}{2.3} = \frac{50000}{60000} = \frac{8333}{10000}$$

$$C = \frac{1.5}{4.3^2} B = \frac{5}{36} \cdot \frac{8333}{10000} = \frac{1157}{10000}$$

$$D = \frac{3.5}{6.3^2} C = \frac{5}{18} \cdot \frac{1157}{10000} = \frac{321}{10000}$$

$$E = \frac{5.5}{8.3^2} D = \frac{25}{72} \cdot \frac{321}{10000} = \frac{111}{10000}$$

$$F = \frac{7.5}{10.3^2} E = \frac{7}{18} \cdot \frac{111}{10000} = \frac{43}{10000}$$

$$G = \frac{9.5}{12.3^2} F = \frac{5}{12} \cdot \frac{43}{10000} = \frac{17}{10000}$$

$$H = \frac{11.5}{14.3^2} G = \frac{55}{126} \cdot \frac{17}{10000} = \frac{7}{10000}$$

$$I = \frac{13 \cdot 5}{16 \cdot 3^2} H = \frac{65}{144} \cdot \frac{7}{10000} = \frac{3}{10000}$$

$$K = \frac{15 \cdot 5}{18 \cdot 3^2} I = \frac{25}{54} \cdot \frac{3}{10000} = \frac{1}{10000}$$

$$L = \frac{17 \cdot 5}{20 \cdot 3^2} K = \frac{17}{36} \cdot \frac{1}{10000} = 0$$

Man addire die Glieder $B + C + D$ u. s. w. so kommt $\frac{9993}{10000}$. Folglich ist $\sqrt{(9 - 5)} = \frac{30000}{10000} - \frac{9993}{10000} = \frac{20007}{10000}$; und der Fehler ist $\frac{7}{10000}$.

Oder: man setze $\sqrt{4} = (3 + 1)^{1:2}$; so bekommt man

$$(3 + 1)^{1:2} = 3^{1:2} + \tfrac{1}{2} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} + \frac{\tfrac{1}{2} \cdot \frac{(1-2)}{2}}{1 \cdot 2} \cdot 3^{-3:2}$$

$$+ \frac{\tfrac{1}{2} \cdot \frac{(1-2)}{2} \frac{(1-4)}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3^{-5:2} \text{ u. s. f.}$$

Das ist:

$$(3+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4\sqrt{3^3}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6\sqrt{3^5}}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8\sqrt{3^7}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10\sqrt{3^9}}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12\sqrt{3^{11}}} \text{ u. s. w.}$$

Das ist:

$$(3+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3^2\sqrt{3}}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 3^3\sqrt{3}} \text{ u. s. f.}$$

Oder man nenne die Glieder A, B, C, D, E u. s. w.; so ist $\sqrt{(3+1)} = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4.3}$

$B + \frac{3}{6.3} C - \frac{5}{8.3} D + \frac{7}{10.3} E$ u. s. w.

Nun ist $A = \sqrt{3} = \frac{17320}{10000}$

Folglich $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10000}{17320} = \frac{5773}{10000}$

und demnach $\frac{1}{2\sqrt{3}} = B = \frac{2886}{10000}$

$C = \frac{1}{12} B = \frac{1}{12} \cdot \frac{2886}{10000} = \frac{240}{10000}$

$D = \frac{1}{6} C = \frac{1}{6} \cdot \frac{240}{10000} = \frac{40}{10000}$

$E = \frac{5}{24} D = \frac{5}{24} \cdot \frac{40}{10000} = \frac{8}{10000}$

$F = \frac{7}{30} E = \frac{7}{30} \cdot \frac{8}{10000} = \frac{1}{10000}$

$G = \frac{9}{12.3} F = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10000} = 0$

$$\begin{array}{rcl} A + B + D + F & = & 20247 : 10000 \\ C + E & = & 248 : 10000 \\ \hline A + B - C + D - E + F & = & \frac{19999}{10000} = \sqrt{(3+1)} \end{array}$$

und der Fehler ist $\frac{1}{10000}$

Hinge-

Hingegen, wenn man setzet $\sqrt{4} = \sqrt{(1+3)}$ so bekommt man eine unbrauchbare Reihe.

$$(1+3)^{1:2} = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 3 + \frac{\frac{\frac{1}{2}(1-2)}{2}}{1 \cdot 2} \cdot 3^2 + \frac{\frac{\frac{1}{2}(1-2)(1-4)}{2 \cdot 2}}{1 : 2 \cdot 3} \cdot 3^3$$

u. s. w.

Das ist:

$$(1+3)^{1:2} = 1 + \tfrac{3}{2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3^3}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \text{ u. s. f.}$$

$$= 1 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{8}{9} + \tfrac{27}{16} - \tfrac{405}{128} \text{ u. s. w.}$$

Hier entfernt man sich von dem wahren Werthe, den man suchet, um so viel weiter, je mehr Glieder man nimmt, weil sie immer größer werden.

Der Nutzen dieser Regel, nach welcher aus jeder Potenz die Wurzel gezogen werden kann, kann hier noch nicht gezeiget werden.

Aufgabe.

§ 40. Einen jeden wahren oder falschen Bruch durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Auflösung.

1. Man theile den Nenner in 2 Theile, die ihm gleich sind, entweder in zwey Zahlen, deren Summe, oder in zwey Zahlen, deren Differenz ihm gleich ist.

2. Darauf dividire man nach den bekannten Divisionsregeln, so lange bis man siehet, nach

 welcher

welcher Ordnung die Glieder der unendlichen Reihe fortgehen.

Z. E. Der Bruch sey $\frac{2}{3}$. Man setze $3 = 2 + 1$, und dividire nach § 20.

$$\begin{array}{l|l|l}
2+1 & 2 & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \text{ u. s. w.} \\
 & \underline{2+1} & \\
 & 0 - 1 & \\
 & \underline{-1 - \frac{1}{2}} & \\
 & 0 + \frac{1}{2} & \\
 & \underline{+\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} & \\
 & 0 - \frac{1}{4} \text{ u. s. w.} &
\end{array}$$

Die folgenden Glieder finden sich nun von selbst, nemlich $+ \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512}$ u. s. w.

Oder man setze $3 = 4 - 1$.

$$\begin{array}{l|l|l}
4-1 & 2 & \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \text{ u. s. w.} \\
 & \underline{2 - \frac{1}{2}} & \\
 & 0 + \frac{1}{2} & \\
 & \underline{+\frac{1}{2} - \frac{1}{8}} & \\
 & 0 + \frac{1}{8} \text{ u. s. w.} &
\end{array}$$

Oder es sey $3 = 5 - 2$

$$\begin{array}{l|l|l}
5-2 & 2 & \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} \text{ u. s. w.} \\
 & \underline{2 - \frac{4}{5}} & \\
 & 0 + \frac{4}{5} & \\
 & \underline{+\frac{4}{5} - \frac{8}{25}} & \\
 & 0 + \frac{8}{25} \text{ u. s. w.} &
\end{array}$$

Es ist demnach $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}$ u. s. w.

Oder $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{512} + \frac{1}{2048}$ u. s. w.

Oder $\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \frac{16}{625} + \frac{32}{3125}$ u. s. w.

§ 41. Das letzte Glied kann in diesen unendlichen Reihen, ohne Irthum für o angenommen werden.

Denn wenn in der Reihe $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ u. s. f. 2 Glieder summiret werden, so kömmt $\frac{1}{2}$, und so fehlet $\frac{1}{6}$ an $\frac{2}{3}$.

Summiret man 3 Glieder, so kommt $\frac{3}{4}$; und so ist $\frac{1}{12}$ zu viel.

Summiret man 4 Glieder, so kommt $\frac{5}{8}$; und so fehlt $\frac{1}{24}$ an $\frac{2}{3}$, und folglich schon weniger als das erstemahl; woraus man siehet; daß endlich der Fehler o wird.

§ 42. Die Eintheilung des Nenners ist nicht völlig gleichgültig.

Um dieses einzusehen, dividire man a mit b+c; so kommt

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} - \frac{ac^5}{b^6} \text{ u. s. w.}$$

Nun setze man b=c; so kommt

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ab}{b^2} + \frac{ab^2}{b^3} - \frac{ab^3}{b^4} + \frac{ab^4}{b^5} - \frac{ab^5}{b^6} \text{ u. s. w.}$$

Das ist, wenn man den zweyten Bruch mit b, den dritten mit b^2 u. s. w. zur kleinsten Benennung bringet,

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \text{ u. s. w.} = 0$$

Da nun dieses ungereimt ist, so darf der Nenner in $\frac{a}{b+c}$ nicht in 2 gleiche Theile getheilet werden.

Es darf auch der Theil des Nenners, mit welchem in der Division gefragt wird, nicht kleiner angenommen werden, als der andere Theil desselben; oder es darf nicht $b < c$ seyn.

Denn man bringe das erste und zweyte, das dritte und vierte Glied u. s. f. in der unendlichen Reihe, zu gleicher Benennung; so hat man

$$\frac{a}{b+c} = \frac{ab}{b^2} - \frac{ac}{b^2} + \frac{abc^2}{b^4} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{abc^4}{b^6} - \frac{ac^5}{b^6}$$

u. s. f.

Nun sey	$b < c$	$b < c$	$b < c$
		$ac^2 = ac^2$	$ac^4 = ac^4$
so ist	$ab < ac$	$abc^2 < ac^3$	$abc^4 < ac^5$

Folglich ist die Summe aller Glieder, die $+$ haben, kleiner als die Summe aller Glieder, die $-$ haben, das ist, die Summe der Reihe ist negativ, die doch positiv seyn muß.

Man siehet also, daß $b > c$ seyn muß, wofern die Reihe brauchbar seyn soll.

Wie man die Summe von diesen unendlichen Reihen finden könne, das wird an seinem Orte gezeiget werden.

Aufgabe.

§ 43. Die Eigenschaften einer geometrischen Proportion zu finden, das ist, zu finden, was für Veränderungen mit den Gliedern derselben vorgenommen werden können, so daß sie proportional bleiben.

Auflö=

Auflösung.

Es ist weiter nichts nöthig, als daß man mit den Gliedern derselben allerley Veränderungen vornehme, und untersuche, ob das Product aus dem ersten Gliede in das vierte dem Product aus dem zweyten Gliede in das dritte gleich bleibe, oder nicht. Denn im ersten Falle bleiben die 4 Zahlen proportional; im zweyten Falle aber nicht.

Das erste Glied sey $= a$, das dritte $= b$, und der Exponent $= m$; so ist die Proportion:

$$a : am = b : bm$$

Man wird finden, daß in allen folgenden Fällen die Glieder proportional bleiben.

1. Weil $\underline{a : am = b : bm}$

so ist auch $a : b = am : bm$

2. $am : a = bm : b$

3. Man addire zu dem ersten und zweyten, oder zu dem dritten und vierten, oder zu dem ersten und dritten, oder zu dem zweyten und vierten Gliede, Zahlen, die eben das Verhältniß haben.

$$\begin{array}{l}
a : am = b : bm \\
\underline{b : bm \qquad\qquad\qquad} \\
a + b : am + bm = b : m \\
\quad a : am = b : bm \\
\underline{\qquad\qquad\quad a : am \qquad\quad} \\
a \quad : am = a + b : am + bm \\
a \quad : am = b : bm \\
\underline{am \qquad\quad bm \qquad\qquad\qquad}
\end{array}$$

$$a + am : am = b + bm : bm$$
$$a : am = b : bm$$
$$\underline{\quad a \qquad\qquad b \quad}$$
$$a : a + am = b : b + bm$$

4. Was hier vom addiren gilt, das gilt auch vom subtrahiren.

5. $a : am = b : bm$
$\underline{c = c \text{ mult.}}$
$ac : acm = b : bm$
$a : am = b : bm$
$\underline{c = c}$
$a : am = bc : bcm$
$a : am = b : bm$
$\underline{c \qquad c}$
$ac : am = bc : bm$
$a : am = b : bm$
$\underline{c \qquad c}$
$a : acm = b : bcm$

6. Was hier vom multipliciren gilt, das gilt auch vom dividiren.

7. $a : am = b : bm$
$\underline{a : am = b : bm}$
$a^2 : a^2m^2 = b^2 : b^2m^2$
also auch $a^3 : a^3m^3 = b^3 : b^3m^3$
und überhaupt $a^n : a^nm^n = b^n : b^nm^n$

8. $\sqrt{a} : \sqrt{am} = \sqrt{b} : \sqrt{bm}$
und überhaupt $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{am} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bm}$

9. a:am

$$\begin{array}{l} 9.\quad a : am = b : bm \\ \quad\;\; c : cr = d : dr \text{ mult.} \\ \hline \quad\;\; ac : acmr = bd : bdmr \end{array}$$

$$10.\quad \frac{a}{c} : \frac{am}{cr} = \frac{b}{d} : \frac{bm}{dr}$$

Erklärung.

§ 44. Eine Gleichung, wie z. E. $ax + bx = cx - d$, das ist, in welcher die unbekannte Zahl x nur die erste Dimension hat, oder nicht zum Quadrat, vielweniger zum Cubus u. s. f. erhoben ist, wird eine **einfache Gleichung** genennet. Findet sich x^2 in einer Gleichung, aber nicht x^3, x^4 u.s.w. so heißt sie eine **quadratische Gleichung**; und zwar eine **reine**, wenn x nicht darinn ist, und eine **unreine**, wenn auch x darinn ist. Z. E. $ax^2 - b = cx^2$ ist eine reine; und $ax^2 - b = cx$, eine unreine quadratische Gleichung. Die übrigen werden **höhere Gleichungen** genennet. Z. E. $ax^3 + bx^3 = cx^3 - d$; $ax^3 + bx^2 = cx - d$. Die erste ist eine reine, und die zweyte eine **unreine** cubische Gleichung.

Inzwischen werden solche Gleichungen als $x^4 + ax^2 = b$; $x^6 + ax^3 = b$; $x^8 + ax^4 = b$; $x^{10} + ax^5 = b$, u. s. w. zu den quadratischen gerechnet, weil sie nach eben der Regel aufgelöset werden können, nach welcher $x^2 + ax = b$ aufgelöset wird.

Von den einfachen Gleichungen.

Aufgabe.

§ 45. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflösung.

Die Aufgabe sey z. E. diese: A, B, C, D sollen sich in 6000 Rthlr theilen. Wenn A sein Theil von B seinem abgezogen wird, so kommt eben so viel, als wenn man C seinen Theil 3 mahl genommen, von D seinen 2 mahl genommen, abziehet. B und C zusammen, bekommen eine Summe, die so groß ist, als die Differenz zwischen D seinem Theile 6 mahl genommen, und A seinem Theile 2 mahl genommen. Endlich, wenn man B seinen Theil 3 mahl genommen von A seinem 5 mahl genommen, subtrahiret, so bekommt man das was C und D zusammen haben sollen. Wie viel wird nun ein jeder bekommen?

1. Man benenne die unbekannten Zahlen mit den letztern Buchstaben des Alphabets.

Man setze $\left.\begin{array}{l} \text{A bekomme } x \\ \text{B - - - - - - } y \\ \text{C - - - - - - } m \\ \text{D - - - - - - } z \end{array}\right\}$ Rthlr.

2. Man suche aus dem was gegeben oder bekannt gemacht ist, so viel Gleichungen, als unbekannte Zahlen sind. Wenn sich so viel Gleichungen finden laßen, so ist die Aufgabe bestimmt (problema determinatum); laßen sich nicht so viel Gleichungen finden, so ist die Aufgabe unbestimmt (problema indeterminatum). Und in diesem Falle werden die unbekannten Zahlen, für welche sich keine Gleichungen finden laßen, nach Gefallen angenommen.

In dieser Aufgabe sind die Gleichungen:

$$\text{I. } x + y + m + z = 6000$$
$$\text{II. } y - x = 2z - 3m$$
$$\text{III. } y + m = 6z - 2x$$
$$\text{IV. } 5x - 3y = m + z$$

3. Man bringe in einer von den Gleichungen die eine von den unbekannten Zahlen allein auf eine Seite, das ist, man bestimme den Werth derselben durch die übrigen theils bekannten, theils unbekannten Zahlen. Man finde den Werth eben derselben unbekannten Zahl in den übrigen Gleichungen, und schliesse, daß 2 Zahlen, die eben derselben dritten gleich sind, sich einander selbst gleich sind. Dadurch bekommt man neue Gleichungen, in welchen die vorige unbekannte Zahl nicht mehr angetroffen wird. Man fahre auf diese Weise fort, bis man auf eine Gleichung kommt, die nur noch eine einzige unbekannte Zahl hat. Man finde alsdann den Werth derselben; so ist die Aufgabe aufgelöset.

Man

Man bringet aber die unbekannte Zahl allein auf eine Seite, wann man das addirte subtrahiret, das subtrahirte addiret, das multiplicirte dividiret, und das dividirte multipliciret; wie auch, wann man aus Potenzen Wurzeln ziehet, und Wurzeln zu Potenzen erhebet, und sich nach den bekannten Grundsätzen richtet: Wenn man gleiches zu gleichem addiret, so kommen gleiche Summen, u. s. w.

$$\begin{array}{rl} \text{I. } x+y+m+z & = 6000 \\ y+m+z & = y+m+z \text{ subtr.} \\ \hline x & = 6000-y-m-z \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{II. } y-x & = 2z-3m \\ x & = x \text{ add.} \\ \hline y & = 2z-3m+x \\ 3m & = \quad +3m \text{ add.} \\ \hline y+3m & = 2z+x \\ 2z & = 2z \text{ subtr.} \\ \hline y+3m-2z & = x \end{array}$$

Oder kürzer:

In der Gleichung $y-x=2z-3m$ setze man allenthalben das verkehrte Zeichen.

$$\begin{array}{rl} -y+x & = -2z+3m \\ +y & = \quad y \text{ add.} \\ \hline x & = y-2z+3m \end{array}$$

Weil nun $x=6000-y-m-z$

und $x=y-2z+3m$

so ist $6000-y-m-z=y-2z+3m$

III.

III. $$\begin{array}{l} y + m = 6z - 2x \\ \hline -y - m = -6z + 2x \\ \quad 6z = +6z \text{ add.} \\ \hline 6z - y - m = 2x \end{array} \quad 2 \text{ div.}$$

$$\frac{6z - y - m}{2} = x$$

Da nun auch $x = y - 2z + 3m$

so ist $$\frac{6z - y - m}{2} = y - 2z + 3m$$

IV. $$\begin{array}{l} 5x - 3y = m + z \\ \quad + 3y = 3y \text{ add.} \\ \hline 5x = m + z + 3y \end{array} \quad 5 \text{ div.}$$

$$x = \frac{m + z + 3y}{5}$$

Da nun auch $x = y - 2z + 3m$

so ist $$\frac{m + z + 3y}{5} = y - 2z + 3m$$

In den 3 gefundenen Gleichungen, in welchen x nicht mehr ist,

1.) $6000 - y - m - z = y - 2z + 3m$

2.) $\frac{6z - y - m}{2} = y - 2z + 3m$

3.) $\frac{m + z + 3y}{5} = y - 2z + 3m$

suche man y,

1.)

1.) $$6000 - y - m - z = y - 2z + 3m$$
$$+y \qquad = y \text{ add.}$$
$$6000 - m - z = 2y - 2z + 3m$$
$$+2z = +2z \text{ add.}$$
$$6000 - m + z = 2y + 3m$$
$$+3m = +3m \text{ subtr.}$$
$$6000 - 4m + z = 2y \quad \text{2 div.}$$
$$\frac{6000 - 4m + z}{2} = y$$

2.) $$\frac{6z - y - m}{2} = y - 2z + 3m \quad \text{2 mult.}$$
$$6z - y - m = 2y - 4z + 6m$$
$$+y \qquad = y \text{ add.}$$
$$6z - m = 3y - 4z + 6m$$
$$4z \qquad = +4z \text{ add.}$$
$$10z - m = 3y + 6m$$
$$+6m = +6m \text{ subtr.}$$
$$10z - 7m = 3y \quad \text{3 div.}$$
$$\frac{10z - 7m}{3} = y$$

Da nun auch $y = \frac{6000 - 4m + z}{2}$

so ist $$\frac{10z - 7m}{3} = \frac{6000 - 4m + z}{2}$$

3.) $\frac{m+z+3y}{5} = y - 2z + 3m$ 5 mult.

$m+z+3y = 5y - 10z + 15m$

$3y = 3y$ subtr.

$m+z = 2y - 10z + 15m$

$10z = +10z$ add.

$m+11z = 2y + 15m$

$+15m = +15m$ subtr.

$-14m + 11z = 2y$ 2 div.

$\frac{11z - 14m}{2} = y$

Da nun auch $y = \frac{6000 - 4m + z}{2}$

so ist $\frac{11z - 14m}{2} = \frac{6000 - 4m + z}{2}$

In den beyden gefundenen Gleichungen, in welchen x und y nicht mehr ist,

A.) $\frac{10z - 7m}{3} = \frac{6000 - 4m + z}{2}$

B.) $\frac{11z - 14m}{2} = \frac{6000 - 4m + z}{2}$

suche man m.

A.) $\frac{10z - 7m}{3} = \frac{6000 - 4m + z}{2}$

Da

Da 2 gleiche Brüche eine Proportion machen, und in einer Proportion das Product aus dem ersten Gliede in das vierte, dem Product aus dem zweyten in das dritte gleich ist, so werden hier die Brüche auf einmahl wegfallen, wenn $10z - 7m$ mit 2, und $6000 - 4m + z$ mit 3 multipliciret wird.

Es ist also
$$\begin{array}{rcll} 20z - 14m & = & 18000 - 12m + 3z & \\ +14m & = & +14m & \text{add.} \\ \hline 20z & = & 18000 + 2m + 3z & \\ 3z + 18000 & = & 18000 + 3z & \text{subtr.} \\ \hline 17z - 18000 & = & 2m & \\ \hline \end{array} \quad 2 \text{ div.}$$

$$\frac{17z - 18000}{2} = m$$

B.)
$$\frac{11z - 14m}{2} = \frac{6000 - 4m + z}{2} \quad 2 \text{ mult.}$$

$$\begin{array}{rcll} 11z - 14m & = & 6000 - 4m + z & \\ +14m & = & +14m & \text{add.} \\ \hline 11z & = & 6000 + 10m + z & \\ z + 6000 & = & 6000 + z & \text{subtr.} \\ \hline 10z - 6000 & = & 10m & \\ \hline \end{array} \quad 10 \text{ div.}$$

$$z - 600 = m$$

Da nun auch $m = \frac{17z - 18000}{2}$

so ist $z - 600 = \frac{17z - 18000}{2}$ 2 mult.

2z

$$
\begin{array}{rcl}
2z - 1200 & = & 17z - 18000 \\
2z & = & 2z \text{ subtr.} \\
\hline
-1200 & = & 15z - 18000 \\
+18000 & = & +18000 \text{ add.} \\
\hline
16800 & = & 15z \\
\hline
3360 & = & 3z \\
\hline
1120 & = & z
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ 5 \text{ div.} \\ \\ 3 \text{ div.}
\end{array}
$$

Nachdem nun z gefunden ist, so ist auch x, y und m bekannt.

Denn $m = z - 600 = 1120 - 600 = 520$

$$y = \frac{6000 - 4m + z}{2} = \frac{6000 - 2080 + 1120}{2} = 2520$$

$$x = 6000 - y - m - z = 6000 - 2520 - 520 - 1120 = 1840$$

Das ist, A bekommt 1840, B 2520, C 520 und D 1120 Rthlr.

Aufgabe.

§ 46. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und ihrer Differenz, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die Summe der gesuchten Zahlen sey $= a$
Die Differenz derselben $= d$
Die größere Zahl sey $= x$
Die kleinere $= y$

$$
\text{so ist} \quad
\begin{array}{rcl}
x + y & = & a \\
y & = & y \text{ subtr.} \\
\hline
x & = & a - y
\end{array}
\quad \text{und} \quad
\begin{array}{rcl}
x - y & = & d \\
+y & = & y \text{ add.} \\
\hline
x & = & d + y
\end{array}
$$

 Folglich

Folglich

$$\begin{array}{l} a - y = d + y \\ + y = y \text{ add.} \\ \hline a = d + 2y \\ d = d \text{ subtr.} \\ \hline a - d = 2y \\ \hline \dfrac{a-d}{2} = y \end{array} \quad 2 \text{ div.}$$

$$x = a - y = a - \frac{a+d}{2} = \frac{2a - a + d}{2} = \frac{a+d}{2}$$

Man merke sich diesen Lehrsatz: Wenn die halbe Differenz zweyer Zahlen zu der halben Summe derselben addiret wird, so bekommt man die größere Zahl.

Wenn man aber die halbe Differenz von der halben Summe subtrahiret, so bekommt man die kleinere Zahl.

Aufgabe.

§ 47. Einer hat 2 Sorten Wein; von der Sorte A kostet das Maaß a, und von der geringern Sorte B gilt das Maaß b. Er will beyde Sorten so vermischen, daß das Maaß von dem vermischten Wein für c, für einen Preis, der zwischen a und b fällt, gegeben werden könne. Wie viel muß demnach von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung.

Man setze, von der Sorte A werde zu 1 Maaße x, und von der Sorte B werde y genommen; so ist

$$x + y = 1$$

Um die noch fehlende Gleichung zu finden, suche man, was x und y kosten, das ist, man suche zu

$$1 : a = x :$$

und $1 : b = y :$

die vierte Proportionalzahl, ax und by.

Da nun der Theil x von 1 Maaße, ax, und der andere Theil von demselben, y, by gilt, so gilt das ganze Maaß von dem vermischten Wein $ax + by$; und also ist

$$\begin{array}{ll} c = ax + by & \\ by = \quad + by & \text{subtr.} \\ \hline c - by = ax & \\ \hline & \text{a div.} \\ \frac{c - by}{a} = x & \end{array}$$

Diesen gefundenen Werth von x setze man für x in der Gleichung $x + y = 1$; so bekommt man

$$\begin{array}{ll} \frac{c - by}{a} + y = 1 & \\ \hline & \text{a mult.} \\ c - by + ay = a & \\ c \quad = c & \text{subtr.} \\ \hline ay - by = a - c & \end{array}$$

$ay - by$ gilt eben so viel als $(a-b)y$; Denn wenn man den zusammengesetzten Factor a-b mit y wirklich multi-

multipliciret, so kommt ay—by. Man dividire also mit a—b; so kommt

$$y = \frac{a-c}{a-b}$$

Da nun x + y = 1; so ist

$$x + \frac{a-c}{a-b} = 1$$

$$\frac{a-c}{a-b} = \frac{a-c}{a-b} \text{ subtr.}$$

$$x = 1 - \frac{a+c}{a-b}$$

oder $x = \frac{a-b-a+c}{a-b}$

das ist $x = \frac{c-b}{a-b}$

Regel.

1. Man subtrahire den mittleren Preis von dem höchsten;

2. Den geringsten von dem mittleren; und

3. Den geringsten von dem höchsten.

Die erste und zweyte Differenz dividire man mit der dritten; der erste Quotient zeiget, wie viel von der geringen, und der zweyte Quotient, wie viel von der guten Sorte genommen werden müße.

Z. E. Es sey $a = 24$
$c = 18$
$b = 15$

$a - c = 6$
$c - b = 3$
$a - b = 9$

$\frac{a-c}{a-b} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ und $\frac{c-b}{a-b} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Von der geringen Sorte muß $\frac{2}{3}$ und von der guten $\frac{1}{3}$ genommen werden.

Aufgabe.

§ 48. Einer hat 3 Sorten Wein; von der Sorte A kostet das Maaß a, von der geringern Sorte B, b, von der noch geringern C, c. Er will diese Sorten so vermischen, daß er das Maaß für d, für einen Preis, der zwischen a und c fällt, geben könne. Wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung.

Man setze, es werde zu 1 Maaße genommen,
von der Sorte A - - - - - x
von der Sorte B - - - - - y
von der Sorte C - - - - - z
so ist $x + y + z = 1$

Man findet nach der Regel Detri, daß der Theil x, ax, der Theil y, by, und der Theil z, cz kostet. Also ist $d = ax + by + cz$.

Mehr Gleichungen als diese zwey sind nicht möglich; gleichwohl sind 3 unbekannte Zahlen vorhanden. Folglich ist diese Aufgabe unbestimmt, und eine von den unbekannten Zahlen muß als bekannt, und kann nach Gefallen angenommen werden.

$$x+y+z=1 \quad \text{und} \quad d=ax+by+cz$$
$$y+z=y+z \text{ subtr.} \quad by+cz=by+cz \text{ subtr.}$$
$$x=1-y-z \quad d-by-cz=ax \quad a \text{ div.}$$
$$\frac{d-by-cz}{a}=x$$
$$1-y-z=\frac{d-by-cz}{a} \quad a \text{ mult.}$$
$$a-ay-az=d-by-cz$$
$$+ay=ay \text{ add.}$$
$$a-az=d+ay-by-cz$$
$$d=d \text{ subtr.}$$
$$a-d-az=ay-by-cz$$
$$cz= \quad +cz \text{ add.}$$
$$a-d-az+cz=ay-by \quad a-b \text{ div.}$$
$$\frac{a-d-az+cz}{a-b}=y$$

Da nun $x=1-y-z-$; so ist
$$x=1\frac{-a+d+az-cz}{a-b}-z$$

Das ist $x=\frac{a-b-a+d+az-cz-az+bz}{a-b}$

Das

Das ist $x = \frac{d-b+bz-cz}{a-b}$

Z. E. Es sey $a=24$, $b=18$, $c=12$, $d=15$; so ist

$$x = \frac{15-18+18z-12z}{24-18} = \frac{-3+6z}{6} = \frac{2z-1}{2}$$

$$y = \frac{24-15-24z+12z}{24-18} = \frac{9-12z}{6} = \frac{3-4z}{2}$$

Es sey nun $z = \frac{2}{3}$; so ist

$$x = \frac{2z-1}{2} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

und $$y = \frac{3-4z}{2} = \frac{\frac{9}{3}-\frac{8}{3}}{2} = \frac{1}{6}$$

Das ist von der Sorte A muß $\frac{1}{6}$, von B $\frac{1}{6}$, und von C $\frac{2}{3}$ genommen werden.

Oder es sey $z = \frac{7}{12}$; so ist

$$x = \frac{2z-1}{2} = \frac{\frac{14}{12}-\frac{12}{12}}{2} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

und $$y = \frac{3-4z}{2} = \frac{\frac{36}{12}-\frac{28}{12}}{2} = \frac{8}{24} = \frac{4}{12}$$

Das ist, von A muß $\frac{1}{12}$, von B $\frac{4}{12}$ und von C $\frac{7}{12}$ genommen werden.

Aufgabe.

§ 49. Einem Boten A, der jede Stunde $\frac{1}{2}$ Meile gehet, wird ein Bote B, der in jeder Stunde $\frac{3}{4}$ Meilen zurückleget, nachgeschickt, um ihn einzuholen; und A hat schon 5 Meilen zurück gelegt: In wie viel Stunden wird B den A erreichen?

Auflösung.

Man setze, A werde von B in x Stunden eingeholt; so findet man nach der Regel Detri, daß A in x Stunden $\frac{1}{2}x$, und B in eben derselben Zeit $\frac{3}{4}x$ Meilen zurück geleget. Da nun gesetzet wird, daß A und B nach x Stunden von der Zeit an, da B abgegangen, bey einander sind, und B in dieser Zeit 5 Meilen mehr zurück geleget als A; so ist:

$$\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x + 5 \quad \text{4 mult.}$$
$$3x = 2x + 20$$
$$2x = 2x \text{ subtr.}$$
$$x = 20$$

das ist, in 20 Stunden wird A von B eingeholet.

Anders.

Die Zahl der Meilen, die A zurück leget, von der Zeit an, da B ihm nachfolget, bis er ihn einholet, sey $= m$; so ist B in eben derselben Zeit $m+5$ Meilen gegangen; und $m+5$ verhält sich zu m, wie die Geschwindigkeit, mit welcher B gehet, zu der Geschwindigkeit, mit welcher A gehet.

Da nun B in 1 Stunde $\frac{3}{4}$ Meilen, und A in 1 Stunde $\frac{1}{2}$ Meile zurück leget, so ist das Verhältniß ihrer Geschwindigkeiten

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$$

und demnach $m+5 : m = \frac{3}{4} : \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}m + \frac{5}{2} = \frac{3}{4}m \quad \text{4 mult.}$$
$$2m + 10 = 3m$$
$$2m \quad = 2m \text{ subtr.}$$
$$10 = m$$

folglich ist $m+5 = 15$

Nun

Nun findet man nach der Regel Detri, in wie viel Stunden A von B eingeholet werde, entweder wenn man zu $\frac{1}{2}$ Meile, 10 Meilen und 1 Stunde, oder zu $\frac{3}{4}$ Meile, 15 Meilen und 1 Stunde die vierte Proportionalzahl 20 suchet.

Man hätte diese Aufgabe auch durch die blose Regel Detri auflösen können. Weil B in 1 Stunde $\frac{3}{4}$, und A in 1 Stunde $\frac{1}{2}$ Meile zurück leget, so kommt B in 1 Stunde $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$ das ist $\frac{1}{4}$ Meile weiter als A. Man frage also: wie viel Stunden werden erfodert, damit B 5 Meilen weiter komme, als A?

Erklärung.

§ 50. Eine Reihe von Zahlen, die so beschaffen sind, daß die folgende aus der nächst vorher gehenden immer auf eben dieselbe Art entstehet, wird eine **Progression** genennet. Wenn die Zahlen eben dieselbe Differenz haben, so heißt die Reihe eine **arithmetische Progression**. Wenn sie aber eben denselben Exponenten haben, das ist, wenn die erste sich zur zweyten verhält, wie die zweyte zur dritten, wie die dritte zur vierten u. s. w. so wird die Reihe eine **geometrische Progression** genennet. Z. E.

Eine arithmetische Progression ist

2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 u. s. w.

Eine geometrische ist

2 . 6 . 18 . 54 . 162 . 486 u. s. w.

Aufgabe.

§ 51. Aus dem gegebenen ersten und letzten Gliede, und der Zahl der Glieder in einer arithmetischen Progreßion, die Summe der Glieder zu finden.

Auflösung.

Man addire das erste und letzte Glied; und die Summe multiplicire man mit der halben Zahl der Glieder; das Product ist die verlangte Summe. Denn die Progreßion sey A+B+C+D+E+F Man nenne in eben derselben das erste Glied a, und die Differenz d; so ist:

$$\left.\begin{array}{l} A = a \\ B = a+d \\ C = a+2d \\ D = a+3d \\ E = a+4d \\ F = a+5d \end{array}\right\} \text{§ 50,}$$

Man siehet, daß

$$\begin{array}{l} A+F = 2a+5d \\ B+E = 2a+5d \\ C+D = 2a+5d \end{array}$$

und folglich $A+F = B+E = C+D$

Weil nun
$$\begin{array}{l} A+F = A+F \\ B+E = A+F \\ C+D = A+F \\ \hline \end{array}$$

so ist $A+B+C+D+E+F = 3A+3F$

das ist, die Summe entstehet, wenn die Summe des ersten und letzten Gliedes A+F mit der halben Zahl der Glieder 3 multipliciret wird.

Die

Die Zahl der Glieder sey ungerade, z. E. 5 so ist

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= a+d \\ C &= a+2d \\ D &= a+3d \\ E &= a+4d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+E &= A+E \\ B+D &= A+E \\ C &= \tfrac{1}{2}(A+E) \end{aligned}$$

$$A+B+C+D+E = 2A+2E+\tfrac{1}{2}(A+E) = \tfrac{5}{2}(A+E)$$

Z. E. Man will die Summe der Zahlen nach der natürlichen Ordnung wissen deren letztes Glied 100000 ist. Die Summe derselben ist

$$= \frac{(1+100000)\,100000}{2} = 5000050000$$

Aufgabe.

§. 52. Aus dem ersten und letzten Gliede und der Zahl der Glieder einer arithmetischen Progression, die Differenz der Glieder zu finden.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$
das letzte $= b$
die Zahl der Glieder $= n$
und die Differenz $= x$

Da=

Da nun das erste Glied $=a$, und die Differenz $=x$ ist, so ist, das zweyte Glied $=a+x$, das dritte $=a+2x$, das vierte $=a+3x$ u. s. w. (§ 50.), und folglich das letzte $=a+(n-1)x$ und demnach

$$\begin{array}{rll} a+(n-1)x & =b & \\ a & =a & \text{subtr.} \\ \hline (n-1)x & =b-a & \\ \hline x & =\dfrac{b-a}{n-1} & n-1 \text{ div.} \end{array}$$

Z. E. Es sey $a=7$, $b=88$, $n=10$; so ist $x=\frac{88-7}{10-1}=9$, und die Progression ist:

7 . 16 . 25 . 34 . 43 . 52 . 61 . 70 . 79 . 88

Aufgabe.

§ 53. Aus der gegebenen Summe einer arithmetischen Progresson, dem letzten Gliede, und der Zahl der Glieder, das erste Glied, und die Differenz zu finden.

Auflösung.

Die Summe sey	$=c$
das letzte Glied	$=b$
die Zahl der Glieder	$=n$
das erste Glied	$=x$
und die Differenz	$=y$;

so

so ist $\frac{(x+b)n}{2} = c$ (§51.) und $x+(n-1)y = b$ (§52.)

$$\begin{array}{ll} \text{2 mult.} & \\ (x+b)n = 2c & \\ \text{n div.} & \\ x+b = \frac{2c}{n} & \\ \quad b = b \quad \text{subtr.} & \\ x = \frac{2c}{n} - b & \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{l} x+ny-y = b \\ \quad +y = y \quad \text{add.} \\ x+ny = b+y \\ \quad ny = ny \quad \text{subtr.} \\ x = b+y-ny \end{array}$$

$$\frac{2c}{n} - b = b + y - ny$$

n mult.

$$2c - nb = nb + ny - n^2y$$

oder $-2c + nb = -nb - ny + n^2y$

$$nb = +nb \quad \text{add.}$$

$$2nb - 2c = n^2y - ny = (n^2-n)y \quad n^2-n \text{ div.}$$

$$\frac{2nb-2c}{n^2-n} = y$$

Z. E. Es sey $c = 475$, $b = 88$, $n = 10$; so ist $x = \frac{2c}{n} - b = \frac{950}{10} - 88 = 95 - 88 = 7$;

und $y = \frac{2nb-2c}{n^2-n} = \frac{2.10.88-950}{100-10} = \frac{1760-950}{90}$

$= \frac{176-95}{9} = \frac{81}{9} = 9$

Aufgabe

Aufgabe.

§ 54. Aus dem ersten, zweyten und letzten Gliede einer geometrischen Progression, die Summe der Glieder zu finden.

Auflösung.

Die Progression sey $a + b + c + d + e + f$, und die Summe $= S$.

Es ist
$$\left.\begin{array}{l} a : b = a : b \\ a : b = b : c \\ a : b = c : d \\ a : b = d : e \\ a : b = e : f \end{array}\right\} \text{§ 50.}$$

folglich $5a : 5b = a+b+c+d+e : b+c+d+e+f$ (§43.)
und $a : b = a+b+c+d+e : b+c+d+e+f$ (§cit.)

Nun ist aber $a+b+c+d+e = S-f$
und $b+c+d+e+f = S-a$

und demnach $a : b = S-f : S-a$
$b \quad a$ mult.

$Sb - bf = Sa - a^2$
$Sa = Sa$ subtr.

$Sb - Sa - bf = -a^2$
$+ bf = + bf$ add.

$$\frac{Sb - Sa = bf - a^2}{} \quad b-a \text{ div.}$$

$$S = \frac{bf - a^2}{b - a}$$

Das ist, von dem Product des zweyten und letzten Gliedes subtrahire man das Quadrat des ersten Gliedes; diese Differenz dividire man mit der Differenz des zweyten und ersten Gliedes; der Quotient ist die Summe der Glieder. Z. E. Die Progression sey $2+6+18+54+162$; die Summe derselben ist $= \frac{6.162-4}{6-2} = \frac{972-4}{4}$ $= \frac{968}{4} = 242$

Die Progression sey niedersteigend, oder abnehmend: $162+54+18+6+2$; so ist die Summe $= \frac{54.2-162^2}{54-162} = \frac{108-26244}{-108}$ $= \frac{-26136}{-108} = +242$.

In diesem Falle ist in $s = \frac{bf-a^2}{b-a}$ Zähler und Nenner negativ, und folglich der Quotient positiv (§ 18.)

Wenn man aber keine negative Zähler und Nenner haben will, so darf man anstatt

$$Sb - Sa = bf - a^2$$

nur setzen $Sa - Sb = a^2 - bf$

so kommt $S = \frac{a^2 - bf}{a - b}$

Aufgabe

Aufgabe.

§ 55. Die Summe einer geometrischen Progression aus dem ersten Glied, dem Exponenten, und der Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$, der Exponent $= m$, und die Zahl der Glieder $= n$; so ist die Progression:

$a + am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5$ u. s. f. (§ 50.)

und demnach das letzte Glied $= am^{n-1}$

folglich $S = \frac{am \cdot am^{n-1} - a^2}{am - a}$ (§ 54.)

das ist, wenn am mit am^{n-1} wirklich multipliciret wird,

$$S = \frac{a^2m^n - a^2}{am - a}$$

das ist, wenn Zähler und Nenner mit a dividiret werden,

$$S = \frac{am^n - a}{m - 1}$$

Z. E. Es sey, wie (§ 54.), $a = 2$, $m = 3$, und $n = 5$, so ist

$$S = \frac{2 \cdot 3^5 - 2}{3 - 1} = \frac{2 \cdot 3^5 - 2}{2} = 3^5 - 1 = 242$$

Aufgabe.

§ 56. Die Summe einer abnehmenden geometrischen Progression zu finden, deren Glieder ins Unendliche fortgehen.

Auflö-

Auflösung.

Das erste Glied sey $=a$, das zweyte $=b$, und das letzte $=f$; so ist die Summe $= \frac{a^2-bf}{a-b}$ (§ 54.)

Da nun aber die Progression unendlich viele Glieder hat, von welchen das folgende immer kleiner ist, als das vorhergehende, so ist das letzte Glied unendlich klein; und demnach

$$f = 0$$

$$\text{und } bf = 0$$

und also die Summe der Progression $= \frac{a^2}{a-b}$

Das ist, man dividire das Quadrat des ersten Gliedes mit der Differenz des ersten und zweyten Gliedes; so bekommt man die verlangte Summe.

Z. E. In der Reihe $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}$ u. s. f. (§ 40.) ist $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{8}$ und demnach die Summe $\frac{a^2}{a-b} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{8} = \frac{2}{3}$

Wenn die Zeichen $+$ und $-$ abwechseln, wie in $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$ u. s. f. (§ 40.), so hat man 2 Progressionen, nemlich

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{und } \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} \text{ u. s. w.}$$

und die Summe der zweyten muß von der Summe der ersten abgezogen werden.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \text{ u. s. w.} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{und } \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \text{ u. s. f.} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}$$

Folglich $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ u. s. w. $= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

§ 57. Man kann auch andere unendliche Reihen summiren, wenn sie als Summen geometrischer Reihen angesehen werden können.

Z. E. Die Reihe sey $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81}$ u. s. w.

Man setze
$$\begin{array}{lllllll}
A = 1 & + \frac{1}{3} & + \frac{1}{9} & + \frac{1}{27} & + \frac{1}{81} & \text{u. s. w.} \\
B = & \frac{1}{3} & + \frac{1}{9} & + \frac{1}{27} & + \frac{1}{81} & \text{u. s. w.} \\
C = & & \frac{1}{9} & + \frac{1}{27} & + \frac{1}{81} & \text{u. s. w.} \\
D = & & & \frac{1}{27} & + \frac{1}{81} & \text{u. s. w.} \\
E = & & & & + \frac{1}{81} & \text{u. s. w.}
\end{array}$$

Man siehet, daß die Reihe $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81}$ u. s. f. den geometrischen Reihen $A + B + C + D + E$ u. s. f. gleich ist.

Nun ist aber
$$\begin{array}{l}
A = \frac{3}{2} \ (\S\ 56.) \\
B = \frac{1}{2} \\
C = \frac{1}{6} \\
D = \frac{1}{18} \ \text{u. s. w.}
\end{array}$$

folglich $A + B + C + D$ u. s. w. $= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ u. s. w.

$$= \frac{9}{4} : \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \ (\S\ 56.)$$

Und demnach $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81}$ u. s. w. $= \frac{9}{4}$

Es sey überhaupt der Nenner des ersten Bruchs $= a$, und der Exponent in der geometrischen Progression, in welcher die Nenner fortgehen, $= m$; so ist die Reihe:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{am} + \frac{3}{am^2} + \frac{4}{am^3} + \frac{5}{am^4} \ \text{u. s. w.}$$

und $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{am} + \frac{1}{am^2} + \frac{1}{am^3} \ldots = \frac{1}{a^2} : \left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{am}\right\}$

$$= \frac{m}{am - a} \ (\S\ 56.)$$

B =

$$B = \frac{1}{am} + \frac{1}{am^2} + \frac{1}{am^3} \ldots = \frac{1}{a^2m^2} : \left\{\frac{1}{am} - \frac{1}{am^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{am-a}$$

$$C = \frac{1}{am^2} + \frac{1}{am^3} \ldots = \frac{1}{a^2m^4} : \left\{\frac{1}{am^2} - \frac{1}{am^3}\right\}$$

$$= \frac{1}{am^2-am}$$ u. s. w.

Folglich $\frac{1}{a} + \frac{2}{am} + \frac{3}{am^2} \ldots = A + B + C \ldots$

$$= \frac{m}{am-a} + \frac{1}{am-a} + \frac{1}{am^2-am} \ldots.$$

Da nun $\frac{m}{am-a} + \frac{1}{am-a} + \frac{1}{am^2-am} \ldots$

$$= \frac{m^2}{a(m^2-2m+1)}$$ (§ 56.)

so ist auch $\frac{1}{a} + \frac{2}{am} + \frac{3}{am^2} \ldots. = \frac{m^2}{a(m^2-2m+1)}$

Das ist:

Wenn man die Summe einer abnehmenden Progression finden will, in welcher die Zähler die in natürlicher Ordnung fortgehende Zahlen sind, die Nenner aber in geometrischer Progression fortgehen, so mache man von dem Exponenten in der geometrischen Progression der Nenner ein □, wie auch von eben demselben weniger 1; dieses letztere □ multiplicire man mit dem Nenner des ersten Gliedes, und dividire mit diesem Product das erste Quadrat; so kommt die verlangte Summe.

Z. E. Die Reihe sey $\frac{1}{5} + \frac{2}{20} + \frac{3}{80} + \frac{4}{320}$ u. s. w. hier ist $a = 5$
$m = 4$

folglich die Summe $\frac{m^2}{a(m-1)^2} = \frac{16}{5 \cdot 9} = \frac{16}{45}$

Lehrsatz.

§ 58. Man schreibe folgende Reihen von Zahlen:

1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 1 u. s. w.
0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 u. s. w.
0 . 0 . 1 . 3 . 6 . 10 u. s. w.

so wie folget:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1

u. s. w.

nemlich die erste Verticalreihe bestehe aus lauter Einheiten; die zweyte fange sich von 0 an, und be-

stehe

stehe aus den Zahlen 1.2.3.4 u. s. w. In der dritten sey jedes Glied der Summe der vorhergehenden Glieder in der zweyten gleich. In der vierten sey jedes Glied der Summe der vorhergehenden Glieder in der dritten gleich, u. s. f. Diese Zahlen haben folgende Eigenschaft:

Die Summe der Glieder einer jeden Reihe verhält sich zum Product aus dem letzten Gliede in die Zahl der Glieder, wie 1 zu der Zahl, welche die wievielste Verticalreihe anzeiget.

Z. E. Man nehme aus der 2ten Verticalreihe das 8te Glied 7 zum letzten Gliede an; so ist die Summe = 28 und das Product = 7.8 = 56;

Nun ist aber 28 : 56 = 1 : 2

Man nehme aus der 3ten Verticalreihe, das 7te Glied 15; so ist die Summe = 35, und das Product = 7.15 = 105; und 35 : 105 = 1 : 3 u. s. w.

Beweis.

	1	2	3	4
n−3	A	o	o	o
n−2	B	E	o	o
n−1	C	F	K	o
n	D	G	L	P
n+1		H	M	Q
n+2			N	R
n+3				T

Die erste Verticalreihe nenne man A+B+C+D.

Die zweyte o+E+F+G+H, u. s. f. wie man hier siehet.

Und die Zahl der Glieder in der ersten Reihe sey = n; so ist dieselbe in der zweyten Reihe = n+1; in der dritten = n+2 u. s. w.

1. Was nun die erste Reihe betrift, so ist, weil sie aus lauter Einheiten bestehet,

$$\begin{array}{lll} & A+B+C+D & = D+D+D+D \\ \text{das ist} & A+B+C+D & = nD \\ \text{also auch} & A+B+C & = nC-C \\ & A+B & = nB-2B \\ & A & = nA-3A \end{array}$$

und $4A+3B+2C+D = nD+nC+nB+nA-C-2B-3A$

Da nun $A+B+C+D = nD$

so ist auch $A+B+C+D : nD = 1:1$
von der ersten Reihe ist also der Satz bewiesen.

2. In der zweyten Reihe ist

$$\left.\begin{array}{l} E = A \\ F = A+B \\ G = A+B+C \\ H = A+B+C+D \end{array}\right\} \text{per hypothesin.}$$

folglich $E+F+G+H = 4A+3B+2C+D$
aber $4A+3B+2C+D = nD+nC+nB+nA-C-2B-3A$ (Num. 1.)

und also $E+F+G+H = nD+nC+nB+nA-C-2B-3A$

Es ist aber $D+C+B+A = H$ (per hyp.)
und demnach $nD+nC+nB+nA = nH$

folglich $E+F+G+H = nH-C-2B-3A$
$E+F+G+H = D+2C+3B+4A$ add.

$2E+2F+2G+2H = nH+D+C+B+A$
das ist, weil $D+C+B+A = H$
$2E+2F+2G+2H = nH+H$

und $E+F+G+H : nH+H = 1 : 2$
das ist, in der zweyten Reihe verhält sich die Summe der Glieder $E+F+G+H$ zum Product aus $n+1$ in H wie 1 zu 2

Weil nun $2E+2F+2G+2H = (n+1)H$
und $E+F+G+H = \frac{(n+1)H}{2}$

so ist auch $E+F+G = \frac{nG}{2}$

$E+F = \frac{(n-1)F}{2}$

$E = \frac{(n-2)E}{2}$

folglich $4E+3F+2G+H = \frac{(n+1)H}{2} + \frac{nG}{2} + \frac{(n-1)F}{2} + \frac{(n-2)E}{2}$

3. In der dritten Reihe ist

$$\left.\begin{array}{l} K = E \\ L = E+F \\ M = E+F+G \\ N = E+F+G+H \end{array}\right\}\text{ per hypoth.}$$

folglich $K+L+M+N = 4E+3F+2G+H$
Es ist aber $4E+3F+2G+H = \frac{(n+1)H}{2} + \frac{nG}{2} + \frac{(n-1)F}{2} + \frac{(n-2)E}{2}$ (Num. 2.)

 und

und demnach $K+L+M+N=\frac{(n+1)H}{2}+\frac{nG}{2}$
$+\frac{(n-1)F}{2}+\frac{(n-2)E}{2}$

und $2K+2L+2M+2N=nH+H+nG+nF$
$-F+nE-2E$

Es ist aber $H+G+F+E=N$ (per hyp.)
$nH+nG+nF+nE=nN$

und demnach $2K+2L+2M+2N=nN+H-F-2E$
$K+L+M+N=\quad H+2G$
$+3F+4E$ add.

$3K+3L+3M+3N=nN+2H+2G+2F+2E$
Es ist aber $2H+2G+2F+2E=2N$ (per hyp.)

folglich $3K+3L+3M+3N=nN+2N$
und $K+L+M+N:(n+2)N=1:3$
Da nun $K+L+M+N=\frac{(n+2)N}{3}$

und $K+L+M=\frac{(n+1)M}{3}$

$K+L=\frac{nL}{3}$

$K=\frac{(n-1)K}{3}$

so ist $4K+3L+2M+N=\frac{(n+2)N}{3}+\frac{(n+1)M}{3}$
$+\frac{nL}{3}+\frac{(n-1)K}{3}$

4. In

4. In der vierten Reihe ist

$$\left.\begin{array}{l} P = K \\ Q = K+L \\ R = K+L+M \\ T = K+L+M+N \end{array}\right\} \text{per hyp.}$$

folglich $P+Q+R+T = 4K+3L+2M+N$

das ist, weil $4K+3L+2M+N = \frac{(n+2)N}{3}$

$+ \frac{(n+1)M}{3} + \frac{nL}{3} + \frac{(n-1)K}{3}$ (Num. 3.)

$$P+Q+R+T = \frac{(n+2)N}{3} + \frac{(n+1)M}{3} + \frac{nL}{3} + \frac{(n-1)K}{3}$$

und $3P+3Q+3R+3T = nN+2N+nM+nL$
$+ nK-K$

Es ist aber $N+M+L+K = T$ (per hyp.)
und $nN+nM+nL+nK = nT$

und demnach $3P+3Q+3R+3T = nT+2N+M-K$

Man addire $P+Q+R+T = N+2M$
$+3L+4K$

so ist $4P+4Q+4R+4T = nT+3N+3M$
$+3L+3K$

das ist, weil $N+M+L+K = T$ (per hyp.)
$4P+4Q+4R+4T = nT+3T$
und $P+Q+R+T : (n+3)T = 1:4$

5. Von der 5ten und allen übrigen Reihen, wird, wie man nun leicht siehet, der Satz eben so bewiesen.

Aufgabe.

§ 59. Die Summe einer jeden § 58. beschriebenen Reihe, und jedes Glied ins besondere zu finden, wenn man die Zahl der Glieder als bekannt annimmt.

Auflösung.

1. In der ersten Reihe ist die Summe der Glieder $A+B+C+D+E = n$, nemlich der Zahl der Glieder; und jedes Glied $= 1$.

	1	2	3	4
n−4	A	o	o	o
n−3	B	F	o	o
n−2	C	G	L	o
n−1	D	H	M	P
n	E	K	N	Q

2. In der zweyten Reihe ist

$$K = A+B+C+D \quad (\S\,58.)$$

und $A+B+C+D = n-1$ (Num. 1.)

folglich $K = n-1$

ferner $F+G+H+K : nK = 1:2$ (§ 58.)

da nun $K = n-1$

so ist $F+G+H+K : n(n-1) = 1:2$

und $F+G+H+K = \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}$

3. Von $F+G+H+K = \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}$

subtrahire man $K = n-1 = \frac{2(n-1)}{2}$ (Num. 2.)

so

so kommt $F+G+H = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2(n-1)}{2}$

$= \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$

Da nun $F+G+H = N$ (§ 58.)

so ist $N = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$

ferner ist $L+M+N : nN = 1:3$ (§ 58.)

Da nun $N = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$

so ist $L+M+N : \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} = 1:3$

und $L+M+N = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

4\. Von $L+M+N = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

subtrahire man $N = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ (Num. 3.)

so kommt $L+M = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$

Das ist:

$L+M = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{3(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Das ist:

$L+M = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

(Denn

(Denn wenn 2 Produkte z. E. ab und bc einen Factor b mit einander gemein haben, so ist $ab - bc = (a-c)\,b$, das ist, so ist ihre Differenz $ab - bc$ dem Product $(a-c)b$ aus dem gemeinschaftlichen Factor b in die Differenz der übrigen Factoren $a - c$ gleich; denn wenn in $(a-c)b$, b mit $a-c$ wirklich multipliciret wird; so kommt wieder $ab - bc$)

Da nun $L + M = Q$ (§ 58.)

so ist $Q = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$

Ferner ist $P + Q : nQ = 1 : 4$ (§ 58.)

Da nun $= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$

so ist $P + Q : \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 1 : 4$

und $P + Q = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$

Also ist denn

in der ersten Reihe die Summe $= n$

und jedes Glied $= 1$

in der zweyten Reihe die Summe $= \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}$

und das letzte Glied $= \frac{n-1}{1}$

in der dritten Reihe die Summe $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$

und das letzte Glied $= \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2}$

in der 4ten Reihe die Summe $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

und das letzte Glied $= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

Also auch in der fünften Reihe,
die Summe $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

und das letzte Glied $= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

u. s. w.

Aufgabe.

§ 60. Eine jede Reihe Zahlen $A+B+C+D$ u. s. w. zu summiren, die so beschaffen ist, daß wenn die Glieder von einander subtrahiret werden, das erste Glied von dem zweyten, das zweyte vom dritten, u. s. w. endlich gleiche Differenzen kommen, wie auch jedes Glied ins besondere zu finden.

Auflösung.

Man subtrahire A von B, B von C, C von D u. s. w. In der Reihe, die dadurch entstehet, mache man es eben so, u. s. w. so wie folget:

A	a			
B	B−A	b		
C	C−B	C−2B+A	c	
D	D−C	D−2C+B	D−3C+3B−A	d
E	E−D	E−2D+C	E−3D+3C−B	E−4D+6C−4B+A

u. s. w.

Man

Man setze das erste Glied der 2ten Reihe $= a$
das erste Glied der 3ten Reihe $= b$
das erste Glied der 4ten Reihe $= c$
u. s. w.

1. Weil nun $\underline{B - A = a}$
so ist $B = A + a$

2. Da $\underline{C - 2B + A = b}$
so ist $C = 2B - A + b = 2A + 2a - A + b$ (Num. 1.)
das ist $C = A + 2a + b$

3. $\underline{D - 3C + 3B - A = c}$
$D = 3C - 3B + A + c$

$$\begin{array}{lllll} \text{Es ist aber} & 3C & = & 3A + 6a + 3b & \text{(Num. 2.)} \\ & -3B & = & -3A - 3a & \text{(Num. 1.)} \\ & +A + c & = & +A \quad + c & \\ \hline \text{folglich} & D & = & A + 3a + 3b + c & \end{array}$$

4. $\underline{E - 4D + 6C - 4B + A = d}$
$E = 4D - 6C + 4B - A + d$

$$\begin{array}{lllll} \text{Es ist aber} & 4D & = & 4A + 12a + 12b + 4c & \text{(Num. 3.)} \\ & -6C & = & -6A - 12a - 6b & \text{(Num. 2.)} \\ & +4B & = & +4A + 4a & \text{(Num. 1.)} \\ & -A + d & = & -A \quad + d & \\ \hline \text{und demnach} & E & = & A + 4a + 6b + 4c + d & \end{array}$$

5. Wenn man mehr Glieder als $A + B + C + D + E$ angenommen hätte, so würde man ferner gefunden haben,

$$F = A + 5a + 10b + 10c + 5d + e$$

u. s. w.

Da

Da nun $A = A$

$$\begin{aligned} B &= A + a \\ C &= A + 2a + b \\ D &= A + 3a + 3b + c \\ E &= A + 4a + 6b + 4c + d \\ F &= A + 5a + 10b + 10c + 5d + e \end{aligned}$$

u.s.w.

so siehet man, daß man die Summe $A+B+C+D\ldots$ bekommt, wenn man A, a, b, c, d, e u. s. w. mit den Summen der § 58. beschriebenen Reihen multipliciret, nemlich A mit der Summe der ersten, a mit der Summe der zwenten, b mit der Summe der dritten Reihe, u. s. f. und daß man ein beliebiges Glied bekommt, wenn man A, a, b, c u. s. f. mit den letzten Gliedern aus diesen Reihen multipliciret.

Wenn man also die Zahl der Glieder $= n$ setzet, so ist die Summe $A+B+C+D$ u. s. f.

$$= nA + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}c \text{ u. s. w.}$$

und jedes Glied ins besondere

$$= A + \frac{(n-1)}{1}a + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}b + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}c$$

u. s. f. (§ 59.)

§ 61. Durch diese Aufgabe können die Polygonalzahlen, und die Summen derselben gefunden werdeen.

Man verstehet aber unter einer Polygonalzahl, die Summe einer zunehmenden arithmetischen

Pro-

Progreßion, die sich von 1 anfängt. Ist die Differenz der Glieder $=1$, so bekommt man durch die Summirung derselben, **Trigonalzahlen**; Ist die Differenz $=2$, so bekommt man **Tetragonal-** oder **Quadratzahlen**; Ist die Differenz $=3$, so erhält man **Pentagonalzahlen**, u. s. w.

Man merke beyläufig, daß die Zahl der Glieder, aus deren Summe die Polygonalzahl bestehet, **die Seitenzahl**, und die Zahl, welche anzeiget, wie viel Winkel die Figur hat, von welcher die Polygonalzahl den Namen bekommt, die **Winkelzahl** genennet wird.

Z. E. Aus der arithmetischen Progreßion

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 u. s. w.

entstehen die Trigonalzahlen

1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . 28 . 36 u. s. w.

Wenn man die Summe derselben finden will, so ist die Operation, nach § 60. wie folget:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
1 & & & \\
3 & 2 & & \\
6 & 3 & 1 & \\
10 & 4 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Hier gilt also in den Formeln (§ 60.)

$$nA + \frac{n(n-1)a}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)b}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w.

$$\text{und } A + \frac{(n-1)a}{1} + \frac{(n-1)(n-2)b}{1 \cdot 2} \text{ u. s. w.}$$

$$A=1,\ a=2,\ b=1,\ c=0$$

Also

Also ist die Summe der Trigonalzahlen

$$= n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

und die Trigonalzahl

$$= 1 + 2n - 2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2+n}{2}$$

Z. E. Es sey $n = 8$; so ist

$$\frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{512+192+16}{6} = \frac{720}{6} = 120$$

und $\frac{n^2+n}{2} = \frac{64+8}{2} = \frac{72}{2} = 36$

Das ist, die Summe der ersten 8 Trigonalzahlen ist 120, und die 8te Trigonalzahl ist 36.

Man findet auch durch diese Aufgabe die Summen der Quadrate, Cubikzahlen, Biquadrate, u. s. f. deren Wurzeln in der natürlichen Ordnung fortgehen.

Z. E. Wenn man die Summe der Cubikzahlen sucht,

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
1 & & & & \\
8 & 7 & & & \\
27 & 19 & 12 & & \\
64 & 37 & 18 & 6 & \\
125 & 16 & 24 & 6 & 0
\end{array}
\qquad
\text{so ist } \begin{array}{l}
A = 1 \\
a = 7 \\
b = 12 \\
c = 6 \\
d = 0
\end{array}$$

Folglich ist die Summe $= n + \frac{7n(n-1)}{1 \cdot 2}$

$$+ \frac{12n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{6n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{(n^2+n)^2}{4}$$

Z. E. Es sey $n = 10$; so ist die Summe der ersten 10 Cubikzahlen $= \frac{(100+10)^2}{4} = 3025$

Aufgabe.

§ 62. Die Summe der Kugeln zu finden, so wie dieselben nach der Figur eines länglichen Vierecks in den Zeughäusern aufgehäuft zu werden pflegen.

Auflösung.

Man setze, die Differenz zwischen der Länge und der Breite in den Vierecken sey $= d$; so ist

in dem ersten, von oben an zu rechnen, die Breite $= 1$
in dem andern - - - - - $= 2$
in dem dritten - - - - - $= 3$
in dem vierten - - - - - $= 4$

u. s. w.

und in dem ersten, die Länge $= 1+d$
in dem zweyten - - - $= 2+d$
in dem dritten - - - $= 3+d$
in dem vierten - - - $= 4+d$

u. s. w.

Und demnach ist das Product aus der Breite in die Länge, das ist, der Inhalt

des ersten Vierecks $= 1+d$
des zweyten - - - $= 4+2d$
des dritten - - - $= 9+3d$
des vierten - - - $= 16+4d$

u. s. w.

Man

Man siehet also, daß $1+4+9+16$ u. s. w. und $d+2d+3d+4d$ u. s. w. summiret werden müßen.

Die Zahl der Glieder in jeder von diesen Reihen sey $= n$; so ist $d+2d+3d \ldots\ldots\ldots + nd$ $= \frac{(nd+d)n}{2} = \frac{n^2d+nd}{2}$ (§ 51.)

Und die Summe der Quadratzahlen findet man nach § 60. also:

$$\begin{array}{r|r|r|l} 1 & & & \\ 4 & 3 & & \\ 9 & 5 & 2 & \\ 16 & 7 & 2 & 0 \end{array} \qquad A=1,\ a=3,\ b=2,\ c=0$$

folglich ist die Summe $= n + \frac{3n(n-1)}{1\cdot 2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

Wenn also die Breite des untersten Vierecks $= n$ und die Länge desselben . . . . . . $= n+d$, so ist die Summe der Kugeln

$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{n^2d+nd}{2}$$

Z. E. Es sey $n=14$ und $n+d=24$; so ist $d=10$; und $\frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{n^2d+nd}{2} = \frac{5488+588+14}{6}$ $+ \frac{1960+140}{2} = \frac{6090}{6} + \frac{2100}{2} = 1015+1050$ $= 2065.$

Von den Quadratischen Gleichungen.

Aufgabe.

§ 63. Aus der gegebenen Differenz und dem Product zweyer Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Das Product sey $= p$, die Differenz $= d$, und die halbe Summe der gesuchten Zahlen $= x$; so ist

die große Zahl $= x + \frac{1}{2}d$
und die kleine $= x - \frac{1}{2}d$ } § 46.

Man multiplicire $x + \frac{1}{2}d$
mit $x - \frac{1}{2}d$

$$x^2 + \frac{1}{2}dx$$
$$- \frac{1}{2}dx - \frac{1}{4}d^2$$

so kommt $x^2 - \frac{1}{4}d^2 = p$
$+ \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}d^2$ add.

$$x^2 = p + \frac{1}{4}d^2 = \frac{4p + d^2}{4}$$

Man ziehe auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus; so ist $x = \frac{1}{2}\sqrt{(4p + d^2)}$

Und also ist die große Zahl $x + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{(4p + d^2)} + \frac{1}{2}d$ und die kleine $x - \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{(4p + d^2)} - \frac{1}{2}d$

Z. E.

z. E. Es sey $p = 28$ und $d = 12$; so ist die große Zahl $= \frac{1}{2}\sqrt{(112+144)} + 6 = \frac{1}{2}\sqrt{256} + 6 = \frac{16}{2} + 6 = 14$; und die kleine $= \frac{1}{2}\sqrt{256} - 6 = 8 - 6 = 2$

Aufgabe.

§ 64. Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung.

In einer unreinen quadratischen Gleichung, z. E.

$$c - ax^2 = bx$$

ist x^2 nebst dem Product, dessen Factor x ist, als ein unvollkommenes Quadrat anzusehen. Dasselbe muß vollständig gemacht werden, damit auf beyden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen werden könne. Wenn man von den binomiis $x+A$, und $x-A$ Quadrate macht, so kommt

$$(x+A)^2 = x^2 + 2Ax + A^2$$
und $$(x-A)^2 = x^2 - 2Ax + A^2$$

Man siehet also, daß das Quadrat einer binomischen Wurzel aus 3 Theilen zusammengesetzt ist, aus x^2, dem □ des ersten Theils der Wurzel, aus $2Ax$, dem doppelten Product beyder Theile der Wurzel, und aus A^2, dem □ des andern Theils der Wurzel, und daß das Quadrat des ersten, und das Quadrat des andern Theils der Wurzel jedes positiv ist. Folglich, da x^2 nebst dem Produkt, dessen Factor x ist, als ein unvollkommenes Quadrat einer binomischen Wurzel angesehen wird, so darf

1. x^2 Keinen andern Coefficienten haben, als 1. Man dividire also in der Gleichung

$$c - ax^2 = bx$$

mit a

$$\text{so kommt } \frac{c}{a} - x^2 = \frac{b}{a}x$$

2. x^2 Muß positiv seyn.

Man verändere also die Zeichen, und setze

$$-\frac{c}{a} + x^2 = -\frac{b}{a}x$$

3. Das völlig bekannte muß allein auf einer Seite stehen.

$$-\frac{c}{a} + x^2 = -\frac{b}{a}x$$

$$+\frac{b}{a}x = +\frac{b}{a}x \text{ add.}$$

$$-\frac{c}{a} + x^2 + \frac{b}{a}x = 0$$

$$+\frac{c}{a} \qquad = +\frac{c}{a} \text{ add.}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$$

4. Wenn man nun das unvollkommene Quadrat $x^2 + \frac{b}{a}x$ mit dem vollständigen Quadrat $x^2 + 2Ax + A^2$ vergleichet, so siehet man, daß

das

das Quadrat des andern Theils der Wurzel fehlet, und daß das Product $\frac{b}{a}x$, dessen Factor x ist, für das doppelte Product beyder Theile der Wurzel angenommen werden muß. Man setze also

$$2Ax = \frac{b}{a}x$$

x div.

$$2A = \frac{b}{a}$$

2 div.

$$A = \frac{b}{2a}$$

Das ist: Man dividire den bekannten Factor des Products, in welchem x ist, mit 2; so ist der Quotient der andere Theil der Wurzel.

5. Man mache von demselben ein Quadrat, und addire es an beyden Seiten; man ziehe auf beyden Seiten die Quadratwurzel aus; so kann man x finden.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$$

Der andere Theil der Wurzel $= \frac{b}{2a}$

Das Quadrat desselben $= \frac{b^2}{4a^2}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Das ist, wenn $\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ zu eben derselben Benennung gebracht werden,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac+b^2}{4a^2}$$

Man ziehe die Quadratwurzel aus; so kommt

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}}$$

oder $x + \frac{b}{2a} = \frac{1}{2a}\sqrt{(4ac+b^2)}$

$$\frac{b}{2a} = \frac{b}{2a} \text{ subtr.}$$

$$x = \frac{1}{2a}\sqrt{(4ac+b^2)} - \frac{b}{2a}$$

Z. E. In der Gleichung $c - ax^2 = bx$, oder $c = ax^2 + bx$ sey $x = 12$, $a = 2$, $b = 3$; so ist

$$ax^2 + bx = 288 + 36 = 324$$

und demnach $c = 324$

folglich $x = \frac{1}{2a}\sqrt{(4ac+b^2)} - \frac{b}{2a} = \frac{1}{4}\sqrt{(8 \cdot 324 + 9)} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2601} - \frac{3}{4} = \frac{51}{4} - \frac{3}{4} = \frac{48}{4} = 12$

Man mag entweder $x - A$, oder $A - x$ zum Quadrat machen, so bekommt man in beyden Fällen $x^2 - 2Ax + A^2$

Wenn

Wenn man also eine quadratische Gleichung, in welcher das doppelte Product der beyden Theile der Wurzel negativ ist, aufzulösen hat, so gibt es einen Fall, da man zwey Wurzeln ausziehen muß, und da x in Ansehung beyder Wurzeln positiv wird.

Dieses geschicht, wenn auch die völlig bekannte Zahl in der Gleichung negativ ist. Z. E.

Die Gleichung sey $x^2 - ax = -b$

Der zweyte Theil der Wurzel ist $= -\frac{1}{2}a$

Das Quadrat desselben $= + \frac{1}{4}a^2$ (§ 16.)

und demnach $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b = \frac{a^2 - 4b}{4}$

und 1) $x - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}$

2) $\frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}$

oder welches einerley ist,

$$x - \frac{1}{2}a = -\frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}$$

folglich 1) $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}$

2) $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)}$

Z. E. Es sey $a = 10$ und $b = 24$

so ist 1) $x = \frac{10}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(100 - 96)} = 5 + \frac{1}{2}\sqrt{4} = 5 + 1 = 6$

2) $x = 5 - 1 = 4$.

Wenn $x = 6$, so verwandelt sich $x^2 - ax = -b$ in $36 - 60 = -24$, und wenn $x = 4$, so bekommt man $16 - 40 = -24$

Welcher von beyden Werthen nun gelte? oder ob beyde gewissermaßen gültig seyn? das muß die Beschaffenheit der Aufgabe entscheiden. Man sehe folgende Aufgaben.

Aufgabe.

§ 65. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen, und dem Product derselben die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die Summe sey $= a$, das Product $= p$,
Die große Zahl $= x + y$
Die kleine . . $= y$
so ist $x + 2y = a$ und $p = xy + y^2$

$$x = a - 2y \qquad p - y^2 = xy \quad y \text{ div.}$$

$$\frac{p - y^2}{y} = x$$

$$a - 2y = \frac{p - y2}{y} \quad y \text{ mult.}$$

$$ay - 2y^2 = p - y^2$$

$$+2y^2 = +2y^2 \text{ add.}$$

$$ay = p + y^2$$

$$ay = ay \text{ subtr.}$$

$$0 = p + y^2 - ay$$

$$-p = y^2 - ay$$

Der andere Theil der Wurzel ist $= -\tfrac{1}{2}a$

$$\tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 - p = \frac{a^2 - 4p}{4} = y^2 - ay + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$1)\ +\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4p)} = y - \tfrac{1}{2}a$$

$$2)\ -\tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4p)} = y - \tfrac{1}{2}a$$

Also

Also ist 1) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4p)} = y$
2) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4p)} = y$

Da nun $x = a-2y$; so ist
1) $x = a-a-\sqrt{(a^2-4p)}$, das ist $x = -\sqrt{(a^2-4p)}$
2) $x = a-a+\sqrt{(a^2-4p)}$, das ist $x = +\sqrt{(a^2-4p)}$

Also 1) $x+y = -\sqrt{(a^2-4p)} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4p)}$
das ist $x+y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4p)}$
und $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4p)}$
2) $x+y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4p)}$
und $y - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4p)}$

Hier ist es, wie man siehet, gleichgültig, den ersten oder den 2ten Werth von y zu nehmen; nur daß der zweyte schicklicher ist. Denn wenn man den ersten nimmt, so wird x negativ, und folglich $x+y$, welche man für die grösseste Zahl angenommen hatte, kleiner als y.

Aufgabe.

§ 66. Man hat einen Bruch, dessen Zähler und Nenner, jeder aus drey Ziffern bestehet, $\frac{bac}{cba}$. Wenn derselbe zur kleinsten Benennung gebracht wird, so kommt $\frac{b}{c}$, und die durch abc bezeichnete Zahlen sind in arithmetischer Progression. Man soll diesen Bruch finden.

Auflö-

Auflösung.

Weil $\frac{bac}{cba}$, zur kleinsten Benennung gebracht, $\frac{b}{c}$ gibt, so ist $\frac{100b+10a+c}{100c+10b+a}=\frac{b}{c}$

Und weil die durch a, b, c bezeichnete Zahlen eine arithmetische Progression machen, so ist (§ 51.)

$$a+c=2b$$

Man multiplicire in der ersten Gleichung $100b+10a+c$ mit c, und $100c+10b+a$ mit b; so kommt

$$\begin{array}{rl} 100bc+10ac+c^2 & =100bc+10b^2+ab \\ 100bc & =100bc \quad \text{subtr.} \\ \hline 10ac+c^2 & =10b^2+ab \\ c^2 & =c^2 \quad \text{subtr.} \\ \hline 10ac & =10b^2-c^2+ab \\ ab & = \qquad\qquad +ab \quad \text{subtr.} \\ \hline 10ac-ab & =10b^2-c^2 \\ \text{oder} \quad a(10c-b) & =10b^2-c^2 \\ \hline & \qquad 10c-b \text{ div.} \end{array}$$

$$a=\frac{10b^2-c^2}{10c-b}$$

Da nun vermöge der zweyten Gleichung,

$$a=2b-c$$

so ist $\frac{10b^2-c^2}{10c-b}=2b-c$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; 10c-b \text{ mult.}$$

$$10b^2-c^2=20bc-10c^2-2b^2+bc$$

das

das ist $10b^2 - c^2 = 21bc - 10c^2 - 2b^2$
$\quad 2b^2 = \quad + 2b^2$ add.

$12b^2 - c^2 = 21bc - 10c^2$
$\quad + c^2 = \quad + c^2$ add.

$12b^2 = 21bc - 9c^2$
$21bc = 21bc$ subtr.

$12b^2 - 21bc = -9c^2$
12 div.

$b^2 - \frac{7}{4}bc = -\frac{3}{4}c^2$

Der andere Theil der Wurzel $= -\frac{7}{8}c$
$+\frac{49}{64}c^2 = +\frac{49}{64}c^2$ add.

$b^2 - \frac{7}{4}bc + \frac{49}{64}c^2 = \frac{49}{64}c^2 - \frac{3}{4}c^2 = \frac{49}{64}c^2 - \frac{48}{64}c^2 = \frac{1}{64}c^2$

und also 1) $b - \frac{7}{8}c = \frac{1}{8}c$
2) $b - \frac{7}{8}c = -\frac{1}{8}c$

Folglich 1) $b = \frac{7}{8}c + \frac{1}{8}c = \frac{8}{8}c = c$
2) $b = \frac{7}{8}c - \frac{1}{8}c = \frac{6}{8}c = \frac{3}{4}c$

Man setze $b = c$
so ist $a = 2b - c = 2b - b = b$
das ist $a = b = c$

und in diesem Falle ist der Bruch $\frac{100b + 10a + c}{100c + 10b + a}$

$$= \frac{100b + 10b + b}{100b + 10b + b} = \frac{111b}{111b} = 1.$$

Da nun dieses falsch ist, so gilt der zweyte Werth von b; nemlich $b = \frac{3}{4}c$

Und da $b = \frac{3}{4}c$

so ist $\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$

das

das ist $b = 3$ und $c = 4$
folglich $a = 2b - c = 6 - 4 = 2$

und der gesuchte Bruch $\frac{bac}{cba} = \frac{324}{432} = \frac{81}{108} = \frac{9}{12}$

$= \frac{3}{4} = \frac{b}{c}$

Man hätte diese Aufgabe auch anders auflösen können, und nicht nöthig gehabt, eine quadratische Gleichung aufzulösen.

Denn weil a, b und c eine arithmetische Progression machen, so sey
$a = x$, und die Differenz $= m$;

$$\left.\begin{array}{l} \text{so ist } b = x + m \\ \text{und } c = x + 2m \end{array}\right\} \S\ 50.$$

ferner $\frac{b}{c} = \frac{x+m}{x+2m}$

und $\frac{bac}{cba} = \frac{100(x+m) + 10x + x + 2m}{100(x+2m) + 10(x+m) + x}$

$= \frac{111x + 102m}{111x + 210m} = \frac{37x + 34m}{37x + 70m}$

Weil nun $\frac{b}{c} = \frac{bac}{cba}$ (per hyp.), so ist:

$\frac{x+m}{x+2m} = \frac{37x+34m}{37x+70m}$

Man multiplicire den Zähler des ersten Bruchs mit dem Nenner des zweyten, und den Zähler des

des zweyten mit dem Nenner des ersten; so kommt:

$$37x^2 + 37mx + 70mx + 70m^2 = 37x^2 + 34mx + 74mx + 68m^2$$
$$37x^2 \qquad = 37x^2 \text{ subtr.}$$

$$107mx + 70m^2 = 108mx + 68m^2$$
$$107mx + 68m^2 = 107mx + 68m^2 \text{ subtr.}$$

$$2m^2 = mx$$
$$\overline{} \text{ m div.}$$
$$2m = x$$

Also ist denn

$$a = x \quad = 2m$$
$$b = x + m \quad = 3m$$
$$c = x + 2m = 4m$$

und $\frac{bac}{cba} = \frac{300m + 20m + 4m}{400m + 30m + 2m} = \frac{324m}{432m}$

$= \frac{324}{432}$

Aufgabe.

S 67. Vier Zahlen zu finden, die eine geometrische Progression machen, und so beschaffen sind, daß, wenn man von der ersten 5, von der zweyten 6, von der dritten 10, und von der vierten 18 subtrahiret, diese Differenzen eine arithmetische Progression machen.

Auflösung.

Die erste von den gesuchten Zahlen sey $= x + 5$
die zweyte . . . . $= x + m + 6$
die dritte . . . . $= x + 2m + 10$
die vierte . . . . $= x + 3m + 18$

Denn

Denn wenn 5, 6, 10, und 18 von diesen Zahlen abgezogen werden, so machen die Differenzen

$$x,\ x+m,\ x+2m,\ x+3m$$

eine arithmetische Progression.

Weil nun die 4 Zahlen eine geometrische Progression machen sollen, so muß die erste sich zur zweyten verhalten, wie die zweyte zur dritten (§50.); das ist:

$$x+5 : x+m+6 = x+m+6 : x+2m+10$$

$$\begin{array}{ll}
x+m+6 & x+5 \quad \text{mult.} \\
\hline
x^2+mx+6x & x^2+2mx+10x \\
\quad +mx+m^2+6m & \quad +5x+10m+50 \\
\qquad +6x+6m+36 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
x^2+2mx+m^2+12x+12m+36 = x^2+2mx+15x+10m+50 \\
x^2+2mx \qquad +12x \qquad\qquad = x^2+2mx+12x \quad \text{subtr.} \\
\hline
m^2+12m+36 = 3x+10m+50 \\
\qquad 10m+36 = \qquad 10m+36 \quad \text{subtr.} \\
\hline
m^2+2m \qquad = 3x+14 \\
\hline
m^2+2m-14 = 3x \\
\hline
\end{array} \quad 3 \text{ div.}$$

$$\frac{m^2+2m-14}{3} = x$$

Es muß sich auch die zweyte zur dritten, wie die dritte zur vierten verhalten (§ 50.); das ist:

$$x+m+6 : x+2m+10 = x+2m+10 : x+3m+18$$

$$(x+m+6)(x+3m+18) = (x+2m+10)^2$$

Das

Das ist:

$$x^2+4mx+3m^2+24x+36m+108=x^2+4mx+4m^2+20x+40m+100$$

$$3m^2+24x+36m+108=4m^2+20x+40m+100$$

$$3m^2+20x+36m+100=3m^2+20x+36m+100 \text{ subtr.}$$

$$4x+8=m^2+4m$$

$$4x=m^2+4m-8 \quad \text{4 div.}$$

$$x=\frac{m^2+4m-8}{4}$$

Da nun auch $x=\frac{m^2+2m-14}{3}$

so ist $\frac{m^2+4m-8}{4}=\frac{m^2+2m-14}{3}$

$$3m^2+12m-24=4m^2+8m-56$$

$$3m^2+12m-56=3m^2+12m-56 \text{ subtr.}$$

$$+32=m^2-4m$$

Der zweyte Theil der Wurzel $=-2$

$$+4=+4 \text{ add.}$$

$$36=m^2-4m+4$$

$$6=m-2$$

$$8=m$$

folglich $x=\frac{m^2+4m-8}{4}=\frac{64+32-8}{4}=22$

$x+m\;=22+8\;=30$
$x+2m=22+16=38$
$x+3m=22+24=46$

und die erste Zahl $=22+5\;=27$
die zweyte . $=30+6\;=36$
die dritte . . $=38+10=48$
die vierte . . $=46+18=64$

Man hätte diese Aufgabe auch anders auflösen können. Der Exponent der geometrische Progression sey $=n$
und die erste von den gesuchten Zahlen, $=y$
so ist die andere . . . . $=ny$
die dritte . . . . $=n^2y$
und die vierte . . . . $=n^3y$

Weil nun $y-5$, $ny-6$, n^2y-10 und n^3y-18 eine arithmetische Progression machen, so ist die Summe des ersten und dritten Gliedes dem zweyten 2mahl genommen; und die Summe des zweyten und vierten Gliedes dem dritten 2mahl genommen, gleich (§ 51.)

Das ist:

$y+n^2y-15=2ny-12$ und $ny+n^3y-24=2n^2y-20$
$+15=\;+15$ add. $\qquad +24=\;+24$ add.

$y+n^2y=2ny+3 \qquad ny+n^3x=2n^2y+4$

$n^2y-2ny+y=3 \qquad n^3y-2n^2y+ny=4$
das ist: $\qquad$ das ist:
$(n^2-2n+1)y=3 \qquad (n^3-2n^2+n)y=4$

$$y=\frac{3}{n^2-2n+1} \qquad y=\frac{4}{n^3-2n^2+n}$$

$$\frac{3}{n^2-2n+1}=\frac{4}{n^3=2n^2+n}$$

Man

Man siehet hier, daß, wenn der Zähler und der Nenner des Bruchs $\frac{3}{n^2-2n+1}$ mit n multipliciret werden, beyde Brüche einerley Benennung bekommen, und folglich der Nenner n^3-2n^2+n durch die Multiplication wegfällt, und man also eine einfache Gleichung bekommt, da man sonst eine Cubische aufzulösen hätte.

Also ist $3n = 4$

und $n = \frac{4}{3}$

folglich $y = \frac{3}{n^2-2n+1} = \frac{3}{(n-1)^2} = \frac{3}{1:9} = 27$

Die erste Zahl ist also $= 27$

die zweyte $= ny = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36$

die dritte $= n^2y = \frac{16}{9} \cdot 27 = 48$

die vierte $= n^3y = \frac{64}{27} \cdot 27 = 64$

Aufgabe.

§ 68. Ein Rechenmeister gab seinem Schüler 2 Zahlen zu multipliciren, von welchen die eine um 75 größer war, als die andere. Nach verrichteter Multiplication, muste der Schüler die Probe machen, und das Product mit dem kleinen Factor dividiren; der Quotient war 227, und 113 blieben übrig. Der Rechenmeister fand, daß falsch multipliciret worden war, und befahl, den Fehler zu ändern. Als der Schüler den Fehler gefunden hatte, so sagte er, er hätte im multipliciren nur 1 ausgelassen. Nein, sagte der Lehrmeister, nicht 1, sondern 1000.

Es wird gefragt, was für Zahlen der Schüler habe multipliciren müssen.

Auflösung.

Die kleine Zahl sey $= x$
so ist die große $= x + 75$
und demnach das wahre Product $= x^2 + 75x$
und das fehlerhafte $= x^2 + 75x - 1000$

Weil, als $x^2 + 75x - 1000$ mit x dividiret wurde, zum Quotienten 227 kam, und 113 übrig blieben, so ist

$$\frac{x^2 + 75x - 1000}{x} = 227 + \frac{113}{x} \quad x \text{ mult.}$$

$$x^2 + 75x - 1000 = 227x + 113$$
$$227x = 227x \quad \text{subtr.}$$

$$x^2 - 152x - 1000 = 113$$
$$+1000 = 1000 \text{ add.}$$

$$x^2 - 152x = 1113$$

Der andere Theil der Wurzel $= -76$

$$-76 \cdot -76 = +5776 = 5776 \text{ add.}$$

$$x^2 - 152x + 5776 = 6889$$

$$x - 76 = \sqrt{6889} = 83$$

$$x = 76 + 83 = 159$$

$$x + 75 = 159 + 75 = 234$$

Die gesuchten Zahlen sind also 159 und 234.

Probe.

Man multiplicire 159 mit 234, und laße in der Stelle der Tausender 1 fehlen, oder man multiplicire

tiplicire richtig, und subtrahire vom Product 1000; so ist das falsche Product 36206; und man findet

$$\frac{36206}{159} = 227 + \frac{113}{159}$$

Aufgabe.

§ 69. Zu finden, ob eine gegebene Zahl eine Trigonalzahl? und die wievielste sie sey?

Auflösung.

Die gegebene Zahl sey $= a$, und die Zahl der Glieder in der Reihe der Trigonalzahlen $= n$; so ist

$$\frac{n^2+n}{2} = a \;(\S 61.)$$

2 mult.

$$n^2 + n = 2a$$

Weil in dem Product n, der bekannte Factor $= 1$ ist, so ist der andere Theil der Wurzel $= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ add.

$$n^2+n+\frac{1}{4} = 2a+\frac{1}{4} = \frac{8a+1}{4}$$

$$n+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(8a+1)}$$

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{(8a+1)} - \frac{1}{2}$$

 Wenn

Wenn nun $8a+1$ ein vollkommenes Quadrat ist, so ist a eine Trigonalzahl; und $\frac{1}{2}\sqrt{(8a+1)}-\frac{1}{2}$ zeiget, die wievielste sie sey?

Z. E. Es sey $a=28$, so ist $8a+1=225$, und $\sqrt{225}=15$.

Also ist 28 eine Trigonalzahl; und da $\frac{15}{2}-\frac{1}{2}=7$, so ist es die 7te.

Es sey $a=8778$; so ist $n=\frac{1}{2}\sqrt{(70224+1)}-\frac{1}{2}=\frac{165}{2}-\frac{1}{2}=\frac{264}{2}=132$; das ist, 8778 ist die 132ste Trigonalzahl.

Aufgabe.

§ 70. Aus dem gegebenen ersten Gliede, der Differenz, und der Summe einer zunehmenden arithmetischen Progression das letzte Glied, und die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$
die Differenz $= d$
die Summe $= b$
das letzte Glied $= t$
und die Zahl der Glieder $= x$, so ist

$(a+t)x$

$\frac{(a+t)x}{2} = b$ (§ 51.) und $a+dx-d=t$ (§ 52.)

2 mult.

$(a+t)x = 2b$

oder $ax+tx = 2b$

$tx = 2b-ax$

x div.

$t = \frac{2b-ax}{x} = a+dx-d$

x mult.

$2b-ax = ax+dx^2-dx$

$+ax = ax$ add.

$2b = dx^2+2ax-dx$

d div.

$\frac{2b}{d} = x^2+\frac{2ax-dx}{d}$

Der zweyte Theil der Wurzel $= \frac{2a-d}{2d}$

und das □ desselben $= \frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2}$

folglich $\frac{2b}{d}+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2} = x^2+\frac{2ax-dx}{d}$

$+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2}$

oder $\frac{8bd+4a^2-4ad+d^2}{4d^2} = x^2+\frac{2ax-dx}{d}$

$+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2}$

und $\frac{1}{2d}\sqrt{(8bd+4a^2-4ad+d^2)} = x + \frac{2a-d}{2d}$

$$\frac{1}{2d}\sqrt{(8bd+4a^2-4ad+d^2)} + \frac{d-2a}{2d} = x$$

Z. E. Es sey $a=5$, $d=3$, $b=185$; so ist $x = \frac{1}{6}\sqrt{(4440+100-60+9)} + \frac{3-10}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{4489} - \frac{7}{6} = \frac{67}{6} - \frac{7}{6} = 10$

und $t = a + dx - d = 5 + 30 - 3 = 32$

Die Progression ist also:

5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 . 32

In einer abnehmenden Progression ist das letzte Glied $t = a - dx + d$ (§ 52.)

und demnach $\frac{2b-ax}{x} = a - dx + d$

x mult.

$$2b - ax = ax - dx^2 + dx$$

und $-2b + ax = dx^2 - ax - dx$

$+ax = \quad +ax$ subtr.

$$-2b = dx^2 - 2ax - dx$$

d div.

$$-\frac{2b}{d} = x^2 - \frac{2ax - dx}{d}$$

Der zweyte Theil der Wurzel $= \frac{-2a-d}{2d}$

und das Quadrat desselben $= \frac{4a^2+4ad+d^2}{4d^2}$

folglich

folglich $\frac{4a^2+4ad+d^2}{4d^2} - \frac{2b}{d} = x^2 - \frac{2ax-dx}{d}$

$+ \frac{4a^2+4ad+d^2}{4d^2}$

oder $\frac{4a^2+4ad+d^2-8bd}{4d^2} = x^2 - \frac{2ax-dx}{d} +$

$\frac{4a^2+4ad+d^2}{4d^2}$

und 1) $\frac{1}{2d}\sqrt{(4a^2+4ad+d^2-8bd)} = x - \frac{2a-d}{2d}$

2) $-\frac{1}{2d}\sqrt{(4a^2+4ad+d^2-8bd)} = x - \frac{2a-d}{2d}$

also 1) $\frac{2a+d}{2d} + \frac{1}{2d}\sqrt{(4a^2+4ad+d^2-8bd)} = x$

2) $\frac{2a+d}{2d} - \frac{1}{2d}\sqrt{(4a^2+4ad+d^2-8bd)} = x$

Z. E. Es sey, $a=32$, $d=3$, $b=185$; so ist

1) $x = \frac{67}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{(4489-4440)} = \frac{67}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{49}$

$= \frac{67}{6} + \frac{7}{6} = \frac{74}{6}$

2) $x = \frac{67}{6} - \frac{7}{6} = 10$

Man siehet leicht, daß hier nicht der erste, sondern der zweyte Werth von x gilt.

Also ist $t = a - dx + d = 32 - 30 + 3 = 5$

Es sey $a = 31$, $d = 7$, $b = 85$; so ist

1) $x = \frac{69}{14} + \frac{1}{14} \sqrt{(4761 = 4760)} = \frac{69}{14} + \frac{1}{14}$
$= \frac{70}{14} = 5$

2) $x = \frac{69}{14} - \frac{1}{14} = \frac{68}{14} = \frac{34}{7}$

hier gilt der erste Werth von x;
also ist $t = a - dx + d = 31 - 35 + 7 = 3$,
und die Progression ist

$$31 \,.\, 24 \,.\, 17 \,.\, 10 \,.\, 3$$

Aufgabe.

§ 71. A hat einige Arbeitsleute, welche jeder täglich so viel Groschen bekommen, als ihrer sind, und so viele Tage arbeiten, als sie insgesamt täglich Groschen bekommen, weniger 1 Tag und diese Zeit über insgesamt 180 Thaler verdienen, den Thaler zu 36 Groschen gerechnet. Wie viel Arbeitsleute hat A gehabt?

Auflösung.

Die Zahl der Arbeitsleute sey $= x$;
so bekommt jeder täglich x Groschen,
und alle bekommen täglich x^2 Groschen
und haben gearbeitet $x^2 - 1$ Tag

Man findet nach der Regel Detri, daß sie insgesamt in diesen Tagen verdienen $x^4 - x^2$ Groschen.

Und

Und demnach ist $x^4 - x^2 = 180 . 36$
das ist $x^4 - x^2 = 6480$

Diese biquadratische Gleichung kann als eine quadratische angesehen werden, weil x^4 das Quadrat von x^2 ist, und außer x^4 und x^2 keine Potenz von x in derselben ist.

Der andere Theil der Wurzel ist $= -\frac{1}{2}$
$+ \cdot \frac{1}{4} = + \frac{1}{4}$ add.

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = 6480 + \frac{1}{4} = \frac{25921}{4}$$

$$x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{25921}{4}} = \frac{161}{2}$$

$$x^2 = \frac{161}{2} + \frac{1}{2} = \frac{162}{2} = 81$$

$$x = 9$$

Das ist, A hat 9 Arbeitsleute gehabt, und jedem täglich 9 Groschen gegeben.

Gleichungen, wie $x^6 - ax^3 = b$
$x^8 + ax^4 = b$
$x^{10} - ax^5 = b$ u.s.w.

werden eben so aufgelöset.

Z. E. Es sey $x^6 - 20x^3 = 251904$
der andere Theil der Wurzel ist $= -10$
$+ 100 = + 100$ add.

$$x^6 - 20x^3 + 100 = 252004$$

$$x^3 - 10 = \sqrt{252004} = 502$$

$$x^3 = 502 + 10 = 512$$

$$x = \sqrt[3]{512} = 8$$

Von den Logarithmen.

Erklärung.

§ 72. Wenn man sich eine geometrische Progression, die sich von 1 anfänget, und eine arithmetische, deren erstes Glied = 0 ist, vorstellet, und in beyden Progressionen gleich viele Glieder annimmt, so werden die Glieder der arithmetischen Progression die **Logarithmen** der Glieder der geometrischen genennet.

Z. E. Es sey die geometrische Progression:

1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 u. s. w.

und die arithmetische:

0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 u. s. w.

so ist 0 der Logarithmus von 1; 1 der Logarithmus von 2; 2 der Logarithmus von 4 u. s. w.

In einer geometrischen Progression ist jedes Glied eine Potenz; und die Logarithmen verhalten sich gegen einander, wie die Exponenten ihrer Zahlen als Potenzen betrachtet. Denn wenn die Zahlen sind:

1 oder a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 u. s. w.

und

und die Logarithmen:

$0 \,.\, b \,.\, 2b \,.\, 3b \,.\, 4b \,.\, 5b \,.\, 6b$ u. s. w.

so siehet man, daß

$$la^1 : la^2 = b : 2b = 1 : 2$$
$$la^1 : la^3 = b : 3b = 1 : 3$$
$$la^1 : la^4 = b : 4b = 1 : 4$$

u. s. w.

§ 73. 1) Wenn man die Logarithmen zweyer Zahlen addiret, so ist die Summe der Logarithmus des Products dieser Zahlen.

Z. E. $\left.\begin{array}{l} la^2 = 2b \\ la^4 = 4b \end{array}\right\}$ § 72.

$$la^2 + la^4 = 6b = la^6$$

2) Weil nun $la^2 = 2b = 2la$
$la^3 = 3b = 3la$
$la^4 = 4b = 4la$ u. s. w.

so ist überhaupt $la^m = mb = mla$.

Das ist, man bekommt den Logarithmus einer Potenz, wenn man den Logarithmus ihrer Wurzel mit ihrem Exponenten multipliciret.

3) Folglich bekommt man den Logarithmus der Wurzel, wenn man den Logarithmus der Potenz mit dem Exponenten derselben dividiret.

4) Wenn man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus der zu dividirenden Zahl subtrahiret, so ist die Differenz der Logarithmus des Quotienten. Z. E.

$$\frac{a^5}{a^2} = a^3$$

und der Logarithmus des Quotienten a^3 ist $3b$ (§ 72.) und entstehet, wenn $la^2 = 2b$ von $la^5 = 5b$ subtrahiret wird.

5) Der Logarithmus eines wahren Bruchs ist also negativ.

Z. E. $l\frac{a}{a^3} = la - la^3 = b - 3b = -2b$ (§ 72.)

§ 74. Verschiedene Logarithmen einer und eben derselben Zahl verhalten sich gegen einander, wie die Logarithmen des zweyten Gliedes der geometrischen Progression.

Die Zahlen seyn

$1 \,.\, a \,.\, a^2 \,.\, a^3 \,.\, a^4 \,.\, a^5 \,.\, a^6$ u. s. w.

die Logarithmen:

$0 \,.\, b \,.\, 2b \,.\, 3b \,.\, 4b \,.\, 5b \,.\, 6b$ u. s. f.

und andere Logarithmen:

$0 \,.\, c \,.\, 2c \,.\, 3c \,.\, 4c \,.\, 5c \,.\, 6c$ u. s. w.

so ist $2b : 2c = b : c$

$3b : 3c = b : c$

$4b : 4c = b : c$ u. s. w.

Die Logarithmen, deren man sich wirklich bedienet, sind:

0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . u. s. w.

in Ansehung der geometrischen Progression:

1 . 10 . 100 . 1000 . 10000 . 100000 u. s. w.

nemlich 0 ist der Logarithmus von 1; 1 der Logarithmus von 10; 2 der Logarithmus von 100 u. s. w. und die Logarithmen der übrigen Zahlen sind Decimalbrüche.

§ 75. Die Logarithmen haben in der Mathematik ihren großen Nutzen. Durch Hülfe derselben läßet sich in vielen Fällen leicht und bequem finden, was sonst weitläuftig und mühsam gesucht werden müste.

Z. E. Wenn man diese Gleichung auflösen soll,

$$\frac{a^x c}{(a+b)x} = d$$

so ist (§ 73.)

$$xla + lc - xl(a+b) = ld$$

oder

$$+xl(a+b) - xla - lc = -ld$$
$$+lc = +lc \text{ add.}$$

$$xl(a+b) - xla = lc - ld$$

oder

$$x(l(a+b) - la) = lc - ld \quad l(a+b)-la \text{ div.}$$

$$x = \frac{lc - ld}{l(a+b) - la}$$

Z. E. Es sey $a = 32$
$b = 1$
$c = 66$
$d = \frac{2097152}{35937}$

In den gewöhnlichen logarithmischen Tabellen sind die Logarithmen nur für die Zahlen 1 bis 10000 zu finden; und also weder für 2097152 noch für 35937.

Inzwischen ist $2097152 = 4 \cdot 524288 = 4^2 \cdot 131072 = 4^3 \cdot 32768 = 4^4 \cdot 8192$

Nun

Nun ist $l\,8192 = 3{,}9133899$
und $l\,4^4 = l\,256 = 2{,}4082400$ add.

folglich $l\,2097152 = 6{,}3216299$ (§ 73.)
ferner ist $35937 = 11 \cdot 3267$
$l\,3267 = 3{,}5141491$
und $l\,11 = 1{,}0413927$ add.

$l\,35937 = 4{,}5555418$
weil $l\,2097152 = 6{,}3216299$
und $l\,35937 = 4{,}5555418$ subtr.

so ist $ld = l\,\frac{2097152}{35937} = 1{,}7660881$ (§ 73.)

$$lc = l\,66 = 1{,}8195439$$
$$ld = l\,\frac{2097152}{35937} = 1{,}7660881$$

$$lc - ld = 534558$$
$$l(a+b) = l\,33 = 1{,}5185139$$
$$la = l\,32 = 1{,}5051500$$

$$l(a+b) - la = 133639$$

folglich $\frac{lc - ld}{l(a+b) - la} = x = \frac{534558}{133639} = 4$

Wie man für eine jede Zahl den Logarithmus finden könne, das soll jetzt gezeiget werden.

Lehrsatz.

§ 76. Wenn man sich eine Zahl $1+x$, und e als einen unendlich kleinen Theil von x vorstellet, so kann $1+x$ als das letzte Glied folgender geometrischen

trischen Progression, die aus unendlich vielen Gliedern bestehet, angesehen werden.

$1 \,.\, 1+e \,.\, (1+e)^2 \,.\, (1+e)^3 \,.\, (1+e)^4$ u. s. w.

Oder:

$1 \,.\, 1+e \,.\, 1+2e+e^2 \,.\, 1+3e+3e^2+e^3 \,.\, 1+4e+6e^2+4e^3+e^4$ u. s. w.

Beweis.

1) Weil e ein unendlich kleiner Theil von x ist (per hypothesin), so muß e kommen, wenn x mit einer unendlich großen Zahl dividiret wird.

Diese unendlich große Zahl sey $= m$; so ist

$$e = \frac{x}{m}$$

und $me = x$

und demnach $1+me = 1+x$

2) Es ist $e : e^2 = 1 : e$

Da nun e unendlich klein ist (per hypoth.), und demnach

$$e = 0$$

angenommen werden kann, so ist

$$e : e^2 = 1 : 0$$

Das ist, die unendlich kleine Zahl e ist in Vergleichung mit der noch kleinern e^2 unendlich groß; oder e^2 ist in Vergleichung mit e unendlich klein.

Und demnach kann e^2, und noch vielmehr e^3, e^4, e^5 u. s. f. weggelassen werden.

Anstatt der Progression:

$1 \,.\, 1+e \,.\, 1+2e+e^2 \,.\, 1+3e+3e^2+e^3 \,.\, 1+4e+6e^2+4e^3+e^4$ u. s. w.

bekommt man also die Progression:

$1 \,.\, 1+e \,.\, 1+2e \,.\, 1+3e \,.\, 1+4e$ u. s. w.

Da nun die Progression unendlich viele Glieder hat (per hypoth.) so muß im letzten Gliede die Zahl, mit welcher e multipliciret wird, unendlich groß seyn; das ist,

das letzte Glied $= 1+me$

Es ist aber $1+me = 1+x$ (Num. 1.)

und demnach $1+x$ das letzte Glied in der Progression.

Eben so wird gezeiget, daß $1-x = 1-me$, und daß $1-x$ das letzte Glied in dieser Progression ist:

$1 \,.\, 1-e \,.\, 1-2e \,.\, 1-3e \,.\, 1-4e \,\ldots\ldots\ldots\, 1-me$

§ 77. Wenn $1+e$ zur Potenz, die den Exponenten m hat, erhoben wird, so kommt (§ 38.)

$$(1+e)^m = 1^m + m \,.\, 1^{m-1} e + \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, 1^{m-2} e^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \, 1^{m-3} e^3 \text{ u. s. f.}$$

oder, weil 1 immer 1 bleibt, es mag so vielmahl mit 1 multipliciret werden, als es wolle,

$$(1+e)^m = 1 + me + \frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} e^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} e^3$$

u. s. w.

Man

Man hat aber schon gesehen (§ 76.), daß in Vergleichung mit e, $e^2 = 0$, $e^3 = 0$, u.s.w. folglich ist $(1+e)^m = 1+me$, oder $(1+e)^m$ und $1+me$ sind gleichgültige Ausdrücke. Eben so siehet man, daß $(1-e)^m = 1-me$

Da nun $(1+e)^m = 1+me$
und $1+me = 1+x$ (§ 76.)

so ist $(1+e)^m = 1+x$
Also auch $(1-e)^m = 1-x$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Und demnach } 1+e = (1+x)^{1:m} \\ \text{und } 1-e = (1-x)^{1:m}\end{array}\right\} \text{§ 28.}$$

Man ziehe aus $1+x$, und $1-x$ die Wurzel wirklich aus nach § 38. und § 39. so kommt:

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}x + \frac{\frac{1}{m}.\frac{1-m}{m}}{1.2}.x^2 + \frac{\frac{1}{m}.\frac{1-m}{m}.\frac{1-2m}{m}}{1.2.3}.x^3$$

$$+ \frac{\frac{1}{m}.\frac{1-m}{m}.\frac{1-2m}{m}.\frac{1-3m}{m}}{1.2.3.4}.x^4$$

$$+ \frac{\frac{1}{m}.\frac{1-m}{m}.\frac{1-2m}{m}.\frac{1-3m}{m}.\frac{1-4m}{m}}{1.2.3.4.5}.x^5$$

u. s. w.

Weil m unendlich groß ist (per hyp, § 76.), so gilt in dem dritten, und den folgenden Gliedern,

$1-m = -m$
$1-2m = -2m$
$1-3m = -3m$ u. s. w.

 Denn

Denn man multiplicire $\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m}$ wirklich; so ist

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} = \frac{1-m}{m^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m}$$

Nun ist aber $\frac{1}{m^2}$ in Vergleichung mit $-\frac{1}{m}$ unendlich klein, und kann also für 0 gerechnet werden. Setzet man $\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} = \frac{1}{m} \cdot \frac{-m}{m}$, so ist $\frac{1}{m} \cdot \frac{-m}{m} = \frac{1}{m} \cdot -1 = -\frac{1}{m}$, und kommt also eben dasselbe Product.

Man multiplicire im vierten Gliede $\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m}$ wirklich, so kommt:

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m} = \frac{1-3m+2m^2}{m^3}$$

das ist $\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m} = \frac{1}{m^3} - \frac{3m}{m^3} + \frac{2m^2}{m^3}$

$$= \frac{1}{m^3} - \frac{3}{m^2} + \frac{2}{m}$$

das ist, weil in Vergleichung mit $\frac{2}{m}$, $\frac{1}{m^3} = 0$, und

$-\frac{3}{m^2} = 0$ ist,

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m} = +\frac{2}{m}$$

Eben-

Eben dasselbe Product kommt, wenn $\frac{1}{m} \cdot \frac{-m}{m} \cdot \frac{-2m}{m}$ anstatt $\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m}$ gesetzt wird.

Denn $\frac{1}{m} \cdot \frac{-m}{m} \cdot \frac{-2m}{m} = \frac{1}{m} \cdot -1 \cdot -2 = +\frac{2}{m}$

Also ist denn

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}x - \frac{mx^2}{2m^2} + \frac{2m^2x^3}{2 \cdot 3m^3} - \frac{2 \cdot 3m^3x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4m^4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4m^4x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5m^5} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5m^5x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6m^6} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6m^6x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7m^7}$$

u. s. w.

Das ist, wenn die Brüche zur kleinsten Benennung gebracht werden,

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 + \frac{1}{5m}x^5 - \frac{1}{6m}x^6 \text{ u. s. w.}$$

Also auch

$$(1-x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m} \cdot -x + \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m}}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot -x^3 + \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-2m}{m} \cdot \frac{1-3m}{m}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4$$

u. s. w.

Das ist:

$$(1-x)^{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 - \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 - \frac{1}{5m}x^5 \text{ u. s. f.}$$

Nun hat man schon gefunden

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1+e$$

folglich ist $1+e = 1 + \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 + \frac{1}{5m}x^5$ u. s. w.

$$1 = 1 \text{ subtr.}$$

$$+e = \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 + \frac{1}{5m}x^5 \text{ u.s.f.}$$

Also auch, weil $(1-x)^{\frac{1}{m}} = 1-e$

so ist $1-e = 1 - \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 - \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4$ u.s.w.

und $-e = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 - \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4$ u.s.w.

Aufgabe.

§ 78. Eine Regel zu finden, wodurch für eine jede Zahl der Logarithmus gefunden werden könne.

Auflö-

Auflösung.

1. Die Zahl, für welche man den Logarithmus finden will, sey $= 1+x$,
wenn sie größer ist als 1;
und $= 1-x$,
wenn sie kleiner ist, als 1.

Man betrachte $1+x$ als das letzte Glied in der § 76. beschriebenen geometrischen Progreßion:
$1 . 1+e . 1+2e . 1+3e \ldots\ldots 1+me$ oder $1+x$
und $1-x$, als das letzte Glied, in der geometrischen Progreßion:
$1 . 1-e . 1-2e . 1-3e \ldots\ldots 1-me$ oder $1-x$

Man setze ferner (§ 72. 73.) die Logarithmen für die Glieder der ersten Progreßion:
$0 . e . 2e . 3e \ldots\ldots\ldots me$
und für die Glieder der zweyten Progreßion:
$0 . -e . -2e . -3e \ldots\ldots -me$;
so ist $l(1+x) = me$
und $l(1-x) = -me$

Da nun (§ 77.)

$$+e = \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 + \frac{1}{5m}x^5 \text{ u. s. w.}$$

und

$$-e = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 - \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 - \frac{1}{5m}x^5 \text{ u. s. f.}$$

so ist $+me = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ u. s. w.
und $-me = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ u. s. w.

und demnach

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \text{ u. s. w.}$$

und $l(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5$ u. s. w.

2. Die Logarithmen, welche man durch diese Reihen findet, werden die natürlichen (logarithmi naturales) genennet, und sind von denen, deren man sich bedienet, und welche die künstlichen (logarithmi artificiales) genennet werden, verschieden. Inzwischen bekommt man die künstlichen, wenn man die natürlichen mit dem Logarithmus naturalis von 10 dividiret. Denn man nenne den Logarithmus naturalis von $1+x$, $lN(1+x)$, und den Logarithmus artificialis von $1+x$, $lA(1+x)$ ferner nenne man um der Kürze willen, die logarithmische Reihe $x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4$ u. s. w. S, und der gesuchte Logarithmus artificialis von $1+x$ sey $= y$; so ist

$$lN(1+x) = S$$

und $lA(1+x) = y$

folglich $lN(1+x) : lA(1+x) = S : y$

Nun verhalten sich aber verschiedene Logarithmen einer und eben derselben Zahl, wie die Logarithmen des zweyten Gliedes der geometrischen Progression; und die Logarithmen, deren man sich bedienet, das ist, die Logarithmi artificiales sind Logarithmen für die Glieder der geometrischen Progression:

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 u. s. w. (§74.)

folglich ist $lN(1+x) : lA(1+x) = lN\,10 : lA\,10$

und demnach $lN\,10 : lA\,10 = S : y$

Es

Es ist aber der Logarithmus artificialis von 10 $= 1$ (§74.), das ist $lA10 = 1$

folglich $lN10 : 1 = S : y$

und $\frac{S}{lN10} = y$

das ist, weil $y = lA(1+x)$

und $S = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ u. s. w.

$$lA(1+x) = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \ldots\ldots}{lN10}$$

Man siehet also, daß in der logarithmischen Reihe $\frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3$ u. s. w. $m = 1$, wenn sie den Logarithmus naturalis und $m = lN10$, wenn sie den Logarithmus artificialis von $1+x$ ausdrücket.

3. Die Reihe $lA(1+x) = \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4$ u. s. w. ist unbequem, weil sie sehr langsam convergiret, das ist, weil man sehr viele Glieder suchen muß, ehe man das letzte bekommt.

Es laßen sich aber 2 andere Reihen finden, die viel bequemer sind.

Denn wenn man $1+x$ mit $1-x$ dividiret, so ist der Logarithmus des Quotienten $\frac{1+x}{1-x} = l(1+x) - l(1-x)$ (§73.)

von $lA(1+x) = \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 + \frac{1}{5m}x^5 - \frac{1}{6m}x^6 \ldots\ldots$

subtrahire man also

$lA(1-x) = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 - \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 - \frac{1}{5m}x^5 - \frac{1}{6m}x^6 \ldots\ldots$

so kommt $lA\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{m}x + \frac{2}{3m}x^3 + \frac{2}{5m}x^5 + \frac{2}{7m}x^7 + \frac{2}{9m}x^9 \ldots\ldots$

Oder wenn man 1 mit $1-x$ dividiret, so ist der Logarithmus des Quotienten $\frac{1}{1-x} = l1 - l(1-x)$ (§73.)

von $l1 = 0$

subtrahire man also

$lA(1-x) = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 - \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 - \frac{1}{5m}x^5 - \frac{1}{6m}x^6 \ldots$

so kommt $lA\frac{1}{1-x} = \frac{1}{m}x + \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 + \frac{1}{4m}x^4 + \frac{1}{5m}x^5 + \frac{1}{6m}x^6 \ldots\ldots$

Von diesen beyden Reihen kann man nehmen, welche man will, und in beyden Fällen bekommt man den verlangten Logarithmus.

Z. E. Wenn man den Logarithmus naturalis von $\frac{3}{2}$ durch die Reihe $l\,\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5$ .... finden will, so setze man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{2}$

das ist, wenn $1+x$ mit 2, und $1-x$ mit 3 multipliciret wird,

$$
\begin{array}{rcll}
2 + 2x & = & 3 - 3x & \\
+ 3x & = & + 3x & \text{add.} \\
\hline
2 + 5x & = & 3 & \\
2 & = & 2 & \text{subtr.} \\
\hline
5x & = & 1 & \\
\hline
x & = & \frac{1}{5} & 5 \text{ div.}
\end{array}
$$

Man setze, nachdem man den Logarithmus entweder weniger oder mehr genau verlanget, entweder $1 = \frac{1000\,000\,000}{1000\,000\,000}$, oder $1 = \frac{1000\,000\,000\,000}{1000\,000\,000\,000}$ u. s. f.

Die Berechnung geschicht also:

$$
\begin{array}{l}
2000\,000\,000 : 1000\,000\,000 \\
\hline
\end{array} \quad 5 \text{ div.}
$$

$$2x = \frac{2}{5} = A = 4000\,000\,00 : 1000\,000\,000$$

$$2x^2 = \frac{2}{5^2} = 800\,000\,00 : 1000\,000\,000$$

$$2x^3 = \frac{2}{5^3} = B = 160\,000\,00 : 1000\,000\,000$$

$2x^4$

$$2x^4 = \frac{2}{5^4} = 32\,000\,00 : 1000\,000\,000$$

$$2x^5 = \frac{2}{5^5} = C = 640000 : 1000\,000\,000$$

$$2x^6 = \frac{2}{5^6} = 128000 : 1000\,000\,000$$

$$2x^7 = \frac{2}{5^7} = D = 25600 : 1000\,000\,000$$

$$2x^8 = \frac{2}{5^8} = 5120 : 1000\,000\,000$$

$$2x^9 = \frac{2}{5^9} = E = 1024 : 1000\,000\,000$$

$$2x^{10} = \frac{2}{5^{10}} = 204 : 1000\,000\,000$$

$$2x^{11} = \frac{2}{5^{11}} = F = 40 : 1000\,000\,000$$

$$2x^{12} = \frac{2}{5^{12}} = 8 : 1000\,000\,000$$

$$2x^{13} = \frac{2}{5^{13}} = G = 1 : 1000\,000\,000$$

$$2x^{14} = \frac{2}{5^{14}} = 0$$

Man dividire A mit 1, B mit 3, C mit 5, D mit 7 u. s. w. und addire die Quotienten; so kommt der verlangte Logarithmus.

A =

$$A = 4000\,000\,00 : 1000\,000\,000$$
$$\tfrac{1}{3}B = 53\,333\,33 : 1000\,000\,000$$
$$\tfrac{1}{5}C = 1\,280\,00 : 1000\,000\,000$$
$$\tfrac{1}{7}D = 3657 : 1000\,000\,000$$
$$\tfrac{1}{9}E = 113 : 1000\,000\,000$$
$$\tfrac{1}{11}F = 3 : 1000\,000\,000$$
$$\tfrac{1}{13}G = 0$$

$$lN\frac{3}{2} = \frac{4054\,651\,06}{10000\,000\,00}$$

oder, wenn man diesen Bruch schreibt, wie man Decimalbrüche zu schreiben pflegt,

$$lN\tfrac{3}{2} = 0{\cdot}405465106$$

Will man diesen Logarithmus durch die zweyte Reihe suchen,

$$l\frac{1}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \ldots\ldots$$

so ist $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{3}{2}$

$$2 = 3 - 3x$$
$$0 = 1 - 3x$$
$$3x = 1$$
$$x = \tfrac{1}{3}$$

$$\frac{1000\,000\,000 : 1000\,000\,000}{} \quad 3 \text{ div.}$$

$$x = \frac{1}{3} = 333\,333\,333 : 1000\,000\,000$$

$$x^2 = \frac{1}{3^2} = 111\,111\,111 : 1000\,000\,000$$

$x^3 =$

$$x^3 = \frac{1}{3^3} = 37\,037\,037 : 1000\,000\,000$$

$$x^4 = \frac{1}{3^4} = 12\,345\,679 : 1000\,000\,000$$

$$x^5 = \frac{1}{3^5} = 4\,115\,226 : 1000\,000\,000$$

$$x^6 = \frac{1}{3^6} = 1\,371\,742 : 1000\,000\,000$$

$$x^7 = \frac{1}{3^7} = 457247 : 1000\,000\,000$$

$$x^8 = \frac{1}{3^8} = 152415 : 1000\,000\,000$$

$$x^9 = \frac{1}{3^9} = 50805 : 1000\,000\,000$$

$$x^{10} = \frac{1}{3^{10}} = 16935 : 1000\,000\,000$$

$$x^{11} = \frac{1}{3^{11}} = 5645 : 1000\,000\,000$$

$$x^{12} = \frac{1}{3^{12}} = 1881 : 1000\,000\,000$$

$$x^{13} = \frac{1}{3^{13}} = 627 : 1000\,000\,000$$

$$x^{14} = \frac{1}{3^{14}} = 209 : 1000\,000\,000$$

$$x^{15} = \frac{1}{3^{15}} = 69 : 1000\,000\,000$$

$x^{16} = \frac{1}{3^{16}} =$ 23 : 1000 000 000

$x^{17} = \frac{1}{3^{17}} =$ 7 : 1000 000 000

$x^{18} = \frac{1}{3^{18}} =$ 2 : 1000 000 000

$x^{19} = \frac{1}{3^{19}} =$ 0

Man dividire x mit 1, x^2 mit 2, x^3 mit 3 u. s. w.

$x =$	333 333 333	: 1000 000 000
$x^2 : 2 =$	55 555 555	: 1000 000 000
$x^3 : 3 =$	12 345 679	: 1000 000 000
$x^4 : 4 =$	3 086 419	: 1000 000 000
$x^5 : 5 =$	823 045	: 1000 000 000
$x^6 : 6 =$	228 623	: 1000 000 000
$x^7 : 7 =$	65 321	: 1000 000 000
$x^8 : 8 =$	19 051	: 1000 000 000
$x^9 : 9 =$	5645	: 1000 000 000
$x^{10} : 10 =$	1693	: 1000 000 000
$x^{11} : 11 =$	513	: 1000 000 000
$x^{12} : 12 =$	156	: 1000 000 000
$x^{13} : 13 =$	48	: 1000 000 000
$x^{14} : 14 =$	14	: 1000 000 000
$x^{15} : 15 =$	4	: 1000 000 000
$x^{16} : 16 =$	1	: 1000 000 000
$x^{17} : 17 =$	0	

$lN\frac{3}{2} = 405465100 : 1000\ 000\ 000 = 0{,}405465100$

4. Man

4. Man kann, wie man (Num. 2.) gesehen hat, die Logarithmos artificiales (man nennet sie auch die Briggianischen, oder schlechtweg, die Logarithmen) nicht finden, ohne den Logarithmus naturalis von 10 zu haben. Man findet aber denselben durch die Logarithmos naturales von $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ und $\frac{5}{4}$ denn (§ 73.) wenn man $l\frac{3}{2}$ und $l\frac{4}{3}$ addiret, so kommt $l\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = l\frac{4}{2} = l2$. Wenn man $l2$ mit 2 multipliciret, so kommt $l2^2 = l4$. Addiret man $l\frac{5}{4} + l4$, so bekommt man $l5$. Wird endlich $l5 + l2$ addiret, so erhält man $l5.2 = l10$.

Man suche also $l\frac{4}{3}$ und $l\frac{5}{4}$ durch die Reihe $l\,\frac{1}{1-x}$

$$= x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{4}{3}$$

$$3 = 4 - 4x$$

$$0 = 1 - 4x$$

$$4x = 1$$

$$x = \tfrac{1}{4}$$

$$1 = 1000\,000\,000 : 1000\,000\,000$$

4 div.

$$\frac{1}{4} = x = 250\,000\,000 : 1000\,000\,000$$

$$\frac{1}{4^2} = x^2 = 62\,500\,000 :$$

$$\frac{1}{4^3} =$$

$$\frac{1}{4^3} = x^3 = 15\,625\,000 :$$

$$\frac{1}{4^4} = x^4 = 3906250 :$$

$$\frac{1}{4^5} = x^5 = 976562 :$$

$$\frac{1}{4^6} = x^6 = 244140 :$$

$$\frac{1}{4^7} = x^7 = 61035 :$$

$$\frac{1}{4^8} = x^8 = 15258 :$$

$$\frac{1}{4^9} = x^9 = 3814 :$$

$$\frac{1}{4^{10}} = x^{10} = 953 :$$

$$\frac{1}{4^{11}} = x^{11} = 238 :$$

$$\frac{1}{4^{12}} = x^{12} = 59 :$$

$$\frac{1}{4^{13}} \; x^{13} = 14 :$$

das übrige ist $= 0$

x	$=$	250 000 000 :	1000 000 000
$x^2 : 2$	$=$	31 250 000 :	
$x^3 : 3$	$=$	5 208 333 :	
$x^4 : 4$	$=$	976 562 :	

x^5	: 5	=	195 312 :
x^6	: 6	=	40 690 :
x^7	: 7	=	8 719 :
x^8	: 8	=	1 907 :
x^9	: 9	=	423 :
x^{10}	: 10	=	95 :
x^{11}	: 11	=	21 :
x^{12}	: 12	=	4 :
x^{13}	: 13	=	1 :

$$\mathrm{lN}\,\tfrac{4}{3} = \frac{287\,682\,067}{1000\,000\,000} = 0'287\,682\,067$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{5}{4}$$

$$4 = 5 - 5x$$

$$5x = 1$$

$$x = \tfrac{1}{5}$$

$1 = 1000\,000\,000 : 1000\,000\,000$

5 div.

$\frac{1}{5} = x$	=	200 000 000 :	1000 000 000
x^2	=	40 000 000 :	
x^3	=	8 000 000 :	
x^4	=	1 600 000 :	
x^5	=	320 000 :	
x^6	=	64 000 :	
x^7	=	12 800 :	
x^8	=	2 560 :	
x^9	=	512 :	
x^{10}	=	102 :	
x^{11}	=	20 :	
x^{12}	=	0 :	

x	$=$	200 000 000 :	1000 000 000
$x^2 : 2$	$=$	20 000 000 :	
$x^3 : 3$	$=$	2 666 666 :	
$x^4 : 4$	$=$	400 000 :	
$x^5 : 5$	$=$	64 000 :	
$x^6 : 6$	$=$	10 666 :	
$x^7 : 7$	$=$	1 828 :	
$x^8 : 8$	$=$	320 :	
$x^9 : 9$	$=$	56 :	
$x^{10} : 10$	$=$	10 :	
$x^{11} : 11$	$=$	1 :	

$$lN\tfrac{5}{4} = \frac{223\,143\,547}{1000\,000\,000} = 0'223\,143\,547$$

Da nun $lN\tfrac{3}{2} = 0'405\,465\,106$

und $lN\tfrac{4}{3} = 0'287\,682\,067$

so ist $lN2 = 0'693\,147\,173$

2 mult.

$lN4 = 1'386\,294\,346$

$lN\tfrac{5}{4} = 0'223\,143\,547$

$lN5 = 1'609\,437\,893$

$lN2 = 0'693\,147\,173$

$lN10 = 2'302\,585\,0|66 = m$ (Num. 2.)

die beyden letzten Ziffern sind, wie man leicht siehet, in diesen Rechnungen ungültig.

5. Wenn man nun die gebräuchlichen Logarithmen finden will, so müßen die natürlichen mit $m = \frac{23025850\ldots.}{10000000\ldots.}$ dividiret werden (Num. 2.)

$$\text{Z. E. } \frac{lN2}{m} = \frac{693\,147\,173}{1000\,000\,000} \cdot \frac{1000\,000\,000}{2302\,585\,066}$$

das ist $\frac{lN2}{m} = \frac{693\,147\,173}{2302\,585\,066}$

Und da der Nenner $= 1000\,000\,000\ldots$ seyn soll, so muß der Zähler z nach der Regel Detri gesucht werden, indem man schliesset:

$2302585066 : 693\,147\,173 = 1000000000 : z$

Inzwischen kann man die Logarithmen auf eine weit bequemere Art finden.

Erstlich, weil $lN10 = \frac{m}{1} = \frac{2302\,585\,066}{1000\,000\,000}$

so ist $\frac{1}{m} = \frac{1000\,000\,000}{2302\,585\,066}$

diesen Bruch verwandele man in einen zehntheiligen, so kommt $\frac{1}{m} = \frac{434\,294\,486}{1000\,000\,000}$

Zweytens, weil $lA\,\frac{1}{1-x} = \frac{1}{m}x + \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 + \frac{1}{4m}x^4 \ldots$ (Num. 3.), so multiplicire man $\frac{1}{m} = \frac{43429\ldots}{100000\ldots}$ mit x; so kommt $\frac{1}{m}x$; ferner $\frac{1}{m}x$ mit x, so kommt $\frac{1}{m}x^2$; ferner $\frac{1}{m}x^2$ mit x, so kommt $\frac{1}{m}x^3$, und immer so weiter;

man dividire die gefundenen Glieder mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. s. w. und addire die Quotienten; so kommt der verlangte Logarithmus.

Z. E. Es sey $\frac{1}{1-x} = 2$

$$1 = 2 - 2x$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{m} = 0{,}434294486$$

2 div.

$$\frac{1}{m}x = 0{,}217147243$$

$$\frac{1}{m}x^2 = 0{,}108573621$$

$$\frac{1}{m}x^3 = 0{,}054286810$$

$$\frac{1}{m}x^4 = 0.027143405$$

$$\frac{1}{m}x^5 = 0{,}013571702$$

$$\frac{1}{m}x^6 = 0{,}006785851$$

$$\frac{1}{m}x^7 = 0{,}003392925$$

 $\frac{1}{m}x^8 =$

$\frac{1}{m}x^{8} = 0{,}001696462$

$\frac{1}{m}x^{9} = 0{,}000848231$

$\frac{1}{m}x^{10} = 0{,}000424115$

$\frac{1}{m}x^{11} = 0{,}000212057$

$\frac{1}{m}x^{12} = 0{,}000106028$

$\frac{1}{m}x^{13} = 0{,}000053014$

$\frac{1}{m}x^{14} = 0{,}000026507$

$\frac{1}{m}x^{15} = 0{,}000013253$

$\frac{1}{m}x^{16} = 0{,}000006626$

$\frac{1}{m}x^{17} = 0{,}000003313$

$\frac{1}{m}x^{18} = 0{,}000001656$

$\frac{1}{m}x^{19} = 0{,}000000828$

$\frac{1}{m}x^{20} = 0{,}000000414$

$\frac{1}{m}x^{21} = 0'000000207$

$\frac{1}{m}x^{22} = 0'000000103$

$\frac{1}{m}x^{23} = 0'000000051$

$\frac{1}{m}x^{24} = 0'000000025$

$\frac{1}{m}x^{25}$ wird $= 0$

$\frac{1}{m}x = 0'217\,147\,243$

$\frac{1}{2m}x^{2} = \quad 54\,286\,810$

$\frac{1}{3m}x^{3} = \quad 18\,095\,603$

$\frac{1}{4m}x^{4} = \quad 6\,785\,851$

$\frac{1}{5m}x^{5} = \quad 2\,714\,340$

$\frac{1}{6m}x^{6} = \quad 1\,130\,975$

$\frac{1}{7m}x^{7} = \quad 484\,703$

$$\frac{1}{8m}x^{8} = 212\,057$$

$$\frac{1}{9m}x^{9} = 94\,247$$

$$\frac{1}{10m}x^{10} = 42\,411$$

$$\frac{1}{11m}x^{11} = 19\,277$$

$$\frac{1}{12m}x^{12} = 8\,835$$

$$\frac{1}{13m}x^{13} = 4\,078$$

$$\frac{1}{14m}x^{14} = 1\,893$$

$$\frac{1}{15m}x^{15} = 883$$

$$\frac{1}{16m}x^{16} = 414$$

$$\frac{1}{17m}x^{17} = 194$$

$$\frac{1}{18m}x^{18} = 92$$

$$\frac{1}{19m}x^{19} = 43$$

$$\frac{1}{20m}x^{20} \ldots\ldots = 36$$

$$lA2 = 0{\cdot}3010299|85$$

Der

Der Logarithmus naturalis von 10, m, in 33 Ziffern, die insgesamt richtig sind, ist

$$\frac{2302\ 585\ 092\ 994\ 045\ 684\ 017\ 991\ 454\ 684\ 35}{1000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00}$$

und $\frac{1}{m} = \frac{434294481\ 903\ 251\ 827\ 651\ 128\ 918\ 916\ 60}{1000000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 00}$

und die ersten 10 Logarithmen:

$l1 = 0$
$l2 = 0{\cdot}30\ 102\ 999\ 566\ 398\ 119\ 521\ 373\ 889\ 472\ 449$
$l3 = 0{\cdot}47\ 712\ 125\ 471\ 966\ 243\ 729\ 502\ 790\ 325\ 511$
$l4 = 0{\cdot}60\ 205\ 999\ 132\ 796\ 239\ 042\ 747\ 778\ 944\ 898$
$l5 = 0{\cdot}69\ 897\ 000\ 433\ 601\ 880\ 478\ 626\ 110\ 527\ 550$
$l6 = 0{\cdot}77\ 815\ 125\ 038\ 364\ 363\ 250\ 876\ 679\ 797\ 960$
$l7 = 0{\cdot}84\ 509\ 804\ 001\ 425\ 683\ 071\ 221\ 625\ 859\ 263$
$l8 = 0{\cdot}90\ 308\ 998\ 699\ 194\ 358\ 564\ 121\ 668\ 417\ 347$
$l9 = 0{\cdot}95\ 424\ 250\ 943\ 932\ 487\ 459\ 005\ 580\ 651\ 023$
$l10 = 1{\cdot}00\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$

Aufgabe.

§ 79. Vermittelst des bekannten Logarithmi einer Zahl a, den Logarithmus einer Zahl $a+d$, oder $a-d$ zu finden.

Auflösung.

1. Wenn man den Logarithmus von $a+d$ finden will, so suche man nach § 78. den Logarithmus von $\frac{a+d}{a}$; man addire $l\frac{a+d}{a} + la$; so kommt $l(a+d)$ (§ 73.)

2. Verlanget man den Logarithmus von $a-d$, so suche man $l\frac{a}{a-d}$; man subtrahire $l\frac{a}{a-d}$ von la; so kommt $l(a-d)$ (§ 73.) Z. E. Wenn man vermittelst des bekannten Logarithmi von 100000 den Logarithmus von 100003 finden will, so ist $a = 100000$, $d = 3$, und

$$\frac{a+d}{a} = \frac{100003}{100000} = \frac{1}{1-x}$$

$$\begin{array}{l} 100003 - 100003x = 100000 \\ 100000 \qquad\qquad\quad = 100000 \text{ subtr.} \\ \hline 3 - 100003x = 0 \\ \hline 3 = 100003x \\ \hline \frac{3}{100003} = x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{m} = 0{,}43429448190 \\ \qquad\qquad\qquad 3 \text{ mult.} \\ \hline \frac{3}{m} = 130288344570 \\ \hline \qquad\qquad 100003 \text{ div.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{m}x = 1302844 \\ \qquad\qquad 3 \text{ mult.} \\ \hline 3908532 \\ \hline \qquad 100003 \text{ div.} \end{array}$$

$$\frac{1}{m}x^2 = 39$$

$$\frac{1}{m}x^3 \text{ u. s. w. ist} = 0$$

$$\frac{1}{m}x =$$

$\frac{1}{m}x = 0'00001302844$

$\frac{1}{2m}x^2 = 0'00000000019$

$l\frac{100003}{100000} = 0'00001302863$

$l100000 = 5'00000000000$ (§ 74.) add.

$l100003 = 5'00001302863$

Gesezt also, man habe keine logarithmische Tabellen, oder man verlange den Logarithmus in mehr Ziffern als die Logarithmen in den Tabellen haben, so kann man nach dieser Aufgabe, durch Hülfe der 10 ersten Logarithmen (§ 78.) denselben für eine jede Zahl finden, die weniger als 33 Ziffern hat.

Z. E. Wenn man den Logarithmus von 824853 verlanget, so suche man die Logarithmen der Brüche:

$$\frac{82}{80},\ \frac{824}{820},\ \frac{8248}{8240},\ \frac{82485}{82480},\ \frac{824853}{824850}$$

denn $l8 + l10 = l80$; $l82 + l10 = l820$ u. s. w. (§ 73.)

und $l\frac{82}{80} + l80 = l82$; $l\frac{824}{820} + l820 = l824$ u. s. w. (§ 73.)

folglich, da $l8$ (§ 78.) und $l10$ (§ 74.) bekannt sind, so findet man durch die Logarithmen dieser Brüche:

$l824853 = 5'9163765574757$

§ 80.

§ 80. Man kann den Logarithmus einer Zahl, deren Logarithmus sich in den gewöhnlichen Tabellen nicht findet, das ist, die größer ist als 10000, wenn sie aus weniger als 9 Ziffern bestehet, auch nach folgender Regel finden.

1.) Man schneide von der Zahl, deren Logarithmus man suchet, 4 Ziffern zur linken Hand ab. Die aus diesen 4 Ziffern bestehende Zahl sey $= a$, und die aus den zur rechten überbleibenden Ziffern bestehende Zahl sey $= b$. Der Zahl b gebe man zum Nenner 1 mit so viel Nullen, als b Ziffern hat. Dieser Nenner sey $= c$.

2.) Man suche in den Tabellen $l(a+1)$ und la, und subtrahire la von $l(a+1)$.

3.) Die Differenz $l(a+1) - la$ multiplicire man mit $\frac{b}{c}$

4.) Zum Product $\frac{b}{c}\,l(a+1) - \frac{b}{c}\,la$ addire man $la + lc$; so kommt $\frac{b}{c}\,l(a+1) - \frac{b}{c}\,la + la + lc$ das ist der gesuchte Logarithmus.

Z. E. Wenn man den Logarithmus von 10003 suchet, so ist

$$a = 1000$$
$$b = 3$$
$$c = 10$$

$l(a+1)$

$$l(a+1) = l1001 = 3'0004341$$
$$la = l1000 = 3'0000000 \text{ subtr.}$$

$$l(a+1) - la = 4341$$
$$\frac{b}{c} = \frac{3}{10} \text{ mult.}$$

$$\frac{b}{c}l(a+1) - \frac{b}{c}la = \frac{13023}{10} = 1302$$
$$la + lc = 4'0000000 \text{ add.}$$

$$l10003 = 4'0001302$$

Wenn man den Logarithmus von 100034 suchet, so ist

$$a = 1000$$
$$b = 34$$
$$c = 100$$
$$l(a+1) = 3'0004341$$
$$la = 3.0000000 \text{ subtr.}$$

$$l(a+1) - la = 4341$$
$$\frac{b}{c} = \frac{34}{100} \text{ mult.}$$

$$\frac{b}{c}l(a+1) - \frac{b}{c}la = \frac{147594}{100} = 1475$$
$$la + lc = 5'0000000 \text{ add.}$$

$$l100034 = 5'0001475$$

Wenn man den Logarithmus von 10003456 suchet, so ist

$$l(a+1) - la = 4341$$
$$\frac{b}{c} = \frac{3456}{10000} \text{ mult.}$$

$$\frac{b}{c}l(a+1) - \frac{b}{c}la = \frac{15002496}{10000} = 1500$$

$$la + lc = 7{,}0000000 \text{ add.}$$

$$l10003456 = 7{,}0001500$$

Wolte man aber den Logarithmus von 100034567 einer Zahl die 9 Ziffern hat, nach dieser Regel suchen, so würde man 8'0001500 finden, und also den Logarithmus von 100034560 mit dem Logarithmus von 100034567, welcher = 8'00015009 ist, verwechseln.

Ja es gibt Fälle, da der Logarithmus für eine Zahl von 8 Ziffern, schon fehlerhaft ist, wenn er nach dieser Regel gesucht wird. Z.E. Wenn man den Logarithmus von 10000002 finden will, so ist

$$a = 1000$$
$$b = 0002 = 2$$
$$c = 10000$$
$$l(a+1) - la = 4341$$
$$\frac{b}{c} = \frac{2}{10000} \text{ mult.}$$

$$\frac{b}{c}l(a+1) - \frac{b}{c}la = \frac{8682}{10000} = 0$$

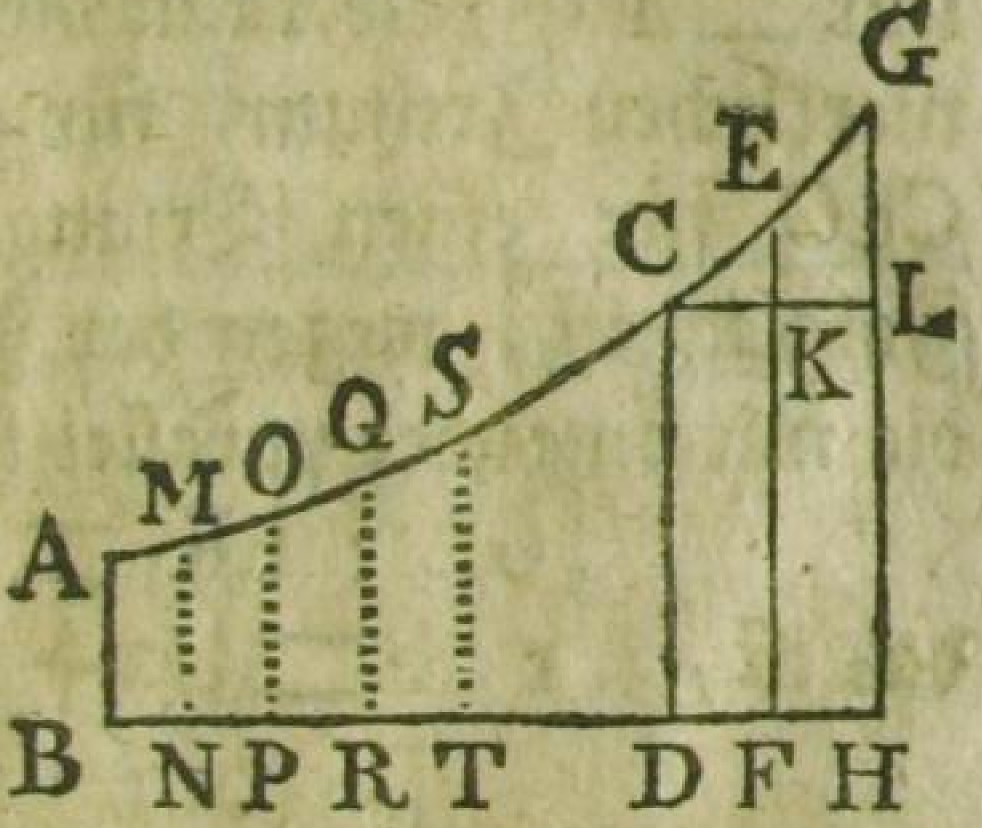
$$la + lc = 7{,}0000000 \text{ add.}$$

$$l10000002 = 7{,}0000000$$

Hier wird also l10000000 mit l10000002 verwechselt. Es ist demnach diese Regel nur für Zahlen die kleiner sind als 10000000, zuverläßig.

Beweis

Beweis dieser Regel.



Man gedenke sich eine gerade Linie BH, die in unendlich viele kleine gleiche Theile BN, NP, PR, RT u. s. f. getheilet worden. Aus den Theilungspunkten richte man Perpendikel AB, MN, OP, QR, ST u. s. w. auf, die in geometrischer Progression fortgehen; und es sey $AB = 1$;

so ist der Punct B der Logarithmus von AB

$$BN = lMN$$
$$BP = lOP$$

u. s. w.

und die krumme Linie, die durch die Puncte A, M, O, Q, S u. s. w. gehet, wird die logarithmische Linie genennet.

Man setze $CD = a$

$$EF = a + \frac{b}{c} \quad \left\{ \frac{b}{c} \text{ bedeutet einen Decimalbruch,} \right\}$$
$$GH = a + 1$$

und ziehe CL mit BH parallel; so ist $CD = KF = LH = a$ und demnach $EF - KF = EK = \frac{b}{c}$

und $GH - LH = GL = 1$

ferner $CK = DF = BF - BD = lEF - lCD = l\left(a + \frac{b}{c}\right) - la$

und $CL = DH = BH - BD = lGH - lCD = l(a + 1) - la$

Weil

Weil nun die Differenz zwischen GH und CD nur = 1 ist, so kann die krumme Linie CEG, ohne merklichen Irthum, für gerade, und also die Figur CLG für einen Triangel angenommen werden. Folglich ist, wegen der Perpendikel GH und EF, die mit einander parallel sind,

$$GL : EK = CL : CK$$

das ist, $1 : \frac{b}{c} = l(a+1) - la : l(a+\frac{b}{c}) - la$

das ist, wenn das erste Glied mit dem vierten, und das zweyte mit dem dritten multipliciret wird,

$$\frac{b}{c}\, l(a+1) - \frac{b}{c}\, la = l(a+\frac{b}{c}) - la$$

weil $a+\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$, so ist $l(a+\frac{b}{c}) = l\left(\frac{ac+b}{c}\right)$

und also $\frac{b}{c}\, l(a+1) - \frac{b}{c}\, la = l\left(\frac{ac+b}{c}\right) - la$

ferner $l\left(\frac{ac+b}{c}\right) = l(ac+b) - lc$ (§73. Num. 4.)

folglich $\frac{b}{c}\, l(a+1) - \frac{b}{c}\, la = l(ac-b) - lc - la$

$$la + lc = \quad + lc + la \text{ add.}$$

und $\frac{b}{c}\, l(a+1) - \frac{b}{c}\, la + la + lc = l(ac+b)$

das ist $\frac{b}{c}\, l(a+1) - \frac{b}{c}\, la + la + lc$ ist der Logarithmus der Zahl $ac+b$.

Z. E.

Z. E. Wenn l10003 gesucht wird, so ist

$$\begin{aligned} a &= 1000 \\ b &= 3 \\ c &= 10 \end{aligned}$$

folglich $ac + b = 1000 \cdot 10 + 3 = 10000 + 3 = 10003$

Wenn l100034 gesucht wird, so ist

$$\begin{aligned} a &= 1000 \\ b &= 34 \\ c &= 100 \end{aligned}$$

und also $ac + b = 100000 + 34 = 100034$

u. s. w.

Aufgabe.

§ 81. Zu finden, wie vielmahl etliche Dinge a, b, c, d u. s. w. deren Anzahl gegeben ist, ihre Lage verändern können.

Auflösung.

1. Zwey Dinge a und b können ihre Lage zweymahl verändern; a kann die erste, und b die zweyte Stelle bekommen, oder umgekehrt.

ab
ba

2. Wenn zu 2 Dingen a und b das dritte c hinzukommt, so kann c, die erste, zweyte, und dritte Stelle bekommen, ohne daß a und b ihre Lage gegen einander verändern; oder c kann so viel mahl in der ersten, so viel mahl in der zweyten, und so viel mahl in der dritten Stelle stehen, als a und b ihre Lage verändern können.

Die Zahl der Veränderungen ist also $= 3 \cdot 2$ (Num. 1.)

cab	cba
acb	bca
abc	bac

3. Wenn zu abc noch d hinzukommt, so kann d so viel mahl die erste, die zweyte, die dritte und die vierte Stelle einnehmen, als abc ihre Lage verändern können. Folglich ist die Zahl der Veränderungen $= 4 \cdot 3 \cdot 2$ (Num. 2.)

dcab	dacb	dabc	dcba	dbca	dbac
cdab	adcb	adbc	cdba	bdca	bdac
cadb	acdb	abdc	cbda	bcda	badc
cabd	acbd	abcd	cbad	bcad	bacd

4. Eben so siehet man, daß

5 Dinge $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ mahl

6 Dinge $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ mahl

ihre Lage verändern können, und s. w.

§ 82. Wenn unter den Dingen, von welchen man wissen will, wie viel mahl sie ihre Lage verändern können, einige einerley sind, z. E. wenn man aaabb hat, so suche man die Zahl der Veränderungen, die kommen würde, wenn sie alle verschieden wären, nemlich $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$;

Man suche auch die Zahl der Veränderungen für die Dinge, die einerley sind, für aaa, und bb, als ob sie verschieden wären, nemlich $2 \cdot 3$ und 2 (§ 81.)

Da nun aaa und bb nur 1 Lage haben können, so muß $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ mit $3 \cdot 2 \cdot 2$ dividiret werden, und für aaabb kommt $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

aaabb

aaabb abaab
aabba baaab
abbaa babaa
bbaaa baaba
aabab ababa

Also auch abccccddd können ihre Lage verändern $\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2} = 9\cdot8\cdot7\cdot5 = 2520$ mahl

und abcddddeeeefff

$$\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot\ 3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}$$

$= 15\cdot14\cdot13\cdot11\cdot5\cdot9\cdot8\cdot7 = 75675600$ mahl.

Aufgabe.

§ 83. Aus $r = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ u. s. f. x zu finden.

r Bedeutet eine bekannte Zahl, und a, b, c, d u. s. w. Die bekannten Coefficienten von x, x^2, x^3, x^4 u. s. w.

Auflösung.

1. Man setze $x = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + Er^5 + Fr^6$ u. s. w. A, B, C, D, E u. s. w. bedeuten hier die unbekannten Coefficienten.

2. Man suche x^2, x^3, x^4 u. s. w.

$x = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + Er^5$ u. s. w.
$x = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + Er^5$ u. s. w. mult.

$$\begin{array}{lllll} A^2r^2 & + ABr^3 & + ACr^4 & + ADr^5 & + AEr^6 \text{ u. s. w.} \\ & + AB & + B^2 & + BC & + BD \\ & & + AC & + BC & + C^2 \\ & & & + AD & + BD \\ & & & & + AE \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x^2 = A^2r^2 & + 2ABr^3 & + 2ACr^4 & + 2ADr^5 & + 2AEr^6 \ldots. \\ & & + B^2 & + 2BC & + 2BD \\ & & & & + C^2 \end{array}$$

Die Glieder, in welchen r^7, r^8, r^9 u. s. w. ist, sind weggelassen.

$$\begin{array}{llll} x = Ar & + Br^2 & + Cr^3 & + Dr^4 \ldots \text{mult.} \\ \hline A^3r^3 & + 2A^2Br^4 & + 2A^2Cr^5 & + 2A^2Dr^6 \ldots\ldots. \\ & + A^2B & + AB^2 & + 2ABC \\ & & + 2AB^2 & + 2ABC \\ & & + A^2C & + B^3 \\ & & & + 2ABC \\ & & & + A^2D \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 = A^3r^3 & + 3A^2Br^4 & + 3A^2Cr^5 & + 3A^2Dr^6 \ldots. \\ & & + 3AB^2 & + 6ABC \\ & & & + B^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x = Ar & + Br^2 & + Cr^3 \ldots. \text{mult.} \\ \hline A^4r^4 & + 3A^3Br^5 & + 3A^3Cr^6 \ldots. \\ & + A^3B & + 3A^2B^2 \\ & & + 3A^2B^2 \\ & & + A^3C \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x^4 = A^4r^4 & + 4A^3Br^5 & + 4A^3Cr^6 \ldots. \\ & & + 6A^2B^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x = Ar & + Br^2 \ldots \text{mult.} \\ \hline A^5r^5 & + 4A^4Br^6 \ldots \\ & + A^4B \\ \hline \end{array}$$

$x^5 =$

$x^5 = A^5r^5 + 5A^4Br^6 \dots$
$x^6 = A^6r^6 \dots$

3. Man multiplicire x mit a, x^2 mit b, x^3 mit c, u. s. w. so kommt:

$$\begin{array}{lllllll}
ax = & aAr & + aBr^2 & + aCr^3 & + aDr^4 & + aEr^5 & + aFr^6 \dots \\
bx^2 = & & + bA^2r^2 & + 2bABr^3 & + 2bACr^4 & + 2bADr^5 & + 2bAEr^6 \dots \\
 & & & & + bB^2 & + 2bBC & + 2bBD \\
 & & & & & & + bC^2 \\
cx^3 = & & & + cA^3r^3 & + 3cA^2Br^4 & + 3cA^2Cr^5 & + 3cA^2Dr^6 \dots \\
 & & & & & + 3cAB^2 & + 6cABC \\
 & & & & & & + cB^3 \\
dx^4 = & & & & + dA^4r^4 & + 4dA^3Br^5 & + 4dA^3Cr^6 \dots \\
 & & & & & & + 6dA^2B^2 \\
ex^5 = & & & & & + 2A^5r^5 & + 5eA^4Br^6 \dots \\
fx^6 = & & & & & & + fA^6r^6 \dots
\end{array}$$

u. s. w.

Weil nun $r = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ u. s. w.
und folglich $0 = -r + ax + bx^2 + cx^3 dx^4$ u. s. w.

$$\begin{array}{llll}
\text{so ist auch } 0 = -r & + aAr & + aBr^2 & + aCr^3 \dots \\
 & & + bA^2r^2 & + 2bABr^3 \dots \\
 & & & + cA^3r^3 \dots
\end{array}$$

und es ist gleichgültig, ob man die Glieder addire, und von der Summe derselben r subtrahire, damit 0 komme, oder ob man jedes Glied $= 0$ setze.

Man setze also jedes Glied $= 0$; so findet man den Werth der Coefficienten A, B, C, D u. s. w.

$$-r + aAr = 0 \quad r \text{ div.}$$
$$-1 + aA = 0$$
$$aA = 1$$
$$A = \frac{1}{a}$$

$$aBr^2 + bA^2r^2 = 0 \quad \text{—— } r^2 \text{ div.}$$

$$aB + bA^2 = 0$$

$$aB = -bA^2$$

$$B = \frac{-bA^2}{a}$$

$$aCr^3 + 2bABr^3 + cA^3r^3 = 0 \quad \text{—— } r^3 \text{ div.}$$

$$aC + 2bAB + cA^3 = 0$$

$$aC = -2bAB - cA^3$$

$$C = \frac{-2bAB - cA^3}{a}$$

Eben so findet man

$$D = \frac{-2baC - bB^2 - 3cA^2B - dA^4}{a}$$

$$E = (-2bAD - 2bBC - 3cA^2C - 3cAB^2 - 4dA^3B - eA^5) : a$$

$$F = (-2bAE - 2bBD - bC^2 - 3cA^2D - 6cABC - cB^3 - 4dA^3C - 6dA^2B^2 - 5eA^4B - fA^6) : a$$

Folglich ist

$$x = \frac{1}{a}r - \frac{bA^2}{a}r^2 - \frac{2bAB - cA^3}{a} \cdot r^3 \text{ u. s. w.}$$

4. Nun ist aber noch eine Regel nöthig, die Coefficienten B, C, D u. s. w. leichter als auf diese Weise zu finden. Um diese Regel zu entdecken, merke man,

I. Daß, wenn man setzet $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$ u. s. w. und diese großen Buchstaben addiret, die Summe in jedem Product gleich groß ist.

Z. E. in $C = -\frac{-2bAB - cA3}{a}$

sind 2 Producte AB und A^3

Setzet man anstatt AB, A+B, so kommt $1+2=3$ und für A^3 oder AAA, A+A+A, so kommt $1+1+1=3$.

Also auch in $D = \frac{-2bAC - bB^2 - 3cA^2B - dA^4}{a}$

ist AC, B^2, A^2B, A^4, oder AC, BB, AAB, AAAA

und A+C	=	1+3	= 4
B+B	=	2+2	= 4
A+A+B	=	1+1+2	= 4
A+A+A+A	=	1+1+1+1	= 4

u. s. w.

II. Diese Summe ist in B = A+A = 2
in C = 3
in D = 4
in E = 5
u. s. w.

und also immer dem Buchstaben gleich, dessen Werth bestimmt werden soll.

III. Man bezeichne auch die kleinen Buchstaben a, b, c, d u. s. f. mit 1, 2, 3, 4 u. s. w. so siehet man, daß der kleine Buchstab, der den grossen vorzusetzen ist, immer mit der Summe der Exponenten, die die großen Buchstaben haben, übereinkommt. Z. E.

in $C = \frac{-2bAB - cA^3}{a}$

ist in AB oder A^1B^1 die Summe der Exponenten $= 2$; und das vorgesezte b gilt 2;

A^3 hat 3 zum Exponenten, und das vorgesezte c gilt 3.

IV. Endlich man findet die dem kleinen Buchstaben vorzusetzende Zahl, wenn man die Zahl suchet, welche zeiget, wie viel mahl die großen Buchstaben ihre Lage verändern können (§ 81. 82.)

Z. E. In F ist ein Product — 6cABC, und ABC können ihre Lage verändern 3·2 das ist 6 mahl (§ 81.) eben daselbst ist ein Product — $6dA^2B^2$, und A^2B^2 oder AABB können ihre Lage verändern $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$ das ist 6 mahl (§ 82.)

Hieraus fliesset also diese Regel:

Erstlich, man bezeichne A, B, C, D u. s. w. wie auch a, b, c, d u. s. w. mit 1, 2, 3, 4 u. s. w. und man setze die Zahlen der Buchstaben, die vor dem, dessen Werth man bestimmen will, hergehen, auf alle mögliche Art zusammen, so daß immer ihre Summe der Zahl dieses Buchstabens gleich sey (Num. I. II.); dadurch findet man die Producte der großen Buchstaben A,B,C,D u. s. w.

Zweytens, in jedem Producte derselben addire man ihre Exponenten, und setze vor das Product den kleinen Buchstaben, den die Summe der Exponenten anzeiget (Num. III.)

Drittens, man setze vor eben dasselbe Product noch die Zahl, welche zeiget, wie viel mahl die großen Buchstaben ihre Lage verändern können. (Num. IV.)

Viertens, man gebe jedem Producte —, und dividire die Summe derselben mit a; so ist der Werth des Coefficienten gefunden.

Z. E.

Z. E. Wenn man E suchet, so findet man es also:

A . B . C . D

a . b . c . d . e

1 . 2 . 3 . 4 . 5

4+1 gibt	. . . .	AD
3+2	. . . .	BC
3+1+1	. . . .	A^2C
2+2+1	. . . .	AB^2
2+1+1+1	. . . .	A^3B
1+1+1+1+1	. . . .	A^5

In Ansehung der Exponenten bekommt man, bAD, bBC, cA^2C, cAB^2, dA^3B, eA^5 und endlich in Ansehung der verschiedenen möglichen Lagen:

$2bAD$, $2bBC$, $3cA^2C$, $3cAB^2$, $4dA^3B$, eA^5

folglich ist $E = (-2bAD - 2bBC - 3cA^2C - 3cAB^2 - 4dA^3B - eA^5) : a$

Also auch wenn F gesucht wird,

A . B . C . D . E

a . b . c . d . e . f

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

5.1 gibt	. . . . .	$-AE$,	$-bAE$,	$-2bAE$
4.2	. . . .	$-BD$,	$-bBD$,	$-2bBD$
4.1.1	. . . . . .	$-A^2D$,	$-cA^2D$,	$-3cA^2D$
3.3	. . . .	$-C^2$,	$-bC^2$,	$-bC^2$
3.2.1	. . . .	$-ABC$,	$-cABC$,	$-6cABC$
3.1.1.1	. . . . .	$-A^3C$,	$-dA^3C$,	$-4dA^3C$
2.2.2	. . . .	$-B^3$,	$-cB^3$,	$-cB^3$
2.2.1.1	. . . . . .	$-A^2B^2$,	$-dA^2B^2$,	$-6dA^2B^2$
2.1.1.1.1	. . . . .	$-A^4B$,	$-eA^4B$,	$-5eA^4B$
1.1.1.1.1.1	. . . .	$-A^6$,	$-fA^6$,	$-fA^6$

Also ist $F = (-2bAE - 2bBD - 3cA^2D - bC^2 - 6cABC - 4dA^3C - cB^3 - 6dA^2B^2 - 5eA^4B - fA^6) : a$

Will man die Probe machen, so nehme man eine unendliche Reihe, die sich summiren läßet, nemlich eine Geometrische (§ 56.). Z. E. Es sey $\frac{1}{3} = x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + 16x^5 + 32x^6$ u. s. w. hier gilt $r = \frac{1}{3}$; also ist

$x = \frac{1}{3}A + \frac{1}{9}B + \frac{1}{27}C + \frac{1}{81}D + \frac{1}{243}E + \frac{1}{729}F$ u. s. w.

$a = 1,\ b = 2,\ c = 4,\ d = 8,\ e = 16,\ f = 32$ u. s. w.

$$A = \frac{1}{a} = 1$$

$$B = \frac{-bA^2}{a} = -2$$

$$C = \frac{-2bAB - cA^3}{a} = -4.-2 - 4 = +8 - 4 = 4$$

$$D = \frac{-2bAC - bB^2 - 3cA^2B - dA^4}{a} = -4.4 - 2.4 - 12.-2 - 8 = -16 - 8 + 24 - 8 = -8$$

Man hat nicht nöthig weiter zu gehen; da $A = 1$, $B = -2$ $C = +4$, $D = -8$, so siehet man, daß $E = +16$, $F = -32$ u. s. w.

Also ist denn $x = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \frac{16}{243} - \frac{32}{729} \ldots$ Die Summe der Reihe $x + 2x^2 + 4x^3$ u. s. w. ist (§ 56.)

$$\frac{x^2}{x - 2x^2} = \frac{x}{1 - 2x}$$

folglich ist

$$\frac{x}{1 - 2x} = \frac{1}{3}$$

$$3x = 1 - 2x$$

$$5x = 1$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} \ldots\ldots = \frac{3}{5} \\ \text{und } \frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \frac{32}{729} \ldots\ldots = \frac{2}{5} \end{array}\right\} \S\ 56.$$

folglich $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{5}{27} - \frac{8}{81} \ldots = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = x$

Aufgabe.

§ 84. Aus $r = ax + cx^3 + ex^5 + gx^7 + ix^9 + lx^{11}$ u. s. w. x zu finden.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist von der Auflösung der vorhergehenden nicht unterschieden, als in so fern in dieser unendlichen Reihe die Potenzen, die einen geraden Exponenten haben, nemlich x^2, x^4, x^6 u. s. w. fehlen.

Anstatt also, daß in Ansehung der Reihe

$$r = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \ldots\ldots$$

$$x = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + Er^5 \ldots\ldots$$

ist in Ansehung dieser Reihe

$$r = ax + cx^3 + ex^5 \ldots\ldots$$

$$x = Ar + Cr^3 + Er^5 + Gr^7 + Ir^9 + Lr^{11} \ldots\ldots$$

und die Coefficienten A, C, E, G u. s. w. werden eben so wie § 83. gefunden, nur daß die Buchstaben B, D, F, H u. s. w. und also auch die Zahlen 2, 4, 6, 8 u. s. w. weggelassen werden.

Nemlich $A = \frac{1}{a}$

C findet man also

A

a c

1 3

1.1.1 gibt $-A^3$, $-cA^3$, $-cA^3$

$$C = \frac{-cA^3}{a}$$

E

5

A . C

a . c . e

1 . 3 . 5

3.1.1 gibt $-A^2C$, $-cA^2C$, $-3cA^2C$

1.1.1.1.1 ... $-A^5$, $-eA^5$, $-eA^5$

$$E = \frac{-3cA^2C - eA^5}{a}$$

G

7

A . C . E

a . c . e . g

1 . 3 . 5 . 7

5.1.1 gibt $-A^2E$, $-cA^2E$, $-3cA^2E$

3.3.1 ... $-AC^2$, $-cAC^2$, $-3cAC^2$

3.1.1.1.1 ... $-A^4C$, $-eA^4C$, $-5eA^4C$

1.1.1.1.1.1.1 ... $-A^7$, $-gA^7$, $-gA^7$

$$G = \frac{-3cA^2E - 3cAC^2 - 5eA^4C - gA^7}{a}$$

folglich $x = \frac{1}{a}r - \frac{cA^3}{a}r^3 - \frac{3cA^2C - eA^5}{a}r^5$

$-\frac{3cA^2E - 3cAC^2 - 5eA^4C - gA^7}{a}r^7$ u. s. w.

Aufgabe

Aufgabe.

§ 85. Aus dem gegebenen Logarithmo einer Zahl die Zahl selbst zu finden.

Auflösung.

Die gesuchte Zahl sey $= 1 + x$
und der gegebene Logarithmus derselben $= L$; so ist

$$L = \frac{1}{m}x - \frac{1}{2m}x^2 + \frac{1}{3m}x^3 - \frac{1}{4m}x^4 + \frac{1}{5m}x^5 - \frac{1}{6m}x^6 \ldots$$

(§ 78.) das ist, wenn mit m multipliciret wird,

$$Lm = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 \ldots\ldots$$

folglich $x = ALm + CL^2m^2 + CL^3m^3 + DL^4m^4 + EL^5m^5 \ldots$ (§ 83.) das ist (§ 83.)

$$x = \frac{1}{a}Lm - \frac{bA^2}{a}L^2m^2 - \frac{2bAB - cA^3}{a}L^3m^3 - \frac{2bAC - bB^2 - 3cA^2B - dA^4}{a}L^4m^4 \text{ u. s. w.}$$

Weil hier $a = 1$
und $A = \frac{1}{a} = 1$ (§ 83.)

so ist $x = Lm - bL^2m^2 - (2bB + c)L^3m^3 - (2bC + bB^2 + 3cB + d)L^4m^4$ u. s. w.

$$\left.\begin{aligned} B &= -\frac{bA^2}{a} \\ \text{und } C &= -\frac{2bAB - cA_3}{a} \end{aligned}\right\} \text{§ 83.}$$

das ist, weil hier $a = 1$, und $A = 1$,

und $\begin{matrix} B = -b \\ C = -2bB - c = +2b^2 - c \end{matrix}$

Wenn nun diese Werthe für B und C gesetzet werden, so kommt

$$x = Lm - bL^2m^2 - (-2b^2 + c)L^3m^3 - (5b^3 - 5bc + d)L^4m^4 \ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} b &= -\tfrac{1}{2} \\ c &= +\tfrac{1}{3} \\ d &= -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

folglich $-b = +\frac{1}{2}$

$-2b^2 + c = -\frac{1}{6}$ und $-(-2b^2 + c) = +\frac{1}{6}$

$5b^3 - 5bc + d = -\frac{1}{24}$ und $-(5b^3 - 5bc + d) = +\frac{1}{24}$

und demnach

$$x = Lm + \frac{1}{2}L^2m^2 + \frac{1}{2.3}L^3m^3 + \frac{1}{2.3.4}L^4m^4 \ldots.$$

gehet man weiter, so wird man finden $E = \frac{1}{2.3.4.5}$

$F = \frac{1}{2.3.4.5.6}$

u. s. w.

Also ist

$$x = Lm + \frac{1}{2}L^2m^2 + \frac{1}{2.3}L^3m^3 \quad \frac{1}{2.3.4}L^4m^4 + \frac{1}{2.3.4.5}L^5m^5 + \frac{1}{2.3.4.5.6}L^6m^6 \ldots$$

Man addire auf beyden Seiten 1, so kommt die gesuchte Zahl

$1 + x$

$$1 + x = 1 + Lm + \frac{1}{2} L^2m^2 + \frac{1}{2.3} L^3m^3 + \frac{1}{2.3.4} L^4m^4 + \frac{1}{2.3.4.5} L^5m^5 \ldots.$$

m bedeutet den Logarithmus naturalis von 10, nemlich

$$\frac{2302\,5850\ldots.}{1000\,0000\ldots.} \quad (\S\ 78.)$$

Z. E. Der gegebene Logarithmus sey 3·9095025 = L

Man laße, um der Bequemlichkeit willen, die Charakteristick, das ist, die erste Ziffer des Logarithmi weg, und setze $L = \frac{9095025}{10000000}$, und multiplicire nachher die gefundene Zahl mit 1000.

Weil $m = \frac{23025850}{10000000}$ (§ 78.)

so ist $Lm = \frac{9095025 \,.\, 23025850}{10000000 \,.\, 10000000}$

das ist, wenn wirklich multipliciret wird, und im Zähler und Nenner, die lezten 7 Ziffern weggelaßen werden,

$$Lm = \frac{20942068}{10000000}$$

1 =

$$
\begin{array}{rcrl}
1 & = & 10000000 & : 10000000 \\
Lm & = & 20942068 & : \\
L^2m^2 : 2 & = & 21928510 & : \\
L^3m^3 : 2.3 & = & 15307611 & : \\
L^4m^4 : 2.3.4 & = & 8014326 & : \\
L^5m^5 : 2.3.4.5 & = & 3356731 & : \\
L^6m^6 : 2\ldots 6 & = & 1171614 & : \\
L^7m^7 : 2\ldots 7 & = & 350514 & : \\
L^8m^8 : 2\ldots 8 & = & 91756 & : \\
L^9m^9 : 2\ldots 9 & = & 21350 & : \\
L^{10}m^{10} : 2.10 & = & 4471 & : \\
L^{11}m^{11} : 2.11 & = & 851 & : \\
L^{12}m^{12} : 2.12 & = & 148 & : \\
L^{13}m^{13} : 2.13 & = & 23 & : \\
L^{14}m^{14} : 2.14 & = & 3 & : \\
\hline
\text{Summe} & = & \frac{81189976}{10000000} &
\end{array}
$$

Man multiplicire diese Zahl mit 1000, weil man von ihrem Logarithmo 3·0000000, das ist, den Logarithmus von 1000 subtrahiret, und also die Zahl mit 100 dividiret hat (§ 73.), so kommt $\frac{81189976}{10000} = 8118 + \frac{9976}{10000}$, oder (weil $\frac{9976}{10000}$ nur um $\frac{24}{10000}$ kleiner ist als 1) = 8119 und 8119 ist die Zahl, deren Logarithmus 3·9095025 ist.

Aufgabe.

§ 86. Für einen gegebenen Logarithmum, den man in den logarithmischen Tabellen nicht genau findet,

findet, das ist, für einen Logarithmum, dessen Zahl ein falscher Bruch ist, die Zahl zu finden.

Auflösung.

Die Zahl, deren Logarithmus gegeben ist, sey $= a + x$ (x bedeutet einen Bruch.)

1. Man suche in den logarithmischen Tabellen den Logarithmum, der zunächst kleiner ist, als der gegebene, und subtrahire denselben von dem gegebenen; das ist man subtrahire la von $l(a+x)$; so kommt

$$l(a+x) - la$$

2. Eben denselben subtrahire man von dem Logarithmo, der zunächst größer ist, als der gegebene; das ist, man subtrahire la von $l(a+1)$; so kommt

$$l(a+1) - la$$

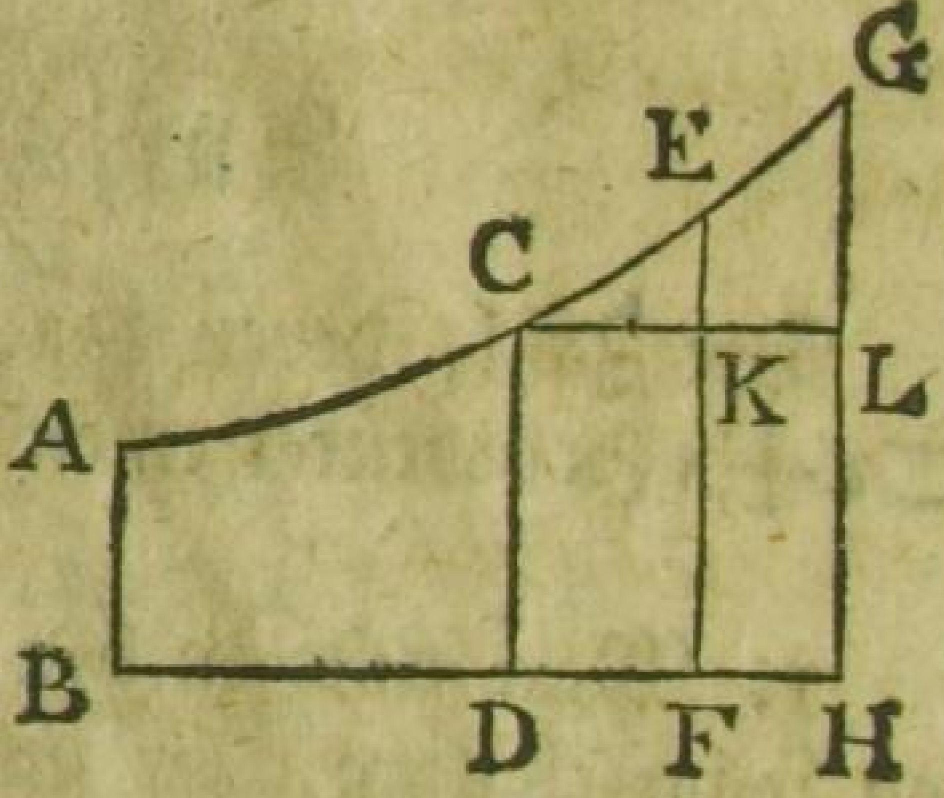
3. Man nehme die kleinste von beyden Differenzen zum Zähler, und die größeste zum Nenner an, und addire diesen Bruch zu der Zahl, deren Logarithmum man von dem gegebenen subtrahiret hat; so hat man die gesuchte Zahl. Das ist

$$a + x = a + \frac{l(a+x) - la}{l(a+1) - la}$$

und $$x = \frac{l(a+x) - la}{l(a+1) - la}$$

Beweis.

Wenn in der logarithmischen Linie ACEG, GL $= 1$ ist, so kann ohne merklichen Fehler, angenommen werden, daß $CL : CK = GL : EK$ wie (§ 80.) gezeiget worden.



Es sey also

$$GL = 1$$
$$EK = x$$
$$CD = a$$

so ist (§ 80.)

$$EF = a+x$$
$$GH = a+1$$
$$CL = l(a+1)-la$$
$$CK = l(a+x)-la$$

und demnach

$$l(a+1)-la : l(a+x)-la = 1 : x$$

folglich ist

$$\frac{l(a+x)-la}{l(a+1)-la} = x$$

Z. E. Der gegebene Logarithmus sey 3·3536330

$$3{\cdot}3537239 = l(a+1) = l2258$$
$$3{\cdot}3536330 = l(a+x)$$
$$3{\cdot}3535316 = la \quad = l2257$$

$$1014 = l(a+x)-la$$
$$1923 = l(a+1)-la$$

Die Zahl also für den Logarithmus 3.3536330 ist

$$2257 + \frac{1014}{1923}$$

Wenn

Wenn der gegebene Logarithmus die Characteristik 3 hat, so findet man die gesuchte Zahl genauer, als wenn die Characteristik 0, 1, oder 2 ist.

Denn im ersten Falle ist a größer als im zweyten; wenn aber a größer wird, so wird die gerade Linie CL kleiner.

Denn $CL = l(a+1) - la$
das ist (§ 73.)

$$CL = l\frac{a+1}{a}$$

Man setze aber $\frac{a+b+1}{a+b}$ an statt $\frac{a+1}{a}$

so ist $CL = l\frac{a+b+1}{a+b}$

Man bringe die Brüche $\frac{a+b+1}{a+b}$ und $\frac{a+1}{a}$ zu einerley Benennung, so ist

$$\frac{a+b+1}{a+b} = \frac{a^2+ab+a}{a^2+ab}$$

und $$\frac{a+1}{a} = \frac{a^2+ab+a+b}{a^2+ab}$$

und man siehet, daß $\frac{a+b+1}{a+b}$ um $\frac{b}{a^2+ab}$ kleiner ist als $\frac{a+1}{a}$ und folglich $l\frac{a+b+1}{a+b} < l\frac{a+1}{a}$

Wenn aber CL kleiner wird, so wird auch die krumme Linie CEG kleiner; und je kleiner dieselbe ist, desto mehr kann sie ohne Irthum für eine gerade Linie angenommen werden, ohne welche Supposition die Analogie

$$CL : CK = GL : EK$$

falsch seyn würde. (§ 80.)

Wenn also der gegebene Logarithmus zur Characteristik 0, 1, oder 2 hat, so addire man zu derselben im ersten Falle 3, im zweyten 2, im dritten 1, oder welches einerley ist, man addire zum Logarithmus 3'0000000, 2'0000000, 1'0000000; und dividire hernach die gefundene Zahl im ersten Falle mit 1000, im zweyten mit 100, im dritten mit 10 (§ 73. 74.)

Z. E. Der gegebene Logarithmus sey 0'2345600

$$\begin{aligned} 3'2347703 &= l1717 \\ 3'2345600 &= l1000y \\ 3'2345173 &= l1716 \\ \hline 427 &= l1000y - l1716 \\ 2530 &= l1717 - l1716 \end{aligned}$$

$$1716 + \frac{427}{2530} = 1000y$$

oder:

$$1716 + \frac{168}{1000} = 1000y$$

1000 mult.

$$1716000 + 168 = 1000000y$$

das ist $1716168 = 1000000y$

1000000 div.

1716168

$$\frac{1716168}{1000000} = y$$

das ist $\frac{1716168}{1000000}$ ist die Zahl, deren Logarithmus 0'2345600 ist.

Von den höhern Gleichungen.

Erklärung.

§ 87. Der Werth der unbekannten Zahl in einer Gleichung wird die Wurzel der Gleichung genennet. Eine positive Wurzel heisset eine wahre und eine negative, eine falsche Wurzel. Z.E. in der Gleichung $x^2 + x = 42$ ist eine wahre Wurzel $+ 6$, und eine falsche -7;

setzet man $x = +6$

so ist $x^2 + x = 36 + 6 = 42$

setzet man $x = -7$

so ist $x^2 + x = -7^2 - 7 - 7 = + 49 - 7 = 42$.

Aufgabe.

§ 88. Die Eigenschaften der Gleichungen zu finden.

Auflösung.

Man setze $x = A$, $x = B$, $x = C$ u. s. w. reducire jede Gleichung auf 0, und multiplicire sie mit einander, so wird man ihre Eigenschaften entdecken können.

$$\begin{array}{l} x - A = 0 \\ x - B = 0 \text{ mult.} \\ \hline x^2 - Ax + AB \\ \quad - Bx \qquad = 0 \\ \hline x - C = 0 \text{ mult.} \\ \hline x^3 - Ax^2 + ABx - ABC = 0 \\ \quad - Bx^2 + ACx \\ \quad - Cx^2 + BCx \\ \hline x - D = 0 \text{ mult.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^4 - Ax^3 & + ABx^2 & - ABCx & + ABCD \\ \quad - Bx^3 & + ACx^2 & - ABDx & \quad = 0 \\ \quad - Cx^3 & + BCx^2 & - ACDx & \\ \quad - Dx^3 & + ADx^2 & - BCDx & \\ & + BDx^2 & & \\ & + CDx^2 & & \end{array}$$

u. s. w.

I. Man siehet, daß jede Gleichung so viele Wurzeln hat, als in dem Exponenten der höchsten Potenz von x Einheiten sind. Nemlich die einfache Gleichung hat 1 Wurzel; die quadratische hat 2; die cubische 3, die biquadratische 4 Wurzeln u. s. w.

II. Wenn man jeder Wurzel im 2ten 4ten, 6ten, 8ten Gliede u. s. w. das verkehrte Zeichen gibt, hingegen im 3ten, 5ten, 7ten, 9ten Gliede u. s. w. das Zeichen unverändert läßet, so ist die Summe der Wurzeln der bekannte Coefficient des zweyten Gliedes; die Summe der Produkte aus jeden

den 2 Wurzeln ist der bekannte Coefficient des 3ten Gliedes; die Summe der Produkte aus jeden 3 Wurzeln der bekannte Coefficient des 4ten Gliedes u. s. w.

Z. E. Wenn die Wurzeln sind $x = A$, $x = B$, $x = C$ so ist $- A - B - C$ der bekannte Coefficient des 2ten Gliedes; $+ AB + AC + BC$ der bekannte Coefficient des 3ten Gliedes; und $- A. - B. - C = - ABC$ das vierte Glied.

III. Wenn eine Gleichung keine unmögliche Wurzeln hat, so sind in derselben so viele wahre Wurzeln, so viel mahl als $-$ auf $+$, oder $+$ auf $-$ unmittelbar folget, und so viel falsche Wurzeln, so viel mahl als $+$ auf $+$, oder $-$ auf $-$ unmittelbar folget.

Man nehme z. E. eine cubische Gleichung; so gibt es 8 mögliche Fälle.

1.) $x = + A$
$x = + B$
$x = + C$

$$\begin{array}{llll} x^3 - Ax^2 & + ABx & - ABC & \\ - Bx^2 & + ACx & & = 0 \\ - Cx^2 & + BCx & & \end{array}$$

Hier sind die Zeichen
$+ - + -$
und 3 wahre Wurzeln.

2.) $x = - A$
$x = - B$
$x = - C$

In diesem Falle ist die Gleichung (Num. II.)

$$\begin{array}{llll} x^3 + Ax^2 & + ABx & + ABC & \\ \quad + Bx^2 & + ACx & & = 0 \\ \quad + Cx^2 & + BCx & & \end{array}$$

Hier sind die Zeichen

$$+ + + +$$

und 3 falsche Wurzeln.

3.) $x = - A$
$x = + B$
$x = + C$

Die Gleichung ist (Num. II.)

$$\begin{array}{llll} x^3 + Ax^2 & - ABx & + ABC & \\ \quad - Bx^2 & - ACx & & = 0 \\ \quad - Cx^2 & + BCx & & \end{array}$$

Es sey $A = a$
$B = a + b$
$C = a + b + c$

so ist $+ A = + a$
$- B = - a - b$
$- C = - a - b - c$

Summe $= - a - 2b - c$

$- AB = - a^2 - ab$
$- AC = - a^2 - ab - ac$
$+ BC = + a^2 + 2ab + b^2 + ac + bc$

Summe $= - a^2 + b^2 + bc$

Hier hat also das erste Glied $+$
das zweyte $-$
das dritte $\pm$

(nemlich $+$, wenn $b^2 + bc > a^2$, und $-$, wenn $b^2 + bc < a^2$)

und das vierte $+$

In

In beyden Fällen zeigen die Zeichen 2 wahre, und 1 falsche Wurzel.

4.) $x = + A$
$x = - B$
$x = + C$

Die Gleichung ist (Num. II.)

$$\begin{aligned} x^3 - Ax^2 - ABx + ABC \\ + Bx^2 + ACx \quad = 0 \\ - Cx^2 - BCx \end{aligned}$$

$-A = -a$	$-AB = -a^2 - ab$
$+B = +a + b$	$+AC = +a^2 + ab + ac$
$-C = -a - b - c$	$-BC = -a^2 - 2ab - b^2 - ac - bc$
Summe $= -a - c$	Summe $= -a^2 - 2ab - b^2 - bc$

Hier sind also die Zeichen
$+ - - +$
und 2 wahre und 1 falsche Wurzel.

Gehet man auf diese Weise weiter, so findet man

5.) Wenn $x = + A$
$x = + B$
$x = - C$
die Zeichen $+ \pm - +$

6.) Wenn $x = - A$
$x = + B$
$x = - C$
die Zeichen $+ \pm - -$

7.) Wenn $x = - A$
$x = + B$
$x = - C$
die Zeichen $+ + - -$

 und

und endlich 8.) Wenn $x = + A$
$x = - B$
$x = - C$
die Zeichen $+ + \pm -$

IV. Das lezte oder das völlig bekannte Glied ist das Produkt aus allen Wurzeln.

Nemlich in der quadratischen Gleichung ist daßelbe $= AB$; und die Wurzeln sind A und B; in der cubischen Gleichung ist es ABC; und die Wurzeln sind A, B, u. C u. s. w.

§ 89. Man kann, wenn man will, die Wurzel einer Gleichung um eine beliebige Zahl vermehren oder vermindern.

Z. E. Wenn man zu x in der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ 1 addiren will, so setze man

$$\frac{x + 1 = y}{x = y - 1}, \text{ und } -10x = -10y + 10$$

$$x^2 = y^2 - 2y + 1, \text{ und } -3x^2 = -3y^2 + 6y - 3$$

$$\begin{array}{rcrrrr} x^3 & = & y^3 & -3y^2 & +3y & -1 \\ -3x^2 & = & & -3y^2 & +6y & -3 \\ -10x & = & & & -10y & +10 \\ +24 & = & & & & +24 \\ \hline \end{array}$$

$$y^3 - 6y^2 - y + 30 = 0$$

Man verfähret eben so, wenn man von x etwas subtrahiren will.

Aufgabe.

§ 90. Die Wurzel einer Gleichung mit einer gegebenen Zahl multipliciren, oder dividiren.

Auflö-

Auflösung.

Die Gleichung sey $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ und die Zahl, womit x multipliciret, oder dividiret werden soll, $= m$

I. Wenn x mit m multipliciret werden soll, so sey

$$\begin{array}{l} mx = y \\ \hline \end{array} \quad m \text{ div.}$$

$$x = \frac{y}{m}$$

$$x^2 = \frac{y^2}{m^3}$$

$$x^3 = \frac{y^3}{m^3}$$

folglich ist

$$x^3 - ax^2 + bx - c = \frac{y^3}{m^3} - \frac{ay^2}{m^2} + \frac{by}{m} - c$$

und

$$\frac{y^3}{m^3} - \frac{ay^2}{m^2} + \frac{by}{m} - c = 0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \; m^3 \text{ mult.}$$

$$y^3 - may^2 + m^2by - m^3c = 0$$

Da nun $1 \,.\, m \,.\, m^2 \,.\, m^3$ eine geometrische Progression ist, so fliesset daraus folgende Regel.

1.) Man setze unter die Gleichung eine geometrische Progression, die sich von 1 anfänget, und deren zweytes Glied der Zahl gleich ist, mit welcher die Wurzel multipliciret werden soll.

2.) Man nehme anstatt des Buchstabens, der die unbekannte Wurzel bezeichnet, einen andern (y anstatt x) und multiplicire alsdann das erste Glied der Gleichung mit 1, das zweyte Glied der Gleichung mit dem zweyten Gliede der Progression, das dritte Glied der Gleichung mit dem dritten Gliede der Progression u. s. w.; so hat man eine neue Gleichung

$$y^3 - may^2 + m^2by - m^3c = 0$$

in welcher $y = mx$

Wenn ein oder etliche Glieder in der Gleichung fehlen, so müßen diejenigen Glieder der Progression, womit die fehlenden Glieder der Gleichung multipliciret werden sollten, auch weggelassen werden.

Denn wenn z. E. $- ax^2 = 0$ ist

in der Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

so ist auch $\frac{-ay^2}{m^2} = -ax^2 = 0$

in der Gleichung $\frac{y^3}{m^3} - \frac{ay^2}{m^2} + \frac{by}{m} - c = 0$

und $- may^2 = 0$

in der Gleichung $y^3 - may^2 + m^2by - m^3c = 0$

Man multiplicire also in diesem Falle

$$\begin{array}{lcccccccc} & x^3 & * & + & bx & - & c & = & 0 \\ \text{mit} & 1 & .\,m & . & m^2 & . & m^3 & & \\ \hline \text{so kommt} & y^3 & .\ * & + & m^2by & - & m^3c & = & 0 \end{array}$$

II. Wenn

II. Wenn x in der Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ mit m dividiret werden soll,

so sey $\frac{x}{m} = y$

$$\frac{x}{m} = y \quad m \text{ mult.}$$

$$x = my$$

$$x^2 = m^2y^2$$

$$x^3 = m^3y^3$$

Und demnach ist

$$x^3 - ax^2 + bx - c = m^3y^3 - am^2y^2 + bmy - c$$

und $m^3y^3 - am^2y^2 + bmy - c = 0$ m^3 div.

$$y^3 - \frac{ay^2}{m} + \frac{by}{m^2} - \frac{c}{m^3} = 0$$

Wenn man also die Wurzel x in $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ mit m dividiren will, so nehme man für x einen andern Buchstaben, und dividire die Glieder der Gleichung $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ mit den Gliedern der geometrischen Progression

$$1 \,.\, m \,.\, m^2 \,.\, m^3$$

so kommt eine andere Gleichung

$$y^3 - \frac{ay^2}{m} + \frac{by}{m^2} - \frac{c}{m^3} = 0$$

in welcher $\frac{x}{m} = y$

Aufgabe.

§ 91. Aus einer Gleichung das zweyte Glied wegschaffen.

Auflö-

Auflösung.

Die Gleichung sey $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
Man setze $x + m = y$

so ist $x = y - m$, und $+bx = +by - bm$

$x^2 = y^2 - 2my + m^2$, und $+ax^2 = +ay^2 - 2amy + am^2$

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 = & y^3 - 3my^2 & + 3m^2y & - m^3 \\ +ax^2 = & + ay^2 & - 2amy & + am^2 \\ +bx = & & + by & - bm \\ +c = & & & + c \end{array}\right\} = 0$$

Weil nun das zweyte Glied wegfallen soll, so setze man $-3my^2 + ay^2 = 0$ y^2 div.

$$-3m + a = 0$$

$$a = 3m$$

$$\tfrac{1}{3} a = m$$

also ist $y = x + m = x + \frac{1}{3}a$

Das zweyte Glied der Gleichung $+ ax^2$ ist positiv; wenn es aber negativ ist, so kommt $m = -\frac{1}{3}a$, und in diesem Falle ist $y = x + m = x - \frac{1}{3}a$.

Nun merke man noch, daß der Nenner 3 in $\frac{1}{3}$ a der Coefficient ist in dem zweyten Gliede der Potenz $x^3 = y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3$
und daß derselbe in jeder Potenz dem Exponenten des ersten Gliedes gleich ist; so hat man folgende Regel:

Wenn man das zweyte Glied aus einer Gleichung wegschaffen will, so addire man zu der Wurzel

zel den Quotienten, welcher durch die Division des Coefficienten des zweyten Gliedes mit dem Exponenten des ersten Gliedes entstehet (§ 89.), wenn das zweyte Glied positiv ist; wenn aber dasselbe negativ ist, so subtrahire man von der Wurzel diesen Quotienten.

Z.E. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

$$x - \tfrac{3}{3} = x - 1 = y$$

$$x = y + 1$$

$$x^2 = y^2 + 2y + 1$$

$$\left.\begin{array}{rcrrrr} x^3 & = & y^3 + & 3y^2 + & 3y + & 1 \\ -3x^2 & = & & -3y^2 - & 6y - & 3 \\ -10x & = & & & -10y - & 10 \\ +24 & = & & & & +24 \end{array}\right\} \text{add.}$$

$$y^3 \; * \; - 13y + 12 = 0$$

und $y = x - 1$

Aufgabe.

§ 92. Aus einer Gleichung die Brüche wegschaffen.

Auflösung.

Man multiplicire die Wurzel der Gleichung mit einer Zahl, welche machet, daß die Nenner wegfallen (§ 90.)

Z.E. Die Gleichung sey $x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{72}x + \frac{1}{72} = 0$ Man multiplicire x mit 4 (§ 90.)

$$1 \;,\; 4 \;,\; 16 \;,\; 64$$

so

so kommt $m^3 - m^2 - \frac{10}{9}m + \frac{8}{9} = 0$
und $m = 4x$
Man multiplicire m mit 3

$$m^3 - m^2 - \tfrac{10}{9}m + \tfrac{8}{9} = 0$$
$$1 \,.\, 3 \,.\, 9 \,.\, 27 \,.$$

so kommt $y^3 - 3y^2 - 10y + 24 = 0$,
und $y = 3m$

Weil nun $y = 3m$ und $m = 4x$
so ist $y = 3.4x = 12x$

Man hätte also x gleich anfangs mit 12 multipliciren können.

$$x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{72}x + \tfrac{1}{72} = 0$$
$$1 \,.\, 12 \,.\, 144 \,.\, 1828$$

$$y^3 - 3y^2 - 10y + 24 = 0$$

Ein ander Exempel.

Die Gleichung sey $x^3 + 100x^2 - 3x - \frac{4658}{3375} = 0$
Weil $3375 = 5.675 = 5.5.135 = 5.5.5.27$, so siehet man, daß der Bruch wegfallen muß, wenn die Wurzel x mit 3.5 multipliciret wird.

$$x^3 + 100x^2 - 3x - \tfrac{4658}{3375} = 0$$
$$1 \,.\, 15 \,.\, 225 \,.\, 3375$$

$$m^3 + 1500m^2 - 675m - 4658 = 0$$
und $m = 15x$

Aufgabe.

§ 93. Die rationalen Wurzeln einer höhern Gleichung zu finden.

Auflö-

Auflösung.

I. Die Gleichung sey $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$

Man setze in derselben $x = 0$
$x = 1$
$x = 2$
$x = 3$
$x = 4$

so kommt
$-c = 0$
$1 - a + b - c = 0$
$8 - 4a + 2b - c = 0$
$27 - 9a + 3b - c = 0$
$64 - 16a + 4b - c = 0$

Man subtrahire die erste von diesen Zahlen von der zweyten, die zweyte von der dritten, u. s. w. Eben so mache man es mit den Differenzen; man subtrahire die erste von der zweyten, die zweyte von der dritten u. s. w. so kommt endlich immer eben dieselbe Differenz.

	A	B	C	D
$x=0$	$0 = -c$			
$x=1$	$0 = 1 - a + b - c$	$1 - a + b$		
$x=2$	$0 = 8 - 4a + 2b - c$	$7 - 3a + b$	$6 - 2a$	
$x=3$	$0 = 27 - 9a + 3b - c$	$19 - 5a + b$	$12 - 2a$	6
$x=4$	$0 = 64 - 16a + 4b - c$	$37 - 7a + b$	$18 - 2a$	6
$x=5$	$0 = 125 - 25a + 5b - c$	$61 - 9a + b$	$24 - 2a$	6

u. s. w.

Die folgenden Zahlen in den Reihen A, B, C und D laßen sich, wie man siehet, durch ein bloses addiren finden; nemlich man addire das zweyte Glied 6 in der Reihe D zu dem zweyten Gliede $12 - 2a$ in der Reihe C, so kommt $18 - 2a$; dieses gefundene dritte Glied in C addire man zu dem dritten Gliede in B, $19 - 5a + b$; so kommt $37 - 7a + b$; dieses gefundene vierte Glied in B addire man zu dem vierten Gliede in A, $27 - 9a + 3b - c$, so ist das fünfte Glied in A $= 64 - 16a + 4b - c$, und für $x = 4$ kommt also $0 = 64 - 16a + 4b - c$.

Wenn nun die Gleichung rationale Wurzeln hat, so muß man dieselben durch die Suppositionen

$$x = 0$$
$$x = 1$$
$$x = 2$$
u. s. w.

endlich nothwendig finden; und man hat sie gefunden, wenn die Zahl in A wirklich $= 0$ geworden ist.

Will man also die rationalen Wurzeln finden,

1.) So reducire man die Gleichung auf 0

2.) Man leide im ersten Gliede, das ist, in dem Gliede, worinn x zu der höchsten Potenz erhoben worden, keinen andern Coefficienten als 1.

3.) Man gehe in der Bestimmung der Glieder in den Reihen D, C, B, A so lange fort, bis die Zahl in A $= 0$ wird.

In den cubischen Gleichungen ist unter den Suppositionen

$$x = 0$$
$$x = 1$$
$$x = 2$$
u. s. w.

die letzte, die man nöthig hat, um die übrigen Glieder in A zu finden,

$$x = 3$$

und die letzte Differenz ist $= 2.3 = 6$

In

In den biquadratischen Gleichungen, ist die letzte nöthige Supposition

$$x = 4$$

und die letzte Differenz $= 2.3.4 = 24$

In den Gleichungen der 5ten Potenz ist die letzte nöthige Supposition

$$x = 5$$

und die letzte Differenz $= 2.3.4.5 = 120$

u. s. w.

Z. E. Es sey $3x^3 + 233x = 46x^2 + 390$

$$\frac{\begin{array}{r} 46x^2 + 390 = 46x^2 + 390 \text{ subtr.} \end{array}}{\begin{array}{r} 3x^3 - 46x^2 + 233x - 390 = 0 \end{array}}$$

$$\overline{x^3 - \frac{46}{3}x^2 + \frac{233}{3}x - 130 = 0} \quad 3 \text{ div.}$$

Man multiplicire die Wurzel x mit 3 (§92.)

$$1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 27$$

$$\overline{m^3 - 46m^2 + 699m - 3510 = 0}$$

und $m = 3x$

Es sey nun $m = 0$, so ist $-3510 = 0$

$m = 1$, so ist $-2856 = 0$

$m = 2$, so ist $-2288 = 0$

$m = 3$, so ist $-1800 = 0$

$m = 0$	$0 = -3510$			
$m = 1$	$0 = -2856$	$+654$		
$m = 2$	$0 = -2288$	$+568$	-86	
$m = 3$	$0 = -1800$	$+488$	-80	$+6$
$m = 4$	$0 = -1386$	$+414$	-74	$+6$
$m = 5$	$0 = -1040$	$+346$	-68	$+6$
$m = 6$	$0 = -756$	$+284$	-62	$+6$
$m = 7$	$0 = -528$	$+228$	-56	$+6$
$m = 8$	$0 = -350$	$+178$	-50	$+6$
$m = 9$	$0 = -216$	$+134$	-44	$+6$
$m = 10$	$0 = -120$	$+96$	-38	$+6$
$m = 11$	$0 = -56$	$+64$	-32	$+6$
$m = 12$	$0 = -18$	$+38$	-26	$+6$
$m = 13$	$0 = 0$	$+18$	-20	$+6$
$m = 14$	$0 = +4$	$+4$	-14	$+6$
$m = 15$	$0 = 0$	-4	-8	$+6$
$m = 16$	$0 = -6$	-6	-2	$+6$
$m = 17$	$0 = -8$	-2	$+4$	$+6$
$m = 18$	$0 = 0$	$+8$	$+10$	$+6$

Es ist also $m = 13$
$m = 15$
$m = 18$

oder durch jede von diesen Suppositionen wird

$$m^3 - 46m^2 + 699m - 3510 = 0$$

Denn wenn $m = 13$

so ist $m^3 = +2197$

$-46m^2 = -7774$ add.

$m^3 - 46m^2 = -5577$

$+699m = +9087$ add.

$m^3 -$

$$m^3 - 46m^2 + 699m = + 3510$$
$$\qquad - 3510 = - 3510 \text{ add.}$$
$$m^3 - 46m^2 + 699m - 3510 = 0.$$

Eben so wird man finden, daß die Summe der Glieder $= 0$ wird, wenn man setzet

$$m = 15$$
$$\text{oder } m = 18$$

Weil nun $m = 13$
$m = 15$
$m = 18$
und $\frac{1}{3}\, m = x$

so ist in der gegebenen Gleichung

$$3x^3 + 233x = 46x^2 + 390$$

$$x = \frac{13}{3}$$
$$x = \frac{15}{3} = 5$$
$$x = \frac{18}{3} = 6$$

Ein ander Exempel.

Es sey $x^4 - 10x^3 - 21x^2 - 432 = 0$

Man setze $x = 0$ so kommt $- 432 = 0$
$x = 1 \ldots\ldots - 462 = 0$
$x = 2 \ldots\ldots - 580 = 0$
$x = 3 \ldots\ldots - 810 = 0$
$x = 4 \ldots\ldots - 1152 = 0$

	A				
$x = 0$	$0 = -432$				
$x = 1$	$0 = -462$	-30			
$x = 2$	$0 = -580$	-118	-88		
$x = 3$	$0 = -810$	-230	-112	-24	
$x = 4$	$0 = -1152$	-342	-112	0	$+24$
$x = 5$	$0 = -1582$	-430	-88	$+24$	$+24$
$x = 6$	$0 = -2052$	-470	-40	$+48$	$+24$
$x = 7$	$0 = -2490$	-438	$+32$	$+72$	$+24$
$x = 8$	$0 = -2800$	-310	$+128$	$+96$	$+24$
$x = 9$	$0 = -2862$	-62	$+248$	$+120$	$+24$
$x = 10$	$0 = -2532$	$+330$	$+392$	$+144$	$+24$
$x = 11$	$0 = -1642$	$+890$	$+560$	$+168$	$+24$
$x = 12$	$0 = 0$	$+1642$	$+752$	$+192$	$+24$
$x = 13$	$0 = +2610$	$+2610$	$+968$	$+216$	$+24$

In der Gleichung $x^4 - 10x^3 - 21x^2 - 432 = 0$ ist also $x = 12$

Und da alle Zahlen, die $x = 13$ gegen über stehen, positiv sind, so kann in der Reihe A kein Glied weiter $= 0$ werden, woraus man siehet, daß $x = 12$ die einzige wahre rationale Wurzel der Gleichung ist.

Ein ander Exempel.

Es sey $x^4 + 3x^3 - 207x^2 - 194x - 3360 = 0$

Man setze, wenn man die wahren Wurzeln suchet,

$x = 0$

x = o so kommt − 3360 = o
x = 1 . . . . . . − 3757 = o
x = 2 . . . . . . − 4536 = o
x = 3 . . . . . . − 5643 = o
x = 4 . . . . . . − 7000 = o

und wenn man die falschen Wurzeln finden will,

x = o so kommt − 3360 = o
x = − 1 . . . . . . − 3375 = o
x = − 2 . . . . . . − 3808 = o
x = − 3 . . . . . . − 4641 = o
x = − 4 . . . . . . − 5832 = o

x = 0	o = − 3360				
x = 1	o = − 3757	− 397			
x = 2	o = − 4536	− 779	− 382		
x = 3	o = − 5643	− 1107	− 328	+ 54	
x = 4	o = − 7000	− 1357	− 250	+ 78	+ 24
x = 5	o = − 8505	− 1505	− 148	+ 102	+ 24
x = 6	o = − 10032	− 1527	− 22	+ 126	+ 24
x = 7	o = − 11431	− 1399	+ 128	+ 150	+ 24
x = 8	o = − 12528	− 1097	+ 302	+ 174	+ 24
x = 9	o = − 13125	− 597	+ 500	+ 198	+ 24
x = 10	o = − 13000	+ 125	+ 722	+ 222	+ 24
x = 11	o = − 11907	+ 1093	+ 968	+ 246	+ 24
x = 11	o = − 9576	+ 2331	+ 1238	+ 270	+ 24
x = 13	o = − 5713	+ 3863	+ 1532	+ 294	+ 24
x = 14	o = o	+ 5713	+ 1850	+ 318	+ 24

x = 14 ist also eine wahre Wurzel der Gleichung, und zwar die einzige rationale.

$x = 0$	$0 = -3360$				
$x = -1$	$0 = -3375$	-15			
$x = -2$	$0 = -3808$	-433	-418		
$x = -3$	$0 = -4641$	-833	-400	$+18$	
$x = -4$	$0 = -5832$	-1191	-358	$+42$	$+24$
$x = -5$	$0 = -7315$	-1483	-292	$+66$	$+24$
$x = -6$	$0 = -9000$	-1685	-202	$+90$	$+24$
$x = -7$	$0 = -10773$	-1773	-88	$+114$	$+24$
$x = -8$	$0 = -12496$	-1723	$+50$	$+138$	$+24$
$x = -9$	$0 = -14007$	-1511	$+212$	$+162$	$+24$
$x = -10$	$0 = -15120$	-1113	$+398$	$+186$	$+24$
$x = -11$	$0 = -15625$	-505	$+608$	$+210$	$+24$
$x = -12$	$0 = -15288$	$+337$	$+842$	$+234$	$+24$
$x = -13$	$0 = -13851$	$+1437$	$+1100$	$+258$	$+24$
$x = -14$	$0 = -11032$	$+2819$	$+1382$	$+282$	$+24$
$x = -15$	$0 = -6525$	$+4507$	$+1688$	$+306$	$+24$
$x = -16$	$0 = 0$	$+6525$	$+2018$	$+330$	$+24$

$x = -16$ ist die einzige falsche rationale Wurzel der Gleichung.

Wenn man auch die beyden übrigen Wurzeln zu wissen verlanget, so multiplicire man

$$
\begin{array}{rl}
 & x - 14 = 0 \\
\text{mit} & x + 16 = 0 \\
\hline
 & x^2 - 14x \\
 & \quad\; + 16x - 224 \\
\hline
\end{array}
$$

so kommt zum Produkt $x^2 + 2x - 224 = 0$

Mit diesem Produkt dividire man die gegebene Gleichung, $x^4 + 3x^3 - 207x^2 - 194x - 3360 = 0$ so kommt eine quadratische Gleichung, deren Auflösung die beyden übrigen Wurzeln entdecket.

x^2

$$x^2+2x-224=0 \big) x^4+3x^3-207x^2-194x-3360=0 \big(x^2+x+15=0$$

$$\underline{x^4+2x^3-224x^2}$$

$$0+x^3+17x^2-194x-3360$$

$$\underline{+x^3+2x^2-224x}$$

$$0+15x^2+30x-3360$$

$$\underline{+15x^2+30x-3360}$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$x^2+x+15=0$$

$$\underline{15=15 \text{ subtr.}}$$

$$x^2+x=-15$$

Der andere Theil der Wurzel $=\frac{1}{2}$

$$\underline{\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \text{ add.}}$$

$$x^2+x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-15=\frac{1-60}{4}=-\frac{59}{4}$$

$$1.)\ x+\tfrac{1}{2}=+\tfrac{1}{2}\sqrt{-59}$$

$$2.)\ x+\tfrac{1}{2}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{-59}$$

und demnach $1.)\ x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-59}$

$2.)\ x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-59}$

Man nennet diese Art von Wurzeln **eingebildete oder unmögliche Wurzeln**, weil kein negatives Quadrat (wie hier -59) entstehen kann, man mag eine positive oder negative Zahl mit sich selbst multipliciren. Inzwischen wird die Gleichung durch die eingebildeten Wurzeln so wohl als durch die wirklichen aufgelöset, wovon man sich durch die Probe leicht versichern kann, nur daß man in der Multiplication das rechte Zeichen zu setzen wisse.

Z. E. Wenn $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-59}$
mit $x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-59}$ multipliciret wird

$$+\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{-59}$$
$$+\tfrac{1}{4}\sqrt{-59} - \tfrac{59}{4}$$

so ist $x^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}\sqrt{-59} - \frac{59}{4} = \frac{-58 + 2\sqrt{-59}}{4}$

Hier giebt $-\frac{1}{2}\sqrt{-59}$ mit $-\frac{1}{2}\sqrt{-59}$ multipliciret, zum Produkt $-\frac{59}{4}$; denn $\sqrt{-59}.\sqrt{-59} = -59$, und $-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2} = +\frac{1}{4}$; folglich ist $-\frac{1}{2}\sqrt{-59}.-\frac{1}{2}\sqrt{-59} = -59.+\frac{1}{4} = -\frac{59}{4}$

II. Man siehet aber leicht ein, daß der Gebrauch dieser jetzt erklärten Methode, die rationalen Wurzeln einer höhern Gleichung zu finden, um so viel beschwerlicher wird, aus je mehr Ziffern die Wurzeln bestehen. Will man sich aber dieser Methode nicht bedienen, so ist kein ander Mittel, (wenigstens ist bis jezt kein ander Mittel bekannt,) als die rationalen Wurzeln durch Hülfe des letzten oder des bekannten Gliedes der Gleichung zu suchen.

Z. E. Die Gleichung sey

$$x^4 - 10x^3 - 21x^2 - 432 = 0$$

Man weiß (§ 88. Num. IV.) daß das letzte Glied − 432 das Produkt aus allen Wurzeln ist. Man muß also alle Divisores von 432, das ist, alle Zahlen mit welchen 432 sich genau dividiren läßet, suchen,

1 .	2 .	3 .	4 .	6
8 .	9 .	12 .	16 .	18
24 .	27 .	36 .	48 .	54
72 .	108 .	144 .	216 .	432

und

und durch Versuche diejenigen entdecken, wodurch die Gleichung aufgelöset wird.

Nemlich, wenn man die wahren Wurzeln suchet, so versuche man, ob die gegebene Gleichung

$$x^4 - 10x^3 - 21x^2 - 432 = 0$$

sich mit $x - 1 = 0$
oder $x - 2 = 0$
oder $x - 3 = 0$
u. s. w.

genau dividiren laße; oder welches einerley ist, man versuche, ob die Summe der Glieder $x^4 - 10x^3 - 21x^2 - 432 = 0$ werde, wenn man $x = 1$, oder $x = 2$, oder $x = 3$ u. s. w. setzet. Geschicht es z. E. durch $x = 1$, so ist 1 eine von den wahren rationalen Wurzeln; wird aber die Summe der Glieder der Gleichung durch keine von diesen Suppositionen $= 0$, so hat die Gleichung keine wahre rationale Wurzeln.

Suchet man die falschen rationalen Wurzeln, so versuche man die Division der Gleichung durch

$$x + 1 = 0$$
$$x + 2 = 0$$
$$x + 3 = 0$$
u. s. w.

oder man versuche, ob 0 komme, wenn $x = -1$, $x = -2$ u. s. w. gesetzet wird.

Wenn aber das lezte Glied eine große Menge von Divisoren hat, wie z. E. 432, so würde diese zweyte Methode nicht vortheilhafter seyn, als die erste, wenn man kein Mittel hätte, sich den Gebrauch derselben zu erleichtern.

Man

Man kann aber die Divisores des lezten Gliedes, die man nicht nöthig hat zu probiren, von denen, die probiret werden müßen, auf folgende Art unterscheiden.

1. Man suche die Divisores der Zahlen, in welche die Summe der Glieder der Gleichung sich verwandelt, wenn man setzet

$$x - 1 = 0, \text{ oder } x = 1$$
$$x - 2 = 0, \text{ oder } x = 2$$
$$x - 3 = 0, \text{ oder } x = 3$$

u. s. w.

2. Die Wurzel x und diese Zahlen $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$, u. s. w. machen, wie man siehet, eine arithmetische Progreßion, in welcher die Glieder immer um 1 abnehmen, wenn x positiv ist, und immer um 1 größer werden, wenn x negativ ist.

Wenn man also die wahren Wurzeln suchet, so probire man nur diejenigen Divisores des lezten Gliedes, für welche sich unter den Divisoren der Zahlen, die durch die Suppositionen

$$x - 1 = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x - 3 = 0$$

u. s. w.

entstehen, solche finden, die immer um 1 kleiner sind.

Und wenn man die falschen Wurzeln finden will, so probire man nur diejenigen Divisores des letzten Gliedes, für welche sich unter den Divisoren eben derselben Zahlen, solche finden, die immer um 1 größer sind. Denn die übrigen Divisores des letzten Gliedes sind unnütz.

Um

Um den Grund dieser Regel einzusehen, nehme man, nach Gefallen, eine quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$,
und multiplicire dieselbe mit $x - m = 0$

$$\begin{array}{l} x^3 + ax^2 + bx \\ \quad\; - mx^2 - max - mb \end{array}$$

so bekommt man $x^3 + ax^2 - mx^2 + bx - max - mb = 0$, das ist, eine höhere Gleichung, in welcher die Wurzel oder der Divisor des letzten Gliedes $= m$ ist, und die sich mit $x - m = 0$ genau dividiren läßet.

Und dieses $x - m$ bleibet ein Divisor von $x^3 + ax^2 - mx^2 + bx - max - mb$; oder welches einerley ist, der Bruch

$$\frac{x^3 + ax^2 - mx^2 + bx - max - mb}{x - m}$$

Wird immer eine ganze Zahl, man mag x bestimmen, wie man wolle, nur daß es im Zähler und im Nenner durch eben dieselbe Zahl bestimmet werde, welches aus dem Grundsatze, daß jede Größe sich selber gleich ist, offenbar ist.

Man setze im Zähler und Nenner

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}$$

u. s. w. ins unendliche

so kommt im 1sten Falle,

$$\frac{-mb}{-m} = +b$$

im

im 2ten Falle,

$$\frac{1+a-m+b-ma-mb}{1-m}=1+a+b$$

im 3ten

$$\frac{8+4a-4m+2b-2ma-mb}{2-m}=4+2a+b$$

im 4ten

$$\frac{27+9a-9m+3b-3ma-mb}{3-m}=9+3a+b$$

u. s. w. ins unendliche.

oder welches einerley ist,

im 1sten Falle kommt $\frac{+mb}{+m}=+b$

im 2ten $\frac{-1-a+m-b+ma+mb}{m-1}=1+a+b$

im 3ten

$$\frac{-8-4a+4m-2b+2ma+mb}{m-2}=4+2a+b$$

im 4ten

$$\frac{-27-9a+9m-3b+3ma+mb}{m-3}=9+3a+b$$

u. s. w. ins unendliche.

Weil nun, wie man siehet, die Wurzel m die Eigenschaft hat, daß $m-1$, $m-2$, $m-3$ u.s.w. nothwendig Divisores der Zahlen sind, in welche sich die Summe der Glieder der Gleichung verwandelt durch die Suppositionen, $m-1=0$, $m-2=0$, $m-3=0$, u. s. w. oder $x-1=0$,

$x-2$

$x-2=0$, $x-3=0$, u. s. w. (denn $x=m$ per hypoth.), so kann kein Divisor des letzten Gliedes der Gleichung $= m$ seyn, wofern nicht die Zahlen, die durch diese Suppositionen aus der Summe der Glieder der Gleichung entstehen, Divisores haben, die $m-1$, $m-2$, $m-3$ u. s. f. oder $x-1$, $x-2$, $x-3$ u. s. f. gleich sind. Wenn nun m oder x positiv ist, so ist die *arithmetische* Progression:

m, $m-1$, $m-2$, $m-3$ oder x, $x-1$, $x-2$, $x-3$ u. s. w.

hingegen, wenn m oder x negativ ist, so ist die arithmetische Progression:

$-m$, $-m-1$, $-m-2$, $-m-3$, oder $-x$, $-x-1$, $-x-2$, $-x-3$ u. s. w.

das ist, im ersten Falle ist es eine abnehmende, im zweyten Falle eine zunehmende Progression. (Auf das Zeichen $-$ siehet man nicht, in Ansehung der Progression $-$, $-m-1$, $-m-2$ u. s. w. denn sonst ist freilich $-m > -m-1$, und $-m- > -m-2$ u. s. w.)

Exempel.

Man nehme die vorige Gleichung

$$x^4-10x^3-21x^2-432=0$$

Wenn man $x=0$ setzet, so kommt -432

$x=1$ . . . . -462

$x=2$ . . . . -580

$x=3$ . . . . -810

1.) Die

1.) Die Divisores des letzten Gliedes 432 sind

1	2	3	4	6
8	9	12	16	18
24	27	36	48	54
72	108	144	216	432

2.) Die Divisores von 462

1	2	3	6
7	11	14	21
22	33	42	66
77	154	231	462

3.) Die Divisores von 580

1	2	4	5
10	20	29	58
116	145	290	580

4.) Die Divisores von 810

1	2	3	5	6
9	10	15	18	27
30	45	54	81	90
135	162	270	405	810

Um nun die wahren Wurzeln zu finden, vergleiche man jeden Divisor von 432 mit x
jeden Divisor von 462 mit $x-1$
jeden Divisor von 580 mit $x-2$
- - - - von 810 mit $x-3$

Es verstehet sich aber von selbst, daß die Divisores des letzten Gliedes 1 . 2 . 3 übergangen werden können, weil $x^4-10x^3-21x^2-432$ durch keine von den Suppositionen

$$x=1$$
$$x=2$$
$$x=3$$

$=0$ geworden ist.

Was

Was die übrigen Divisores von 432 betrift, so findet man

$$\begin{array}{lll} x = 4 & \text{und} & x = 12 \\ x-1=3 & & x-1=11 \\ x-2=2 & & x-2=10 \\ x-3=1 & & x-3=9 \end{array}$$

Die übrigen Divisores 6 . 8 . 9 . 16 u. s. w. fallen, wie man siehet, insgesamt weg.

Wenn man nun versuchet

$$x^4 - 10x^3 - 21x^2 - 432 = 0$$

mit $x - 4 = 0$

zu dividiren, so findet man, daß $x - 4 = 0$ kein Divisor ist; hingegen mit $x - 12 = 0$ kann die Division geschehen, woraus man siehet, daß die gegebene Gleichung ausser 12 keine wahre rationale Wurzel hat.

$$\begin{array}{l} x-12=0 \left\{ x^4-10x^3-21x^2-432=0 \right\} x^3+2x^2+3x+36=0 \\ \qquad\quad x^4-12x^3 \\ \hline \qquad\quad 0+2x^3-21x^2-432 \\ \qquad\quad\;\; +2x^3-24x^2 \\ \hline \qquad\qquad 0+3x^2-432 \\ \qquad\qquad\;\; +3x^2-36x \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0+36x-432 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; +36x-432 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Um die falschen Wurzeln zu finden, vergleiche man

jeden Divisor von 432 mit $-x$ oder x

jeden Divisor von 462 mit $-x-1$ oder $x+1$

jeden Divisor von 580 mit $-x-2$ oder $x+2$

jeden Divisor von 810 mit $-x-3$ oder $x+3$

Man findet
$$\begin{aligned} x &= 2 \\ x+1 &= 3 \\ x+2 &= 4 \\ x+3 &= 5 \end{aligned}$$

Die übrigen Divisores von 432 fallen insgesamt weg.

Wenn nun aber die Division der gegebenen Gleichung mit $x+2=0$ versucht wird, so siehet man daß $x+2=0$ kein Divisor derselben ist; und folglich hat sie keine falsche rationale Wurzel. Man kann auch, um eben dieses zu sehen, in der Gleichung, $x=4$, $x=5$, $x=6$ u. s. w. setzen, und acht geben, ob sich unter den Divisoren der Zahlen, die durch diese Suppositionen entstehen, die folgenden Glieder der schon gefundenen Progression 2. 3. 4. 5. finden?

Wenn $x=4$, so kommt -1152, eine Zahl, die sich mit 6 dividiren lässet.

Wenn $x=5$, so kommt -1582, eine Zahl, die sich mit 7 dividiren lässet.

Man hat also
$$\begin{aligned} x &= 2 \\ x+1 &= 3 \\ x+2 &= 4 \\ x+3 &= 5 \\ x+4 &= 6 \\ x+5 &= 7 \end{aligned}$$

Hingegen wenn man $x=6$ setzet, so kommt -2052; und diese Zahl lässet sich mit 8 nicht dividiren; folglich ist -2 keine Wurzel der gegebenen

Glei-

Gleichung; denn wenn es eine Wurzel derselben wäre, so müste, wie man gesehen hat, die Progression

$$\begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ x+1 & = & 3 \\ x+2 & = & 4 \\ x+3 & = & 5 \\ x+4 & = & 6 \\ x+5 & = & 7 \end{array}$$

ins unendliche fortgehen.

Ein ander Exempel.

Es sey $y^3 + 26y^2 - 1249y + 9646 = 0$

Setzet man $y = 0$, so kommt 9646

$y = 1, \ldots\ldots$ 8424

$y = 2, \ldots\ldots$ 7260

Die Divisores von 9646 sind:

1 .	2 .	7 .	13
14 .	26 .	53 .	91
106 .	182 .	371 .	689
742 .	1378 .	4823 .	9646

Die Divisores von 8424

1.	2.	3.	4.	6.	8.	9.	12
13.	18.	24.	26.	27.	36.	39.	52
54.	72.	78.	81.	104.	108.	117.	156
162.	216.	234.	312.	324.	351.	468.	648
702.	936.	1053.	1404.	1908.	2106.	4212.	8424

Die Divisores von 7260

1.	2.	3.	4.	5.	6.	10.	11.	12
15.	20.	22.	30.	33.	44.	55.	60.	66
110.	121.	132.	165.	220.	242.	330.	363.	484
605.	660.	726.	1210.	1452.	1815.	2420.	3630.	7260

 Man

Man findet für die wahren Wurzeln diese Progressionen:

$y = 7$	$y = 13$	$y = 14$
$y-1 = 6$	$y-1 = 12$	$y-1 = 13$
$y-2 = 5$	$y-2 = 11$	$y-2 = 12$

Wenn man in der Supposition weiter gehet, und $y = 3$ setzet, so kommt 6160, eine Zahl, die sich mit 4, mit 10 und mit 11 dividiren läßet; Man hat also

$y = 7$	$y = 13$	$y = 14$
$y-1 = 6$	$y-1 = 12$	$y-1 = 13$
$y-2 = 5$	$y-2 = 11$	$y-2 = 12$
$y-3 = 4$	$y-3 = 10$	$y-3 = 11$

Setzet man $y = 4$, so kommt 5130; und diese läßet sich mit 3, mit 9, und mit 10 dividiren; Man hat also

$y = 7$	$y = 13$	$y = 14$
$y-1 = 6$	$y-1 = 12$	$y-1 = 13$
$y-2 = 5$	$y-2 = 11$	$y-2 = 12$
$y-3 = 4$	$y-3 = 10$	$y-3 = 11$
$y-4 = 3$	$y-4 = 9$	$y-4 = 10$

Setzet man $y = 5$, so kommt 4176, und diese Zahl läßet sich mit 2, mit 8 und mit 9 dividiren. Also hat man

$y = 7$	$y = 13$	$y = 14$
$y-1 = 6$	$y-1 = 12$	$y-1 = 13$
$y-2 = 5$	$y-2 = 11$	$y-2 = 12$
$y-3 = 4$	$y-3 = 10$	$y-3 = 11$
$y-4 = 3$	$y-4 = 9$	$y-4 = 10$
$y-5 = 2$	$y-5 = 8$	$y-5 = 9$

Setzet

Setzet man $y=6$, so kommt 3304, und es findet sich das folgende Glied in jeder von diesen Progressionen, nemlich

$$y-6=1 \mid y-6=7 \mid y-6=8$$

Setzet man $y=7$, so kommt 2520.

Man siehet nun, daß $y=7$ ungültig ist, denn sonst hätte 0 an statt 2520 kommen müßen.

Für die beyden übrigen Progressionen findet sich das folgende Glied

$$y-7=6 \mid y-7=7$$

Dividiret man die Gleichung mit $y-13=0$ und mit $y-14=0$, so findet man, daß $y=13$ und $y=14$

$$y-13=0 \,\big)\, y^3+26y^2-1249y+9646=0 \,\big(\, y^2+39y-742=0$$
$$y^3-13y^2$$
$$0 \;+39y^2-1249y+9646$$
$$+39y^2-\;507y$$
$$0\;-742y+9646$$
$$-742y+9646$$
$$0 \quad 0$$

$$y-14=0 \,\big)\, y^3+26y^2-1249y+9646=0 \,\big(\, y^2+40y-689=0$$
$$y^3-14y^2$$
$$0 \;+40y^2-1249y$$
$$+40y^2-\;560y$$
$$0\;-689y+9646$$
$$-689y+9646$$
$$0 \quad 0$$

Für die falschen Wurzeln findet man durch die Suppositionen $y = 1$, $y = 2 \ldots$ bis $y = 8$, die Progreßionen:

y	$=$	1	$=$	2	$=$	53
$y+1$	$=$	2	$=$	3	$=$	54
$y+2$	$=$	3	$=$	4	$=$	55
$y+3$	$=$	4	$=$	5	$=$	56
$y+4$	$=$	5	$=$	6	$=$	57
$y+5$	$=$	6	$=$	$-\Vert-$	$=$	58
$y+6$	$=$	7	$=$	$-\Vert-$	$=$	59
$y+7$	$=$	8	$=$	$-\Vert-$	$=$	60
$y+8$	$=$	$-\Vert-$	$=$	$-\Vert-$	$=$	61

Da nun in der ersten von diesen Progressionen sich nur 8, in der zweyten nur 5, hingegen in der dritten alle Glieder finden, so ist $y = -53$, und mehr falsche rationale Wurzeln hat die gegebene Gleichung nicht.

$$
\begin{array}{l}
y+53=0)\; y^3+26y^2-1249y+9646=0\; (\; y^2-27y+182=0 \\
\qquad\quad\;\; y^3+53y^2 \\
\hline
\qquad\quad\;\; 0\; -27y^2-1249y \\
\qquad\qquad\;\; -27y^2-1431y \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\; 0\; +182y+9646 \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; +182y+9646 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0 \qquad 0
\end{array}
$$

III. Wenn man die rationalen Wurzeln nach dieser zweyten Methode suchet, so müßen die Brüche, die in der Gleichung sind, vorher sowohl weggeschaffet werden, als wenn man sich der ersten Methode bedienet.

Denn

Denn wenn die Wurzel der Gleichung ein Bruch ist, so weiß man nicht, wie man sie unter den Divisoren des letzten Gliedes finden soll, indem dasselbe unendlich viele gebrochene Divisores hat.

§ 94. Wenn in einer Gleichung an statt x eine Zahl m gesetzet wird, die nicht $= x$, das ist, die größer oder kleiner ist, als x, so ist die Summe der Glieder, die dadurch entstehet, dem Produkt aus den Differenzen zwischen der angenommenen Zahl m und den Wurzeln gleich.

Denn man mache z. E. eine cubische Gleichung aus

$$x-a=0$$
$$x-b=0$$
$$x-c=0$$

so ist dieselbe
$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 &+ abx - abc = 0 \\ - bx^2 &+ acx \\ - cx^2 &+ bcx \end{aligned}$$
oder $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$

Wenn nun für x eine Zahl m die größer oder kleiner ist als x, gesetzet wird, so kann die Summe der Glieder

$$\begin{aligned} m^3 - am^2 &+ abm - abc \\ - bm^2 &+ acm \\ - cm^2 &+ bcm \end{aligned}$$

oder $(m-a)(m-b)(m-c)$ nicht $= 0$ seyn, sondern sie ist entweder > 0 oder < 0, das ist, entweder eine positive oder negative Zahl.

Man nenne dieselbe S; so ist

$$(m-a)(m-b)(m-c) = S$$

Man setze $m - a = p$
$m - b = q$
$m - c = r$

---

so ist $(m-a)(m-b)(m-c) = pqr$
und folglich $S = pqr$

Also auch, wenn man eine biquadratische Gleichung machet aus

$$x-a=0$$
$$x-b=0$$
$$x-c=0$$
$$x-d=0$$

und setzet $m-a=p$
$m-b=q$
$m-c=r$
$m-d=s$

so ist $S = pqrs$

Machet man eine Gleichung vom 5ten Grade, aus

$$x-a=0$$
$$x-b=0$$
$$x-c=0$$
$$x-d=0$$
$$x-e=0$$

und setzet $m-a=p$
$m-b=q$
$m-c=r$
$m-d=s$
$m-e=t$

so ist $S = pqrst$ u. s. w.

1.) Gesetzt nun, die Gleichung habe lauter wahre Wurzeln, so wie man hier angenommen hat, so muß in der cubischen Gleichung, wenn 5 positiv ist,

ist, nothwendig zum wenigsten eine von den Zahlen p, q, r positiv seyn.

Denn, wenn jede von diesen 3 Zahlen negativ wäre, so wäre pqr negativ, und folglich auch S. Hingegen, wenn S negativ ist, so muß auch nothwendig zum wenigsten eine von den Zahlen p, q, r negativ seyn.

Eben dieses gilt von $S = pqrst$, das ist, von den Gleichungen vom 5ten Grade, und überhaupt von allen Gleichungen, in welchen das erste Glied einen ungeraden Exponenten hat. Wenn S positiv ist, so kann nicht eine jede von den Zahlen p, q, r, s, t negativ seyn, und wenn S negativ ist, so kann nicht eine jede von diesen Zahlen positiv seyn. Z. E. Wenn S in der Gleichung vom 5ten Grade positiv ist, so müßen von den Zahlen p, q, r, s, t entweder 1, oder 3, oder sie müßen alle positiv seyn. Und wenn S negativ ist, so muß entweder eine, oder es müßen 3, oder sie müßen alle negativ seyn.

Wenn nun aber eine von den Zahlen p, q, r u. s. w. z. E. p positiv ist, so ist $m > a$

Hingegen, wenn eine von denselben z. E. p negativ ist, so ist $m < a$

Folglich, wenn für x eine Zahl m gesetzet, und die Summe der Glieder der Gleichung dadurch positiv, oder > 0 wird, so ist die angenommene Zahl $m > x$, das ist, größer als eine von den Wurzeln.

Wenn aber die Summe der Glieder der Gleichung durch die Supposition $m = x$ negativ, oder < 0

 wird,

wird, so ist die angenommene Zahl $m < x$, das ist, kleiner als eine von den Wurzeln.

Aber in Ansehung der biquadratischen, u. überhaupt, der Gleichungen, in welchen das erste Glied einen geraden Exponenten hat, ist dieser Schluß nicht in allen Fällen richtig. Denn wenn S positiv ist, so ist zwar pqrs positiv; aber es folget nicht, daß wenigstens 1 von den Zahlen p, q, r, s positiv seyn müße; Denn sie können auch alle negativ seyn, indem

$$-p \cdot -q \cdot -r \cdot -s = + pqrs \text{ ist.}$$

2.) Man setze, die Gleichung, sie sey von welchem Grade sie wolle, habe nur 1 wahre Wurzel. Z. E. Man mache eine cubische Gleichung aus

$$x - a = o$$
$$x + b = o$$
$$x + c = o$$

so ist $(x - a)(x + b)(x + c) = o$

aber $(m - a)(m + b)(m + c) = S$

und

$$m - a = p$$
$$m + b = q$$
$$m + c = r$$

und folglich $S = (m - a)(m + b)(m + c) = pqr$

In diesem Falle ist so wohl q als r, wie auch s, t u. s. w. in Ansehung der übrigen noch höhern Gleichungen allezeit positiv (denn man setzet, daß m positiv ist). Folglich, wenn S positiv ist, so ist auch p in pqr oder pqrs, oder pqrst u. s. w. positiv; und demnach

$$m > a$$

Hingegen, wenn S negativ ist, so ist auch p negativ, und also

$$m < a$$

Durch

Durch Hülfe dieses Satzes kann man in sehr vielen Fällen, viele Divisores des letzten Gliedes; von denen keiner eine Wurzel seyn kann, entdecken, und die Auflösung der Gleichungen, welche rationale Wurzeln haben, sich dadurch erleichtern.

Z. E. Die Gleichung sey $x^3 - 569x^2 + 79680x - 97200 = 0$

Man setze $x = 100$; so kommt $1000000 - 5690000 + 7968000 - 97200 = + 3180800$ und demnach ist $100 > x$

Oder man dividire die Summe der Glieder mit $x - 100$; denn die Zahl, welche durch die Supposition $x = 100$ entstehet, muß nothwendig im dividiren übrig bleiben.

$$x-100 \,)\, x^3 - 569x^2 + 79680x - 97200 \,(\, x^2 - 469x + 32780$$
$$\underline{x^3 - 100x}$$
$$0 - 469x^2 + 79680x$$
$$\underline{-469x^2 + 46900x}$$
$$0 \quad + 32780x - 97200$$
$$\underline{+32780x - 3278000}$$
$$0 \quad + 3180800$$

Man probire mehrere Zahlen, und setze z. E. $x = 200$; so kommt $+ 1078800$; und also ist $200 > x$

Man setze $x = 300$, so kommt $- 403200$; und demnach ist $300 < x$

Wenn man nun $200 > x$ und $300 < x$ mit einander vergleichet, so siehet man, daß es in An-

sehung

sehung einer und eben derselben Wurzel nicht wahr seyn kann.

Man mache also noch eine Supposition und setze $x = 400$; so kommt $+ 4734800$; und demnach ist $400 > x$

Da nun $400 > x$
und $300 < x$
so hat man nicht nöthig, andere Divisores des letzten Gliedes 97200 zu versuchen, als die, welche zwischen 300 und 400 fallen.

Man findet aber unter den Divisoren von 97200 nur 2, die zwischen 300 und 400 fallen, nemlich
324 und 360
und man hat also von den 90 Divisoren, die 97200 hat, 88 ausgeschlossen.

Setzet man nun nach § 93. Num. II. $x = 1$, so kommt 18088, und wenn 324 oder 360 eine von den Wurzeln ist, so muß 18088 sich mit 323, oder mit 359 dividiren laßen.

Nun läßet sich 18088 mit 323 dividiren, nicht aber mit 359.

Und demnach ist $x = 324$.

Wenn man die Gleichung mit $x - 324 = 0$ dividiret, und die dadurch entstehende quadratische Gleichung auflöset, so wird man finden, daß in Ansehung der übrigen Wurzeln eben wohl eintreffe, was Num. I. gezeiget worden.

$x - 324$

$$x-324=0 \left.\right) x^3-569x^2+79680x-97200=0 \left(\right. x^2-245x+300=0$$

$$\begin{array}{l} x^3-324x^2 \\ \hline 0 \quad -245x^2+79680x \\ \quad\;\; -245x^2+79380x \\ \hline \qquad\quad +\;300x-97200 \\ \qquad\quad +\;300x-97200 \\ \hline \qquad\qquad\quad 0 \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$x^2-245x=-300=-1200 : 4$$

$$-\frac{245^2}{2^2} = \qquad +60025 : 4 \text{ add.}$$

$$x^2-245x+\frac{60025}{4}=\frac{28825}{4}$$

$$1.)\ x-\frac{245}{2}=+\frac{1}{2}\sqrt{58825}$$

$$2.)\ x-\frac{245}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{58825}$$

$$1.)\ x=\frac{245}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{58825}$$

$$2.)\ x=\frac{245}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{58825}$$

das ist ohngefähr 1.) $x=\frac{245}{2}+\frac{242}{2}=\frac{487}{2}=$ $243\frac{1}{2}$ und 2.) $x=\frac{245}{2}-\frac{242}{2}=\frac{3}{2}$

Man

Man siehet also, daß $100 > x$ in Ansehung der Wurzel $\frac{3}{2}$

Ein ander Exempel.

Die Gleichung sey $x^4 - 149x^3 + 726x^2 - 948x + 12096 = 0$

Weil in dieser Gleichung lauter wahre Wurzeln sind, (§ 88. Num. III.) so ist $x < 149$ (§ 88. Num. II.)

Man setze nun $x = 100$, so kommt -41822704 Und also ist $100 < x$

Unter den 56 Divisoren von 12096 finden sich 4, die zwischen 100 und 149 fallen, nemlich

108, 112, 126, 144

Und wenn $x = 1$ gesetzet wird, so kommt 11726, eine Zahl, die sich mit 143, nicht aber mit 107, 111, 125 dividiren läßet. Wenn also die Gleichung eine rationale Wurzel hat, so muß dieselbe $= 144$ seyn.

Und wenn die Gleichung mit $x - 144 = 0$ dividiret wird, so findet sich auch $x = 144$.

Ein ander Exempel.

Man habe eine Gleichung, in welcher nur eine wahre Wurzel ist, $x^4 - 448x^3 - 59824x^2 - 124194x - 194600 = 0$

Wenn man setzet $x = 100$, und $x = 1000$, so findet sich

$$100 < x$$

und $1000 > x$

Man

Man behält also von den 48 Divisoren des letzten Gliedes 194600 nur folgende:
139 . 140 . 175 . 200 . 280 . 278 . 350 . 556 . 695 . 700 . 973.

Setzet man ferner $x = 500$, so findet man $500 < x$, und man behält von den Divisoren nur

556 . 695 . 700 . 973

Von diesen Zahlen kann keine die Wurzel seyn, als 556, weil die Zahl 379065, die durch die Supposition $x = 1$ entstehet, sich nur mit 555, nicht aber mit 694, 699, 972 dividiren läßet. Dividiret man die Gleichung mit $x - 556 = 0$, so siehet man auch, daß $x = 556$.

§ 95. Damit die Auflösung der höhern Gleichungen nicht zu beschwerlich werde, so muß man leicht zu finden wissen,

1.) Ob eine Zahl sich mit einer andern dividiren laße?

2.) Man muß leicht zu bestimmen wissen, wie viel Divisores eine Zahl habe? damit man, wenn ja einer, oder etliche aus Versehen übergangen sind, dieselben nachholen könne.

3.) Man muß alle Divisores derselben leicht finden können.

I. Wenn man wissen will, ob eine Zahl sich mit einer andern, z. E. 82433 mit 17 dividiren laße, so multiplicire man 17 mit 9, damit die letzte Ziffer in 82433 weg falle, und subtrahire das Produkt von 82433. Mit der Zahl, die dadurch ent-

entstehet, mache man es eben so, und fahre so lange fort, bis man siehet, ob die Zahl, die man bekommt, sich mit 17 dividiren lasse, oder nicht. Im ersten Falle ist 17 ein Divisor von 82433, aber im andern Falle nicht.

$$\text{Es sey } 82433 = A \text{ und } 17 = B$$
$$153 = 9.17 = mB \text{ subtr.}$$

$$\text{so ist } 82280 = A - mB$$
$$\text{und } 8228 = \frac{A - mB}{10}$$
$$68 = 4.17 = nB \text{ subtr.}$$

$$8160 = \frac{A - mB}{10} - nB = \frac{A - mB - 10nB}{10}$$
$$\text{und } 816 = \frac{A - mB - 10nB}{100}$$
$$136 = 8.17 = rB \text{ subtr.}$$

$$680 = \frac{A - mB - 10nB - 100rB}{100}$$
$$\text{und } 68 = \frac{A - mB - 10nB - 100rB}{1000}$$

Man siehet nun schon, daß 68 sich mit 17 dividiren läßet: folglich muß sich auch 82433 mit 17 dividiren laßen.

$$\text{Denn es sey } 68 = 4.17 = vB$$
$$\text{so ist } vB = \frac{A - mB - 10nB - 100rB}{1000}$$

$$1000vB$$

$$\frac{1000vB = A - mB - 10nB - 100rB}{1000vB + 100rB + 10nB + mB = A}$$

das ist, B ist ein Divisor von A, und der Quotient ist $1000v + 100r + 10n + 10n + m = 4000 + 800 + 40 + 9 = 4849 = \frac{28433}{17}$

II. Wenn man zu wissen verlanget, wie viel Divisores eine Zahl z. E. 360 habe, so suche man die numeros primos, aus welchen sie zusammen gesetzet ist, das ist, diejenigen Divisores derselben, die sich nicht dividiren laßen.

Nemlich man dividire 360 mit 2; so kommt 180; also ist $360 = 2.180$.

Man dividire 180 mit 2; so kommt 90, und also ist $360 = 2^2.90$

Man fahre auf diese Weise fort, so findet man $360 = 2^3.45 = 2^3.3.15 = 2^3.3^2.5^1$

Man addire zu jedem Exponenten 1, und multiplicire sie alsdann in einander; das Produkt $(3+1)(2+1)(1+1) = 4.3.2 = 24$ zeiget die Anzahl der Divisoren von 360, die 1 mitgerechnet.

Also auch wenn man die Anzahl der Divisoren von 2247696 suchet, so findet man $2247696 = 2.1123848 = 2^2.561924 = 2^4.140481 = 2^4.3.46827 = 2^4.3^2.15609 = 2^4.3^3.5203 = 2^4.3^3.11.473 = 2^4.3^3.11^2.43^1$

Und demnach hat diese Zahl 5.4.3.2 das ist, 120 Divisores, oder, wenn 1 nicht mit gezählet wird, 119.

Wenn man den Grund dieser Regel einsehen will, so setze man aus den numeris primis a, b, c eine Zahl z. E. $a^4b^3c^2$ zusammen, und setze

$$4 = m,\ 3 = n,\ \text{und}\ 2 = r$$

Die Divisores von a^4 sind

$$1 \;.\; a \;.\; a^2 \;.\; a^3 \;.\; a^4$$

und ihre Anzahl ist um 1 größer, als der Exponent in a^4; sie ist also $= m+1$

Wenn man jeden von diesen Divisoren mit b multipliciret, so kommen eben so viele, nemlich

$$b \;.\; ab \;.\; a^2b \;.\; a^3b \;.\; a^4b$$

Man multiplicire diese Divisores, in welchen b ist, mit b, so bekommt man

$$b^2 \;.\; ab^2 \;.\; a^2b^2 \;.\; a^3b^2 \;.\; a^4b^2$$

Man multiplicire die Divisores, in welchen b^2 ist, mit b, so hat man

$$b^3 \;.\; ab^3 \;.\; a^2b^3 \;.\; a^3b^3 \;.\; a^4b^3$$

und man siehet, daß die Anzahl derselben immer $= m+1$ ist.

Da nun die Multiplication mit b so vielmahl geschehen muß, als der Exponent in b^3 Einheiten hat, so ist die Zahl der Divisoren, die dadurch entstehen $= n(m+1)$

Man addire dazu die Zahl der Divisoren, in welchen b, b^2, b^3 nicht ist, so kommt $n(m+1) + m+1$ das ist

$$(m+1)(n+1)$$

Man multiplicire jeden Divisor mit c, so bekommt man eben so viele als man schon hat, nemlich $(m+1)(n+1)$

c.

$$\begin{array}{lllll} c & .\ ac & .\ a^2c & .\ a^3c & .\ a^4c \\ bc & .\ abc & .\ a^2bc & .\ a^3bc & .\ a^4bc \\ b^2c & .\ ab^2c & .\ a^2b^2c & .\ a^3b^2c & .\ a^4b^2c \\ b^3c & .\ ab^3c & .\ a^2b^3c & .\ a^3b^3c & .\ a^4b^3c \end{array}$$

Man multiplicire diese, in welchen c ist, mit c, so bekommt man nochmahls $(m+1)(n+1)$ Divisores.

$$\begin{array}{lllll} c^2 & .\ ac^2 & .\ a^2c^2 & .\ a^3c^2 & .\ a^4c^2 \\ bc^2 & .\ abc^2 & .\ a^2bc^2 & .\ a^3bc^2 & .\ a^4bc^2 \\ b^2c^2 & .\ ab^2c^2 & .\ a^2b^2c^2 & .\ a^3b^2c^2 & .\ a^4b^2c^2 \\ b^3c^2 & .\ ab^3c^2 & .\ a^2b^3c^2 & .\ a^3b^3c^2 & .\ a^4b^3c^2 \end{array}$$

Da nun die Multiplication mit c so vielmahl geschehen muß, als der Exponent in c^2 Einheiten hat, so ist die Zahl der Divisoren, die dadurch entstehen, $= r(m+1)(n+1)$

Man addire dazu die Zahl derer, in welchen c und c^2 nicht ist, nemlich $(m+1)(n+1)$, so kommt $r(m+1)(n+1) + (m+1)(n+1) = (m+1)(n+1)(r+1)$

Und demnach hat $a^4b^3c^2$ 5.4.3 das ist 60 Divisores, oder überhaupt $a^mb^nc^r$ hat $(m+1)(n+1)(r+1)$ Divisores.

III. Aus dem, was jetzt gezeiget worden, siehet man zugleich, wie die Divisores einer Zahl leicht gefunden werden können; denn man findet sie eben so, wie man die Divisores von $a^4b^3c^2$ gefunden hat.

Z. E. $360 = 2^3 . 3^2 . 5^1$

2)	1 .	2 .	4 .	8			
3)		3 .	6 .	12 .	24		
3)			9 .	18 .	36 .	72	
5)		5 .	10 .	20 .	40		
			15 .	30 .	60 .	120	
				45 .	90 .	180 .	360

Aufgabe.

§ 96. Die Wurzeln einer höhern Gleichung durch Näherung (per approximationem) zu finden, wenn sie anders nicht gefunden werden können.

Auflösung.

Die Gleichung sey $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$

Man suche nach § 94. die Zahlen, zwischen welche die Wurzel fällt; man findet $1 < x$
und $2 > x$

Man setze also $x = 1 + m$; so ist $3x = 3 + 3m$

$x^2 = 1 + 2m + m^2$

und $2x^2 = 2 + 4m + 2m^2$

$x^3 = 1 + 3m + 3m^2 + m^3$

Da nun $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$
so ist auch $1 + 3m + 3m^2 + m^3 - 2 - 4m - 2m^2 + 3 + 3m - 4 = 0$
das ist $-2 + 2m + m^2 + m^3 = 0$

Man

Man rechne m^3 für 0, so kommt

$$m^2 + 2m = 2$$
$$1 = 1 \text{ add.}$$
$$m^2 + 2m + 1 = 3$$
$$m + 1 = \sqrt{3}$$
$$m = -1 + \sqrt{3}$$

Die □ Wurzel aus 3 ist $\frac{1732}{1000}$

und also $m = -1 + \frac{1732}{1000}$, und folglich $x = 1 + m = 1 - 1 + \frac{1732}{1000} = \frac{1732}{1000}$

Durch diese gefundene Wurzel wird $x^3 - 2x^2 + 3x = 4 + \frac{392}{1000}$

Wenn nun $\frac{392}{1000}$ noch zu groß ist, um für 0 gerechnet zu werden, so setze man ferner

$$x = \frac{1732}{1000} + m$$

und verfahre eben so wie zuvor, so findet man x genauer.

Aufgabe.

§ 97. Aus einer Zahl, die aus einer rationalen und irrationalen zusammen gesetzet ist, z. E.

 aus

aus $1134 + \sqrt{196020}$, die Quadratwurzel ziehen, wenn sie eine □ Wurzel hat, die theils rational, theils irrational ist.

Auflösung.

Es sey überhaupt die rationale Zahl $= A$
die irrationale $= \sqrt{B}$
und die □ Wurzel aus $A + \sqrt{B} = x + \sqrt{y}$

Weil nun $\sqrt{(A + \sqrt{B})} = x + \sqrt{y}$

so ist $A + \sqrt{B} = x^2 + 2x\sqrt{y} + y$

Man setze $A = x^2 + y$ und $\sqrt{B} = 2x\sqrt{y}$

$$A - x^2 = y \qquad B = 4x^2 y$$

$$\frac{B}{4x^2} = y$$

$$A - x^2 = \frac{B}{4x^2}$$

x^2 mult.

$$Ax^2 - x^4 = \tfrac{1}{4}B$$

oder $x^4 - Ax^2 = -\tfrac{1}{4}B$

$\tfrac{1}{4}A^2 = \tfrac{1}{4}A^2$ add.

$$x^4 - Ax^2 + \tfrac{1}{4}A^2 = \frac{A^2 - B}{4}$$

1.) $x^2 - \tfrac{1}{2}A = + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)}$
und $x^2 = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)}$
und $x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)})}$

2.) $x^2 - \tfrac{1}{2}A = - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)}$
und $x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)})}$

Da

Da nun $A = 1134$ und $B = 196020$

so ist $\frac{1}{2} A = 567$

$A^2 - B = 1089936$

$\sqrt{(A^2 - B)} = 1044$

$\frac{1}{2} A + \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)} = 567 + 522 = 1089$

$\sqrt{(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)})} = 33$

und $\sqrt{(\frac{1}{2} A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B)})} = \sqrt{45}$

folglich 1.) $x = 33$

2.) $x = \sqrt{45}$

Da nun $y = A - x^2$

so ist 1.) $y = 1134 - 33^2 = 1134 - 1089 = 45$

2.) $y = 1134 - 45 = 1089$

und 1.) $\sqrt{y} = \sqrt{45}$

2.) $\sqrt{y} = 33$

Und demnach $x + \sqrt{y}$ das ist die □ Wurzel aus $1134 + \sqrt{196020} = 33 + \sqrt{45}$

Wenn $A^2 - B$ kein vollkommenes Quadrat ist, so hat $A + \sqrt{B}$ keine Quadratwurzel, die theils rational, theils irrational ist.

Aufgabe.

§ 98. Aus einer Zahl, die aus einer rationalen und irrationalen zusammen gesetzet ist, wie $46980 + \sqrt{45419643}$, die Cubikwurzel ziehen, wenn dieselbe theils rational, theils irrational ist.

Auflösung.

Die gesuchte Cubikwurzel sey $= x + \sqrt{y}$

Man mache aus derselben eine Cubikzahl, so ist

$46980 + \sqrt{45419643} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y}$

Man setze $46980 = x^3 + 3xy$, so ist $\sqrt{45419643} = 3x^2\sqrt{y} + \sqrt{y^3}$

Man mache von 46980 ein □, so kommt $2207120400 = x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2$

Wie auch von $\sqrt{45419643}$, so kommt

$$45419643 = 9x^4y + 6x^2y^2 + y^3$$

und subtrahire das zweyte □ von dem ersten, so kommt: $2161700757 = x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3$

Man siehet, daß $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3$ ein vollkommener Cubus, und die Wurzel desselben $x^2 - y$ ist.

Wann nun auch 2161700757 ein vollkommener Cubus ist, so hat die gegebene Zahl eine Cubikwurzel, die aus einer rationalen und irrationalen Zahl zusammen gesetzet ist; sonst nicht. Man ziehe an beyden Seiten die Cubikwurzel aus, so kommt

$$\underline{1293 = x^2 - y}$$

$$y = x^2 - 1293$$

Da nun $\underline{46980 = x^3 + 3xy}$

so ist $\dfrac{46980 - x^3}{3x} = y$

und also $x^2 - 1293 = \dfrac{46980 - x^3}{3x}$

und $\underline{3x^3 - 3879 = 46980 - x^3}$

$\underline{4x^3 - 3879x = 46980}$ 4 div.

x³ *

$$x^3 * -\frac{3879x}{4} = \frac{46980}{4}$$

$$x^3 * -\frac{3879x}{4} - \frac{46980}{4} = 0$$

Man schaffe die Brüche weg (§ 92.)

1 . 2 . 4 . 18

so kommt $2x = m$

und $m^3 \quad - 3879m - \quad 93960 = 0$

Da nun $m^3 = 3879m + 93960$

so ist $m^3 > 3879m$

und $m^2 > 3879$

folglich auch $m > \sqrt{3879}$, das ist $m > 62$.

Man setze also $m = 100$, so kommt $m^3 - 3879m - 93960 = 1000000 - 387900 - 93960 = + 518140$, und also ist $m < 100$ (§ 94.)

Die Divisores von 93960 die zwischen 62 und 100 fallen, sind 72, 81, 87, 90, und unter denselben findet sich

$$m = 72$$

Da nun $2x = m$, so ist $2x = 72$ und $x = 36$ folglich $y = x^2 - 1293 = 36^2 - 1293 = 1296 - 1293 = 3$

und demnach $x + \sqrt{y} = 36 + \sqrt{3}$

Aufgabe.

§ 99. A hat ein Vermögen von einigen tausend Thalern; wenn er noch 1781 Rthlr mehr hätte,

 als

als er hat, so hätte er die Summe der Cubikzahlen von 1.2.3.4.5.6 u. s. w; und die Zahl, welche anzeiget, wie viel von diesen Cubikzahlen summiret werden müsten, verhält sich zu der Zahl der Thaler, die er hat, wie 1 zu 500. Wie groß ist demnach sein Vermögen?

Auflösung.

Man setze A habe .... x Rthlr. und die Zahl, welche anzeiget, wie viele von den Cubikzahlen, so wie sie in der natürlichen Ordnung folgen, summiret werden müßen, sey $= m$; so ist die Summe dieser Cubikzahlen

$$= \frac{m^4 + 2m^3 + m^2}{4} \quad (\S\ 61.)$$

und folglich $x + 1781 = \frac{m^4 + 2m^3 + m^2}{4}$

und $x = \frac{m^4 + 2m^3 + {}^2}{4} - 1781$

Da nun $m : x = 1 : 500$

so ist $x = 500m$

und demnach $\frac{m^4 + 2m^3 + m^2}{4} - 1718 = 500m$

4 mult.

$m^4 + 2m^3 + m^2 - 7124 = 2000m$

$m^4 + 2m^3 + m^2 - 2000m - 7124 = 0$

Man suche nach § 94. Die Zahlen, zwischen welche m fällt, und setze $m = 10$,

so

so ist die Summe der Glieder $= -15024$
und folglich $10 < m$

Man setze $m = 100$, so ist die Summe der Glieder $= +101802876$;
und demnach $100 > m$

Von den Divisoren des letzten Gliedes 7124 müßen also folgende probiret werden:

13 . 26 . 52

Man setze $m = 1$, und versuche, ob die dadurch entstehende Zahl 9120 sich mit 12, 25, 51 dividiren laße, (§ 93.)

Da sie sich nun mit 12, nicht aber mit 25, und 51 dividiren läßet, so ist $m = 13$
folglich $x = 500m = 6500$
das ist A hat ein Vermögen von 6500 Rthlrn.

Aufgabe.

§ 100. A zapfet von einem Faße Wein 4 Stübchen, und giesset dafür wieder so viel Wasser hinein. Von diesem vermischten Wein nimmt er zum zweyten mahle 4 Stübchen, und giesset dafür so viel Wasser zu. Er thut eben dieses zum dritten mahle, und findet daß nunmehr $2\frac{1}{2}$ Stübchen mehr Wasser als Wein im Faße ist. Wie viel ist demnach anfangs im Faße gewesen?

Auflösung.

Man setze, es seye anfangs x Stübchen Wein im Faße gewesen.

Indem

Indem nun 4 Stübchen heraus gezapfet werden, und eben so viel Wasser wieder zugegossen wird, so ist jetzt im Faße, Wein $x-4$

und Wasser 4

Wie viel Wein zum zweyten mahle heraus laufe, das findet man durch die Regel Detri; denn x verhält sich zu $x-4$, wie 4 zu dem Wein, der herausläuft.

Es lauft folglich heraus ..... $\frac{4x-16}{x}$ Wein,

und $4-\frac{4x+16}{x}=\frac{4x-4x+16}{x}=\frac{16}{x}$ Wasser,

und bleibt also im Faße,

Wein, $x-4-\frac{4x+16}{x}=\frac{x^2-8x+16}{x}$

und Wasser $4-\frac{16}{x}=\frac{4x-16}{x}$

Indem aber wieder 4 Stübchen Wasser zugegossen werden, so ist an Wasser im Faße,

$$4+\frac{4x-16}{x}=\frac{8x-16}{x}$$

Wie viel von jeder Sorte bleiben werde, wenn zum 3ten mahle 4 Stübchen abgezapfet werden, und 4 Stübchen Wasser wieder zugegossen wird, das siehet man auch ohne die Regel Detri. Denn weil nach dem ersten abzapfen, im Faße ist,

Wein $\frac{x-4}{1}$

und Wasser $\frac{4}{1}$

und

und nach dem zweyten,

Wein $\frac{x^2-8x+16}{x}$

und Wasser $\frac{+8x-16}{x}$

so muß nach dem 3ten abzapfen, im Faße seyn,

Wein, $\frac{x^3-12x^2+48x-64}{x^2}$

und Wasser $\frac{+12x^2-48x+64}{x^2}$

Da nun des Wassers $2\frac{1}{2}$ Stübchen mehr ist, als des Weins, so ist

$$\frac{x^3-12x^2+48x-64}{x^2}+\frac{5}{2}=\frac{12x^2-48x+64}{x^2}$$

x^2 mult.

$$x^3-12x^2+48x-64+\tfrac{5}{2}x^2=12x^2-48x+64$$

das ist:

$$x^3-24x^2+96x-128+\tfrac{5}{2}x^2=0$$

das ist:

$$x^3-\tfrac{43}{2}x^2+96x-128=0$$

$1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 4 \quad . \quad 8$ mult. (§ 92.)

$$2x=m$$

und $m^3-43m^2+384m-1024=0$

Da nun diese Gleichung lauter wahre Wurzeln hat (§ 88. III.) deren Summe größer ist, als jede von den Wurzeln, so ist $m<43$ (§ 88. II.)

Man setze nun $m=10$, so kommt anstatt o,

$1000-4300+3840-1024=-484$

und also ist $m>10$ (§ 94.)

Unter

Unter den Divisoren des letzten Gliedes: 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 . 256 . 512 . 1024 muß demnach entweder 16 oder 32 die Wurzel seyn. Die Zahl 682 die durch die Supposition $m = 1$ entstehet, läßet sich mit 31, nicht aber mit 15 dividiren. Folglich ist $m = 32$ (§ 93.)

Da nun $2x = m$

so ist $2x = 32$

und $x = 16$

Aufgabe.

§ 101. Wenn ein Kapital c auf Zinse ausgeliehen ist, und die jährliche Zinse immer wieder als ein nach eben dem Verhältniß zu verzinsendes Kapital angesehen wird, zu finden, wie hoch sich nach etlichen Jahren m, Kapital und Zinse belaufen werde.

Auflösung.

Das Verhältniß zwischen dem Kapital und der jährlichen Zinse sey $a : b$

so findet man nach der Regel Detri die am Ende des ersten Jahrs fällige Zinse von $c = \frac{bc}{a}$

folglich ist das im zweyten Jahre zu verzinsende Kapital $= c + \frac{bc}{a} = \frac{ac + bc}{a}$

Die

Die Zinse davon ist die vierte Proportionalzahl zu a, b, und $\frac{ac+bc}{a}$

und also $= \frac{abc+b^2c}{a^2}$

Das Kapital, das im 3ten Jahre verzinset werden muß, ist demnach $= \frac{ac+bc}{a} + \frac{abc+b^2c}{a^2}$

$$= \frac{a^2c+abc}{a^2} + \frac{abc+b^2c}{a^2} = \frac{a^2c+2abc+b^2c}{a^2}$$

Die Zinse von diesem Kapital ist die vierte Proportionalzahl zu a, b, und $\frac{a^2c+2abc+b^2c}{a^2}$

folglich $= \frac{a^2bc+2ab^2c+b^3c}{a^3}$

und demnach ist am Ende des 3ten Jahrs, Kapital und Zinse zusammen, $= \frac{a^2c+2abc+b^2c}{a^2} +$

$$\frac{a^2bc+2ab^2c+b^3c}{a^3} = \frac{a^3c+3a^2bc+3ab^2c+b^3c}{a^3}$$

Da nun Kapital und Zinse am Ende des ersten Jahrs ist

$$\frac{ac+bc}{a} = \frac{(a+b)^1c}{a^1}$$

am Ende des zweyten Jahrs

$$\frac{a^2c+2abc+b^2c}{a^2} = \frac{(a+b)^2c}{a^2}$$

am

am Ende des dritten Jahrs

$$\frac{a^3c + 3a^2bc + 3ab^2c + b^3c}{a^3} = \frac{(a+b)^3c}{a^3}$$

so siehet man nun ohne weitere Rechnung, daß Kapital und Zinse seyn wird,

nach 4 Jahren, $\frac{(a+b)^4c}{a^4}$ u. s. w.

und überhaupt, nach m Jahren

$$\frac{(a+b)^mc}{a^m}$$

Z. E. Wenn 6000 Rthlr auf 5 Jahr ausgeliehen werden, so daß die Zinse immer zum Kapital gerechnet, und nach eben demselben Verhältniß z. E. 100:5 verzinset wird, so ist $c = 6000$

$m = 5$

$$a:b = 101:5 = 20:1$$

folglich $a = 20$

$b = 1$

und also $\frac{(a+b)^mc}{a^m} = \frac{21^5}{20^5} \cdot 6000 = \frac{4084101}{3200000} \cdot 6000$

$$= 7657 + \frac{1103}{1600}$$

Man kann, wenn man will, die Logarithmen gebrauchen.

$$l\left[\frac{21^5 \cdot 6000}{20^5}\right] = 5l21 - 5l20 + l6000 = 5(l21 - l20) + l6000$$

$$
\begin{array}{rcl}
l21 & = & 1'3222193 \\
l20 & = & 1'3010300 \\
\hline
l21 - l20 & = & 211893 \\
 & & 5 \text{ mult.} \\
\hline
5(l21 - l20) & = & 1059465 \\
16000 & = & 3'7781513 \text{ add.} \\
\hline
5(l21 - l20) + 16000 & = & 3.8840978
\end{array}
$$

Die zu diesem Logarithmo gehörige Zahl ist $7657 + \frac{49}{71} = 7657 + \frac{1104}{1600}$

§ 102. Wenn A von einem Kapital c, Zinse auf Zinse bekommen, und nach einigen Jahren an Kapital und Zinse insgesammt d bekommen hat, und gefragt wird, wie lange das Kapital verzinset worden sey, so ist

$$\frac{(a+b)^x c}{a^x} = d$$

und $xl(a+b) - xla + lc = ld$

$$xl(a+b) - xla = ld - lc \qquad l(a+b) - la \text{ div.}$$

$$x = \frac{ld - lc}{l(a+b) - la}$$

Z. E. Es sey $c = 6000$, $d = 7657 + \frac{1103}{1600}$,

$a = 20$, $b = 1$ $d = \frac{12252303}{1600} = \frac{3^6 \cdot 7^5}{1600}$

 und

$$\text{und } l\left[\frac{3^6 \cdot 7^5}{1600}\right] = 6l3 + 5l7 - l1600 = 3{,}8840978$$

$$lc \quad = 16000 \quad - \quad = 3{,}7781513$$

$$ld - lc \quad = 1059465$$

$$l(a+b) - la \quad = 211893$$

und demnach ist die Zahl der Jahre $x = \frac{1059465}{211893} = 5$

Wenn gefragt wird, wie lange muß c auf diese Art verzinset werden, damit es 2mahl so groß werde? so ist

$$\frac{(a+b)^x c}{a^x} = 2c$$

$$\frac{(a+b)^x}{a^x} = 2$$

$$x\,l(a+b) - x\,la = l2$$

$$x = \frac{l2}{l(a+b) - la}$$

das ist, wenn $a = 20$, $b = 1$

$$x = \frac{3010300}{211893} = 14 + \frac{43798}{211893}$$

Aufgabe.

§ 103. Wenn A an B ein Kapital c zu fodern hat, welches nach etlichen Jahren, ohne Zinse fällig ist, zu finden, wie viel B abziehen oder rabattiren dürfe, wenn er alsobald bezahlen soll.

Auflö-

Auflösung.

Wenn B alsobald bezahlen soll, so hält er sich berechtiget, von dem Kapital, welches er schuldig ist, etwas abzuziehen, weil er die Zinse und die Zinse auf Zinse, die das Kapital, während der Zeit, da er es behalten darf, bringen kann, als das seinige ansiehet.

Wenn das Verhältniß des Kapitals zur jährlichen Zinse ist

$$a : b$$

so ist nach m Jahren Kapital und Zinse zusammen

$$\frac{(a+b)^m c}{a^m} \quad (\S\ 101.)$$

Wenn also B nach m Jahren bezahlet, so ist sein Gewinn

$$= \frac{(a+b)^m c}{a^m} - c$$

Er darf demnach so viel abziehen, als erfodert wird, damit er nach m Jahren $\frac{(a+b)^m c}{a^m} - c$ bekomme.

Was er abziehet, sey $= x$
und was A behält, sey $= y$
so ist demnach

$$\frac{(a+b)^m x}{a^m} = \frac{(a+b)^m c}{a^m} - c \text{ und } x+y=c$$

$$a^m \text{ mult.} \qquad x=c-y$$

$$(a+b)^m x = (a+b)^m c - a^m c$$

$$(a+b)^m \text{ div.}$$

$$x = \frac{(a+b)^m c - a^m c}{(a+b)^m}$$

$$\frac{(a+b)^m c - a^m c}{(a+b)^m} = c - y$$

oder $\dfrac{-(a+b)^m c + a^m c}{(a+b)^m} = y - c$

$$\text{———————————————} (a+b)^m \text{ mult.}$$

$$-(a+b)^m c + a^m c = (a+b)^m y - (a+b)^m c$$
$$+(a+b)^m c \quad = \quad +(a+b)^m c \text{ add.}$$

$$a^m c = (a+b)^m y$$

$$\text{——————————} (a+b)^m \text{ div.}$$

$$\frac{a^m c}{(a+b)^m} = y$$

also bekommt denn A $\dfrac{a^m c}{(a+b)^m}$

und B $c - \dfrac{a^m c}{(a+b)^m}$

Den Werth von $\dfrac{a^m c}{(a+b)^m}$ kann man, wenn man will, durch Hülfe der Logarithmen, oder auch noch auf eine andere Art finden, wie folget:

$$\frac{a^m c}{(a+b)^m} = c : \frac{(a+b)^m}{a^m}$$

und $\dfrac{(a+b)^m}{a^m} = \dfrac{(a+b)^m}{a} = (1+\frac{b}{a})^m$

folglich ist $\dfrac{a^m c}{(a+b)^m} = \dfrac{c}{(1+\frac{b}{a})^m}$

Es

Es ist aber (§ 38.)

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = 1 + \frac{mb}{a} + \frac{m(m-1)b^2}{1.2.a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1.2.3.a^3}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1.2.3.4.a^4}$$

u. s. w.

Es sey das zweyte Glied in dieser Reihe = A
das dritte . . . . = B
das vierte . . . . = C
das fünfte . . . . = D
u. s. w.

so ist $\frac{m(m-1)b^2}{1.2.a^2} = \frac{(m-1.)b}{2.a}.A$

$$\frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1.2.3.a^3} = \frac{(m-2)b}{3.a}B$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1.2.3.4.a^4} = \frac{(m-3)b}{4.a}C$$

u. s. w.

folglich $\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = 1 + \frac{mb}{a} + \frac{(m-1)b}{2.a}A$

$$+ \frac{(m-2)b}{3.a}.B + \frac{(m-3)b}{4.a}C + \frac{(m-4)b}{5.a}D$$

$$+ \frac{(m-5)b}{6.a}E \text{ u. s. w.}$$

und demnach

$$\frac{a^m c}{(a+b)^m} = \frac{c}{1+\frac{mb}{a}+\frac{(m-1)bA}{2a}+\frac{(m-2)b}{3.a}.B+\frac{(m-3)b}{4.a}C\ldots}$$

Regel.

Wenn man finden will, wie viel A an statt seines Kapitals c, welches nach m Jahren ohne Zinse fällig ist, bekommen müße, wenn er von seinem Schuldener B alsobald bezahlt wird, so nehme man

1.) Eine abnehmende arithmetische Progreßion, in welcher das erste Glied der Zahl der Jahre, nach deren Verfliessung die Bezahlung geschehen solte, gleich ist, und die zur Differenz 1 hat, und man setze sie fort, bis das letzte Glied = 1 wird.

2.) Man dividire das erste Glied dieser Progreßion mit 1, das 2te mit 2, das 3te mit 3, u. s. w.

3.) Man multiplicire jeden von diesen Brüchen mit der jährlichen Zinse von 100, und dividire das Produkt mit 100.

4.) Man nenne die erste von den dadurch entstehenden Zahlen A, und multiplicire die zweyte mit A, und nenne das Produkt B; man multiplicire die dritte mit B, und nenne das Produkt C; man multiplicire die 4te mit C, und nenne das Produkt D u. s. w.

5.) Man summire A+B+C+D u. s. w. und addire zu der Summe 1.

6.) Mit dieser Summe dividire man das Kapital, welches A zu fodern hat; der Quotient zeiget, wie viel A anstatt des ganzen Kapitals bekommen werde?

Exem-

Exempel.

Das Kapital sey $= 350$

Die Zahl der Jahre, nach deren Verfliessung es fällig ist, ... $= 4$

Die Zinse von 100 sey $= 8$; so ist die Operation folgende:

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{1} \cdot \frac{8}{100} = \frac{32}{100} = A$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{100} = \frac{12}{100}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{100} = \frac{16}{300}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{100} = \frac{2}{100}$$

$$\frac{32}{100} \cdot \frac{12}{100} = \frac{384}{10000} = B$$

$$\frac{16}{300} \cdot \frac{384}{10000} = \frac{16 \cdot 128}{1000000} = \frac{2048}{1000000} = C$$

$$\frac{2}{100} \cdot \frac{2048}{1000000} = \frac{4096}{100000000} = D$$

$$\begin{array}{lcrcr}
1 & = & 100\ 00\ 00\ 00 & : & 100\ 00\ 00\ 00 \\
A & = & 32\ 00\ 00\ 00 & : & 100\ 00\ 00\ 00 \\
B & = & 3\ 84\ 00\ 00 & : & 100\ 00\ 00\ 00 \\
C & = & 20\ 48\ 00 & : & 100\ 00\ 00\ 00 \\
D & = & 40\ 96 & : & 100\ 00\ 00\ 00
\end{array}$$

$$1+A+B+C+D = \frac{136048896}{100000000}$$

A bekommt also $350 : \frac{136048896}{100000000}$

$$= \frac{35000000000}{136048896} = 257 + \frac{35433728}{136048896}$$
$$= 257 + \frac{138413}{531441}$$

und folglich bekommt B $92 + \frac{393028}{530441}$

Unbestimmte Aufgaben.

Aufgabe.

§ 104. Zwey Quadrate zu finden, deren Summe ein vollkommenes Quadrat sey.

Auflösung.

Das eine Quadrat sey $= x^2$
Das andeere $= y^2$

Weil nun x^2+y^2 ein vollkommnes □ machen soll, so setze man $\sqrt{(x^2+y^2)} = ax-y$

Denn wenn an beyden Seiten ein □ gemacht wird, so fällt y^2 durch die Subtraction weg, und durch die Division mit x bekommt man eine einfache Gleichung,

Gleichung, und findet also ein □, dessen Wurzel rational ist.

$$\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & a^2x^2-2axy+y^2 \\ y^2 & = & \qquad\qquad y^2 \text{ subtr.} \\ \hline x^2 & = & a^2x^2-2axy \quad x \text{ div.} \\ \hline x & = & a^2x-2ay \\ \text{oder } -x & = & -a^2x+2ay \\ \hline a^2x-x & = & 2ay \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{a^2x-x}{2a} = y$$

x wird nach Gefallen angenommen, wie auch a

Z. E. Es sey $x = 1$
$a = 2$

so ist $y = \frac{a^2x-x}{2a} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

und $x^2+y^2 = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$, und $\frac{25}{16}$ ist ein vollkommenes □; denn die Wurzel desselben ist $= \frac{5}{4}$

Wenn man die Quadrate in ganzen Zahlen verlanget, so multiplicire man $x = 1$ und $y = \frac{3}{4}$, jedes mit 4, so sind die Wurzeln der verlangten □ □ 4 und 3 und $16+9 = 25$.

Man setze $x = 3$
$a = 4$

so ist $y = \frac{16.3-3}{8} = \frac{45}{8}$

oder weil $x:y = 3:\frac{45}{8} = 1:\frac{15}{8} = 8:15$

so ist in ganzen Zahlen $x = 8$ und $y = 15$ und $x^2 + y^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$

Aufgabe.

§ 105. Die Zahl 2 in zwey vollkommene □□ zu theilen.

Auflösung.

Es sey $1 = x - 1$
und $1 = mx - 1$

so ist $1 = x^2 - 2x + 1$
$1 = m^2x^2 - 2mx + 1$ add.

$2 = x^2 + m^2x^2 - 2x - 2mx + 2$
$2 = \qquad 2$ subtr.

$0 = x^2 + m^2x^2 - 2x - 2mx$ x div.

$0 = x + m^2x - 2 - 2m$

$2m + 2 = m^2x + x$ $m^2 + 1$ div.

$$\frac{2m+2}{m^2+1} = x$$

$$mx = \frac{2m^2+2m}{m^2+1}$$

$$x - 1 = \frac{2m+2}{m^2+1} - 1 = \frac{2m+2-m^2-1}{m^2+1}$$

$= \underline{2m - m^2 + 1}$

und

und $mx - 1 = \frac{2m^2 + 2m}{m^2 + 1} - 1 = \frac{2m^2 + 2m - m^2 - 1}{m^2 + 1}$

$= \frac{m^2 + 2m - 1}{m^2 + 1}$

Man nehme also eine beliebige Zahl (z. E. $m = 2$) und addire dazu 1.

Von dem binomio $2 + 1$ mache man ein $\square$ $4 + 4 + 1$.

Man mache das $\square$ des ersten Theils der Wurzel negativ, und dividire, die dadurch entstehende Zahl $- 4 + 4 + 1$ mit der Summe der Quadrate der beyden Theile der Wurzel, so ist der Quotient $\frac{- 4 + 4 + 1}{4 + 1}$ die eine von den gesuchten Quadratwurzeln.

Man mache das $\square$ des andern Theils der Wurzel negativ, und dividire die dadurch entstehende Zahl $4 + 4 + - 1$ mit der Summe der Quadrate der beyden Theile der Wurzel; so ist der Quotient $\frac{4 + 4 - 1}{4 + 1}$ die andere von den verlangten Quadratwurzeln.

$\frac{-4 + 4 + 1}{4 + 1} = \frac{1}{5}$ und $\frac{4 + 4 - 1}{4 + 1} = \frac{7}{5}$

und $\frac{1}{25} + \frac{49}{25} = \frac{50}{25} = 2$

Aufgabe

Aufgabe.

§ 106. Zwey Quadrate von dieser Eigenschaft zu finden, daß, wenn zum □ ihrer Summe eins von beyden addiret wird, 2 vollkommene Quadrate kommen.

Auflösung.

Die Summe der beyden Quadrate sey $= x$
das 1ste □ sey $= \quad 2xy + y^2$
und das 2te sey $= - 2xy + y^2$
so ist das □ der Summe und das 1ste □ zusammen genommen ein vollkommenes □, nemlich $x^2 + 2xy + y^2$

Auch das □ der Summe und das 2te □ zusammen genommen ist ein vollkommenes □, nemlich $x^2 - 2xy + y^2$

Weil nun das 1ste □ $= + 2xy + y^2$
das 2te □ $= - 2xy + y^2$
und die Summe derselben $= x$
so ist $x = 2y^2$

Man setze $2xy + y^2 = a^2y^2$ und $-2xy + y^2 = b^2y^2$
so ist $2x + y = a^2y$ $-2x + y = b^2y$
$2x = a^2y - y$ $+2x - y = -b^2y$
$2x = y - b^2y$

$a^2y - y = y - b^2y$ — y div.
$a^2 - 1 = 1 - b^2$
$a^2 + b^2 = 2$

Weil

Weil $2x = a^2y - y$

so ist $x = \frac{a^2y - y}{2}$

und da $x = 2y^2$

so ist $\frac{a^2y - y}{2} = 2y^2$ y div.

$\frac{a^2 - 1}{2} = 2y$ 2 div.

$\frac{a^2 - 1}{4} = y$

Weil $a^2 + b^2 = 2$, so ist zur Auflösung dieser Aufgabe nöthig, daß die Zahl 2 in zwey Quadrate getheilet werde (§ 105.)

Es sey also $a^2 = \frac{49}{25}$ und $b^2 = \frac{1}{25}$

so ist $y = \frac{a^2 - 1}{4} = \frac{\frac{49}{25} - 1}{4} = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

und $x = 2y^2 = \frac{72}{625}$

folglich $2xy + y^2 = \frac{12.72}{25.625} + \frac{36}{625} = \frac{1764}{15625}$

und $-2xy + y^2 = \frac{36}{15625}$

das ist, die verlangten □ □ sind $\frac{1764}{15625}$ und $\frac{36}{15625}$

Denn

Denn $\frac{1764}{15625} = \frac{42^2}{125^2}$ und $\frac{36}{15625} = \frac{6^2}{125^2}$

Die Summe beyder Quadrate ist $= \frac{1800}{15625} = \frac{72}{625}$

das □ derselben $= \frac{5184}{390625}$

Wenn das 1ste □ dazu addiret wird, so kommt:

$$\frac{5184}{390625} + \frac{1764}{15625} = \frac{5184}{390625} + \frac{25.1764}{25.15625} =$$

$$\frac{5184}{390625} + \frac{44100}{390625} = \frac{49284}{390625} = \frac{222^2}{625^2}$$

und wenn das zweyte □ dazu addiret wird; so kommt:

$$\frac{5184}{390625} + \frac{900}{390625} = \frac{6084}{390625} = \frac{78^2}{625^2}$$

Aufgabe.

§ 107. Vier Zahlen von dieser Eigenschaft zu finden, daß, ihre Summe ein □ sey, und wenn man zwey und zwey addiret, noch 6 Quadrate kommen.

Auflösung.

Die erste Zahl A sey $= x^2 - m$
die 2te B $= + m$
die 3te C $= 2xy + y^2 - r$
und die 4te D $= + r$

so ist die Summe ein □, nemlich $x^2 + 2xy + y^2$
$A + B$ ist auch schon ein □, nemlich x^2

Man

Man setze $A+C=x^2-m+2xy+y^2-r=a^2$

so ist $x^2+2xy+y^2-r-a^2=m$

Es sey $A+D=x^2-m+r=b^2$

so ist $x^2+r-b^2=m$

und folglich $x^2+r-b^2=x^2+2xy+y^2-r-a^2$

$x^2 \qquad = x^2$ subtr.

$$r-b^2=2xy+y^2-r-a^2$$
$$r \qquad = \qquad +r \text{ add.}$$

$$2r-b^2=2xy+y^2-a^2$$

$$2r=2xy+y^2-a^2+b^2$$

$$r=\frac{2xy+y^2-a^2+b^2}{2}$$

Weil $m=x^2+2xy+y^2-r-a^2$

so ist $m+r=x^2+2xy+y^2-a^2$

das ist:

$$B+D = x^2+2xy+y^2-a^2$$

und weil $m=x^2+r-b^2$

so ist $m-r=x^2-b^2$

Man addire $2xy+y^2=2xy+y^2$

$$m-r+2xy+y^2=x^2+2xy+y^2-b^2$$

das ist:

$$B+C = x^2+2xy+y^2-b^2$$

Endlich $C+D=2xy+y^2$.

Um $C+D$ rational zu machen, setze man

$$2xy+y^2=c^2y^2$$

so ist $2x+y=c^2y$

Damit

Damit $B+D$ rational werde, sey

$$x^2+2xy+y^2-a^2=(ad-x-y)^2$$

das ist:

$$\begin{array}{rcl} x^2+2xy+y^2-a^2 & = & a^2d^2-2adx+x^2-2ady \\ x^2+2xy+y^2 & = & x^2 \\ & & +2xy+y^2 \\ & & +2xy+y^2 \text{ subtr.} \\ \hline -a^2 & = & a^2d^2-2adx-2ady \\ \text{oder } +a^2 & = & -a^2d^2+2adx+2ady \end{array}$$

a div.

$$a=-ad^2+2dx+2dy$$

$$a+ad^2-2dy=2dx$$

d div.

$$\frac{a+ad^2-2dy}{d}=2x$$

Da nun $2x+y=c^2x$

und $2x=c^2y-y$

so ist $\dfrac{a+ad^2-2dy}{d}=c^2y-y$

d mult.

$$a+ad^2-2dy=c^2dy-dy$$

$$+2dy=+2dy \text{ add.}$$

$$a+ad^2=c^2dy+dy$$

c^2d+d div.

$$\frac{a+ad^2}{c^2d+d}=y$$

Endlich

Endlich, um $B+C$ rational zu machen, setze man
$x^2+2xy+y^2-b^2 = (bf-x-y)^2$

das ist:

$$x^2+2xy+y^2-b^2 = b^2f^2-2bfx+x^2-2bfy+2xy+y^2$$

$$-b^2 = b^2f^2-2bfx-2bfy$$
b div.

$$-b = bf^2-2fx-2fy$$
oder $+b = -bf^2+2fx+2fy$

$$\frac{bf^2+b-2fy}{f} = 2x$$

Weil nun auch $2x = c^2y-y$
so ist $c^2y-y = \dfrac{bf^2+b-2fy}{f}$

$$c^2fy-fy = bf^2+b-2fy$$

$$c^2fy+fy = bf^2+b$$
c^2f+f div.

$$y = \frac{bf^2+b}{c^2f+f}$$

Da nun auch $y = \dfrac{a+ad^2}{c^2d+d}$

so ist $\dfrac{bf^2+b}{c^2f+f} = \dfrac{a+ad^2}{c^2d+d}$

das ist:

$$\frac{bf^2+b}{(c^2+1)f} = \frac{a+ad^2}{(c^2+1)d}$$

c^2+1 mult.

$$\frac{bf^2+b}{f} = \frac{a+ad^2}{d}$$

f mult.

$$bf^2+b = b(f^2+1) = \frac{af+ad^2f}{d}$$

f^2+1 div.

$$b = \frac{af+ad^2f}{df^2+d}$$

Z. E. Es sey $a=2$, $c=4$, $d=3$, $f=5$; so findet man $b=\frac{50}{39}$

$y=\frac{20}{51}$, $y=\frac{50}{17}$; $r=\frac{22912}{439569}$, $m=\frac{3102912}{439569}$,

$x^2-m=\frac{699588}{439569}$, $2xy+y^2-r=\frac{1058688}{439569}$

das ist:

$A=\frac{699588}{439569}$, $B=\frac{3102912}{439569}$, $C=\frac{1058688}{439569}$,

$D=\frac{22912}{439569}$

oder, wenn man den Nenner, der ein □ ist, wegläßet, und die Zähler mit dem □ 4 dividiret,

A =

$$\begin{aligned} A &= 174897 \\ B &= 775728 \\ C &= 264672 \\ D &= 5728 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 1221025 = 1105^2 \\ A+B &= 950625 = 975^2 \\ A+C &= 439569 = 663^2 \\ A+D &= 180625 = 425^2 \\ B+C &= 1040400 = 1020^2 \\ B+D &= 781456 = 884^2 \\ C+D &= 270400 = 520^2 \end{aligned}$$

Aufgabe.

§ 108. Drey Quadrate A^2, B^2, C^2 zu finden, von dieser Eigenschaft, daß A^2+B^2, A^2+C^2, und B^2+C^2 jedes ein Quadrat sey.

Auflösung.

Es sey
$$\begin{aligned} A^2 &= x^2+2xy \\ B^2 &= y^2 \\ C^* &= 2y+1 \end{aligned}$$

so ist
$$\begin{aligned} A^2+B^2 &= x^2+2xy+y^2 \\ B^2+C^2 &= y^2+2y+1 \end{aligned}$$

Um nun auch A^2+C^2 rational zu machen, setze man:

$$\begin{aligned} x^2+2xy+2y+1 &= x^2+2x+1 \\ x^2 \quad\quad +1 &= x^2 \quad +1 \text{ subtr.} \end{aligned}$$

$$2xy + 2y = 2x \qquad \text{2 div.}$$

$$xy + y = x \qquad x + 1 \text{ div.}$$

$$y = \frac{x}{x+1}$$

Weil nun $A^2 = x^2 + 2xy$ ein $\square$ seyn muß, so sey

$$x^2 + 2xy = a^2x^2 \qquad \text{x div.}$$

$$x + 2y = a^2x$$

$$2y = a^2x - x$$

$$y = \frac{a^2x - x}{2}$$

folglich $\dfrac{a^2x - x}{2} = \dfrac{x}{x+1}$ x div.

$$\frac{a^2 - 1}{2} = \frac{1}{x+1} \qquad \text{2 mult.}$$

$$a^2 - 1 = \frac{2}{x+1} \qquad x + 1 \text{ mult.}$$

$$a^2x - x + a^2 - 1 = 2$$

$$a^2x - x = 3 - a^2 \qquad a^2 - 1 \text{ div.}$$

$$x = \frac{3 - a^2}{a^2 - 1}$$

Endlich

Endlich, damit $C^2 = 2y + 1$ ein vollkommenes □ werde,

so sey $2y + 1 = b^2$

$$2y = b^2 - 1$$

Da nun auch $2y = a^2x - x$

so ist $a^2x - x = b^2 - 1$

$a^2 - 1$ div.

$$x = \frac{b^2 - 1}{a^2 - 1}$$

Es ist aber $x = \frac{3 - a^2}{a^2 - 1}$

und demnach $\frac{b^2 - 1}{a^2 - 1} = \frac{3 - a^2}{a^2 - 1}$

$a^2 - 1$ mult.

$$b^2 - 1 = 3 - a^2$$

$$b^2 = 4 - a^2$$

Damit $4 - a^2$ ein □ werde, so sey

$$4 - a^2 = (ac - 2)^2$$

das ist:

$$4 - a^2 = a^2c^2 - 4ac + 4$$

$$-a^2 = a^2c^2 - 4ac$$

a div.

$$-a = ac^2 - 4c$$

$$4c = ac^2 + a$$

$c^2 + 1$

$$\frac{4c}{c^2 + 1} = a$$

Z. E. Es sey $c = 2$, so ist $a = \frac{8}{5}$, $b^2 = 4 - a^2 = 4 - \frac{64}{25} = \frac{100-64}{25} = \frac{36}{25} = C^2$, $b^2 - 1 = \frac{11}{25}$ $\frac{b^2-1}{2} = y = \frac{11}{50}$, und $y^2 = B^2 = \frac{121}{2500}$ $3 - a^2 = 3 - \frac{64}{25} = \frac{75-64}{25} = \frac{11}{25}$, und $a^2 - 1 = \frac{64}{25} - 1 = \frac{39}{25}$; folglich $\frac{3-a^2}{a^2-1} = x = \frac{11}{25} : \frac{39}{25} = \frac{11}{39}$, und $ax = \frac{8}{5} \cdot \frac{11}{39}$, und $a^2x^2 = A^2 = \frac{64 \cdot 121}{25 \cdot 39^2}$

Wenn man nun ganze Zahlen verlanget, so multiplicire man

$A^2 = \frac{64 \cdot 121}{25 \cdot 39^2}$, $B^2 = \frac{121}{2500}$, $C^2 = \frac{36}{25}$

jedes mit 2500, so kommt

$A^2 = \frac{64 \cdot 121 \cdot 100}{39^2}$, $B^2 = 121$, $C^2 = 3600$

ferner mit 39^2, so kommt

$A^2 = 64 \cdot 12100$, $B^2 = 39^2 \cdot 121$, $C^2 = 39^2 \cdot 3600$

das ist:

$A^2 = 774400$, $B^2 = 184041$, $C = 5475600$

$A^2 +$

$A^2+B^2 = 958441 = 979^2$
$A^2+C^2 = 6250000 = 2500^2$
$B^2+C^2 = 5659641 = 2379^2$

Aufgabe.

§ 109. Drey Quadrate A^2, B^2, C^2 von dieser Beschaffenheit zu finden, daß $A^2+B^2+C^2$, A^2+B^2, und B^2+C^2 jedes ein □ sey.

Auflösung.

Es sey $A^2 = x^2+2xy$
$B^2 = y^2$
$C^2 = 2y+1$
so ist A^2+B^2, wie auch B^2+C^2 ein □

Man setze
$$A^2+B^2+C^2=x^2+2xy+y^2x2y+1=(mx-y-1)^2$$
das ist:
$$x^2+2xy+y^2+2y+1=m^2x^2-2mxy+y^2-2mx$$
$$y^2+2y+1= \qquad y^2$$
$$+2y+1$$
$$+2y+1 \text{ subtr.}$$

$$x^2+2xy = m^2x^2-2mxy-2mx$$
x div.
$$x+2y = m^2x-2my-2m$$
$$2my+2y=m^2x-x-2m$$
m+1 div.
$$2y = \frac{m^2x-x-2m}{m+1}$$

Damit $C^2 = 2y + 1$ ein □ werde, so sey

$$2y + 1 = r^2$$

$$2y = r^2 - 1$$

und demnach ist

$$\frac{m^2x - x - 2m}{m + 1} = r^2 - 1$$

$$m^2x - x - 2m = mr^2 - m + r^2 - 1$$

$$m^2x - x = mr^2 + m + r^2 - 1$$

$$x = \frac{mr^2 + m + r^2 - 1}{m^2 - 1}$$

Es sey $A^2 = x^2 + 2xy = d^2x^2$

$$x + 2y = d^2x$$

$$2y = d^2x - x$$

Da nun $2y = r^2 - 1$

so ist $d^2x - x = r^2 - 1$

und $x = \frac{r^2 - 1}{d^2 - 1}$

und da $x = \frac{mr^2 + m + r^2 - 1}{m^2 - 1}$

so ist $\frac{mr^2 + m + r^2 - 1}{m^2 - 1} = \frac{r^2 - 1}{d^2 - 1}$

Man multiplicire $mr^2 + m + r^2 - 1$ mit $d^2 - 1$, und $r^2 - 1$ mit $m^2 - 1$, so kommt

$$mr^2d^2+md^2+r^2d^2-d^2-mr^2-m-r^2+1=$$
$$-r^2+1=$$
$$m^2r^2-m^2-r^2+1$$
$$-r^2+1 \text{ subtr.}$$

$$mr^2d^2+md^2+r^2d^2-d^2-mr^2-m=m^2r^2-m^2$$

$$mr^2d^2+md^2+r^2d^2-d^2=m^2r^2+mr^2-m^2+m$$

$$d^2=\frac{m^2r^2+mr^2-m^2+m}{mr^2+m+r^2-1}$$

Der Zähler sey $= m^2r^2$, so ist

$$mr^2-m^2+m=0$$

$$r^2-m+1=0$$

$$r^2+1=m$$
$$r^2+1=r^2+1 \text{ mult.}$$

$$r4+2r^2+1=mr^2+m$$
$$r^2-1=r^2-1 \text{ add.}$$

$$r4+3r^2=mr^2+m+r^2-1$$

folglich $d^2=\dfrac{m^2r^2}{r4+3r^2}=\dfrac{m^2}{r^2+3}$

oder weil $m=r^2+1$

$$d^2=\frac{r^4+2r^2+1}{r^2+3}$$

Damit der Nenner ein □ werde, so sey

$$r^2+3=(v+r)^2$$

das ist:

$$\frac{\frac{\frac{r^2+3 = v^2+2vr+r^2}{3 = v^2+2vr}}{3-v^2}}{2v} = r$$

Z. E. Es sey $v=2$, so ist $r = -\frac{1}{4}$, $r^2+1 = \frac{17}{16}$, $r^4+2r^2+1 = \frac{289}{256}$, $r^2+3 = \frac{49}{16}$,

und demnach $d^2 = \frac{289}{256} : \frac{49}{16} = \frac{289}{256} \cdot \frac{16}{49} = \frac{289}{16.49}$

$= \frac{289}{784}$ und $d^2-1 = -\frac{495}{784}$.

$r^2-1 = -\frac{15}{16}$

folglich $x = \frac{r^2-1}{d^2-1} = -\frac{15}{16} : -\frac{495}{784} = -\frac{15}{16} \cdot \frac{784}{-495}$

das ist $x = +\frac{49}{33}$

und also $x^2 = \frac{49^2}{33^2}$

und $d^2x^2 = \frac{289}{784} \cdot \frac{49^2}{33^2}$

Endlich $y = \frac{r^2-1}{2} = -\frac{15}{32}$ und $y^2 = \frac{225}{32^2}$

Es

Es ist also

$$A^2 = d^2x^2 = \frac{289 \cdot 49^2}{784 \cdot 33^2}\ B^2 = y^2 = \frac{225}{32^2},\ C^2 = r^2 = \frac{1}{16}$$

Das ist, wenn die Brüche zu einerley Benennung gebracht werden, und der gemeinschaftliche Nenner weggelassen wird,

$$\begin{array}{rcr} A^2 & = & 906304 \\ B^2 & = & 245025 \\ C^2 & = & 69696 \\ \hline A^2+B^2+C^2 & = & 1221025 = 1105^2 \\ A^2+B^2 & = & 1151329 = 1073^2 \\ B^2+C^2 & = & 314721 = 561^2 \end{array}$$

Aufgabe.

§ 110. Drey Quadrate A^2, B^2, C^2 von dieser Eigenschaft zu finden, daß A^2-B^2, A^2-C^2, und B^2-C^2 jedes ein □ sey.

Auflösung.

Diese Aufgabe kann durch Hülfe der vorhergehenden aufgelöset werden.

Denn es sey

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & a^2+b^2+c^2 \\ B^2 & = & a^2+b^2 \\ C^2 & = & a^2 \\ \hline \end{array}$$

so ist

$$\begin{array}{rcl} A^2-B^2 & = & c^2 \\ A^2-C^2 & = & b^2+c^2 \\ B^2-C^2 & = & b^2 \end{array}$$

Wenn

Wenn nun $a^2+b^2+c^2$, a^2+b^2 und b^2+c^2 jedes ein $\square$ ist, so sind auch A^2-B^2, A^2-C^2 und B^2-C^2 Quadrate.

Z.E. Es sey (§ 109.) $a^2+b^2+c^2=1221025$, $a^2+b^2=1151329$, und $a^2=906304$, so ist

$$A^2 = 1221025$$
$$B^2 = 1151329$$
$$C^2 = 906304$$

Aufgabe.

§ 111. Vier Zahlen A, B, C, D von dieser Eigenschaft zu finden, daß $A-B$, $A-C$, $A-D$, $B-C$, $B-D$, $C-D$ jeder ein $\square$ sey.

Auflösung.

Man setze
$$\begin{aligned} A &= x+a^2+b^2+c^2 \\ B &= x+a^2+b^2 \\ C &= x+a^2 \\ D &= x \end{aligned}$$

so ist
$$\begin{aligned} A-B &= c^2 \\ A-C &= b^2+c^2 \\ A-D &= a^2+b^2+c^2 \\ B-C &= b^2 \\ B-D &= a^2+b^2 \\ C-D &= a^2 \end{aligned}$$

Wenn nun $a^2+b^2+c^2$ und a^2+b, und b^2+c^2 Quadrate sind, so ist die Aufgabe aufgelöset.

Man

Man setze also (§ 109.) z. E.

$$a^2+b^2+c^2 = 1221025$$
$$a^2+b^2 = 1151329$$
$$a^2 = 906304$$

so ist $A = x + 1221025$
$B = x + 1151329$
$C = x + 906304$
$D = x$

Es sey z. E. $x = 876543$,
so ist $A = 2097568$
$B = 2027872$
$C = 1782847$
$D = 876543$

Aufgabe.

§ 112. Drey Zahlen A, B, C von dieser Eigenschaft zu finden, daß sowohl die Summe, als die Differenz von jeden zweyen ein □ sey.

Auflösung.

Man setze $A = x$
$B = y$
$C = m$

$A+B = x+y = a^2$ und $A+C = x+m = b^2$

$x = a^2 - y$ $\qquad x = b^2 - m$

$$a^2 - y = b^2 - m$$
$$a^2 - b^2 = y - m$$
$$a^2 - b^2 + m = y$$

Es

Es sey ferner $B + C = y + m = c^2$

$$y = c^2 - m$$

und demnach $a^2 - b^2 + m = c^2 - m$

$$2m = c^2 + b^2 - a^2$$

$$m = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$$

Weil $A = x = b^2 - m$

und $B = y = c^2 - m$

so ist $A - B = b^2 - c^2$

ferner $A = x = b^2 - m$

und $C = m$

$$A - C = b^2 - 2m$$

und da $2m = b^2 + c^2 - a^2$

so ist $A - C = a^2 - c^2$

Endlich $B = y = a^2 - b^2 + m$

und $C = m$

folglich $B - C = a^2 - b^2$

Da nun $A - B = b^2 - c^2$

$A - C = a^2 - c^2$

$B - C = a^2 - b^2$

Quadrate seyn sollen, so siehet man, daß die verlangten Zahlen A, B, C, durch die § 110. aufgelösete Aufgabe gefunden werden können.

Es sey also z. E. $a^2 = 1221025$

$b^2 = 1151329$

$c^2 = 906304$

so ist $m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = 418304$

x =

$$x = b^2 - m \quad = 733025$$
$$y = a^2 - b^2 + m = 488000$$

das ist:

$$A = 733025$$
$$B = 488000$$
$$C = 418304$$

Von der Differential- und Integralrechnung.

Erklärung.

§ 113. Wenn zwey Größen x und $x+e$, um eine Größe e, die in Vergleichung mit x unendlich klein ist, unterschieden sind, so daß $e=0$, oder $x=x+e$ angenommen werden kann, so wird e die Differentialgröße von x genennet.

Das Zeichen derselben ist der Buchstab d, der vor x gesetzet wird; nemlich $x=x+dx$, oder $x=x-dx$, $y=y+dy$, oder $y=y-dy$ u. s. w.

Man bezeichnet aber nur die Differentialgrößen der Größen, in so fern sie nicht völlig bestimmt oder bekannt sind; Denn die Bezeichnung der Differentialgrößen der bestimmten oder bekannten Größen würde keinen Nutzsn haben. Also anstatt da setzet man o

Differen-

Differentiiren heisset demnach eine Größe finden, die in Vergleichung mit einer andern unendlich klein ist.

Aufgabe.

§ 114. Ein Produkt xy differentiiren, das ist, die Größe finden, die in Vergleichung mit xy unendlich klein ist.

Auflösung.

Man setze $\left.\begin{array}{l} x = x + dx \\ y = y + dy \end{array}\right\}$ § 113.

und multiplicire, so kommt

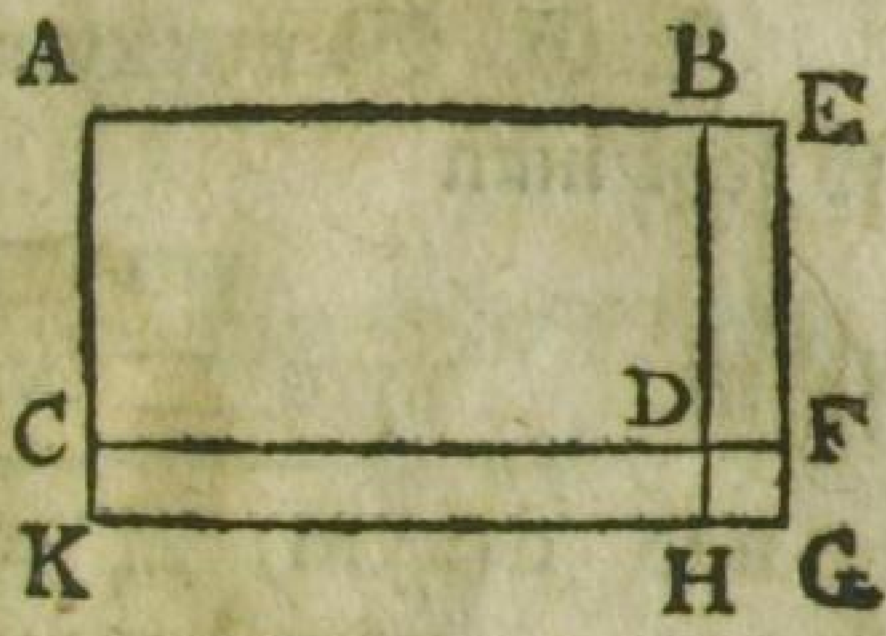
$$\begin{array}{rl} xy = & xy + ydx + xdy + dxdy \\ xy = & xy \text{ subtr.} \\ \hline 0 = & ydx + xdy + dxdy \end{array}$$

ydx + xdy + dxdy ist also die Differentialgröße von dem Produkt xy (§ 113.)

Aber dxdy ist in Vergleichung mit dx oder dy unendlich klein, und kann also weggelassen werden; z. E. setzet man $dx = \frac{1}{1000000}$, und $dy = \frac{1}{2000000}$

so ist $dxdy = \frac{1}{2000\,000\,000\,000}$

folglich ist die Differentialgröße von xy = xdy + ydx



Z. E. Es sey ABDC ein Rectangulum, in welchem AB = y und BD = x; so ist der Inhalt desselben = BD . AB = xy. Man setze, AB werde um einen unendlich kleinen Theil BE, und BD um einen unendlich kleinen Theil DH verlängert; so ist BE = dy und DH = dx.

Man bekommt also die Rectangula ABDC + BEFD + CDHK + DFGH = BD . AB + BE . BD + CD . DH + DH . DF das ist: (weil CD = AB und DF = BE) = BD . AB + BE . BD + AB . DH + DH . BE = xy + xdy + ydx + dxdy.

Und unter diesen Rectangulis kann BEFD = xdy nicht von der Linie BD, und CDHK = ydx nicht von der Linie CD, und DFGH = dxdy nicht von dem Punkt D unterschieden werden; daher man annehmen kann, daß
ABDC = ABDC + BEFD + CDHK + DFGH
und da ein Punkt in Ansehung einer Linie unendlich klein ist, daß ABDC = ABDC + BEFD + CDHK

§ 115. Wenn ein Produkt ax, in welchem der eine Factor a bekannt ist, differentiiret werden soll, so ist d(ax) oder die Differentialgröße von ax

= adx + xda (§ 114.)

Es ist aber da = 0 (§ 113.)
und folglich auch xda = 0
und demnach d(ax) = adx

§ 116. Wenn man xy zu differentiiren weiß, so kann man ein jedes Produkt differentiiren, es bestehe aus so vielen Factoren, als es wolle.

Z. E. Wenn xym differentiiret werden soll; so setze man

$$ym = r$$

so ist $xym = xr$

und $d(xym) = xdr + rdx$ (§ 114.)

ferner $ydm + mdy = dr$ (§ cit.)

Wenn man nun in $xdr + rdx$, den Werth von dr und r an statt dr und r setzet, so kommt

$$d(xym) = xydm + mxdy + mydx$$

Eben so findet man

$$d(xymz) = xymdz + xyzdm + mxzdy + myzdx$$
u. s. w.

§ 117. Weil $d(xy) = xdy + ydx$ (§ 114.)

und $d(xym) = xydm + mxdy + mydx$

$d(xymz) = xymdz + xyzdm + mxzdy + myzdx$
u. s. w. (§ 116.)

so siehet man daraus, wie Potenzen, x^2, x^3, x^4 u. s. f. differentiiret werden müßen.

Denn man setze $x = y = m = z$;

so ist 1) $xy = x^2$

und $d(xy) = d(x^2) = xdx + xdx = 2x^1dx$

2) $xym = x^3$

und $d(xym) = d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx$
$= 3x^2dx$

3) $xymz = x^4$

und $d(xymz) = dx^4 = x^3dx + x^3dx + x^3dx$
$+ x^3dx = 4x^3dx$ u. s. w.

folglich überhaupt $d(x^m) = mx^{m-1}dx$

Eben dieses hätte man auch auf diese Art finden können.

x =

$$x = x + dx \ (\S\ 113.)$$

$$x^m = (x+dx)^m$$

$$(x+dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}dxdx$$

$\ldots\ldots$ (§ 38.)

folglich $x^m = x^m + mx^{m-1}dx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}$
$x^m = x^m$ subtr.

$dxdx\ldots\ldots$

$$0 = mx^{m-1}dx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}dxdx$$

Weil nun aber $dxdx = 0$, wie schon angemerket worden (§ 114.), so ist $m(m-1)x^{m-2}dxdx = 0$ und ein jedes folgendes Glied $= 0$

Und demnach ist $mx^{m-1}dx$ das differentiale von x^m

Wenn eine Potenz, die einen gebrochenen Exponenten hat, wie $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$ oder überhaupt $\sqrt[m]{x^n}$ differentiiret werden soll, so geschicht es nach eben der Regel, nach welcher x^m differentiiret wird.

Denn es sey $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m} = z$

so ist $x^n = z^m$

$$nx^{n-1}dx = mz^{m-1}dz$$

$$\frac{n}{m}x^{n-1}dx = z^{m-1}dz$$

Es ist aber $z^{m-1} = \frac{z^m}{z} = \frac{x^n}{x^{n:m}}$

folglich $\frac{n}{m} x^{n-1} dx = \frac{x^n}{x^{n:m}} dz$

das ist, wenn mit x^n dividiret wird,

$$\frac{n}{m} x^{-1} dx = \frac{1}{x^{n:m}} dz$$

und wenn mit $x^{n:m}$ multipliciret wird,

$$\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx = dz$$

Da nun $z = \sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$

so ist $dz = d(\sqrt[m]{x^n})$ oder $d(x^{n:m})$

und demnach $d(\sqrt[m]{x^n})$ oder $d(x^{n:m}) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx$

Regel.

Wenn man eine Potenz x^m oder $x^{n:m}$ differentiiren will,

1. So subtrahire man 1 von dem Exponenten, und man bekommt x^{m-1}, $x^{\frac{n-1}{m}}$

2. Man multiplicire, die Potenz, deren Exponent um 1 vermindert ist, mit dem vorigen Exponenten; so kommt mx^{m-1}, $\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

3. Dieses

3. Dieses Produkt multiplicire man, mit der Differentialgröße der Wurzel; so hat man

$$mx^{m-1}dx, \quad \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}dx$$

und dieses Produkt ist die Differentialgröße der Potenz.

Eben diese Regel gilt von Potenzen, die einen negativen Exponenten haben.

Z. E. $d(x^{-3}) = -3x^{-4}dx$

Denn $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

Man setze $\frac{1}{x^3} = v$

so ist $1 = vx^3$

und $d1 = vd(x^3) + x^3dv$ (§ 114.)

Da nun $d1 = 0$ (§ 113.)

und $d(x^3) = 3x^2dx$

so ist $0 = 3x^2vdx + x^3dv$

x² div.

$0 = 3vdx + xdv$

$v = \frac{1}{x^3}$

folglich $0 = \frac{3}{x^3}dx + xdv$

x³ mult.

$0 = 3dx + x^4dv$

$-3dx = x^4dv$

$$\frac{-3}{x^4}\,dx = dv$$

oder $-3x^{-4}dx = dv$

das ist $-3x^{-4}dx$ ist das Differentiale von x^{-3}

Aufgabe.

§ 118. $\frac{x}{y}$ Differentiiren.

Auflösung.

Man setze $\frac{x}{y} = v$

so ist $x = vy$

und $dx = vdy + ydv$ (§ 114.)

$dx - vdy = ydv$

das ist, weil $v = \frac{x}{y}$

$dx - \frac{x}{y}dy = ydv$

y mult.

$ydx - xdy = y^2dv$

y^2 div.

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = dv$$

das ist $\frac{ydx - xdy}{y^2}$ ist die Differentialgröße von $\frac{x}{y}$

Man

Man hätte diese Differentialgröße auch also finden können:

$$\left.\begin{array}{l} x = x + dx \\ y = y + dy \end{array}\right\} \S\ 113.$$

folglich $\frac{x}{y} = \frac{x+dx}{y+dy}$

Man bringe diese Brüche zu einerley Benennung, so kommt $\frac{xy+xdy}{y^2+ydy} = \frac{xy+ydx}{y^2+ydy}$

$$\frac{xy}{y^2+ydy} = \frac{xy}{y^2+ydy} \quad \text{subtr.}$$

$$\frac{xdy}{y^2+ydy} = \frac{ydx}{y^2+ydy}$$

$$o = \frac{ydx-xdy}{y^2+ydy}$$

oder da ydy in Vergleichung mit $y^2 = o$ ist, (§ 117.)

$$o = \frac{ydx-xdy}{y^2}$$

oder auch also:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+dx}{y+dy}$$

Man dividire $x + dx$ wirklich mit $y + dy$

$$y+dy \left.\begin{array}{l} x + dx \\ x + \frac{x}{y}dy \end{array}\right\} \left\{ \frac{x}{y} + \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}dy \right.$$

o +

$$
\begin{array}{l}
0 + dx - \frac{x}{y} dy \\
\quad + dx \quad + \frac{dxdy}{y} \\
\hline
0 - \frac{x}{y} dy - \frac{dxdy}{y} \\
\quad - \frac{x}{y} dy - \frac{xdydy}{y^2} \\
\hline
0 - \frac{dxdy}{y} + \frac{xdydy}{y^2}
\end{array}
$$

Weil nun $dxdy = 0$ und $dydy = 0$, so ist die Division zum Ende, und

$$\frac{x+dx}{y+dy} = \frac{x}{y} + \frac{dx}{y} \frac{-xdy}{y^2}$$

Da nun $\frac{x+dx}{y+dy} = \frac{x}{y}$

so ist $\frac{x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$

und demnach $0 = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$

das ist, wenn die Brüche einerley Benennung bekommen $0 = \frac{ydx-xdy}{y^2}$

Erklä-

Erklärung.

§ 119. Eine Differentialgröße integriren, heisset aus derselben die Größe wieder finden, in Vergleichung mit welcher die Differentialgröße unendlich klein ist. Das Zeichen, womit man anzeiget, daß eine Differentialgröße integriret werden soll, ist s.

Z. E. $sdx = x$, $sdy = y$ u. s. w.

§ 120. Wie nun die Differentialgrößen zu integriren sind, das siehet man aus den Regeln der Differentiation. Nemlich

$$\left.\begin{array}{l} sdx = x \\ s(dx + dy) = x + y \\ s(dx - dy) = d - y \end{array}\right\} \text{§ 113.} \tag{1.)}$$

$$s(xdy + ydx) = xy \quad (\text{§ 114.}) \tag{2.)}$$

$$s(adx) = ax \quad (\text{§ 115.}) \tag{3.)}$$

$$s(mx^{m-1}dx) = x^m \tag{4.)}$$

Man addiret zum Exponenten 1; so kommt $mx^m dx$

Man dividiret, die Größe, die man dadurch bekommt, mit dem um 1 vermehrten Exponenten; so kommt $x^m dx$;
endlich diese Größe wird mit dem Differential der Wurzel dividiret; so bekommt man das verlangte Integral x^m

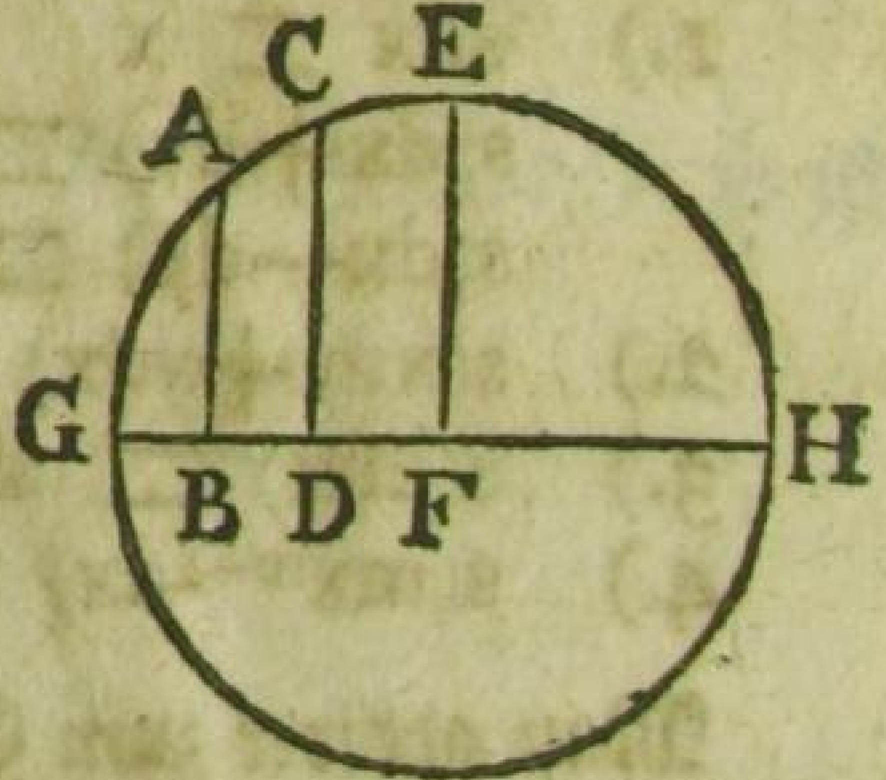
Also auch $s\left[\frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} dx\right] = x^{\frac{n}{m}}$ (§ 117.)

5. $s\left(\frac{ydx - xdy}{y^2}\right) = \frac{x}{y}$

Den Nutzen der Differential- und Integral-Rechnung wird man aus folgenden Aufgaben sehen.

Erklärung.

§ 121. Wenn eine Größe unter allen möglichen von ihrer Art, das ist, unter allen, die aus andern auf eben dieselbe Art entstehen, die größeste oder die kleinste ist, so wird sie im ersten Falle ein maximum, und im zweyten Falle ein minimum genennet. Z. E.



In einem Cirkel entstehet eine jede gerade Linie, AB, CD u. s. f. die aus einem Punkt der Peripherie auf den Diameter GH perpendicular gezogen wird, aus zwey Theilen des Diameters auf eben dieselbe Art; Denn sie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen, in welche sie denselben theilet; $AB = \sqrt{GB.BH}$, $CD = \sqrt{GD.DH}$ u. s. w. und unter allen diesen Linien, ist der Radius EF die größeste.

Oder man theile eine beliebige Zahl z. E. 10, in zwey Theile, z. E. $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$, $5+5$; so sind die Produkte aus den zwey Theilen, 9, 16, 21, 24, 25; und 25 ist unter allen möglichen Produkten, die entstehen können, wenn 2 Theile der Zahl 10, deren Summe $= 10$ ist, multipliciret werden, das größeste.

Man

Man nehme hingegen die Summe der Quadrate von diesen Theilen,

$1+81, 4+64, 9+49, 16+36, 25+25$ u. s. w.
das ist $82, \quad 68, \quad 58, \quad 52, \quad 50$ u. s. w.
so ist 50 unter allen möglichen Zahlen von dieser Art die kleinste.

Aufgabe.

§ 122. Unter den Größen, die bis auf einen gewissen Punkt zunehmen oder abnehmen, das maximum oder minimum zu finden.

Auflösung.

Es sey z. E. das größeste Produkt zu bestimmen, welches entstehet, wenn a in zwey Theile getheilet wird, und diese Theile mit einander multipliciret werden.

Man setze, diejenigen Theile von a, die das größeste Produkt geben, seyn x und y; so ist das maximum $M = xy$, und $x+y = a$

Man subtrahire von x eine beliebige Zahl b die kleiner sey als x, und von y eine beliebige Zahl c, die kleiner sey als y, und multiplicire die Differenzen $x-b$ und $y-c$ mit einander; so ist das Produkt

$$xy - by - cx + bc < xy$$

Wenn man nun das maximum xy finden will, so darf man nur untersuchen, was geschehen müße, damit $xy - by - cx + bc = xy$ werde.

Man

Man siehet, daß $-by-cx+bc=0$ seyn muß.

Man siehet ferner, daß das Produkt

$$xy-by-cx+bc$$

keines von denen seyn kann, die eben so wie xy entstehen, und unter welchen xy das größeste ist, wenn nicht die Summe der Factoren $x-b$ und $y-c=a$, das ist, $=x+y$ ist.

Man setze also $\underline{x-b+y-c=x+y}$

so ist $-b-c=0$

oder $0=b+c$

Es kann aber $b+c$ nicht anders $=0$ seyn, als wenn b und c jedes unendlich klein ist.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Folglich ist b die Differentialgröße von x}\\ \text{und c die Differentialgröße von y}\end{array}\right\}\text{§ 113.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{das ist } b=dx\\ \text{und } c=dy\end{array}\right\}\text{§ cit.}$$

Wenn man nun in

$$-by-cx+bc=0$$

dx an statt b, und dy an statt c setzet, so kommt:

$$-ydx-xdy+dxdy=0$$

das ist $-ydx-xdy=0$; (Denn $dxdy=0$ § 114.) und man siehet, daß $-ydx-xdy$ die Differentialgröße von xy ist (§ 114.)

(Das Zeichen $-$ thut hier nichts zur Sache; denn $+ydx+xdy$ ist so wohl $=0$ als $-ydx-xdy$).

Folglich; wenn man das maximum xy finden will, so differentiire man xy, und setze die gefundene Differentialgrö e $=0$

Das

Das minimum findet man nach eben dieser Regel.

Z. E. $x^2 + y^2$ sey die kleinste Summe unter allen die möglich sind, wenn man a in zwey Theile theilet, jeden Theil quadriret, und beyde Quadrate addiret.

Man addire eine positive Zahl zu x, wie auch zu y und mache von jeder Summe ein Quadrat; so ist

$$(x+b)^2 + (y+c)^2 > x^2 + y^2$$

das ist:

$$x^2 + 2bx + b^2 + y^2 + 2cy + c^2 > x^2 + y^2$$

Wenn nun aus $x^2 + 2bx + b^2 + y^2 + 2cy + c^2$ das minimum $x^2 + y^2$ entstehen soll, so muß

$$2bx + b^2 + 2cy + c^2 = 0 \text{ seyn,}$$

und $x + b + y + c = x + y$ gesetzet werden.

Weil nun $\underline{x + b + y + c = x + y}$

so ist $b + c = 0$

folglich $b = dx$ und $c = dy$

und also verwandelt sich $2bx + b^2 + 2cy + c^2 = 0$

in $2xdx + dxdx + 2ydy + dydy = 0$

und $2xdx + dxdx + 2ydy + dydy$ oder (weil $dxdx = 0$ und $dydy = 0$) $2xdx + 2ydy$ ist die Differentialgröße von $x^2 + y^2$ (§ 117.)

Exem-

Exempel.

Wenn also $a = x + y$ und $xy = M$

so ist $0 = dx + dy$ (§ 113.) und $xdy + ydx = dM$ (§ 114.)

$-dx = dy$

Da nun $dM = 0$ wie jezt gezeiget worden,

so ist $xdy + ydx = 0$

$xdy = -ydx$ $\quad$ x div.

$dy = -\frac{y}{x}\,dx$

$-dx = -\frac{y}{x}\,dx$ $\quad$ dx div.

$-1 = -\frac{y}{x}$ $\quad$ x mult.

$-x = -y$

oder $+x = +y$

Das ist, wenn durch die Multiplication zweyer Theile von a mit einander deren Summe $= a$ ist, das größeste Produkt unter allen möglichen entstehen soll; so muß a in zwey gleiche Theile getheilet werden. Z. E. Es sey $a = 11$; so ist das größeste Produkt unter allen möglichen $= \frac{11}{2} \cdot \frac{11}{2} = \frac{121}{4}$ $= 30 + \frac{1}{4}$.

Probe.

Probe.

Summe	Produkt
$1+10$	10
$2+9$	18
$3+8$	24
$4+7$	28
$5+6$	30
$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}$	$30+\frac{1}{4}$

Man siehet leicht daß so wohl die Zahl der Summen als die Zahl der Produkte unendlich groß ist.

Z. E. Es sey $11 = 5+\frac{49}{100} + 5+\frac{51}{100}$

so ist das Produkt $(5+\frac{49}{100})(5+\frac{51}{100}) = \frac{549}{100}\cdot\frac{551}{100}$

$= \frac{302499}{10000} = 30+\frac{2499}{10000}$

und das Produkt, welches aus $\frac{11}{2}+\frac{11}{2}$ entstehet, ist um $\frac{1}{10000}$ größer als das Produkt, welches aus $\frac{549}{100}+\frac{551}{100}$ entstehet.

Setzet man $11 = \frac{5499}{1000}+\frac{5501}{1000}$, so ist

$\frac{11}{2}$,

$\frac{11}{2} \cdot \frac{11}{2}$ um $\frac{1}{1000000}$ größer als $\frac{5499}{1000} \cdot \frac{5501}{1000}$ u.s.w.

Ein ander Exempel.

Es sey $a = x + y + m$, und xym ein maximum; so ist

$0 = dx + dy + dm$ (§ 113.) und $d(xym) = xydm + xmdy + mydx$ (§ 116.)

$-dx - dy = dm$

$$\text{und } xydm + xmdy + mydx = 0$$

$$xydm = -xmdy - mydx \quad xy \text{ div.}$$

$$dm = \frac{-xmdy - mydx}{xy}$$

$$\text{folglich } -dx - dy = \frac{-xmdy - mydx}{xy}$$

$$-xydx - xydy = -mxdy - mydx$$

$$\text{oder } xydx + xydy = mxdy + mydx$$

$$xydy - mxdy = mydx - xydx \quad xy - mx \text{ div.}$$

$$dy = \frac{mydx - xydx}{xy - mx}$$

Da man hier 3 unbekannte Zahlen, und nur 2 Gleichungen hat, so muß erst noch die dritte Bestimmung hinzu kommen, ehe die Aufgabe aufgelöset werden kann.

Es

Es sey also z. E. $x = y$; so ist $dx = dy$, und $dy = \frac{mydx - xydx}{xy - mx}$ verwandelt sich

in $dx = \frac{mxdx - x^2dx}{x^2 - mx}$

das ist, wenn mit dx dividiret wird,

$$1 = \frac{mx - x^2}{x^2 - mx}$$

$$\overline{}\; x^2 - mx \text{ mult.}$$

$$x^2 - mx = mx - x^2$$

$$x - m = m - x$$

$$2x = 2m$$

$$x = m$$

Da nun $m = x = y$ und $a = m + x + y$, so ist $m = x = y = \frac{1}{3}a$

Das ist, wenn a in 3 gleiche Theile getheilet wird, so ist das Produkt aus denselben unter allen Produkten, die aus der Multiplication dreyer Theile von a in einander entstehen, deren Summe $= a$, das größeste.

Z. E. Es sey $a = 24$; so ist das maximum $= 8.8.8 = 512$.

Probe.

Summe	Produkt.
$1 + 1 + 22$	22
$1 + 2 + 21$	42
$1 + 3 + 20$	60
$1 + 4 + 19$	76

$1+5+18$	90
$1+6+17$	102
$1+7+16$	112
$1+8+15$	120
$1+9+14$	126
$1+10+13$	130
$1+11+12$	132
$2+2+20$	80
$2+3+19$	114
$2+4+18$	144
$2+5+17$	170
$2+6+16$	192
$2+7+15$	210
$2+8+14$	224
$2+9+13$	234
$2+10+12$	240
$2+11+11$	242

u. s. w.

Es sey aber $y = 2x$; so verwandelt sich

$$dy = \frac{mydx - xydx}{xy - mx}$$

in $$dy = \frac{2mxdx - 2x^2dx}{2x^2 - mx}$$

und weil $dy = 2dx$ (§ 115.)

ferner in $$2dx = \frac{2mxdx - 2x^2dx}{2x^2 - mx}$$

——————————— 2dx div.

$$1 = \frac{mx - x^2}{2x^2 - mx}$$

das

das ist $1 = \frac{m - x}{2x - m}$

$$2x - m = m - x$$

$$3x = 2m$$

$$\tfrac{3}{2}x = m$$

Da nun $a = x + y + m$
und $y = 2x$
und $m = \tfrac{3}{2}x$

so ist $a = x + 2x + \tfrac{3}{2}x = \tfrac{9}{2}x$

$$\frac{2}{9}a = x$$

folglich $\frac{4}{9}a = y$

und $\frac{3}{9}a = m$

Also ist $\frac{2}{9}a \cdot \frac{4}{9}a \cdot \frac{3}{9}a = \frac{8}{243}a^3$ das maximum, nicht in Ansehung aller möglichen Produkte aus 3 Factoren, deren Summe $= a$, sondern in Ansehung aller solchen, in welchen der eine Factor zweymahl so groß ist, als der eine von den beyden übrigen. Z. E. Es sey $a = 24$; so ist $x = \frac{16}{3}$, $y = \frac{32}{3}$, und $m = 8$, und also das maximum $= \frac{16}{3} \cdot \frac{32}{3} \cdot 8$

$= \frac{4096}{9} = 455\tfrac{1}{9}$

Probe.

Summe	Produkt.
$1+2+21$	42
$2+4+18$	144
$3+6+15$	270
$4+8+12$	384
$5+10+9$	450
$6+12+6$	432
$7+14+3$	294

Exempel von minimis.

Es sey $a = x + y$ und $x^2 + y^2$ ein minimum

$$0 = dx + dy \qquad\qquad 2xdx + 2ydy = 0 \quad \text{2 div.}$$

$$-dy = dx \qquad\qquad xdx + ydy = 0$$

$$xdx = -ydy$$

$$dx = -\frac{y}{x}dy$$

$$-dy = -\frac{y}{x}dy$$

oder $dy = \frac{y}{x}dy$ — dy div.

$$1 = \frac{y}{x}$$

$$x = y$$

Wenn

Wenn also $x^2 + y^2$ das minimum seyn soll, so muß a in zwey gleiche Theile getheilet werden.

Ein ander Exempel.

Drey Zahlen von dieser Eigenschaft zu finden. Die zweyte ist zweymahl so groß, als die erste, und wenn von der Summe der ersten und zweyten 20 subtrahiret wird, so kommt die dritte.

Wenn man zwey und zwey von demselben multipliciret, und das Produkt mit der übrigen dividiret, so ist die Summe der 3 Quotienten ein minimum.

Die erste Zahl sey $= x$
die zweyte $= y$
die dritte $= m$
und das minimum $= M$.

so ist

$$y = 2x \mid x + y = 20 + m$$
$$y = 20 + m - x$$
$$2x = 20 + m - x$$
$$3x = 20 + m$$
$$3dx = dm$$

$$\frac{xy}{m} + \frac{xm}{y} + \frac{my}{x} = M$$

das ist, weil $y = 2x$

$$\frac{2x^2}{m} + \frac{xm}{2x} + \frac{2mx}{x} = M$$

oder

$$\frac{2x^2}{m} + \frac{1}{2}m + 2m = M$$

oder

$$\frac{2x^2}{m} + \frac{5}{2}m = M \quad \text{2m mult.}$$

$$4x^2 + 5m^2 = 2mM$$

$$8xdx + 10mdm = 2mdM + 2Mdm$$

das ist,

weil die Differentialgröße dM des minimi $M = 0$

$$8xdx + 10mdm = 2Mdm$$

2 div.

$$4xdx + 5mdm = Mdm$$

$$4xdx = Mdm - 5mdm$$

$M - 5m$ div.

$$\frac{4xdx}{M - 5m} = dm$$

und demnach

$$\frac{4xdx}{M - 5m} = 3dx$$

dx div.

$$\frac{4x}{M - 5m} = 3$$

$M - 5m$ mult.

$$4x = 3M - 15m$$

$$4x + 15m = 3M$$

$$\frac{4x + 15m}{3} = M$$

Weil nun $M = \frac{2x^2}{m} + \frac{5}{2}m$

so ist $\frac{2x^2}{m} + \frac{5}{2}m = \frac{4x + 15m}{3}$

6m mult.

$12x^2$

$$12x^2 + 15m^2 = 8mx + 30m^2$$
$$15m^2 = \quad 15m^2 \text{ subtr.}$$

$$12x^2 = 8mx + 15m^2 \quad \text{12 div.}$$

$$x^2 = \frac{2}{3}mx + \frac{5}{4}m^2$$

$$x^2 - \frac{2}{3}mx = \frac{5}{4}m^2$$

Der andere Theil der Wurzel $= -\frac{1}{3}m$

$$x^2 - \frac{2}{3}mx + \frac{1}{9}m^2 = \frac{5}{4}m^2 + \frac{1}{9}m^2 = \frac{49}{36}m^2$$

$$x - \frac{1}{3}m = \frac{7}{6}m$$

$$x = \frac{1}{3}m + \frac{7}{6}m = \frac{9}{6}m = \frac{3}{2}m$$

Da nun auch $3x = 20 + m$

und $x = \frac{20+m}{3}$

so ist $\frac{3}{2}m = \frac{20+m}{3}$

und $9m = 40 + 2m$

$$7m = 40$$

$$m = \frac{40}{7}$$

 folglich

folglich $x = \frac{3}{2}m = \frac{60}{7}$, und $y = 2x = \frac{120}{7}$

Die 3 gesuchten Zahlen sind also $\frac{60}{7}$, $\frac{120}{7}$, $\frac{40}{7}$

und das minimum ist

$$\frac{60.120}{7.7} \cdot \frac{7}{40} + \frac{60.40}{7.7} \cdot \frac{7}{120} + \frac{120.40}{7.7} \cdot \frac{7}{60} =$$

$$\frac{180}{7} + \frac{20}{7} + \frac{80}{7} = \frac{280}{7} = 40$$

Probe.

Man setze $x = 7$, $y = 14$; so ist $m = 21 - 20 = 1$ und $\frac{xy}{m} + \frac{xm}{y} + \frac{my}{x} = 100 + \frac{1}{2}$

Man setze $x = 8$, $y = 16$, so ist $m = 24 - 20 = 4$ und $\frac{xy}{m} + \frac{xm}{y} + \frac{my}{x} = 42$

Man setze $x = 9$, $y = 18$, so ist $m = 27 - 20 = 7$ und $\frac{xy}{m} + \frac{xm}{y} + \frac{my}{x} = 40 + \frac{9}{14}$

u. s. f.

Man siehet, daß eine jede von diesen Zahlen größer ist als 40.

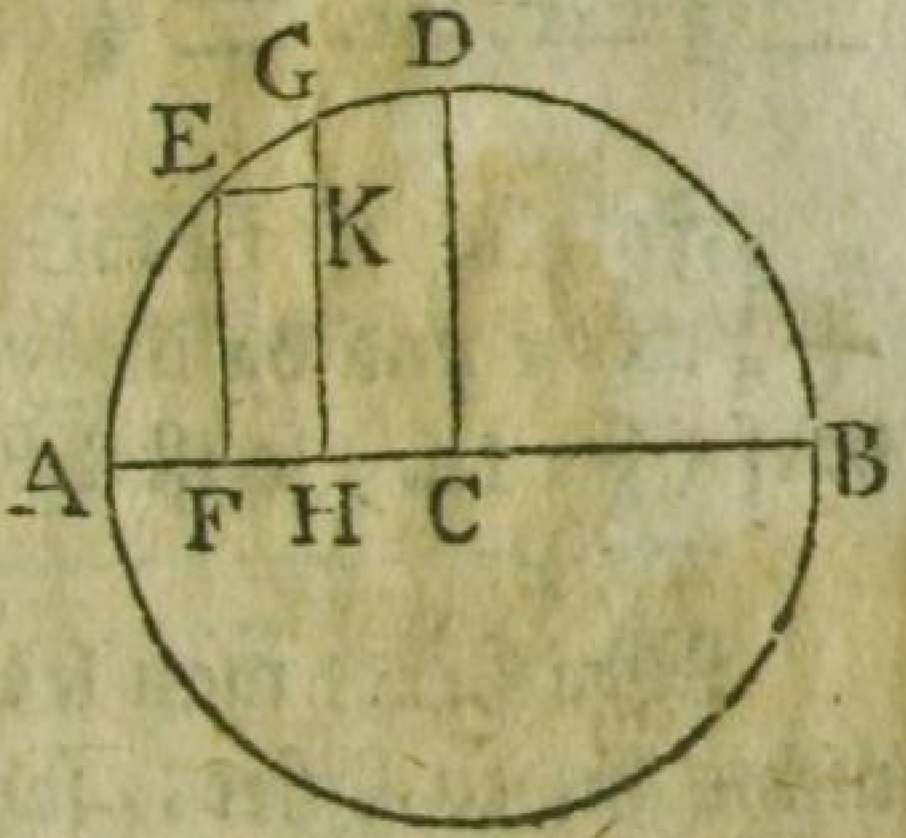
Aufgabe.

§ 123. Das Verhältniß des Diameters zur Cirkelperipherie zu finden.

Auflö-

Auflösung.

Man richte aus einem beliebigen Punkt F des Diameters AB einen Perpendikel FE auf, und einen andern HG, der EF unendlich nahe sey, und ziehe EK mit AB parallel;



so ist FH $=$ EK die Differentialgröße von AF
GK die Differentialgröße von EF $=$ KH
EG die Differentialgröße des Bogen AE
und EFHG die Differentialgröße von AEF (§ 113.)

Folglich, wenn man den Werth von EFHG finden kann, und wenn derselbe sich integriren läßet, so hat man das Stück vom Cirkel gefunden, das in die geraden Linien AF und EF, und in den Bogen AE eingeschlossen ist (§ 119.)

Die gerade Linie AF (man nennet sie die Abscise) sey $= x$, und die Perpendicularlinie EF (man nennet sie die Semiordinate) sey $= y$; so ist

$$FH = EK = dx$$
$$\text{und } GK = dy$$

und demnach der Inhalt des Rectanguli EFHK $=$ EF.FH $= ydx$

Weil der Bogen EG unendlich klein ist (per hyp.) und folglich für eine gerade Linie angenommen werden kann, so ist EGK ein Triangel, und zwar ein rechtwinklichter, weil FH auf HG per-

 pendicular

pendicular stehet, und EK mit FH parallel ist (per hyp.) Der Inhalt desselben ist demnach
$= \frac{1}{2} EK . GK = \frac{1}{2} dxdy$

Folglich ist $EFHG = EFHK + EGK = ydx + \frac{1}{2} dxdy$ und da $dxdy = 0$ angenommen werden darf (§ 114.) so ist $EFHG = ydx$

Nun siehet man leicht, daß sich aus ydx noch nichts finden läßet, sondern daß der Werth von y erst aus der Natur des Cirkels bestimmet werden muß. Man weiß aber aus der Geometrie, daß y oder EF die mittlere Proportionallinie ist zwischen AF und FB, das ist, daß

$$AF : EF = EF : FB$$

Es sey nun der Diameter $AB = 1$, so ist $FB = 1 - x$ (weil $AF = x$), und demnach

$$x : y = y : 1 - x$$

und $$x - x^2 = y^2$$

$$\sqrt{(x - x^2)} = y$$
$$dx = dx \text{ mult.}$$

$$\sqrt{(x - x^2)}\, dx = ydx$$

das ist, $\sqrt{(x - x^2)}\, dx$ ist die Differentialgröße von dem Stück des Cirkels AEF.

Damit man nun wisse, wie sich $\sqrt{(x - x^2)}\, dx$ integriren laße, so verwandele man es, durch Ausziehung der □ Wurzel aus $x - x^2$, in eine unendliche Reihe.

$\sqrt{(x - x^2} = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$, und

$(x - x^2)$

$$(x-x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.-x^2 + \frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}}{1\,.\,2}.x^{-\frac{3}{2}}.x^4$$

$$+\frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}}{1\,.\,2\,.\,3}.x^{-\frac{5}{2}}.-x^6 + \frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}.-\frac{5}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.x^{-\frac{7}{2}}.x^8$$

$$+\frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}.-\frac{5}{2}.-\frac{7}{2}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}.x^{-\frac{9}{2}}.-x^{10} \text{ u.s.w. } (\S\ 38.39.)$$

Das ist:

$$(x-x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.x^2 - \frac{1.1}{2.4}x^{-\frac{3}{2}}.x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^{-\frac{5}{2}}.x^6$$

$$-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}.x^{-\frac{7}{2}}.x^8 - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\,x^{-\frac{9}{2}}.x^{10} \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber $x^{-\frac{1}{2}}.x^2 = x^{\frac{3}{2}}$

$x^{-\frac{3}{2}}.x^4 = x^{\frac{5}{2}}$ u. s. w.

(nemlich, wenn man Potenzen miteinander multipliciret, so addiret man ihre Exponenten.)

folglich $$(x-x^2)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1.1}{2.4}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^{\frac{7}{2}}$$

$$-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\,x^{\frac{11}{2}} \text{ u. s. w.}$$

$$dx = dx \text{ mult.}$$

$$(x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx - \frac{1.1}{2.4}x^{\frac{5}{2}}dx - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^{\frac{7}{2}}dx - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^{\frac{9}{2}}dx - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{\frac{11}{2}}dx$$

wenn nun dieses integriret wird (§ 120. Num. 4.), so kommt:

$$s(x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1.2x^{\frac{5}{2}}}{2.5} - \frac{1.1}{2.4}.\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}} - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}.\frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}}$$

u. s. w.

das ist, $s(x-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = x^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1.1}{4.7}x^3 - \frac{1.1.3}{4.6.9}x^4 - \frac{1.1.3.5}{4.6.8.11}x^5 - \frac{1.1.3.5.7}{4.6.8.10.13}x^6 \ldots\ldots\right]$

das ist:

$$AEF = \sqrt{x}\left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1.1}{4.7}x^3 - \frac{1.1.3}{4.6.9}x^4 - \frac{1.1.3.5}{4.6.8.11}x^5 \ldots\right]$$

Man setze nun x dem Radius gleich, das ist, da man den Diameter $= 1$ angenommen hat, $x = \frac{1}{2}$, so wird aus AEF der Quadrant ADC, und

ADC

$$ADC = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1.1}{4.7}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1.1.3}{4.6.9}\cdot\frac{1}{2^4}\ldots\right]}$$

Man nenne den Diameter D, und die Peripherie P, so ist der Inhalt des Cirkels $= \frac{1}{4}DP$, und also der 4te Theil desselben $= \frac{1}{16}DP$, das ist

$$\frac{1}{16}DP = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1.1}{4.7}\cdot\frac{1}{2^3}\ldots\right]}$$

und folglich $DP = 16\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1.1}{4.7}\cdot\frac{1}{2^3}\ldots\right]}$

$$= 8\sqrt{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1.1}{4.7}\cdot\frac{1}{2^3}\ldots\right]$$

oder da $D = 1$, so ist

$$P = 8\sqrt{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1.1}{4.7}\cdot\frac{1}{2^3}\ldots\right]$$

Man setze nun $1 = \frac{1000\,000}{1000\,000}$, oder $1 = \frac{1000\,000\,00}{1000\,000\,00}$ u. s. w.

Wenn $1 = \frac{1000\,000}{1000\,000}$, so findet man $\sqrt{2} = \frac{1414213}{1000000}$ und also $8\sqrt{2} = \frac{11313704}{1000\,000}$

Wenn nun die Reihe $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{1.1}{4.7}\cdot\frac{1}{2^3} - \frac{1.1.3}{4.6.9}\cdot\frac{1}{2^4}\ldots$ mit $8\sqrt{2}$ multipliciret wird, so ist

Das

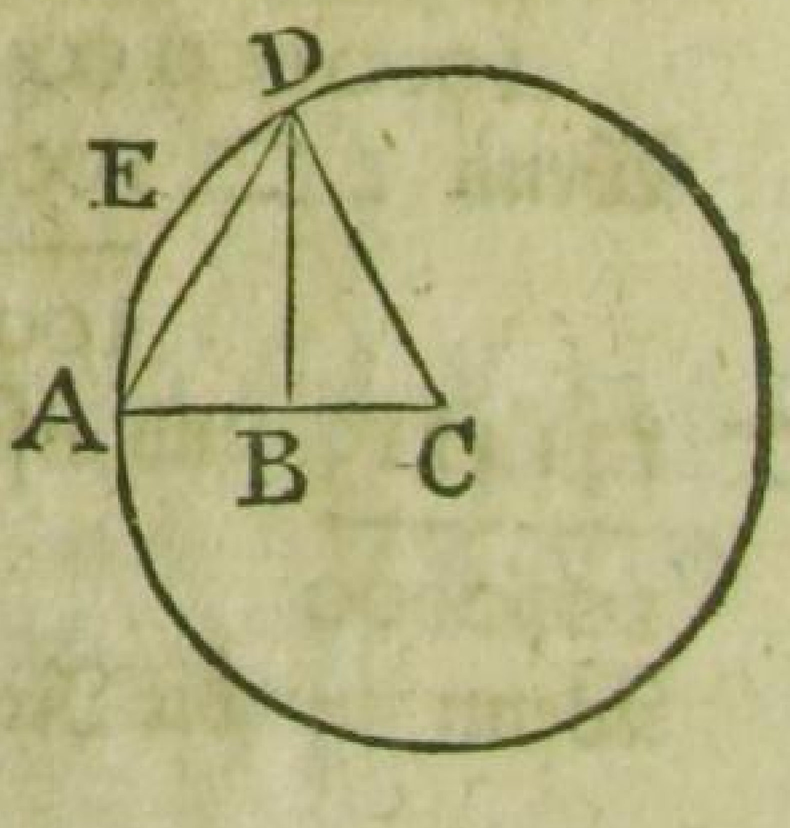
Das erste Glied	$A =$	3771234	: 1000 000
	$B =$	565685	: 1000 000
	$C =$	50507	: 1000 000
	$D =$	9820	: 1000 000
	$E =$	2511	: 1000 000
	$F =$	743	: 1000 000
	$G =$	241	: 1000 000
	$H =$	83	: 1000 000
	$I =$	30	: 1000 000
	$K =$	11	: 1000 000
	$L =$	4	: 1000 000

Man addire $B + C + D$ u. s. w. und subtrahire die Summe von A, so kommt

$$P = \frac{3141599}{1000000}$$

folglich ist $D : P = 1 : \frac{3141599}{1000000}$

oder $D : P = 1000000 : 3141599$



Oder es sey $x = AB = BC = \frac{1}{4}$; so ist weil DB auf AC perpendicular stehet, ADC ein Gleichschenklichter Δ, worin $AD = DC$. Da nun auch $DC = AC$, so sind in demselben alle 3 Seiten gleich, und der Winkel $DCA = 60°$; und folglich ist der Sector AEDC der 6te Theil des Cirkels $= \frac{\frac{1}{4} DP}{6} = \frac{1}{24} DP$.

Es ist aber $AEDC = AEDB + \Delta DBC$
und also $\frac{1}{24} DP = AEDB + \Delta DBC$

Weil $DC = \frac{1}{2}$ und $BC = \frac{1}{4}$, so ist $DC^2 - BC^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

Da nun $DB^2 = DC^2 - BC^2$, so ist $DB = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, und demnach $\Delta DBC = \frac{1}{2} DB.BC = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{32}\sqrt{3}$
folglich $\frac{1}{24} DP = AEDB + \frac{1}{32}\sqrt{3}$

und $DP = 24.AEDB + \frac{3}{4}\sqrt{3}$
oder (weil $D = 1$)
$P = 24.AEDB + \frac{3}{4}\sqrt{3}$

Setzet man $1 = \frac{100000000}{100000000}$, so ist $\sqrt{3} = \frac{173205080}{100000000}$ und $\frac{3}{4}\sqrt{3} = \frac{129903810}{100000000}$
und demnach $P = 24.AEDB + \frac{129903810}{100000000}$

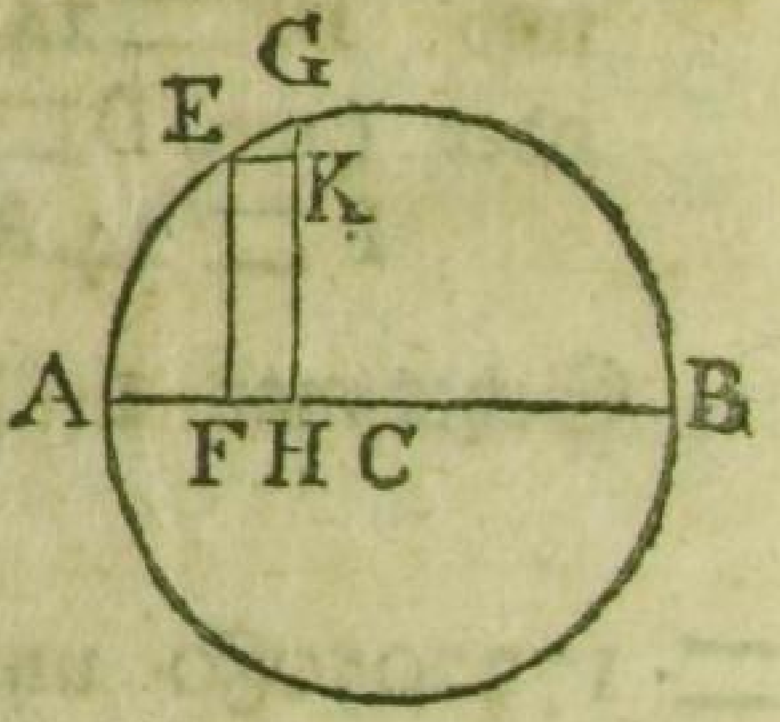
Endlich $AEDB = s(x-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{x}\left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1.1}{4.7}x^3 \ldots\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}.\frac{1}{4} - \frac{1}{5}.\frac{1}{4^2} - \frac{1.1}{4.7}.\frac{1}{4^3} \ldots\right]$
$= \frac{7677312}{100000000}$
folglich $P = \frac{24.7677312}{100000000} + \frac{129903810}{100000000}$
$= \frac{314159298}{100000000}$

das

das ist (denn die beyden letztern Ziffern sind nicht zuverläßig) $P = \frac{3141592}{1000000}$

und $D:P = 1:\frac{3141592}{1000000} = 1000000:3141592$

Eine andere Auflösung.



Man suche den Werth der Hypothenuse EG in dem rechtwinklichten △ EGK und da EG die Differentialgröße des Bogen AE ist, so integrire man den gefundenen Werth von EG; und man bekommt die Länge des Bogen AE, woraus sich denn die Länge der ganzen Peripherie bestimmen lässet.

$$EG = \surd(EK^2 + GK^2)$$
$$EK = dx \text{ und } GK = dy$$

folglich $EG = \surd(dxdx + dydy)$

$y^2 = x - x^2$ wie man schon gefunden;

und also $2ydy = dx - 2xdx$

2y div.

$$dy = \frac{dx - 2xdx}{2y}$$

Man mache davon ein Quadrat, so kommt

$$dydy = \frac{dxdx - 4xdxdx + 4x^2dxdx}{4y^2}$$

Weil

Weil $y^2 = x - x^2$

so ist $\overline{4y^2 = 4x - 4x^2}$

und demnach $dydy = \dfrac{dxdx - 4xdxdx + 4x^2dxdx}{4x - 4x^2}$

Man addire $\quad dxdx = dxdx$

so kommt

$$dydy + dxdx = \frac{dxdx - 4xdxdx + 4x^2dxdx}{4x - 4x^2} + dxdx$$

das ist $dydy + dxdx = \dfrac{dxdx}{4x - 4x^2}$

Man ziehe die □ Wurzel aus, so kommt

$$\surd(dydy + dxdx) = \frac{dx}{2\surd(x - x^2)}$$

folglich ist $EG = \dfrac{dx}{2\surd(x - x^2)}$

Damit nun $\dfrac{dx}{2\surd(x - x^2)}$ zum integriren geschickt werde, so verwandele man es in eine unendliche Reihe.

$$\frac{dx}{2\surd(x - x^2)} = \frac{1}{2} dx \cdot \frac{1}{\surd(x - x^2)}$$

und $\dfrac{1}{\surd(x - x^2)} = \dfrac{1}{(x - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{(x - x^2)^0}{(x - x^2)^{\frac{1}{2}}} = (x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

und $(x - x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \cdot - x^2 - \dfrac{\frac{1}{2} \cdot - \frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \cdot x^4$

$$-\frac{\frac{1}{2}.\frac{-3}{2}.\frac{-5}{2}}{1.2.3}.x^{-\frac{7}{2}}.-x^6 - \frac{\frac{1}{2}.\frac{-3}{2}.\frac{-5}{2}.\frac{-7}{2}}{1.2.3.4}.x^{-\frac{9}{2}}.x^8$$

u. s. w.

das ist:

$$(x-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^{-\frac{5}{2}}.x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{-\frac{7}{2}}.x^6$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{-\frac{9}{2}}.x^8 \text{ u. s. w.}$$

das ist:

$$(x-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1.3}{2.4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{\frac{7}{2}} \text{ u. s. w.}$$

$\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}dx$ mult.

$$\frac{1}{2}(x-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2\sqrt{(x-x^2)}}dx = EG$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}.\frac{1.3}{2.4}x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{1}{2}.\frac{1.3.5}{2.4.6}x^{\frac{5}{2}}dx$$

$$+ \frac{1}{2}.\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{\frac{7}{2}}dx \text{ u. s. w.}$$

Man

Man integrire, so kommt

$$AE = \frac{2}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} \text{ u. s. w.}$$

das ist:

$$AE = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^{\frac{7}{2}}$$
$$+ \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} x^{\frac{9}{2}} \text{ u. s. w.}$$

das ist:

$$AE = x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} x + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^3 \right.$$
$$\left. + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} x^4 \text{ u. s. w.} \right]$$

Man setze nun $x = \frac{1}{4}$; so weiß man aus dem vorhergehenden, daß $AE = \frac{1}{6} P$

Es ist also $\frac{1}{6} P = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 \cdot 1 \cdot}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4^2} \right.$

$$\left. + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4^3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 4^4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots\cdots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 4^5} \right]$$

und $P = 3 \left[1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4^2} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4^3} \right.$

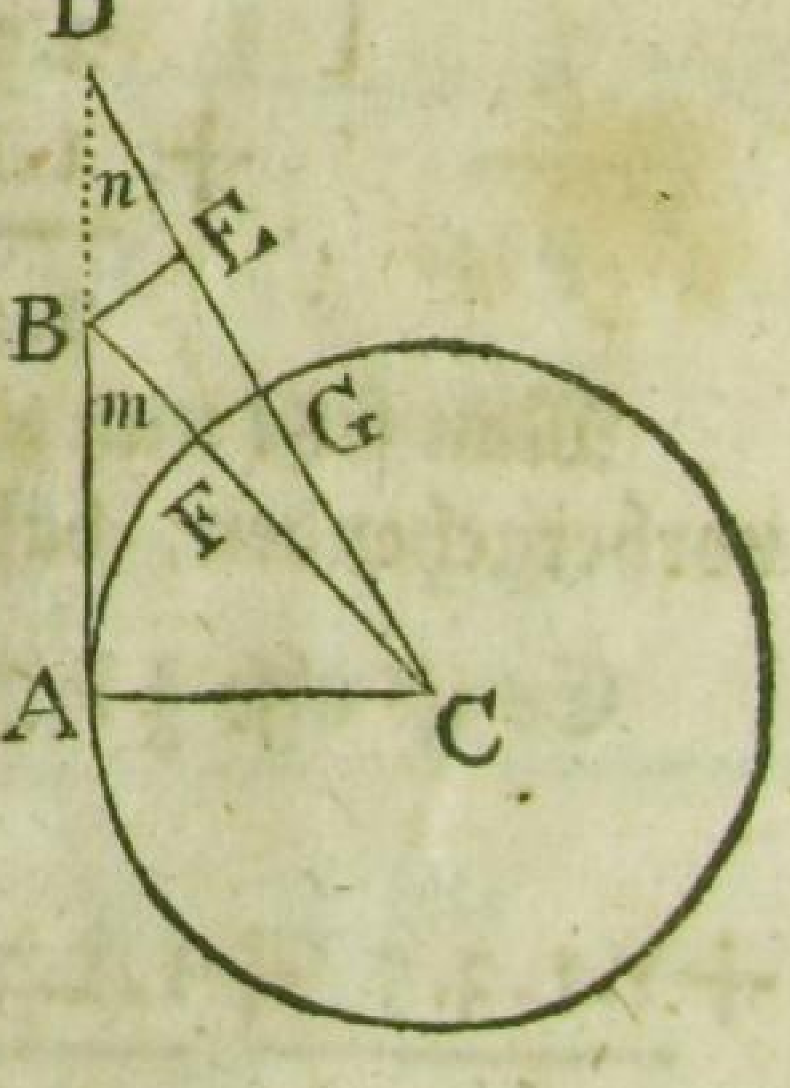
$$\left. + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 4^4} \cdots\cdots \right]$$

Es sey $1 = \frac{1000000}{1000000}$, so ist das erste Glied

A =	3000000	: 1000 000	add.
B =	125000	: 1000 000	
C =	14062	: 1000 000	
D =	2092	: 1000 000	
E =	356	: 1000 000	
F =	65	: 1000 000	
G =	12	: 1000 000	
H =	2	: 1000 000	

$P = \frac{3141589}{1000000}$ das ist: $P = \frac{31415}{10000}$

Noch eine andere Auflösung.



Der Radius AC sey = 1. Man verlängere die Tangente AB des Winkels ACB um einen unendlich kleinen Theil BD, und ziehe die gerade Linie DC, und beschreibe mit dem Radius BC den Bogen BE. Weil nun BD unendlich klein ist, so ist auch BE unendlich klein, und also kann der Winkel BCE = 0 angenommen werden. Da nun BC=EC, und folglich in dem △ bCE der Winkel CBE = CEB, so ist CBE = CEB = 90°; und also auch BED = 90°. Ferner, da CBE = CEB = 90°, so können BC und EC für parallel angenommen werden, woraus denn folget, daß der Winkel n = m.

Weil

Weil nun in den Triangeln DBE und ABC

der Winkel $BED = BAC$

und der Winkel $n = m$

so sind diese Triangel einander ähnlich, und

$$DB : BE = BC : AC$$

Es sey die Tangente $AB = t$,

so ist $DB = dt$

und $BC = \sqrt{(AC^2 + AB^2)} = \sqrt{(1 + t^2)}$

und demnach $dt : BE = \sqrt{(1 + t^2)} : 1$

$$dt = \sqrt{(1 + t^2)}\, BE$$

Es ist ferner

$$BE : FG = BC : FC$$

das ist $BE : FG = \sqrt{(1 + t^2)} : 1$

$$BE = \sqrt{(1 + t^2)}\, FG$$

Da nun $dt = \sqrt{(1 + t^2)} . BE$

und also $\dfrac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)}} = BE$

so ist $\sqrt{(1 + t^2)} . FG = \dfrac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)}}$ $\sqrt{(1 + t^2)}$ div.

$$FG = \frac{dt}{\sqrt{(1 + t^2)}\sqrt{(1 + t^2)}}$$

das ist $FG = \dfrac{dt}{1 + t^2}$

Dieses $\dfrac{dt}{1 + t^2}$ ist die Differentialgröße des Bogen AF, und wenn man dieselbe integriret, so bekommt man den Bogen AF.

Damit sie aber integriret werden könne, so verwandele man $\frac{1}{1+t^2}$ in eine unendliche Reihe, das ist, man dividire 1 mit $1+t^2$

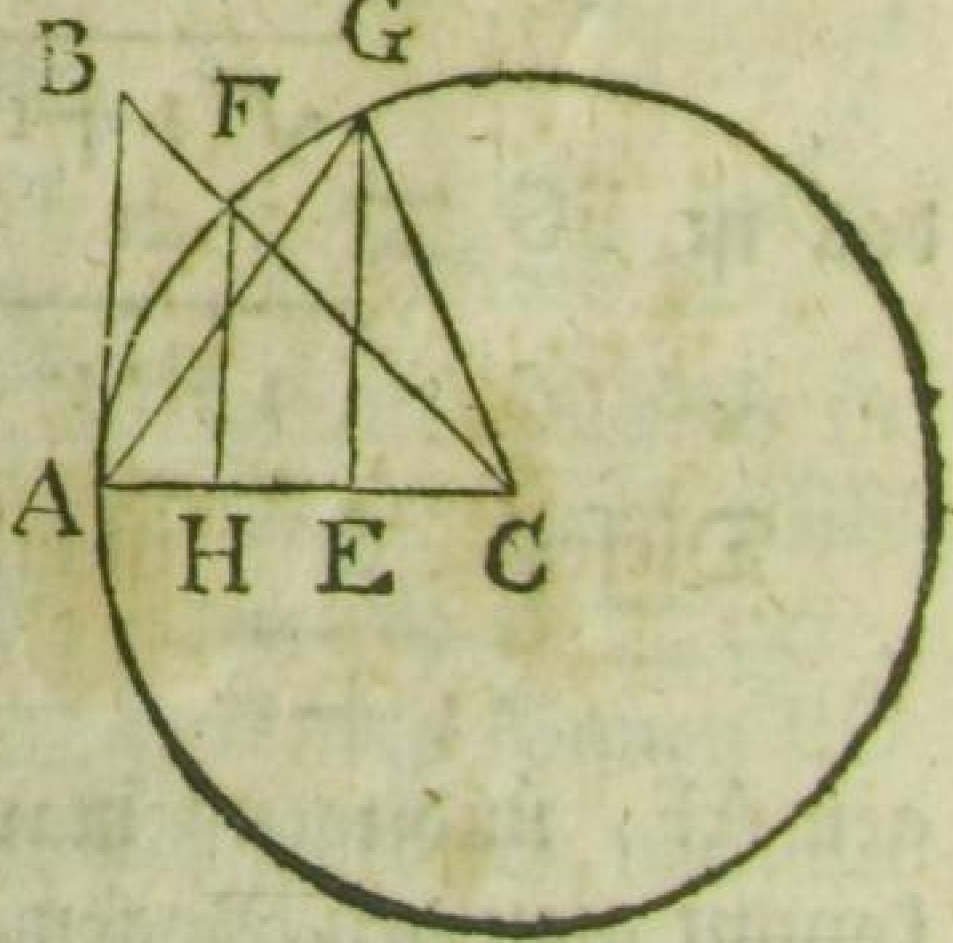
$$\begin{array}{l} 1+t^2 \left.\right\} 1 \\ \quad\;\; 1+t^2 \\ \hline \quad\;\; 0-t^2 \\ \quad\;\; -t^2-t^4 \\ \hline \quad\;\; 0+t^4 \\ \quad\;\; +t^4+t^6 \\ \hline \quad\;\; 0-t^6 \text{ u. s. w.} \end{array} \left.\right\} 1-t^2+t^4-t^6 \text{ u. s. w.}$$

Man multiplicire die unendliche Reihe, die dadurch entstehet, mit dt, so hat man

$$FG = \frac{dt}{1+t^2} = dt - t^2dt + t^4dt - t^6dt + t^8dt - t^{10}dt \text{ u. s. w.}$$

folglich $AF = s\frac{dt}{1+t^2} = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{11}t^{11}$ u. s. w.

Es sey ACG $= 60°$; so ist AG $=$ GC, und folglich theilet GE der Sinus von ACG $= 60°$ den Radius AC in zwey gleiche Theile AE und EC. Da nun AC $= 1$, so ist EC $= \frac{1}{2}$



Man

Man theile den Winkel ACG $=60°$ in zwey gleiche Theile, und ziehe den Sinus FH und die Tangente AB des Winkels ACB $=30°$; so ist

$$CH : FH = AC : AB$$

das ist $CH : FH = 1 : t$

Es ist aber CH der Cosinus von ACB $=30°$, das ist, CH ist der Sinus von $60°$, folglich CH $=$ GE ferner EC ist der Cosinus von ACG $=60°$, oder der Sinus von $30°$; und demnach ist EC $=$ FH.

folglich $GE : EC = 1 : t$

Da nun $GC = 1$ und $EC = \frac{1}{2}$, so ist $GE = \sqrt{(GC^2 - EC^2)} = \sqrt{(1-\frac{1}{4})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

und demnach $\frac{1}{2}\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 1 : t$

das ist $\sqrt{3} : 1 = 1 : t$

und $\frac{1}{\sqrt{3}} = t$

folglich ist $AF = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9$ u. s. w.

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\cdot3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7\cdot3^3\sqrt{3}} + \frac{1}{9\cdot3^4\sqrt{3}} \text{ u. s. w.}$$

Da nun der Winkel ACB $=30°$ ist, so ist

$$AF = \frac{1}{12}P$$

und also $\frac{1}{12}P = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\cdot3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\cdot3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7\cdot3^3\sqrt{3}} + \frac{1}{9\cdot3^4\sqrt{3}}$ u. s. w.

und $P = \frac{4\cdot3}{\sqrt{3}} - \frac{4\cdot3}{3\cdot3\sqrt{3}} + \frac{4\cdot3}{5\cdot3^2\sqrt{3}} - \frac{4\cdot3}{7\cdot3^3\sqrt{3}} + \frac{4\cdot3}{9\cdot3^4\sqrt{3}} \cdots$

das

das ist:

$$P = \frac{4\sqrt{9}}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{9}}{3\cdot 3\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{9}}{5\cdot 3^2\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{9}}{7\cdot 3^3\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{9}}{9\cdot 3^4\sqrt{3}} \text{ u. s. w.}$$

das ist:

$$P = 4\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{4\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{4\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \frac{4\sqrt{3}}{9\cdot 3^4} \text{ u. s. w.}$$

Da nun $D = 2$, so ist:

$$D : P = 2 : 4\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{4\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{4\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \frac{4\sqrt{3}}{9\cdot 3^4} \text{ u. s. f.}$$

$$D : P = 1 : 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9\cdot 3^4} \dots\dots$$

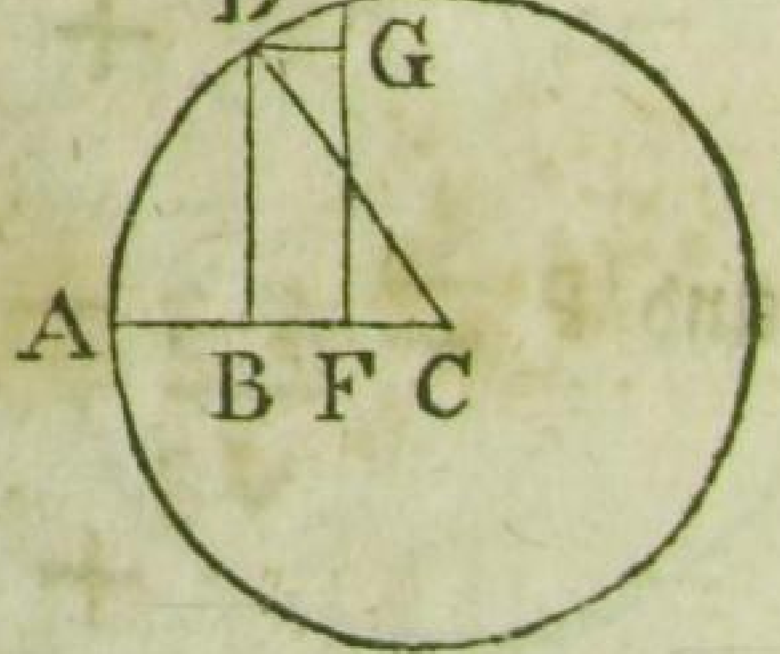
$$\text{Man setze } 1 = \frac{1000\,000\,000\,000\,000\,000\,00}{1000\,000\,000\,000\,000\,000\,00}$$

so findet man

$$D : P = 1 : \frac{314\,159\,265\,358\,979\,3238}{100\,000\,000\,000\,000\,000\,0000}$$

Aufgabe.

§ 124. Aus dem gegebenen Sinus DB den Bogen AD; und umgekehrt, aus dem Bogen AD den Sinus desselben DB zu finden.



Auflö-

Auflösung.

I. Es sey EF mit DB, und DG mit AC parallel, und EF der Linie DB unendlich nahe, so ist BF die Differentialgröße von BC, EG von $DB = FG$, und DE von dem Bogen AD, und $DE = \sqrt{(DG^2 + EG^2)}$; Es sey $BC = x$, $DB = y$, und der Radius $DC = 1$; so ist $DE = \sqrt{(DG^2 + EG^2)} = \sqrt{(dxdx + dydy)}$, und $x^2 + y^2 = 1$

Man differentiire, so kommt

$$2xdx + 2ydy = 0$$

$$xdx + ydy = 0$$

$$dx = \frac{-ydy}{x}$$

$$dxdx = \frac{y^2dydy}{x^2}$$

das ist, weil $x^2 + y^2 = 1$, und $x^2 = 1 - y^2$

$$dxdx = \frac{y^2dydy}{1-y^2}$$

$$dydy = dydy \text{ add.}$$

$$dxdx + dydy = \frac{y^2dydy + dydy - y^2dydy}{1-y^2} = \frac{dydy}{1-y^2}$$

$$\sqrt{(dxdx + dydy)} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = DE$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{(1-y^2)^0}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1^{-\frac{1}{2}} \cdot -y^2$$

$-\frac{1}{2}$

$$-\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot y^4}{1\cdot 2}-\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}\cdot-y^6}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}\cdot-\frac{5}{2}\cdot-\frac{7}{2}\cdot y^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ \text{u.s.w.}$$

$$=1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1.3}{2.4}y^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^6+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8\ \text{u.s.f.}$$

folglich $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = DE = dy+\frac{1}{2}y^2dy+\frac{1.3}{2.4}y^4dy$

$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}y^{10}dy$$

u. s. w.

Man integrire; so kommt

$$AD = y+\frac{1}{2.3}y^3+\frac{1.3}{2.4.5}y^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7$$

$$+\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.9}y^9\ \text{u. s. w.}$$

Z. E. Der Sinus y sey 351902

so ist $y = 351902000 : 1000\,000\,000\,0$

$\frac{1}{2.3}y^3 = 72629 : 1000\,000\,000\,0$

$\frac{3}{2.4.5}y^5 = 40 : 1000\,000\,000\,0$

$$AD = \frac{351974669}{10000000000}$$

Man suche nun zu der Peripherie $\frac{31415926535}{10000000000}$ (die man §123. gefunden hat), $AD = \frac{351974669}{10000000000}$ und 360° die 4te Proportionalzahl so bekommt man die

die Zahl der Grade des Bogen AD. Weil aber der Radius in Ansehung der Reihe $y + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1.3}{2.4.5} y^5$ u. s. w. $= 1$, hingegen in Ansehung der Peripherie $\frac{314\ldots}{100\ldots} = \frac{1}{2}$ ist, so muß entweder $\frac{314\ldots}{100\ldots}$ erst mit 2 multipliciret, oder $\frac{351974669}{10000000000}$ erst mit 2 dividiret werden; und alsdann findet man AD $= 2^{\circ}\ 59^{II}\ 59^{III}$ u. s. w. das ist AD $= 2^{\circ} I$

II. Wenn der Bogen gegeben ist, so findet man den Sinus durch Hülfe der § 84. aufgelöseten Aufgabe. Nemlich $AD = y + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1.3}{2.4.5} y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} y^7$ u. s. w.

Es sey der Bogen $= z$; so ist
$y = Az + Cz^3 + Ez^5 + Gz^7 + Iz^9 + Lz^{11}$ u. s. w.
und

$$A = \frac{1}{a}$$
$$C = \frac{-cA^3}{a}$$
$$E = \frac{-eA^5 - 3cA^2C}{a}$$
$$G = -\frac{3cA^2E - 3cAC^2 - 5eA^4C - gA^7}{a}$$
u. s. w.

und a ist hier $= 1$

$$c = \frac{1}{2.3}$$
$$e = \frac{1.3}{2.4.5}$$
$$g = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}$$
u. s. w.

Man

Man findet also $A = + 1$

$C = - \frac{1}{2.3}$

$E = + \frac{1}{2.3.4.5}$

$G = - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}$ u. s. w.

und folglich $y = z - \frac{1}{2.3} z^3 + \frac{1}{2.3.4.5} z^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7} z^7 + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} z^9 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} z^{11}$ u. s. w.

Z. E. Wenn man den Sinus des Bogen von 10 Minuten sucht so ist der Bogen $\frac{10}{21600} = \frac{1}{2160}$ der Peripherie.

Man multiplicire die Peripherie $\frac{31415926535}{10000000000}$ mit 2 (weil in Ansehung der Reihe $z - \frac{1}{2.3} z^3$ u. s. w. der Radius $= 1$ ist,) und suche zu 2160, 1 und $\frac{62831853070}{10000000000}$ die 4te Proportionalzahl z; so kommt

$$z = \frac{29088820}{10000000000}$$

und so ist $\frac{1}{6} z^3 = \frac{36}{10000000000}$

und also $y = \frac{29088784}{10000000000}$, oder $\frac{29088}{10000000}$

ENDE.

Datum der Entleihung bitte h

(204) JG 162/14/79