

Geodæes.

113.



Studien  
über  
rationelle Vermessungen

im Gebiete der höheren Geodäsie.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

in der philosophischen Facultät der Universität Leipzig

verfasst von



Friedrich Robert Helmert.

Mit einer Figurentafel.

Leipzig.

Druck von B. G. Teubner.

1868.

51801

Geodäs.

113

Leipzig

Die Journalistik

von Robert Heilmann

Leipzig, 1901

Verlag von B. G. Teubner

Im Verlage des Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner

Druck von B. G. Teubner

Mit 100 Abbildungen

Preis 10 Mk.



## Einleitung.

---

Gegenwärtig giebt es wohl kaum einen modernen Culturstaat, in welchem nicht geodätische Triangulationen zum Zwecke einer genauen Landesvermessung oder als Theil einer Gradmessung ausgeführt werden oder schon beendet sind. Trotzdem ist, soviel ich weiss, nur Weniges über solche Grundsätze bekannt worden, durch deren Befolgung man in den Stand gesetzt ist, die Vermessung möglichst rationell auszuführen, d. h. einen nothwendigen Genauigkeitsgrad derselben mit möglichst wenig Zeit und Geld zu erreichen. Nun erheischt freilich das Terrain in jedem einzelnen Falle besondere Maassregeln; doch lässt sich aber auch nicht verkennen, dass stets eine gewisse Freiheit bei der Wahl derselben stattfinden wird und es ist die Aufgabe des Geodäten, diese auf's vortheilhafteste auszunutzen. Abstrahirt man zunächst von den besondern Terrainverhältnissen, bildet sich somit ein allen Anforderungen genügendes ideales Terrain, so kann es nicht schwer fallen, zu einigen Sätzen zu gelangen, die gewiss auch in manchen praktisch vorkommenden Fällen Anwendung finden können. Hieran wird sich eine Untersuchung über die Abnahme des Genauigkeitsgrades schliessen müssen, welche die Triangulation erleidet, wenn das Terrain Abweichungen von den Bedingungen der günstigsten Triangulation fordert, und es wird sich weiterhin damit ein Urtheil darüber bilden, wieweit man erhöhten Zeit- und Geldaufwand an einzelnen Stellen anzubringen habe, um sich jenen Bedingungen möglichst zu nähern und doch im Ganzen zu gewinnen.

Verschiedene interessante Bemerkungen meines verehrten Lehrers, des Herrn Professor Nagel am hiessigen Polytechnicum, erregten in mir den Vorsatz, dem eben entwickelten Gedanken gemäss, Studien über die Einschaltung der Punkte niederster Ordnung einer Landestriangulation

anzustellen, um zugleich zur Entscheidung der Frage, ob die allgemeinere Anwendung der Pothenotschen Aufgabe hierbei wirklich so vortheilhaft sei, wie es nach den Resultaten der von Herrn Prof. Nagel im erzgebirgschen Kohlenbassin ausgeführten Arbeiten erschien, einen Beitrag zu liefern. Im zweiten der folgenden Hauptabschnitte befindet sich das Endresultat dieser Studien, während der erste mehr vorbereitende Bedeutung hat. Der dritte Hauptabschnitt ist den Basisnetzen gewidmet und der vierte enthält einige Bemerkungen zu den günstigsten Formen grosser Dreiecksnetze.

## I. Allgemeine Bemerkungen über die Genauigkeit eines Punktes.

### 1.

Die Lage eines Punktes wird bekannt, sobald zwei sich schneidende geometrische Oerter desselben gefunden werden. Meistens begnügt man sich nicht, nur zweien solchen die Bestimmung zu überlassen und ermittelt daher noch mehrere. Insofern nun jeder derselben etwas fehlerhaft sein wird, werden paarweise Combinationen verschiedener geometrischer Oerter verschiedene Punktlagen ergeben, die sämmtlich von der wahren Lage abweichen, sodass es einer Ausgleichungsrechnung überlassen bleiben muss, aus der Vergleichung aller Bestimmungen wenigstens eine wahrscheinlichste Lage zu ermitteln. Die Grösse der einzelnen Abweichungen giebt dabei ein Mittel an die Hand, die Genauigkeit der wahrscheinlichsten Lage, ihre Abweichung von der Wahrheit zu schätzen. Hat man nur zwei geometrische Oerter, so ist ihr Durchschnitt schon die wahrscheinlichste Lage des Punktes und es kann von weiterer Ausgleichung nicht die Rede sein; es wäre also auch ein Schluss auf die Genauigkeit dieser Bestimmung nicht möglich, wenn nicht in den meisten Fällen die wahrscheinlichen Fehler der geometrischen Oerter selbst durch die Art und Weise ihrer Auffindung bekannt würden. Aus diesen Angaben die Genauigkeit der Bestimmung zu folgern, ist sonach eine erste Aufgabe, an welche als nächste sich diejenige anschliesst: die Lösung für die Bestimmung aus mehreren geometrischen Oertern zu verallgemeinern. Werden hierbei dieselben als unabhängig von einander bestimmt angenommen, so ist es endlich noch nothwendig, auch den allgemeinsten Fall gegenseitig bedingter geometrischer Oerter in's Auge zu fassen.

Man bezeichnet nun stets die Lage eines Punktes durch zwei Coordinaten und giebt die wahrscheinlichen Fehler derselben an, sodass sich die gestellten Aufgaben zum Theil darauf reduciren, aus jenen auf die Genauigkeit der Bestimmung überhaupt zu schliessen.

Für die hier anzustellenden Untersuchungen wird es genügen, die geometrischen Oerter als Gerade zu betrachten, die sich bei eintretenden

Fehlern parallel verschieben. Durch Einführung hinreichend scharfer Näherungswerthe für die Coordinaten reducirt sich nämlich die Gleichung jedes beliebig gestalteten geometrischen Ortes in Bezug auf die kleinen noch anzubringenden Verbesserungen der Coordinaten auf den ersten Grad, da man deren höhere Potenzen vernachlässigen darf. Ebenso ist es ferner auch zulässig, den wahrscheinlichen Fehler des geometrischen Ortes an der Stelle der genähert richtigen Lage des Punktes für die ganze unendliche Länge der substituirt Geraden beizubehalten, da wirklich eintretende Fehler sehr klein sind und für geringe Verschiebungen des Punktes auf dem geometrischen Orte sich dessen wahrscheinlicher Fehler nur wenig ändert. Die genauere Ausführung hiervon kann wohl unterbleiben und nur darauf sei noch hingewiesen, dass im Folgenden an den Stellen, wo durch die soeben gemachten Voraussetzungen die allgemeine Gültigkeit eines Resultats einer wesentlichen Beschränkung bedarf, dieses auch besonders erwähnt worden ist.

Bestimmung der Genauigkeit der Lage eines Punktes aus den von einander unabhängigen wahrscheinlichen Abweichungen zweier Geraden.

## 2.

Ist der Punkt durch die beiden Geraden  $AA'$  und  $BB'$  (Fig. 1) bestimmt, welche sich unter dem Winkel  $\varphi$  in  $O$  schneiden, so ist  $O$  seine wahrscheinlichste Lage. Sind

$$OM = -OM' = r_1, \quad ON = -ON' = r_2$$

die wahrscheinlichsten Abweichungen des Punktes von  $AA'$  und  $BB'$  zunächst an der Stelle  $O$  selbst, so kann man nach dem Vorigen  $r_1$  und  $r_2$  auch die wahrscheinlichen parallelen Verschiebungen der Geraden nennen, und wären gerade diese Fehler begangen worden, so würde der Punkt in eine der vier Ecken des aus den Parallelenpaaren zu  $AA'$  und  $BB'$  durch  $M$  und  $M'$ ,  $N$  und  $N'$  gebildeten Parallelogramms zu liegen kommen\*). Hingegen entsteht die beliebige Lage  $P$  in der Entfernung  $\Delta$  von  $O$  durch das gleichzeitige Eintreffen von Fehler  $PC = u$  senkrecht zu  $AA'$  und  $PD = v$  senkrecht zu  $BB'$ .

Sind  $w_1$  und  $w_2$  die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens von  $u = 0$  resp.  $v = 0$ ,  $h$  und  $k$  beziehentlich die Maasse der Genauigkeit, so ist die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von  $u$  resp.  $v$

$$w_u = w_1 \cdot e^{-h^2 u^2}, \quad w_v = w_2 \cdot e^{-k^2 v^2} \quad (**),$$

daher die Wahrscheinlichkeit der besonderen Lage  $P$  bei gleichzeitigem Eintreffen von  $u$  und  $v$

\*) Dies Parallelogramm ist in Fig. 1 mit angegeben.

\*\*) Hierüber, sowie über die Formeln in Abschn. 11. vergleiche man: „Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch 1834“ oder „Navier, Differentialrechnung etc. übersetzt von Wittstein,“ Anhang zum II. Bande von Wittstein.

$$1) \quad w_A = w_u \cdot w_v = w_1 \cdot w_2 \cdot e^{- (h^2 u^2 + k^2 v^2)},$$

wobei zwischen  $h$  und  $r_1$ ,  $k$  und  $r_2$  die bekannte Relation stattfindet:

$$2) \quad r_1 h = r_2 k = \varrho = 0,47694.$$

$w_A$  bleibt nach Gleichung 1) constant, so lange  $P$  sich auf dem Umfange einer Ellipse bewegt, für welche  $AA'$  und  $BB'$  die Richtungen conjugirter Durchmesser sind, weil dabei für  $u$  und  $v$  die Gleichung besteht:

$$3) \quad h^2 u^2 + k^2 v^2 = c^2, \quad \text{warin } c \text{ eine Constante bezeichnet.}$$

Oder um auf übliche Coordinaten überzugehen, betrachte man  $AA'$  und  $BB'$  als Achsen eines schiefwinkligen Systems der  $\xi$  und  $\eta$  (Fig.1) und hat alsdann

$$4) \quad \begin{cases} v = \xi \sin \varphi & u = \eta \sin \varphi, \\ \xi^2 (k \sin \varphi)^2 + \eta^2 (h \sin \varphi)^2 = c^2, \text{ oder} \\ \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 = 1, & a = \frac{c}{k \sin \varphi}, \quad b = \frac{c}{h \sin \varphi}, \end{cases}$$

warin  $a$  und  $b$  die halben Längen der conjugirten Durchmesser  $AA'$  und  $BB'$  bedeuten.  $P$  fällt in die Endpunkte der letzteren, wenn resp.

$$\eta = 0, \quad \xi = \pm a, \quad \text{also } u = 0, \quad v = v_0 = \pm \frac{c}{k}, \quad \text{oder}$$

$$\xi = 0, \quad \eta = \pm b, \quad \text{also } v = 0, \quad u = u_0 = \pm \frac{c}{h} \text{ wird.}$$

Man sieht hieraus, dass immer

$$5) \quad u_0 \cdot h = v_0 \cdot k = c,$$

und dass die zu verschiedenen  $w_A$  gehörigen Ellipsen alle ähnlich sind und um ihren Mittelpunkt  $O$  herum auch ähnlich liegen, wobei für die conjugirten Durchmesser in Richtung  $AA'$  und  $BB'$  die Proportion gilt:

$$2a : 2b = a : b = r_2 : r_1.$$

Den vier Punkten  $M_1, M_1', N_1, N_1'$  insbesondere, in welchen die Parallelen zu den bestimmenden Geraden im Abstände  $\pm r_1$  resp.  $\pm r_2$  dieselben schneiden, kommt die Wahrscheinlichkeit

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot e^{- \varrho^2}$$

zu und sie liegen daher auf dem Umfange einer Ellipse, welche die Hauptellipse genannt werden soll und in ihren Durchschnitten  $M_1, M_1', N_1, N_1'$  mit  $AA'$  und  $BB'$  von obigen 4 Parallelen tangirt wird.

### 3.

Denkt man sich die Wahrscheinlichkeit  $w_A$  des Eintretens der Lage  $P$  senkrecht zur Papierebene in  $P$  aufgetragen und bewegt sich  $P$  auf der etwa horizontal liegenden Papierebene, so beschreibt gleichzeitig der Endpunkt der Senkrechten eine Oberfläche mit der Gleichung

$$6) \quad w_A = w_1 \cdot w_2 \cdot e^{- (h^2 u^2 + k^2 v^2)} \text{ oder } w_A = \xi = e^{- (\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2) \sin^2 \varphi}$$

$\xi$  ist in  $O$  ein Maximum und nimmt von hier aus nach allen Seiten stetig ab bei

asymptotischer Annäherung der Oberfläche an die Papierebene. Alle horizontalen Querschnitte der Fläche sind Ellipsen, alle verticalen Querschnitte durch  $O$  unter der Neigung  $\nu$  gegen  $AA'$  von der Form der bekannten Wahrscheinlichkeitscurve nach der Gleichung

$$\xi = w_1 \cdot w_2 \cdot e^{-\Delta^2 \cdot (h^2 \sin^2 \nu + k^2 \sin^2 (\varphi - \nu))},$$

und da, wie bekannt, alle diese Querschnitte einen Wendepunkt haben, so hat die Oberfläche eine Wendelinie mit den Gleichungen

$$7) \quad 1 = 2 \Delta^2 (h^2 \sin^2 \nu + k^2 \sin^2 (\varphi - \nu)), \quad \xi = w_1 \cdot w_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Wendelinie ist hiernach eine ebene Curve und es liegt dieselbe parallel der Papierebene. Die erste der Gleichungen 7), die Projection der Wendelinie auf die Papierebene bezeichnend, geht durch Transformation über in

$$8) \quad \begin{cases} 1 = 2 (h^2 u'^2 + k^2 v'^2) & \text{oder } 1 = \left(\frac{\xi}{a'}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b'}\right)^2, \\ a' = 1 : (k \sin \varphi \sqrt{2}); & b' = 1 : (h \sin \varphi \sqrt{2}). \end{cases}$$

## 4.

Um nun die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von  $P$  auf einer Ellipsenfläche um  $O$  überhaupt zu ermitteln, ist es nöthig, zunächst eine endliche Anzahl Lagen von  $P$  zu betrachten, die in der Art gleichmässig über die Papierebene vertheilt sind, dass sowohl der einer Lage entsprechende Fehler  $OP$  als auch die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens innerhalb einer sehr kleinen, mit den andern gleichräumigen Fläche als constant angesehen werden dürfen. Offenbar verhalten sich dann die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens von  $P$  innerhalb zweier solcher Flächen wie die betreffenden  $w_A$  um so genauer, je kleiner die Räume der Flächen genommen werden. Die Zerlegung der Papierebene geschehe wie folgt:

Man theile  $MOM'$  und  $NON'$  in eine gleiche Anzahl sehr kleiner Theile (Fig. 2):

$$9) \quad MOM' = 2r_1 = 2n\delta; \quad NON' = 2r_2 = 2n\delta',$$

trage diese Theile noch über die Punkte  $M, M', N$  und  $N'$  hinaus beliebig oft auf und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen zu  $AA'$  resp.  $BB'$ . So entstehen zwei Systeme von äquidistanten Parallelen, deren sämtliche Durchschnitte das Vorkommen von Fehlern bezeichnen, für welches der Abstand  $\xi$  die Wahrscheinlichkeit ist. Denkt man sich  $\xi$  körperlich etwa vom Querschnitte eines Elementarparallelogrammes (gleich  $\frac{\delta\delta'}{\sin \varphi}$ ), so hat man damit ein Bild der Häufigkeit des Vorkommens der Fehler, zwar nicht von absolutem, aber doch relativem Werthe; denn es leuchtet ein, dass die Wahrscheinlichkeiten für das Vorkommen innerhalb zweier beliebigen Stücke der Papierebene sich wie die darüber befindlichen cubischen Räume

verhalten, wenn man nur (Gleichung 9)  $n$  unendlich anwachsen lässt. Sind  $W_1$  und  $W_2$  die Wahrscheinlichkeiten, dass  $P$  auf den Ellipsenflächen mit den Abschnitten  $a_1$  und  $b_1$ ,  $a_2$  und  $b_2$  liegt, so ist also streng

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{w_1 \cdot w_2 \cdot \int_0^{a_1} \int_0^{\eta} e^{-(\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2) \sin^2 \varphi} d\xi \cdot d\eta \sin \varphi}{w_1 \cdot w_2 \cdot \int_0^{a_2} \int_0^{\eta} e^{-(\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2) \sin^2 \varphi} d\xi \cdot d\eta \sin \varphi},$$

worin für  $\frac{\delta \delta'}{\sin \varphi}$  noch  $d\xi \cdot d\eta \cdot \sin \varphi$  gesetzt wurde. Die Grenzen beziehen sich auf den Umfang von Ellipsen, deren Gleichungen aus Gleichung 4) durch Anbringen der Indices 1 resp. 2 an  $a$  und  $b$  hervorgehen.

Das Doppelintegral im Zähler und Nenner wird leicht durch Einführung anderer Grenzen gefunden. Doch möge die Transformation des Zusammenhanges wegen nicht nach dem üblichen Verfahren, sondern wie folgt geschehen:

Man denke sich (wie in Fig. 3) durch entsprechende Theilpunkte von  $AA'$  und  $BB'$  die ähnlichen Ellipsen gezogen und die Papierebene also in schmale elliptische Ringe getheilt. Geht man von einer beliebigen Ellipse zu einer benachbarten, so ändert sich  $c$  (Gl. 5) um gleichviel, welche der Ellipsen man auch als Ausgang annimmt. Für jeden der Ringe kann man die zu integrirende Function, ursprünglich  $\zeta$ , als constant ansehen und zwar um so mehr, je dichter das System Ellipsen gezogen wird. Bedeutet  $d\varepsilon$  den Inhalt eines elementaren Ringes innerhalb des Winkelraumes  $AOB$ , so ist nun jedes der Doppelintegrale auf die Form gebracht

$$\int_0^c e^{-c^2} \cdot d\varepsilon.$$

$\varepsilon$ , der elliptisch begrenzte Winkelraum  $AOB$ , beträgt

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} \cdot ab \sin \varphi,$$

also ist

$$d\varepsilon = \frac{\pi}{4} (a \cdot db + b \cdot da) \sin \varphi,$$

und sofern

$$da = \frac{\delta'}{\sin \varphi}, \quad db = \frac{\delta}{\sin \varphi}, \quad a\delta = b\delta',$$

auch

$$d\varepsilon = \frac{\pi}{2} \cdot a\delta = \frac{\pi}{2} \cdot b\delta' = \frac{\pi}{2} \cdot b \sin \varphi da,$$

d. i. nach Gleichung 4)

$$d\varepsilon = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d(c^2)}{hk \sin \varphi}.$$

Damit wird das Integral gleich

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{hk \sin \varphi} \cdot \int_0^c e^{-c^2} \cdot d(c^2) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1 - e^{-c^2}}{hk \sin \varphi},$$

und wenn man der Ellipse 2. unendliche Ausdehnung giebt,  $W_2 = 1$  setzt, wird

$$10) \quad W_1 = W_2 \cdot (1 - e^{-c_1^2}) = 1 - e^{-c_1^2} \cdot *)$$

## 5.

$W_1$  wird  $\frac{1}{2}$  für  $c_1 = C = 0,83254$ ,  $\log C = 0,92040$  — 1.

Die halben Längen der conjugirten Durchmesser der zugehörigen Ellipse, welche die wahrscheinlichste heissen mag, sind

$$11) \quad A = \frac{V}{\sin \varphi}, \quad B = \frac{U}{\sin \varphi}, \quad \text{worin } V = r_2 \cdot \frac{C}{\varrho}, \quad U = r_1 \cdot \frac{C}{\varrho}, \quad \frac{C}{\varrho} = 1,7456$$

zu setzen sind.

## 6.

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $P$  innerhalb eines Parallelogrammes um  $O$ , nämlich gleichzeitig zwischen zwei Parallelenpaaren in den Entfernungen  $\pm u$  von  $AA'$ ,  $\pm v$  von  $BB'$  liegt, ist gleich

$${}^u W_{-u} \cdot {}^v W_{-v} = \left\{ \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^u e^{-h^2 u^2} du \right\} \cdot \left\{ \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^v e^{-k^2 v^2} dv \right\},$$

wobei jeder Factor einzeln die Wahrscheinlichkeit der Lage von  $P$  innerhalb eines der Parallelenpaare bezeichnet.

Nimmt man  $u$  und  $v$  gleich  $r_1$  resp.  $r_2$ , so wird die Wahrscheinlichkeit für  $P$  innerhalb des die Hauptellipse in ihren Schnittpunkten mit  $AA'$  und  $BB'$  tangirenden Parallelogramms (vergl. Abschnitt 2)

$$r_1 W_{-r_1} \cdot r_2 W_{-r_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

nimmt man aber  $u$  und  $v$  nur proportional  $r_1$  und  $r_2$  und ausserdem so gross, dass obiges Product gleich  $\frac{1}{2}$  wird, so müssen folgende Beziehungen bestehen:

\*) Unter Bezugnahme auf Abschnitt 1 sei hier bemerkt: Sind  $AA'$  und  $BB'$  nur substituirte Gerade, so ist Gleichung 10) nicht streng, da zwar  $W_2 = 1$  wird, aber nicht proportional dem Doppelintegrale im Nenner bleibt. Nimmt man jedoch für die 2. Ellipse  $e_2$  nicht unendlich, sondern nur  $\geq 8\varrho$ , so ist es auch erlaubt  $W_1 = W_2 \cdot \frac{1 - e^{-c_1^2}}{1 - e^{-c_2^2}} = W_2 \cdot (1 - e^{-c_1^2})$ , auf 7 Decimalen genau, zu setzen und man folgert leicht weiter, dass  $W_2$  selbst auf 7 Decimalen genau gleich 1 ist,

$${}^u W_{-u} = {}^v W_{-v} = 1 : \sqrt{2} = 0,707; \frac{hu}{\varrho} = \frac{kv}{\varrho} = \frac{u}{r_1} = \frac{v}{r_2} = 1,560. *)$$

Wie zu erwarten war, ist dieser Werth etwas kleiner, als  $\frac{C}{\varrho}$  in Gleichung 11).

## 7.

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $P$  zwischen zwei Ellipsen 1. und 2. liegt, ist

$$W_1 - W_2 = e^{-c_2^2} - e^{-c_1^2},$$

wenn die erste Ellipse die zweite umschliesst. Wählt man die zweite Ellipse der ersten unendlich benachbart, so ist auch

$$W_1 - W_2 = 2e^{-c_1^2} \cdot c_1 \cdot dc_1 = W_1'.$$

Für zwei andere benachbarte Ellipsen 3. und 4. ist in gleicher Weise

$$W_3 - W_4 = 2e^{-c_3^2} \cdot c_3 \cdot dc_3 = W_3'$$

und da nach Gleichung 5)  $dc_1 = dc_3$  ist, wenn man das Ellipsensystem nur wie in Fig. 2 und 3 (Abschn. 4.) gezogen denkt, gilt die Proportion:

$$12) \quad W_1' : W_3' = c_1 \cdot e^{-c_1^2} : c_3 \cdot e^{-c_3^2}$$

und zwar um so genauer, je dichter das Ellipsensystem angenommen wird. Lässt man endlich  $n$  (Gleichung 9) unendlich anwachsen, so geht der Flächenstreifen zwischen 2 benachbarten Ellipsen in einen Contour von verschwindender Dicke über, die jedoch an jeder Stelle eine andere und proportional der Entfernung von  $O$  ist \*\*). Die Gleichung 12) sagt daher auch aus, wie sich die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens von  $P$  auf den Peripherien der Ellipsen 1. und 3. verhalten, sobald man diese Peripherien als Contouren im obigen Sinne betrachtet.

Unter dieser Annahme mag auch die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von  $P$  auf einem Ellipsenbogen  $RS$  (Fig. 2) berechnet werden, sodass derselbe als Theil eines derartigen Contours betrachtet wird.

## 8.

Das zwischen den Ordinaten von  $R$  und  $S$  befindliche Stück der Ellipsenfläche ist, wenn  $R = (\xi_1, \eta_1)$ ,  $S = (\xi_2, \eta_2)$ , bekanntlich

$$\varepsilon' = \frac{b}{a} \sin \varphi \left\{ \frac{\xi_2}{2} \sqrt{a^2 - \xi_2^2} - \frac{\xi_1}{2} \sqrt{a^2 - \xi_1^2} + \frac{a^2}{2} \left( \arcsin \frac{\xi_2}{a} - \arcsin \frac{\xi_1}{a} \right) \right\}.$$

\*) Zur Berechnung dieses Werthes diene eine der bekannten Tafeln für das betreffende Integral.

\*\*\*) Bedürfte man der Wahrscheinlichkeit in Bezug auf eine mathematische Linie, so würde als Maass dafür der Flächenraum anzusehen sein, welchen  $\xi$  beschreibt, wenn  $P$  sich auf jener Linie bewegt. Hier können derartige Betrachtungen ausgeschlossen werden, da sie das Verständniss der Vertheilung der Fehler nicht fördern.

Durch Differentiation nach  $b$  und  $a$ , wobei aber  $\frac{b}{a}$ ,  $\xi_1$  und  $\xi_2$  constant bleiben, erhält man den elementaren Flächenstreifen, welcher an  $RS$  angrenzt (in Fig. 2 schraffirt):

$$d\varepsilon' = b \sin \varphi \left( \operatorname{arc} \sin \frac{\xi_2}{a} - \operatorname{arc} \sin \frac{\xi_1}{a} \right) da.$$

Derselbe Werth von  $d\varepsilon'$  würde sich ergeben haben, wenn man anstatt der  $\xi$  die  $\eta$  oder auch die Richtung der Radien  $OR$  und  $OS$  als constant angesehen hätte, denn es ist auch

$$d\varepsilon' = b \sin \varphi \left( \operatorname{arc} \sin \frac{\eta_1}{b} - \operatorname{arc} \sin \frac{\eta_2}{b} \right) da, \text{ sowie}$$

$$d\varepsilon' = b \sin \varphi \cdot \operatorname{arc} \sin \left( \frac{\text{Dreieck } ROS}{\text{Dreieck } AOB} \right) \cdot da, \text{ etc.}$$

Hiermit ergibt sich nun die Wahrscheinlichkeit, dass  $P$  auf dem an  $RS$  angrenzenden Flächenstückchen  $d\varepsilon'$  liegt, im Verhältniss zu derjenigen, dass  $P$  überhaupt auf dem schmalen elliptischen Ringe liegt, von dem  $d\varepsilon'$  ein Theil ist,

$$\begin{aligned} 13) \quad \frac{W(RS)}{W(AB)} &= \frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \left( \operatorname{arc} \sin \frac{\xi_2}{a} - \operatorname{arc} \sin \frac{\xi_1}{a} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \operatorname{arc} \sin \frac{\eta_1}{b} - \operatorname{arc} \sin \frac{\eta_2}{b} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \sin \left( \frac{\text{Dreieck } ROS}{\text{Dreieck } AOB} \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist stillschweigend  $RS$  als Theil von dem innerhalb des Winkelraumes  $AOB$  gelegenen Ellipsencontour betrachtet worden. Auch bedarf es keiner weiteren Erörterung für andere Fälle.

Die Construction solcher Bögen  $RS$  derselben Ellipse, welche gleiche Wahrscheinlichkeit ergeben, ist mit Hilfe von Kreisen um  $O$  mit den Radien  $a$  und  $b$  sehr leicht. Von derselben wird in Abschnitt 10. Gebrauch gemacht werden.

Nach dem letzten der Ausdrücke für das Wahrscheinlichkeitsverhältniss in Gleichung 13 bleibt dieses auch constant für Bögen  $RS$  verschiedener Ellipsen, wenn sie zwischen denselben Radien von  $O$  aus liegen. Vergleicht man daher zwei solche Bögen mit einander, so gilt für sie Gleichung 12) wie für die ganzen resp. Peripherien.

## 9.

Für kleine Bögen  $RS$  darf man Dreieck  $ROS$  mit dem Sector  $ROS$  vertauschen. Construiert man nun wie in Fig. 3 zu der mehrfach erwähnten Ellipsenschaar Radien derartig, dass je zwei benachbarte gleiche Sectorflächen einschliessen, so erlangt man mit Hilfe der Figur einen Ueberblick über die Vertheilung der Fehler um  $O$ . Denn die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von  $P$  ist dieselbe 1) für alle elementaren

Flächenstückchen zwischen denselben Ellipsen und beliebigen benachbarten Radien (z. B. für 1, 2, 3... oder für 1', 2', 3'...) und 2) für alle Sektoren zwischen benachbarten Radien und derselben Ellipse, woraus man durch Combination noch verschiedene andere Sätze ableiten kann. Zieht man überdiess die Peripherien von verschiedener Stärke an verschiedenen Stellen, entsprechend dem Abstände von  $O$ , so ist auch die Wahrscheinlichkeit dieselbe für alle Bogenstücke desselben Ellipsencontours.

Endlich besteht für die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens von  $P$  auf zwei Bogenstücken verschiedener Contoure oder innerhalb der angrenzenden Flächenstückchen die Gleichung 12). Z. B. in Bezug auf Theile der Ellipsencontoure  $AB$  und  $A_1 B_1$  in Fig. 3 oder in Bezug auf die angrenzenden Flächenstückchen ist das Verhältniss der Wahrscheinlichkeiten

$$c \cdot e^{-c^2} : c_1 \cdot e^{-c_1^2}.$$

## 10.

Als wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung von  $O$  wird man, ebenso wie bei Betrachtung der Fehler  $u$  und  $v$  allein, denjenigen bezeichnen, welcher ebenso oft überschritten, als nicht erreicht wird, und als mittlern Fehler denjenigen, dessen Quadrat das arithmetische Mittel aller Fehlerquadrate ist. Es wird sich zeigen, dass zwischen beiden Grössen eine constante Beziehung stattfindet.

Der wahrscheinliche Fehler ist nach verschiedenen Richtungen von  $O$  aus verschieden, denn verschiedene Punkte der wahrscheinlichsten Ellipse haben von  $O$  verschiedenen Abstand. Will man nun nicht diese Ellipse, nämlich ihre grosse und kleine Halbachse als grössten und kleinsten Werth des wahrscheinlichen Fehlers, angeben, so muss ein mittlerer Werth des letztern abgeleitet werden. Es findet sich dieser zu

$$14) \quad R = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}} = \sqrt{\frac{U^2 + V^2}{2}} : \sin \varphi,$$

wo  $A$ ,  $B$ ,  $U$  und  $V$  dieselben Werthe wie in Gleichung 11) haben.

Geht man nämlich wieder von einer grossen Zahl endlicher Fehler aus, so ist, wenn  $AB$  in Fig. 3 die wahrscheinlichste Ellipse bedeutet, der cubische Raum über dem an  $AB$  angrenzenden elliptischen Ringe der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des wahrscheinlichen Fehlers überhaupt, und es ist erlaubt, für jedes der Flächenstückchen 1, 2, 3, etc. den Fehler von der Länge des Radius von  $O$  aus nach einem beliebigen Punkte der Fläche, etwa dem rechten äussern Eckpunkte (von  $O$  aus gesehen) zu nehmen. Für je drei benachbarte dieser Punkte ist nach Gleichung 13)

$$\arcsin \frac{\xi_2}{A} - \arcsin \frac{\xi_1}{A} = \arcsin \frac{\xi_3}{A} - \arcsin \frac{\xi_2}{A},$$

Bezeichnet man diese Differenzen mit  $d\psi$  und ist  $AB$  in  $n$  Theile zerlegt worden, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Gleichungen:

$$n \cdot d\psi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{arc sin } \frac{\xi_p}{A} = p \cdot d\psi = \psi,$$

wobei  $\psi$  von  $1 \cdot d\psi$  bis  $n \cdot d\psi$  oder von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  bei unendlich wachsendem  $n$  geht.

$$\begin{aligned} \text{Es wird ferner } \xi_p &= A \sin \psi, \quad \eta_p = B \cos \psi \\ \Delta^2_p &= A^2 \sin^2 \psi + B^2 \cos^2 \psi + 2AB \cos \varphi \cos \psi \sin \psi \\ &\sum^{2n} \Delta^2_p \end{aligned}$$

und daher  $R^2 = \frac{1}{2n}$ , worin der Zähler die Summe der Fehlerquadrate für die halbe Ellipse über  $AOA'$ , der Nenner die Anzahl dieser Quadrate bezeichnet. Für unendlich wachsendes  $n$  und bei gleichzeitigem Uebergange von dem elliptischen Streifen zum Ellipsencontour selbst wird

$$R^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \Delta^2_p \cdot d\psi = \frac{A^2 + B^2}{2}, \quad \text{oder nach Gleichung 11) auch}$$

$$15) \quad R^2 = \frac{C^2}{2q^2} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{\sin^2 \varphi} = 1,5236 \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{\sin^2 \varphi}.$$

11.

Nimmt man  $u$  und  $v$  allein in Betracht, so bestimmt sich bekanntlich das mittlere Fehlerquadrat für  $u$  oder  $v$  nach den Formeln

$$16) \quad \left\{ \begin{aligned} m_1^2 &= \frac{w_1 \cdot \int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-h^2 u^2} du}{w_1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-h^2 u^2} du} = \frac{1}{2h^2} = \frac{r_1^2}{2q^2} \\ m_2^2 &= \frac{1}{2k^2} = \frac{r_2^2}{2q^2}. \end{aligned} \right.$$

$\eta_0 = \frac{m_1}{\sin \varphi}$  und  $\xi_0 = \frac{m_2}{\sin \varphi}$  sind dabei bekanntlich die Abscissen der Inflexionspunkte der Wahrscheinlichkeitscurven über  $BB'$  und  $AA'$  (Abschn. 3.). Im Falle gleichzeitigen Vorkommens von  $u$  und  $v$  gestaltet sich die Rechnung sehr ähnlich, wenn man nur vorher die gleichwahrscheinlichen Fehlerquadrate je zweier Punkte mit den Coordinaten  $\xi, \eta$  und  $(-\xi), \eta$  vereinigt zu

$$2 (\xi^2 + \eta^2).$$

Dieser Summe entspricht die Wahrscheinlichkeit  $w_A$  und es ist daher für die halbe Papierebene über  $AA'$

$$\begin{aligned} 2 \sum \{ w_A (\xi^2 + \eta^2) \} &\text{ die Summe der Fehlerquadrate, wenn} \\ 2 \sum w_A &\text{ als deren Anzahl angenommen wird.} \end{aligned}$$

Hiermit ist das mittlere Fehlerquadrat

$$M^2 = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty w_A (\xi^2 + \eta^2) d\xi \cdot d\eta}{\int_0^\infty \int_0^\infty w_A \cdot d\xi \cdot d\eta},$$

oder unter Benutzung der bekannten Formeln

$$\int_0^\infty e^{-t^2 \mu^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t^2 \mu^2} dt = \frac{1}{2\mu^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu},$$

auch

$$M^2 = \frac{\pi}{4hk \sin^4 \varphi} \left( \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2k^2} \right) : \frac{\pi}{4hk \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{2k^2},$$

oder endlich

$$17) \begin{cases} M^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2\varrho^2 \cdot \sin^2 \varphi}, \text{ daher} \\ M^2 = R^2 : C^2; \quad R^2 = 0,69312 M^2; \quad R = 0,83254 M. *) \end{cases}$$

Dagegen ist bekanntlich allgemein

$$r = 0,67449 m.$$

## 12.

Gab die wahrscheinlichste Ellipse in Verbindung mit Fig. 3 über die Vertheilung der Fehler Aufschluss, so ist jetzt in  $R$  oder  $M$  ein Maass für die Genauigkeit der Bestimmung von  $O$  gefunden. Es fragt sich nun aber noch, ob man durch die in der Praxis üblichen Genauigkeitsangaben (den mittlern Fehlern der Coordinaten von  $O$ ) immer  $M$  ableiten kann. Jedenfalls wäre dies möglich, wenn  $O$  auf ein den Geraden  $AA'$  und  $BB'$  paralleles Coordinatensystem bezogen würde. Es sei daher in Fig. 4  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  ein solches System; die Coordinaten des Punktes  $O$ , welcher hier mit  $P$  bezeichnet ist, mögen abweichend vom gewöhnlichen Gebrauche als senkrechte Abstände von den Achsen angenommen werden, damit für sie  $m_1$  und  $m_2$  die resp. mittlern Fehler sind. Für eine andere Achse  $\mathcal{A}_1$  unter der Neigung  $\psi$  zu  $\mathcal{A}$  wird

$$x' = \frac{x \sin(\varphi - \psi) - y \sin \psi}{\sin \varphi},$$

daher ist auch

$$18) \quad m_1^2 = \frac{m_1^2 \sin^2(\varphi - \psi) + m_2^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi},$$

wenn  $m_1$  den mittlern Fehler in  $x'$  bezeichnet. Für eine zweite zu  $\mathcal{A}_1$  senkrechte Achse  $\mathcal{B}_1$  ist

\*) In Bezug auf die Berechnung von  $M$  lässt sich eine ähnliche Bemerkung machen, wie bei Abschnitt 4. geschehen ist.

$$m_2^2 = \frac{m_1^2 \cos^2(\varphi - \psi) + m_2^2 \cos^2 \psi}{\sin^2 \varphi},$$

daher

$$m_1^2 + m_2^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{\sin^2 \varphi} = M^2;$$

d. h. „ein rechtwinkliges Coordinatensystem gestattet immer die Berechnung des mittlern Fehlers  $M$ .“

## 13.

Wählt man  $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{D}\mathfrak{B}_1$  so, dass sie einem beliebigen Paare conjugirter Durchmesser der Ellipsen parallel werden, so kann  $M$  ebenfalls wie oben aus den mittlern Fehlern der Coordinaten berechnet werden. Dem Achsenpaare  $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$  mögen in Fig. 5 die conjugirten Durchmesser  $OA_1$  und  $OB_1$  entsprechen, die Ellipse daselbst aber die Hauptellipse vorstellen. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass  $P$  auf dem unendlich langen Streifen zwischen den beiden zu  $OB_1$  parallelen Ellipsentangenten durch  $A_1$  und  $A_1'$  liegt

$$W = \frac{4hk \sin \varphi}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{- (\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2) \sin^2 \varphi} d\xi d\eta \sin \varphi,$$

worin  $\eta_1$  und  $\eta_2$  die Ordinaten der demselben  $\xi$  entsprechenden beiden Parallelenpunkte sind. Betrachtet man  $A_1 A_1'$  und  $B_1 B_1'$  als Achsen der  $\xi'$  und  $\eta'$ , so ergeben sich nach und nach folgende Formeln:

$$(\xi^2 k^2 + \eta^2 h^2) \sin^2 \varphi = (\xi'^2 k'^2 + \eta'^2 h'^2) \sin^2 \varphi'$$

$$d\xi \cdot d\eta \cdot \sin \varphi = d\xi' \cdot d\eta' \sin \varphi',$$

$$W = \frac{4hk \sin \varphi}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \int_{-b'}^{+b'} e^{- (\xi'^2 k'^2 + \eta'^2 h'^2) \sin^2 \varphi'} d\xi' d\eta' \sin \varphi'$$

oder

$$W = \frac{2hk \sin \varphi}{k' \sqrt{\pi}} \cdot \int_{-b'}^{+b'} e^{- \eta'^2 h'^2 \sin^2 \varphi'} d\eta'.$$

Hierin bedeuten  $a'$  und  $b'$  die Abschnitte der conjugirten Durchmesser  $A_1 A_1'$  und  $B_1 B_1'$ ,  $\varphi'$  den Conjugationswinkel derselben; ferner ist für  $h'$  und  $k'$

$$a' = \frac{c}{k' \sin \varphi'}; \quad b' = \frac{c}{h' \sin \varphi'}, \quad c = \varrho.$$

Man hat weiter

$$\int_{-b}^{+b} e^{- \eta^2 h^2 \sin^2 \varphi} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{4h \sin \varphi}, \quad \text{wenn } bh \sin \varphi = \varrho,$$

und zufolge der vorhergehenden Gleichungen für  $a'$  und  $b'$ ,  $h'$  und  $k'$  wird auch

$$\int_{-b'}^{+b'} e^{-\eta'^2 h'^2 \sin^2 \varphi'} d\eta' = \frac{\sqrt{\pi}}{4h' \sin \varphi'}, \quad \text{da } b'h' \sin \varphi' = \varrho.$$

Dies giebt zusammen

$$W = \frac{1}{2}.$$

Denselben Betrag würde man erhalten haben, wenn ursprünglich als bestimmende Gerade die conjugirten Durchmesser  $A_1A_1'$  und  $B_1B_1'$  mit den wahrscheinlichen Abweichungen  $\pm r_1' = \pm b' \sin \varphi'$  und  $\pm r_2' = \pm a' \sin \varphi'$  oder den Präcisionen  $h'$  und  $k'$  gegeben gewesen wären. Ueberhaupt erhellt, dass sich die Geraden  $AA'$  und  $BB'$  immer durch beliebige Paare von Geraden ersetzen lassen, wenn dieselben und ihre wahrscheinlichen Abweichungen so gewählt werden, wie  $A_1A_1'$  und  $B_1B_1'$  mit  $\pm r_1'$  und  $\pm r_2'$ . Denn zunächst geben dieselben auch dieselbe Hauptellipse wie die ursprünglichen bestimmenden Geraden und daher geben sie auch dieselbe Vertheilung der Fehler und dieselben Werthe  $M$  und  $R$ . Zugleich ist soviel ersichtlich, dass zwei bestimmende Gerade sich immer nur auf eine Weise durch zwei andere, senkrecht zu einander befindliche Gerade ersetzen lassen. Um z. B. zu zeigen, dass man den Werth  $M$  auch durch Anwendung von  $A_1A_1'$  und  $B_1B_1'$  erhält, hat man folgende Rechnung.

Aus den Werthen der wahrscheinlichen Fehler senkrecht  $A_1A_1'$  und  $B_1B_1'$ , nämlich

$$r_1' = b' \sin \varphi', \quad r_2' = a' \sin \varphi',$$

und dem entsprechenden mittlern Fehler

$$m_1' = \frac{r_1'}{\varrho\sqrt{2}}, \quad m_2' = \frac{r_2'}{\varrho\sqrt{2}}$$

folgt mit Hilfe der bekannten Relation

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \\ \frac{r_1'^2 + r_2'^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{r_1'^2 + r_2'^2}{\sin^2 \varphi'}; \quad \frac{m_1'^2 + m_2'^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{m_1'^2 + m_2'^2}{\sin^2 \varphi'} = M^2.$$

$m_1'$  und  $m_2'$  genügen selbstverständlich auch der Gleichung 18), wenn man die Achse der  $x'$  resp. mit  $OA_1$  oder  $OB_1$  parallel nimmt. Im erstern Falle ergibt sich z. B. successive:

$$m_1'^2 = \frac{r_1'^2}{2\varrho^2}; \quad r_1' = b' \sin \varphi' \quad \text{und da } a'b' \sin \varphi' = ab \sin \varphi, \quad \text{auch}$$

$$r_1' = \frac{ab \sin \varphi}{a'}, \quad m_1'^2 = \frac{(ab \sin \varphi)^2}{2\varrho^2} \cdot \frac{1}{a'^2}.$$

Die Ellipsengleichung liefert ferner für den letzten Factor

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{a^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\sin^2 \psi}{b^2 \sin^2 \varphi}, \quad \text{daher ist} \\ m_1'^2 = \frac{(b^2 \sin^2(\varphi - \psi) + a^2 \sin^2 \psi) \sin^2 \varphi}{2\varrho^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{m_1^2 \sin^2(\varphi - \psi) + m_2^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} = m_1^2.$$

## 14.

Lässt man den Endpunkt  $Q$  des zu  $m_1$  gehörigen wahrscheinlichen Fehlers  $OQ = r_1'$ , der allgemein mit  $r$  bezeichnet werden mag, alle Lagen um  $O$  durchlaufen, so beschreibt er für die Hauptellipse die bekannte Fusspunktcurve (Fig. 5) mit der Gleichung

$$r^2 = \frac{r_1^2 \cdot \sin^2(\varphi - \psi) + r_2^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi},$$

worin  $r$  und  $\psi$  variabel sind und  $r$  die wahrscheinliche parallele Verschiebung von  $A_1 A_1'$  unter der Neigung  $\psi$  gegen  $AA'$  bedeutet. An den Endpunkten der Hauptachsen tangiren sich beide Curven,  $r$  wird dabei ein Minimum resp. Maximum. Der spitze Winkel  $\psi$  aus der Gleichung

$$19) r_1^2 \cdot \sin 2(\varphi - \psi) = r_2^2 \sin 2\psi$$

entspricht der Lage der grossen Achse, falls  $\varphi$  selbst spitz ist.

Im Allgemeinen lässt sich für  $Q$  noch die leicht beweisliche Proportion angeben (Fig. 5):

$$QQ' : QO : Q'O = Q_1 Q_1' : Q_1 O : Q_1' O,$$

wobei  $OQ$  senkrecht  $QQ_1$ .

## 15.

Wie schon bemerkt, lässt sich die specielle Vertheilung der Fehler mit Hilfe von Coordinatenachsen parallel irgend welchen conjugirten Ellipsendurchmessern stets angeben. In der Praxis ist man jedoch auf rechtwinklige Coordinatenachsen angewiesen und diese gestatten nur die Berechnung von  $M$ , da man kein Mittel hat, die Ellipse aus zwei beliebigen zu einander senkrechten Radien ihrer Fusspunktcurve zu finden. Wollte man dennoch z. B. aus  $OQ$  und  $OQ_1$  die Fehlervertheilung ableiten, also damit verfahren wie in Fig. 2 mit  $OM$  und  $ON$ , so würde man um so grössere Abweichungen von der Wirklichkeit erhalten, je weiter sich  $QQ_1$  von den Ellipsenachsen entfernt.

Liegt z. B.  $QQ_1$  in den Halbirungslinien der Winkel zwischen den Hauptachsen, so werden  $OQ = OQ_1 = r$ ,  $OQ' = OQ_1'$ ,

$$r^2 = \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi (\varphi - \psi) + r_2^2 \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi} = \frac{r_1^2 \cos^2(\varphi - \psi) + r_2^2 \cos^2 \psi}{\sin^2 \varphi},$$

$$r^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2 \sin^2 \varphi}, \quad m^2 = \frac{1}{2} M^2.$$

$OQ$  und  $OQ_1$ , in der angegebenen Weise benutzt, würden für gleichwahrscheinliche Lagen von  $P$  Kreise um  $O$  anstatt Ellipsen ergeben

Bedarf man daher einer genauen Einsicht in die Gruppierung gleichwahrscheinlicher Lagen von  $P$  um  $O$ , so muss auch für eine Coordinate von  $P$  in Bezug auf eine dritte Achse der mittlere oder wahrscheinliche

Fehler berechnet werden, was, wie sich später zeigen wird, nicht viel Mühe macht. Ist die Neigung einer der drei Coordinatenachsen gegen die Hauptachse der Ellipse gleich  $\psi'$ , so ist für die betreffende Coordinate das Quadrat des mittlern Fehlers

$$20) \quad m^2 = m_1^2 \cdot \cos^2 \psi' + m_2^2 \cdot \sin^2 \psi',$$

wenn  $m_1$  und  $m_2$  die den Hauptachsen entsprechenden mittlern Fehler bedeuten.

Setzt man nun für drei Coordinatenachsen resp.  $\psi' = \psi$ ,  $\psi' = \psi + 45^0$  und  $\psi' = \psi + 90^0$ , so hat man zur Bestimmung von  $m_1$ ,  $m_2$  und  $\psi$

$$\begin{cases} m_1^2 = m_1^2 \cos^2 \psi + m_2^2 \sin^2 \psi = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \cdot \cos 2\psi, \\ m_2^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \sin 2\psi, \\ m_3^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \cos 2\psi. \end{cases}$$

Führt man abkürzungsweise noch  $m_4$  für  $\psi' = \psi + 135^0$  ein, wo

$$m_4^2 = m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{2} \sin 2\psi,$$

so wird

$$\begin{cases} (m_1^2 - m_2^2)^2 = (m_1^2 - m_3^2)^2 + (m_2^2 - m_4^2)^2 \\ (m_1^2 + m_2^2) = (m_1^2 + m_3^2) = (m_2^2 + m_4^2) \end{cases}$$

zur Berechnung von  $m_1$  und  $m_2$ . Damit bestimmt sich auch  $\psi$  aus einer der obigen Gleichungen. Die zu  $m_1$  und  $m_2$  gehörigen  $r$  sind die Hauptachsen der Ellipse.

## 16.

Nur selten kommen in der Praxis schiefwinklige Coordinatensysteme vor. Die wahrscheinlichen Fehler der Coordinaten gestatteten hier auch die Berechnung von  $M$  nicht und liefern nur zwei Paare gegenüberliegender Punkte der Fusspunkcurve, wenn die Achsen nicht zufällig parallel conjugirten Durchmessern liegen, was man indess nicht wissen kann.

Polarcoordinaten, überhaupt alle solche Coordinatensysteme, welche am Punkte zwei zu einander senkrechte Richtungen markiren, ersetzen in jeder Beziehung rechtwinklige Coordinaten.

Bestimmung der Genauigkeit eines Punktes aus der Angabe mehrerer von einander unabhängiger Geraden.

## 17.

Benutzt man zunächst ein schiefwinkliges Coordinatensystem mit dem Neigungswinkel  $\varphi$ , so sind die Gleichungen der Geraden im Anschluss an Fig. 6, wenn  $p$  und  $q$  die Abschnitte der Geraden auf den zu den  $x$  und  $y$  senkrechten Achsen bezeichnen:

$$21) \frac{x_1}{q_1} + \frac{y_1}{p_1} = \sin \varphi, \dots, \frac{x_n}{q_n} + \frac{y_n}{p_n} = \sin \varphi.$$

Ferner mögen  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  die  $n$  Abstände eines Punktes  $P$  mit den Coordinaten  $x, y$  von den Geraden sein, und  $m_1 \dots m_n$  die mittlern Fehler,  $h_1 \dots h_n$  die Maasse der Genauigkeit — in Zukunft kurz Präcisionen genannt — der einzelnen Geraden bedeuten. Dann ist zunächst irgend ein Abstand  $\varepsilon$  (Fig. 6)

$$22) \begin{cases} \varepsilon = \left( \frac{y}{\sin \varphi} - p \right) \sin \gamma + \frac{x}{\sin \varphi} \cdot \sin (\gamma - \varphi) \\ \varepsilon = x \cdot \frac{p}{l} + y \cdot \frac{q}{l} - \frac{pq \sin \varphi}{l}, \end{cases}$$

oder auch

$$23) \varepsilon = -\lambda + x \cdot \frac{p}{l} + y \cdot \frac{q}{l},$$

worin der Abstand  $\lambda$  der Geraden vom Coordinaten-Anfange als Beobachtungsgrösse, zu der  $m$  als mittlerer Fehler gehört, erscheint,  $l$  aber die Länge der Geraden zwischen den Achsen bezeichnet. Bekanntlich werden  $x$  und  $y$  so bestimmt, dass die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens aller Fehler, nämlich der Abstände  $\varepsilon$ , ein Maximum wird; also, wenn  $w_1 \dots w_n$  die Wahrscheinlichkeiten der Fehler Null senkrecht zu den verschiedenen Geraden bezeichnen, und  $e$  Basis der natürlichen Logarithmen ist,

$$(w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n) = e^{-(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + h_n^2 \varepsilon_n^2)} = \text{Max.}$$

Dies ist gleichbedeutend mit  $\sum_1^n (h^2 \varepsilon^2) = \text{Min.}$

Daraus finden sich für die wahrscheinlichsten Coordinaten  $x$  und  $y$  die Gleichungen

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial y} = 0, \quad \text{oder ausgeführt}$$

$$24) \begin{cases} x \cdot \Sigma \left( \frac{p p}{l l} \cdot h^2 \right) + y \cdot \Sigma \left( \frac{p q}{l l} \cdot h^2 \right) - \Sigma \left( \frac{\lambda p}{l} \cdot h^2 \right) = 0, \\ x \cdot \Sigma \left( \frac{p q}{l l} \cdot h^2 \right) + y \cdot \Sigma \left( \frac{q q}{l l} \cdot h^2 \right) - \Sigma \left( \frac{\lambda q}{l} \cdot h^2 \right) = 0. \end{cases}$$

Für andere Lagen des Punktes  $P$ , dessen Coordinaten mit  $x + u, y + v$  bezeichnet werden mögen, ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens

$$W_{u,v} = \text{Max.} \cdot e^{-\sum_1^n (h^2 \cdot \Delta \varepsilon^2)}$$

wenn  $\text{Max.}$  den Werth der Wahrscheinlichkeit für die wahrscheinlichste Lage  $(x, y)$  des Punktes  $P$  bezeichnet und

$$\Delta \varepsilon^2 = \left\{ (x + u) \frac{p}{l} + (y + v) \frac{q}{l} - \lambda \right\}^2 - \left\{ x \frac{p}{l} + y \frac{q}{l} - \lambda \right\}^2$$

ist, woraus mit Hilfe von 24) hervorgeht

$$25) \begin{cases} W_{u,v} = \text{Max} . e^{-\sum_1^n \left(u \cdot \frac{p}{l} + v \cdot \frac{q}{l}\right)^2 h^2} \\ = \text{Max} . e^{-\sum_1^n (\varepsilon'^2 h^2)}. \end{cases}$$

Die  $\varepsilon'$  sind hierbei die Abstände des Punktes  $(x + u, y + v)$ , oder kurz  $(u, v)$ , von Parallelen zu den bestimmenden Geraden, gezogen durch die wahrscheinlichste Lage  $(x, y)$ .

Für das *Max.* selbst ergibt sich noch

$$26) \text{Max} . = (w_1 \cdot w_2 \dots w_n) \cdot e^{-\sum (-\lambda \varepsilon h^2)}$$

worin  $\varepsilon$  die der wahrscheinlichsten Lage entsprechenden Abstände von den Geraden bedeuten.

Man sieht leicht ein, dass diese Resultate unabhängig von der besonderen Lage der Coordinatenachsen sind und ist daher zu dem Satze berechtigt:

Ist ein Punkt durch mehrere Gerade bestimmt, so liegen (nach Gleichung 25) um den wahrscheinlichsten Ort desselben alle Lagen gleicher Wahrscheinlichkeit auf concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen.

Damit ist in der Hauptsache der allgemeinere Fall auf den besonderen zweier Geraden zurückgeführt.

## 18.

Für die weitere Ausführung möge zu rechtwinkligen Coordinatenachsen übergegangen werden, da schiefwinkliger sich nach Abschnitt 16. weniger empfehlen. Indem  $\varphi = 90^0$  wird, gehen die Gleichungen 21), 23), 24), 25) über in

27)  $0 = -\lambda - x \cos \gamma + y \sin \gamma$ , (allgemeine Form der Gleichung einer Geraden),

28)  $\varepsilon = -\lambda - x \cos \gamma + y \sin \gamma$ , (Fehlergleichung), und

$$29) \begin{cases} x \cdot \sum (h^2 \cos^2 \gamma) - y \cdot \sum (h^2 \cos \gamma \sin \gamma) + \sum (h^2 \lambda \cos \gamma) = 0, \\ -x \cdot \sum (h^2 \cos \gamma \sin \gamma) + y \cdot \sum (h^2 \sin^2 \gamma) - \sum (h^2 \lambda \sin \gamma) = 0, \end{cases}$$

worin  $\gamma$  den Neigungswinkel der Geraden gegen die zu den Coordinaten  $x$  senkrechte  $x$ -Achse bezeichnet.

Hieraus folgen

$$30) \begin{cases} x = N \cdot \sum [h^2_\alpha h^2_\beta (\lambda_\alpha \sin \gamma_\beta - \lambda_\beta \sin \gamma_\alpha) \sin(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)], \\ y = N \cdot \sum [h^2_\alpha h^2_\beta (\lambda_\alpha \cos \gamma_\beta - \lambda_\beta \cos \gamma_\alpha) \sin(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)], \\ N = 1 : \sum [h^2_\alpha h^2_\beta \sin^2(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)], \end{cases}$$

$\Sigma$  in Bezug auf alle paarweisen Combinationen der Zahlen  $1 \dots n$  (ohne Wiederholung).

Ferner ist

$$31) W_{u,v} = \text{Max} . e^{-\sum [h^2 \cdot (-u \cos \gamma + v \sin \gamma)^2]}, \text{ und}$$

für das Maximum von  $W$  oder für das Minimum der Fehlerquadrate nach Gleichung 26)

$$\Sigma(-\lambda \varepsilon h^2) = -N \cdot \frac{1}{2} \cdot \Sigma \left\{ h_\alpha^2 h_\beta^2 h_\gamma^2 \lambda_\gamma \sin(\gamma_\alpha - \gamma_\beta) [\lambda_\alpha \sin(\gamma_\gamma - \gamma_\beta) + \lambda_\beta \sin(\gamma_\alpha - \gamma_\gamma) + \lambda_\gamma \sin(\gamma_\beta - \gamma_\alpha)] \right\},$$

wobei die Indices  $\alpha \beta \gamma$  unter den Zahlen 1 bis  $n$  alle Combinationen zu drei mit Wiederholung bilden. (Index  $\gamma$  und Winkel  $\gamma$  können nicht wohl verwechselt werden, sodass die Bezeichnungsweise auch nicht zu Irrthümern Veranlassung giebt.) Zieht man zusammen, so wird für Combinationen ohne Wiederholung in der Summe rechts

$$\Sigma(-\lambda \varepsilon h^2) = N \cdot \Sigma \left\{ (h_\alpha^2 h_\beta^2 h_\gamma^2) \cdot [\lambda_\alpha \sin(\gamma_\beta - \gamma_\gamma) + \lambda_\beta \sin(\gamma_\gamma - \gamma_\alpha) + \lambda_\gamma \sin(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)]^2 \right\}.$$

Speciell für 3 Gerade sind die wahrscheinlichsten drei Abstände  $\varepsilon$   
 $\varepsilon_1 = N \cdot h_2^2 \cdot h_3^2 \cdot \sin(\gamma_3 - \gamma_2) \cdot \{ \lambda_1 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_3) + \lambda_2 \sin(\gamma_3 - \gamma_1) + \lambda_3 \sin(\gamma_1 - \gamma_2) \},$   
 $\varepsilon_2 = N \cdot h_1^2 \cdot h_3^2 \cdot \sin(\gamma_1 - \gamma_3) \cdot \{ \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \},$   
 $\varepsilon_3 = N \cdot h_1^2 \cdot h_2^2 \cdot \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \cdot \{ \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \},$   
woraus die Proportion folgt, wenn man nur die absoluten Werthe der  $\varepsilon$  berücksichtigt,

$$\varepsilon_1 h_1^2 : \varepsilon_2 h_2^2 : \varepsilon_3 h_3^2 = s_1 : s_2 : s_3,$$

wo  $s_1, s_2, s_3$  die 3 Seiten des fehlerzeigenden Dreiecks gegenüber den Winkeln  $\gamma_3 - \gamma_2, \gamma_1 - \gamma_3$  und  $\gamma_2 - \gamma_1$  (ohne Rücksicht auf den Quadranten) bezeichnen. Die wahrscheinlichste Lage des Punktes lässt sich hiernach leicht construiren. \*)

19.

Um die Lage der Ellipsenhauptachsen zu erhalten, werde das nach der wahrscheinlichsten Punktlage verschobene Coordinatensystem um den Winkel  $\psi$  gedreht; es ist dann zu setzen für die ursprünglichen  $u$  und  $v$  ausgedrückt in den neuen Coordinaten  $u'$  und  $v'$

$$u = u' \cos \psi + v' \sin \psi; \quad v = -u' \sin \psi + v' \cos \psi.$$

Wählt man nun  $\psi$  so, dass der Exponent von  $W_{u,v}$  rein quadratisch wird, so bezeichnet das neue Coordinatensystem auch die Lage der Hauptachsen. Aus Gleichung 31) folgt

$$32) \quad \begin{cases} \tan 2\psi = \Sigma (h^2 \sin 2\gamma) : \Sigma (h^2 \cos 2\gamma) \text{ und der Exponent wird gleich} \\ c^2 = u'^2 \cdot \Sigma [h^2 \cos^2 (\psi - \gamma)] + v'^2 \cdot \Sigma [h^2 \sin^2 (\psi - \gamma)]. \end{cases}$$

Die Coefficienten von  $u'^2$  und  $v'^2$  sind die Präcisionen in der Bestimmung der Lagen der Achsen der  $u'$  und  $v'$ , oder der

\*) Dasselbe ist bei  $n$  Geraden immer dadurch zu ermöglichen, dass man mit Hilfe der Hauptellipse für zunächst zwei Gerade 1 und 2 zwei andere substituirt, deren eine parallel einer dritten geht, mit der sie sodann zu einer einzigen bestimmenden Geraden vereinigt wird. Man bemerkt leicht, wie dieses Verfahren zum gewünschten Ziele zu führen im Stande ist.

Hauptachsen selbst, und die diesen Präcisionen entsprechenden wahrscheinlichen Fehler gehören als Hauptachsen zu der Hauptellipse. Führt man den Werth von  $\psi$  ein, so ergibt sich die Präcision für die Achse der  $u'$ , d. i. auch die Präcision in der Bestimmung der Coordinate  $u'$  senkrecht zu dieser Achse, gleich

$$33) \frac{1}{2} \left\{ \Sigma h^2 + \sqrt{[\Sigma (h^2 \sin 2\gamma)]^2 + (\Sigma (h^2 \cos 2\gamma))^2} \right\};$$

für die Präcision in der Lage der Achse der  $v'$  ist die Wurzel des letzten Ausdrucks negativ zu nehmen.

Lage und Grösse der Ellipse sind unabhängig von der Wahl des Coordinatensystemes; für die Grösse der Hauptachsen ist dies unmittelbar klar. Die erste der Gleichungen 32) zeigt ferner, dass  $(\psi - \gamma)$  für Drehungen des rechtwinkligen Systemes constant bleibt, daher gilt der Satz in der That auch für die Lage der Ellipse.

## 20.

Zur Berechnung der Präcision in der Bestimmung einer der ursprünglichen Coordinaten, etwa des  $x$ , suche man zuerst die zur Richtung der  $x$ -Achse (oder Achse der  $u$ ) conjugirte Richtung, indem man die  $y$ -Achse (oder Achse der  $v$ ) um  $\psi - 90^\circ$  dreht und  $\psi$  so wählt, dass  $c^2$ , der Exponent von  $e$  in dem mit *Max.* bezeichneten Ausdrücke rein quadratisch wird. Es ergibt sich nach und nach

$$u = u', \quad v = u' \cot \psi + v' \csc \psi,$$

$$c^2 = \Sigma \left\{ h^2 \cdot \left( \frac{-u' \sin(\psi - \gamma) + v' \sin \gamma}{\sin \psi} \right)^2 \right\}$$

und für

$$34) \begin{cases} c^2 = u'^2 \cdot \Sigma \left( \frac{h^2 \sin^2(\psi - \gamma)}{\sin^2 \psi} \right) + v'^2 \cdot \Sigma \left( \frac{h^2 \sin^2 \gamma}{\sin^2 \psi} \right) \\ \text{wird} \\ \tan \psi = \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) : \Sigma (h^2 \cos \gamma \sin \gamma). \end{cases}$$

Der Factor von  $u'^2$  ist das Quadrat der Präcision in der Bestimmung von  $x$  und werde mit  $H_1^2$  bezeichnet.  $H_1'$  sei die Präcision in  $v'$  und  $H_2$  diejenige in der Bestimmung von  $y$ , welche Grösse  $H_2$  aus  $H_1$  durch Vertauschung von  $\gamma$  mit  $90^\circ + \gamma$  hervorgeht. Indem nun

$$\sin^2 \psi = [\Sigma (h^2 \sin^2 \gamma)]^2 : \{ [\Sigma (h^2 \sin^2 \gamma)]^2 + [\Sigma (h^2 \cos \gamma \sin \gamma)]^2 \},$$

giebt eine leichte Zwischenrechnung

$$35) \begin{cases} H_1^2 = \{ \Sigma (h^2 \cos^2 \gamma) \cdot \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) - \Sigma (h^2 \cos \gamma \sin \gamma) \} : \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) \\ \text{oder } H_1^2 = 1 : N \cdot \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma) \end{cases}$$

und damit ist

$$36) H_2^2 = 1 : N \cdot \Sigma (h^2 \cos^2 \gamma), \quad N \text{ wie in Gleichung 30).}$$

Ferner findet man

$$H_1'^2 = \{ [\Sigma (h^2 \sin^2 \gamma)]^2 + [\Sigma (h^2 \cos \gamma \sin \gamma)]^2 \} : \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma).$$

Nun ist

$$M^2 = \frac{1}{2H_1^2} + \frac{1}{2H_2^2} + \frac{\Sigma h^2}{2 \Sigma [h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2 (\gamma_\alpha - \gamma_\beta)]} \left. \vphantom{\frac{1}{2H_1^2}} \right\} 37). *)$$

und somit auch  $M^2 = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Sigma h^2$

Dieser Werth muss sich auch aus den Präcisionen senkrecht zu den Ellipsenhauptachsen ergeben (vergl. Gleichung 33), und in der That ist

$$M^2 = \left( \frac{1}{\Sigma h^2 + \sqrt{\div}} + \frac{1}{\Sigma h^2 - \sqrt{\div}} \right) = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Sigma h^2,$$

wobei

$$\sqrt{\div} = \sqrt{[\Sigma (h^2 \sin 2\gamma)]^2 + [\Sigma (h^2 \cos 2\gamma)]^2}.$$

Ueberdiess genügen auch  $H_1$  und  $H_1'$  der Gleichung

$$M^2 = \left( \frac{1}{2H_1^2} + \frac{1}{2H_1'^2} \right) : \sin^2 \psi, \text{ wie leicht zu zeigen ist.}$$

$H_1$  und  $H_2$  werden auf bekannte Weise auch aus Gleichung 29) gefunden. Setzt man erstens daselbst  $\Sigma (h^2 \lambda \cos \gamma) = (-1)$  und  $-\Sigma (h^2 \lambda \sin \gamma) = 0$ , so geht  $x$  in  $(1 : H_1^2)$  über; wird zweitens der erste dieser Werthe Null, der zweite gleich  $(-1)$  gesetzt, so geht  $y$  in  $(1 : H_2^2)$  über. Bedarf man nun  $H$  noch für eine andere Richtung (vergl. Abschn. 15.), so nehme man diese als Achse der  $x'$ , transformire die Gleichungen 28 und 29) und verfare nun wie oben bezüglich der Terme der Gleichungen, welche  $x'$  und  $y'$  nicht enthalten.

## 21.

Hiermit ist denn der allgemeinere Fall mehrerer Geraden auf den besonderen nur zweier Geraden zurückgeführt und es bedarf nur noch der Bemerkung, dass die neugewonnenen Formeln mit den entsprechenden früheren identisch werden, sobald alle Gerade bis auf zwei in Wegfall kommen. Aus Gleichung 37) ergibt sich alsdann

$$M^2 = \frac{h_1^2 + h_2^2}{2h_1^2 h_2^2 \sin^2 \varphi} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2\rho^2 \sin^2 \varphi}, \text{ wie in Gleichung 17).}$$

Für die Lage der Hauptachsen geht Gleichung 32) über in

$$\tan 2\psi = \frac{h_2^2 \sin 2\gamma_2}{h_2^2 \cos 2\gamma_2 + h_1^2}, \text{ wobei die } x\text{-Achse in Richtung der ersten Geraden angenommen wurde; dagegen gibt Gleichung 19)}$$

\*)  $H^2$  und  $M^2$  enthalten nur Quadrate der Sinus, daher werden im Folgenden die Winkel, soweit sie nur zur Berechnung von  $H^2$  und  $M^2$  dienen, ohne Rücksicht auf den Quadranten bestimmt werden.

$\tan 2\psi = \frac{r_1^2 \sin 2\varphi}{r_1^2 \cos 2\psi + r_2^2}$  und weil  $\varphi = \gamma_2$  ist, geht dieser Werth in den vorigen über.

Für die Länge der Hauptachsen lässt sich durch ähnliche Rechnung ein Gleiches nachweisen, was hier weiter nicht ausgeführt zu werden braucht.

## 22.

Bei den vorigen Rechnungen wurden die Präcisionen  $h$  als bekannt vorausgesetzt. Sehr oft jedoch kennt man nur sogenannte Gewichte  $g$ , die sich wie die  $h^2$  verhalten, und benutzt die Ausgleichungsergebnisse, die wahrscheinlichsten Werthe der  $h$  kennen zu lernen. Die Theorie lehrt, dass bei  $n$  Geraden der mittlere Fehler der Gewichtseinheit gleich ist

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum (\varepsilon^2 g)}{n - 2}},$$

worin  $\varepsilon$  wieder die wahrscheinlichsten Abstände bezeichnet. Die Präcision der Gewichtseinheit wird daher gleich  $1 : \sqrt{2\mu^2}$ , oder es ist für das Gewicht  $g$

$$h_g^2 = (g : 2\mu^2).$$

Ist nun  $h^2$  von vornherein genau bekannt und  $g = h^2 \cdot i$  gesetzt worden, so muss sich jetzt  $i = 2\mu^2$  ergeben.

Aus der Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung beider Werthe kann man einen Schluss auf die Zulässigkeit der bei Abschätzung der  $h$  dienenden Principien machen. Jeder geometrische Ort stützt sich auf Winkelmessungen und feste Punkte. Soweit  $h$  von ersteren abhängt, wird man es ziemlich genau angeben können; die festen Punkte betrachtet man meist als fehlerfrei. Es muss daher im Allgemeinen der Ueberschuss von  $2\mu^2$  über  $i$  den mittleren Fehler der festen Punkte charakterisiren, oder zur Entdeckung unberücksichtigter Fehlerquellen führen.

## 23.

Die Präcisionen  $h$  der Geraden, und wenn es möglich ist, auch die Lage der Geraden wird man so wählen, dass  $M$  sich möglichst klein ergibt. Doch ist es auch sehr wünschenswerth, dass  $H$  für alle Richtungen durch die wahrscheinlichste Lage des Punktes gleich werde, d. h. dass die Ellipsen gleichwahrscheinlicher Lagen in Kreise übergehen.

Nach Gleichung 33) tritt Letzteres ein für

$$38) \begin{cases} 0 = \sum (h^2 \cos 2\gamma) = \sum (h^2 \sin 2\gamma) \\ H^2 = 1 : M^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum h^2. \end{cases}$$

Diese Bedingung gilt für jede Lage der  $x$ -Achse, auf welche sich die  $\gamma$  beziehen. Schreibt man daher die erste der vorigen Gleichungen noch in der Form

$$39) \quad \Sigma (h^2 \cos^2 \gamma) = \Sigma (h^2 \sin^2 \gamma),$$

so hat man für Gleichheit der  $H$  die Bedingung \*): Es müssen sich die  $h^2$  unter den doppelten Neigungswinkeln ihrer zugehörigen Geraden zu einem vollständigen Polygone zusammenstossen lassen (nach Gleichung 38), oder es muss die Summe der Quadrate der Projectionen der  $h$  zu zwei zu einander senkrechten Richtungen gleich sein. In der letztern Ausdrucksweise ist aber noch eine Ungenauigkeit, denn liegen die zwei Projectionsachsen gerade in den Halbirungslinien der Winkel zwischen den Hauptachsen, so ist Gleichung 39) erfüllt, auch wenn nicht alle  $H$  gleich sind. Obgleich nun nicht zu vermuthen ist, dass dieser Ausnahmefall eintritt, ist es doch nothwendig, die Summe der Quadrate der Projectionen noch für eine dritte Achse zu bilden.

Sind Gleichung 38) und 39) erfüllt, so wird  $M^2$  ein Minimum unter der Bedingung von  $\Sigma h^2 = Const.$  und bei unveränderlichen Neigungen der Geraden zu einander. Man hat aus

$$M^2 = Min. \text{ auch } \frac{1}{N} = Max. \text{ oder } \Sigma (h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)) = Max.$$

Es muss daher für beliebige Systeme von  $dh$  die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial h_1} \cdot dh_1 + \frac{\partial \Sigma}{\partial h_2} \cdot dh_2 + \dots + \frac{\partial \Sigma}{\partial h_n} \cdot dh_n = K(2h_1 dh_1 + 2h_2 dh_2 + \dots + 2h_n dh_n),$$

worin  $K$  eine noch zu bestimmende Grösse ist. Die Ausführung der Rechnung giebt zur Bestimmung der  $n + 1$  Unbekannten  $h_1 \dots h_n, K$  die  $n + 1$  Gleichungen

$$40) \quad \begin{cases} 0 = -C + h_1^2 & + h_2^2 & + \dots + h_{n-1}^2 & + h_n^2 \\ 0 = -K & + h_2^2 \sin^2(\gamma_1 - \gamma_2) + \dots + h_{n-1}^2 \sin^2(\gamma_1 - \gamma_{n-1}) + h_n^2 \sin^2(\gamma_1 - \gamma_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 = -K + h_1^2 \sin^2(\gamma_n - \gamma_1) + h_2^2 \sin^2(\gamma_n - \gamma_2) + \dots + h_{n-1}^2 \sin^2(\gamma_n - \gamma_{n-1}). \end{cases}$$

Die zweite bis  $(n + 1)$ te Gleichung sagen aus, dass  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , das sind die Präcisionen der Geraden nach der Ausgleichung, einander gleich werden sollen, und da die Gleichheit dreier dieser  $H$  diejenige der sämtlichen  $H$  nach sich zieht, so sind  $(n - 3)$  der  $h$  für ein Minimum von  $M$  im obigen Sinne beliebig. Trotzdem kann der Fall eintreten, dass ein Minimum nicht möglich ist, sobald sich nämlich einzelne  $h^2$  negativ ergeben \*\*). Die Unmöglichkeit eines  $Min.$  tritt stets da ein,

\*) Man vergleiche hierüber, sowie über die im Gleichungssystem 40) nach Weglassung der ersten Gleichung vorkommende Determinante: Baltzer, Determinanten 2. Aufl. § 17. (1. 2 etc.) und § 3 (16. 17).

\*\*\*) Ein negatives  $h^2$  bedeutet, man soll die Gerade um  $90^\circ$  drehen und ihr die Präcision gleich dem absoluten Werthe des berechneten  $h$  beilegen.

wo sich die  $h^2$  zu keinem Polygone zusammenstossen lassen (nach Gleichung 38), d. h. wenn sich alle Geraden in einem spitzen Winkelraume schneiden. Im andern Falle lassen sich mit Hilfe einer Figur (nach Gleichung 39) die  $h$  leicht ausprobiren, indem es ja auch meist auf strenge Gleichheit der  $h$  nicht ankommt. Doch sind stets die  $h^2$  in Grenzen eingeschlossen, und man erhält diese, indem man zunächst drei der  $h^2$  durch  $C$  und die andern  $h^2$  ausdrückt und diese sodann variirt, u. s. w. Der Werth  $K$  findet sich nach Gleichung 38) zu  $\frac{C}{2}$ .

Es mag noch erwähnt werden, dass die Unbestimmtheit des Maximalsystems der  $h$  den Vortheil gewährt, gleichzeitig noch andere Bedingungen erfüllen zu können, wozu namentlich diejenige als von Wichtigkeit zu rechnen ist, bei constantem  $M^2$  die aufgewandte Mühe möglichst klein zu machen. Die weitere Ausführung muss indess besonderen Fällen vorbehalten bleiben (vergl. Abschnitt 34).

## 24.

Vorstehende Betrachtungen liefern ausser Erreichungen des Hauptzweckes noch nebenbei die geometrische Deutung der Ausgleichung der beobachteten Werthe einer Function zweier Veränderlichen mit zwei zu bestimmenden Constanten, hier den Coordinaten  $x$  und  $y$ . Zugleich sieht man deutlich, was es heisst: den mittlern Fehler einer Function der Constanten  $x, y$  anzugeben.

Z. B. die Function  $n$ ten Grades von  $x, y$

$$z^n = f(x, y)$$

wird man zunächst linear machen durch Einführung scharfer Näherungswerthe. Entspricht  $z_0$  den Näherungswerthen  $x_0$  und  $y_0$ , so ist für die Verbesserungen von  $x_0$  und  $y_0$ , die  $\Delta x$  und  $\Delta y$  heissen mögen,

$$\frac{1}{n} \cdot z_0^{n-1} \Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y, \text{ oder}$$

$$\Delta x \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{n}{z_0^{n-1}} \right) + \Delta y \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{n}{z_0^{n-1}} \right) - \Delta z = 0,$$

und in dieser Form hat man die Gleichung einer substituirten Geraden, nämlich einer Parallelen zu derjenigen Tangente der Curve, welcher  $(x_0, y_0)$  am nächsten liegt.  $\Delta z$  bezeichnet den Abstand dieser Parallelen von  $(x_0, y_0)$ . Derselben entspricht diejenige Präcision  $H$ , welche zu einer Geraden unter der Neigung  $\gamma$  gegen die Achse der  $x$  gehört, wo

$$\tan \gamma = - \left\{ \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right\}.$$

Ist hierdurch die Präcision für  $\Delta z$ , also auch für  $z$  gefunden, so ist es nicht mehr schwierig, auch für  $f(x, y)$  selbst sie anzugeben.

Beispiel. Der Abstand des Punktes  $(x, y)$  vom festen Punkte  $(x_1, y_1)$  ist

$$\varepsilon^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Sind  $x_0$  und  $y_0$  Näherungswerthe von  $\varepsilon$  und entspricht ihnen ein  $\varepsilon_0$ , so wird

$$\Delta\varepsilon = \Delta x \cdot \frac{x_0 - x_1}{\varepsilon_0} + \Delta y \cdot \frac{y_0 - y_1}{\varepsilon_0}; \quad \tan \gamma = -\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}.$$

Hat man nun das  $H$  und damit den mittleren Fehler  $m$  für  $\Delta\varepsilon$  ermittelt, so wird  $\pm 2 \varepsilon_0 m$  der mittlere Fehler in  $\varepsilon^2$  selbst sein, wenn hierin für  $x$  und  $y$  die wahrscheinlichsten Coordinaten gesetzt wurden.

$m$  selbst ist von der Entfernung beider Punkte unabhängig, und sucht man einen mittlern Werth des mittlern Fehlers im Abstände von beliebigen andern Punkten  $(x_1, y_1)$ , so ist es nur nöthig, diese für eine Kreisperipherie um  $(x, y)$  zu betrachten. Ohne weitere Bemerkung leuchtet ein, dass das mittlere Quadrat aller  $m$  wird im Anschluss an Gleichung 20):

$$41) \quad \mathfrak{M}^2 = \frac{\sum_0^{\pi} m^2}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (m_1^2 \cos^2 \psi' + m_2^2 \sin^2 \psi') d\psi' = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} = \frac{1}{2} M^2.$$

## 25.

Bisher war angenommen worden, dass die bestimmenden Geraden von einander unabhängig bestimmt seien; anhangsweise möge jetzt der Fall erörtert werden, wo diess nicht mehr so ist. Einem Paare scharfer Näherungswerthe der Coordinaten entspreche ein gewisses System von Werthen der Beobachtungsgrössen;  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_p$  sollen nun die Ergänzungen dieser Werthe zu den wirklichen Beobachtungsgrössen,  $\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_p$  aber die Ergänzungen zu den wahrscheinlichsten Werthen der Beobachtungsgrössen bezeichnen. Versteht man noch unter  $x$  und  $y$  die wahrscheinlichsten Ergänzungen der Näherungswerthe der Coordinaten, so ist

$$0 = ax + by + c\alpha'_1 + d\alpha'_2 + \dots + q\alpha'_p$$

die Form der  $n$  Gleichungen zur Bestimmung von  $x$  und  $y$ , worin die Coefficienten Functionen der Näherungswerthe aller Grössen bedeuten. Da ferner  $p \geq n$  ist, kann man  $n$  der  $\alpha'$  durch  $x, y$  und die  $(p-n)$  andern  $\alpha$  ausdrücken und letztere als zu bestimmende Constanten, wie  $x$  und  $y$ , betrachten. Bezeichnet man sie daher noch mit  $z_1, z_2, \text{etc.}$ , so nimmt das Gleichungssystem die Form an

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1' = A_1x + B_1y + C_1z_1 + \dots + D_1z_{p-n} \\ \alpha_2' = A_2x + B_2y + C_2z_1 + \dots + D_2z_{p-n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n' = A_nx + B_ny + C_nz_1 + \dots + D_nz_{p-n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{n+1}' = \cdot \quad \cdot \quad + z_1 \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_p' = \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + z_{p-n} \end{array} \right.$$

Setzt man hierin links für  $\alpha' \alpha + \Delta\alpha$ , so bestimmt man bekanntlich  $x, y, z$  etc. derartig, dass  $\Sigma(h^2 \cdot \Delta^2 \alpha)$  ein Min. wird.

Der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines andern Constantensystems  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$  u. s. f. lässt sich immer auf die Form bringen \*):

$$W_1 = \kappa_1 \cdot e^{-\sum_1^n (A_i \Delta x + B_i \Delta y + \dots + D_i \Delta z_{p-n})^2 \cdot h_i^2},$$

worin  $\kappa_1$  in Bezug auf die  $\Delta$  constant,  $h_i$  die Präcision in  $\alpha_i$  ist. Bildet man weiter die Summe aller  $W_1$  für alle möglichen  $\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_{p-n}$ , so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$W_2 = \kappa_2 \cdot e^{-(P \cdot \Delta^2 x + Q \cdot \Delta x \cdot \Delta y + R \cdot \Delta^2 y)},$$

worin wieder  $\kappa_2, P, Q, R$  von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  unabhängig sind.

Dieser Ausdruck sagt aber aus, dass immer sich gleichwahrscheinliche Lagen des zu bestimmenden Punktes um die wahrscheinlichste Lage herum in Ellipsen gruppieren, womit daher der allgemeinste Fall auf den einfachsten „zweier unabhängigen Geraden“ zurückgeführt worden ist. (Vergl. Abschnitt 39.).

## II. Ueber das Einschalten von Netzpunkten in ein grösseres „bekanntes“ trigonometrisches Netz.

### 26.

Ist eine Landestriangulation bis zu Dreiecken von 0,5 bis 2 Meilen Seitenlänge herabgekommen, so wird es sich darum handeln, eine grosse Anzahl weiterer Punkte nach den gegebenen behufs Detailaufnahme einzumessen, sodass deren durchschnittliche Entfernung 0,1 bis 0,3 Meilen beträgt. Der grösste Theil dieser Neubestimmten Punkte muss zugänglich sein, da sie zum Ausgange weiterer Messungen dienen sollen. Man wird

\*) Ein Beweis hierzu findet sich in den Seite 75 unter Anmerkung \*\*) citirten Werken.

daher im Allgemeinen zu ihrer Bestimmung einen dreifachen Weg einschlagen können:

- 1) Man beobachtet von den Hauptpunkten die Richtungen nach den Nebenpunkten;
- 2) man beobachtet umgekehrt auf den Nebenpunkten die Richtungen nach den Hauptpunkten;
- 3) man beobachtet Beides, combinirt also Methode 1) und 2).

Wegen der ungeheuren Complicirung des Rechnungswerkes sowohl, als auch wegen des geringeren Genauigkeitsgrades bei gleicher Mühe der Winkelmessungen ist dasjenige Verfahren, zwischen den Nebenpunkten selbst ein Netz zu bilden und dieses in das Hauptnetz einzuhängen, nicht in Gebrauch. Nur für benachbarte Nebenpunkte erhält man zwar auf diese Weise eine grössere Sicherheit in der Bestimmung der Verhältnisse ihrer Entfernungen (also der Figur zwischen diesen Punkten); jedoch genügen auch hierzu die Angaben jener drei Methoden, welche jeden Nebenpunkt direct auf die Hauptpunkte stützen und so seine Lage gegen diese weit schärfer zu berechnen gestatten.

Berücksichtigt man gleichviele Hauptpunkte, wie dies jedenfalls für die beiden ersten Methoden geschehen muss, auch bei der dritten derselben, so kann von einem Vergleiche mit jenen beiden nicht die Rede sein. Ein solcher hat erst dann Sinn, wenn im dritten Falle weniger Hauptpunkte zur Bestimmung eines Nebenpunktes zugezogen werden, und er soll hier überhaupt nur anhangsweise dem Vergleiche der 1. und 2. Methode folgen, insofern dieses völlig genügen wird.

## 27.

„In theoretischer Beziehung ist nun im Allgemeinen die zweite Methode, bei nur drei Hauptpunkten ‘Pothenot’sche Aufgabe’ genannt, die vorzüglichste; aber auch in praktischer Hinsicht bietet sie manche Vortheile vor der ersten.“

Zur Begründung dieses Satzes möge vorerst der letztere Gesichtspunkt angenommen werden. Dabei sind zu berücksichtigen 1) die Situation der Nebenpunkte und 2) die Menge der Arbeit mit dem Theodoliten und die der Ausgleichsrechnung.

Die Nebenpunkte liegen meistens tiefer als die Hauptpunkte, diese lassen sich daher leicht und gut von jenen visiren, während umgekehrt die Aufsuchung und das Anvisiren der schwachen Signalstangen, durch welche man die Nebenpunkte sichtbar zu machen hätte, der grössern Entfernung und des schlechten Hintergrundes wegen oft sehr misslich werden wird. Es ist dieser Umstand der schnellen Ausführung der Arbeit nach der ersten Methode entschieden bedeutend hinderlicher, als der bei der zweiten

Methode nöthige häufige, doch leicht zu bewirkende Umzug nach nahen, benachbarten Nebenpunkten. Die Situation der Nebenpunkte spricht mithin zu Gunsten der zweiten Methode.

## 28.

Hinsichtlich der Menge der Arbeit mit dem Theodoliten und derjenigen der Ausgleichsrechnung lässt sich Folgendes anführen:

1) Bei Winkelbeobachtungen entsprechen den  $q$  Richtungen von den  $q$  Hauptpunkten nach einem Nebenpunkte  $q$  Winkelmessungen; ebensoviele lassen sich auf dem Nebenpunkte zwischen den  $q$  Hauptpunkten vornehmen und man hat hierbei noch den Vortheil der Auswahl unter den  $\frac{q(q-1)}{2}$  möglichen Winkeln zu günstigst wirkenden Schnitten. Jeder Winkel, hier wie dort, liefert eine Gleichung zur Bestimmung der Coordinaten des Nebenpunktes und wenn nur für letztere durch eine Uebersichtsmenselaufnahme der Nebenpunkte erst vorläufige, durch darauf sich stützende Berechnung aus zwei guten Schnitten scharfe Näherungswerthe bekannt worden sind, macht die Aufstellung und Auflösung der Gleichungen in beiden Fällen nahezu dieselbe Mühe. Ueber die wirklich erlangte Genauigkeit wird die theoretische Vergleichung später das Nöthigste angeben.

2) *a.* Bei Richtungsbeobachtungen von den Hauptpunkten aus müssen die Nebenpunkte wegen ihrer grossen Anzahl gruppenweise vereinigt werden, womöglich so, dass für verschiedene Hauptpunkte dieselben Nebenpunkte zu einerlei Gruppe gehören.

Man bekommt dadurch in die Rechnung eine Beziehung benachbarter Nebenpunkte, da eine Gruppe am besten auch nur solche enthalten wird, und durch diese Beziehung bestimmt sich die gegenseitige Lage dieser Nebenpunkte etwas schärfer, als der mittlere Fehler  $M$  jedes einzelnen derselben erwarten lässt. Leider verwickelt sich aber die Rechnung durch diese Beziehung ungemein, denn sie bringt sämtliche Bestimmungsgleichungen der Coordinaten aller Punkte einer Gruppe in Zusammenhang und strenggenommen müssen alle diese Gleichungen zusammen ausgeglichen werden:

Ist  $\omega$  der Beobachtungsfehler in dem Winkel  $\alpha$  zwischen der Nullrichtung — es sei diese die Richtung nach einem andern Hauptpunkte — und der Richtung nach einem Nebenpunkte, so schreibt man bekanntlich die Gleichung zwischen  $\alpha$ ,  $\omega$  und den Coordinaten  $x$  und  $y$  des Nebenpunktes als Fehlergleichung

$$-\omega \cdot z = z \cdot f(x, y),$$

wenn  $z^2$  das Gewicht des Winkels  $\alpha$  und  $f(x, y)$  eine lineare Function der Verbesserungen der Näherungswerthe von  $x$  und  $y$  ist. (Die Coefficienten derselben sind von  $\alpha$  und den Coordinaten des Hauptpunktes abhängig; vergl. Abschnitt 30.).

$\omega$  besteht aus zwei Theilen, nämlich den Beobachtungsfehlern der beiden Richtungen; bezeichnen  $0_q$  und  $p_q$  resp. den Fehler der Nullrichtung und den Fehler der Richtung nach dem  $p$ ten Nebenpunkte auf dem  $q$ ten Hauptpunkte, so ist

$$-\omega = (0_q - p_q).$$

Ist  $n$  Anzahl der Nebenpunkte der betr. Gruppe,  $q$  Anzahl der Hauptpunkte, von welchen dieselbe beobachtet wurde und berücksichtigt man, dass  $\kappa$  constant wird für alle Winkel von einem Hauptpunkte aus, so nimmt das System der zusammen zur Ausgleichung gelangenden Gleichungen die folgende Gestalt an:

	1ter Nebenpunkt,	2ter Nebenpunkt,	$n$ ter Nebenpunkt.
1. Hauptpunkt:	$\kappa_1(0_1-1_1) = f'_1(x_1, y_1);$	$\kappa_1(0_1-2_1) = f'_2(x_2, y_2); \dots$	$\kappa_1(0_1-n_1) = f'_n(x_n, y_n);$
2. Hauptpunkt:	$\kappa_2(0_2-1_2) = f''_1(x_1, y_1);$	$\kappa_2(0_2-2_2) = f''_2(x_2, y_2); \dots$	$\kappa_2(0_2-n_2) = f''_n(x_n, y_n);$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$q$ . Hauptpunkt:	$\kappa_q(0_q-1_q) = f^{(q)}_1(x_1, y_1);$	$\kappa_q(0_q-2_q) = f^{(q)}_2(x_2, y_2); \dots$	$\kappa_q(0_q-n_q) = f^{(q)}_n(x_n, y_n).$

Die Anzahl aller Gleichungen hierin beträgt  $n \cdot q$ . Die  $2n$  Coordinaten bestimmt man so, dass  $\Sigma \left( \frac{\kappa^2}{2} \cdot v^2 \right) = \text{Min.}$ , wenn  $v$  den Beobachtungsfehler einer Richtung und  $\frac{\kappa^2}{2}$  sein Gewicht bezeichnen. Man erhält damit  $2n$  Gleichungen für die Coordinaten, und macht schon die Entwicklung der Coefficienten der Unbekannten für diese Gleichungen aus den obigen  $n \cdot q$  Gleichungen viele Mühe, so noch viel mehr die Auflösung nach den Unbekannten.

Noch schwieriger wird die Rechnung, wenn die Gruppeneintheilung im obigen Sinne nicht hat innegehalten werden können. Man wird wohl sehr häufig am besten thun, den übrigens nicht wesentlichen Vortheil des Zusammenhanges der Gleichungen für verschiedene Nebenpunkte fallen zu lassen und jeden derselben für sich zu berechnen.

Was die Grösse der Arbeit gegenüber Winkelbeobachtungen betrifft, so stellt sich diese jetzt etwa halb so gross als bei letzteren heraus; denn es beträgt die Anzahl der Einstellungen des Instrumentes für die  $n$  Nebenpunkte und die Nullrichtung  $(n+1)$ , während bei Winkelbeobachtungen  $2n$  Einstellungen zur Ermittlung der  $n$  Richtungsunterschiede mit den Nebenpunkten nothwendig werden.

2) *b.* Vereinigt man auf einem Nebenpunkte alle sichtbaren Hauptpunkte in einen einzigen „Satz“ und bezeichnen (1), (2), ... ( $q$ ) die Beobachtungsfehler der Richtungen, so ergeben sich  $(q-1)$  Gleichungen für die Coordinaten des Nebenpunktes. Durch Einführung scharfer Näherungswerthe erhalten diese Gleichungen die Form

$$42) \begin{cases} (1) - (2) = A_2 + B_2 \cdot x + C_2 \cdot y, \\ (1) - (3) = A_3 + B_3 \cdot x + C_3 \cdot y, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (1) - (q) = A_q + B_q \cdot x + C_q \cdot y, \text{ wobei} \\ \{(1)^2 + (2)^2 + \dots + (q)^2\} = \text{Min. zu machen ist.} \end{cases}$$

$x$  und  $y$  sind hierbei die Verbesserungen der Coordinatennäherungswerthe, unter  $A, B, C$  gewisse Functionen der letzteren und der Coordinaten der Hauptpunkte zu verstehen. Durch Differentiation der Gleichungen 42) und Multiplication derselben mit gewissen, noch unbekanntenen Grössen  $Z_2, Z_3, \dots, Z_q$  ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} Z_2 \cdot d(1) - Z_2 \cdot d(2) - (B_2 \cdot dx + C_2 \cdot dy) Z_2 &= 0 \\ Z_3 \cdot d(1) - Z_3 \cdot d(3) - (B_3 \cdot dx + C_3 \cdot dy) Z_3 &= 0 \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen, so muss ihre Summe mit dem totalen Differential des *Min.* identisch werden, also

$$\Sigma Z \cdot d(1) - Z_2 \cdot d(2) - \dots - Z_q \cdot d(q) - \Sigma(BZ) \cdot dx - \Sigma(CZ) \cdot dy = (1) d(1)^2 + (2) d(2)^2 + \dots + (q) d(q)^2$$

für beliebige Werthe der Differentiale. Dazu gehört, dass

$$\left. \begin{array}{l} \sum_2^q Z = (1) \\ - Z_2 = (2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ - Z_q = (q) \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \sum_2^q (BZ) = 0 \\ \sum_2^q (CZ) = 0 \end{array} \right\}, \quad \text{also } \{(1) + (2) + \dots + (q)\} = 0.$$

Die weitere Rechnung giebt nach und nach:

$$(1) \cdot q - \{(1) + (2) + \dots + (q)\} = \sum_2^q A + \sum_2^q B \cdot x + \sum_2^q C \cdot y,$$

oder

$$(1) = \frac{1}{q} \left( \sum_2^q A + \sum_2^q B \cdot x + \sum_2^q C \cdot y \right).$$

$$\text{Ferner ist } \left. \begin{array}{l} - (2) = Z_2 = - (1) + A_2 + B_2 \cdot x + C_2 \cdot y \\ - (3) = Z_3 = - (1) + A_3 + B_3 \cdot x + C_3 \cdot y \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ - (q) = Z_q = - (1) + A_q + B_q \cdot x + C_q \cdot y \end{array} \right\}, \quad \text{und}$$

$$43) \begin{cases} \Sigma(BZ) = 0 = [\Sigma(AB) + \Sigma(BB) \cdot x + \Sigma(BC) \cdot y] - \frac{\Sigma B \cdot \{\Sigma A + \Sigma B \cdot x + \Sigma C \cdot y\}}{q} \\ \Sigma(CZ) = 0 = [\Sigma(AC) + \Sigma(BC) \cdot x + \Sigma(CC) \cdot y] - \frac{\Sigma C \cdot \{\Sigma A + \Sigma B \cdot x + \Sigma C \cdot y\}}{q} \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben die Form von Gleichung 29), wenn man sich die Glieder mit  $x$ , sowie die mit  $y$  zusammengezogen denkt. Durch Analogie erhält man daher die Quadrate der Präcisionen in der Bestimmung von  $x$  und  $y$  zu

$$44^a) \begin{cases} H_x^2 = 1 : N \cdot \left\{ \Sigma(CC) - \frac{1}{q} (\Sigma C)^2 \right\} \\ H_y^2 = 1 : N \cdot \left\{ \Sigma(BB) - \frac{1}{q} (\Sigma B)^2 \right\} \\ (1 : N) = \left\{ \left( \Sigma(BB) - \frac{1}{q} (\Sigma B)^2 \right) \left( \Sigma(CC) - \frac{1}{q} (\Sigma C)^2 \right) - \left( \Sigma(BC) - \frac{\Sigma B \cdot \Sigma C}{q} \right)^2 \right\}, \\ M^2 = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \left\{ \left( \Sigma(BB) + \Sigma(CC) \right) - \frac{1}{q} \left( (\Sigma B)^2 + (\Sigma C)^2 \right) \right\}. \end{cases}$$

Die Präcision in der Beobachtung der Richtungen, für alle von gleicher Grösse, ist dabei zu 1 vorausgesetzt. Ist ihr Werth  $h$ , so hat man  $H_x^2$ ,  $H_y^2$  mit  $h^2$  zu multipliciren,  $M^2$  mit  $h^2$  zu dividiren.

Wären die  $(q-1)$  Winkel  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ , ...  $(1, q)$  einzeln gemessen worden, jede Richtung mit der Präcision 1, also die Winkel mit der Präcision  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ , so würden  $H^2$  und  $M^2$  Werthe annehmen, die aus den soeben aufgestellten hervorgehen, wenn die  $H^2$  mit 2 dividirt,  $M^2$  mit 2 multiplicirt und  $\Sigma B = 0$ , sowie  $\Sigma C = 0$  gesetzt werden. Man erhält dafür:

$$44^b) \begin{cases} H_x'^2 = 1 : 2N' \cdot \Sigma(CC); & H_y'^2 = 1 : 2N' \cdot \Sigma(BB) \\ (1 : N') = \Sigma(BB) \cdot \Sigma(CC) - (\Sigma BC)^2 \\ M'^2 = N' \cdot (\Sigma(BB) + \Sigma(CC)). \end{cases}$$

In  $\Sigma B$  und  $\Sigma C$  kommen theils positive, theils negative Glieder vor, um so mehr, je gleichmässiger die Hauptpunkte vertheilt sind. Indess auch ohne diese Voraussetzung werden

$$\frac{(\Sigma B)^2}{q}, \quad \frac{(\Sigma C)^2}{q} \quad \text{gegen } \Sigma(BB) \text{ und } \Sigma(CC)$$

immer klein sein und daher kann man ihre Quadrate näherungsweise vernachlässigen. Geschieht diess, so wird mit Hilfe einer leichten Zwischenrechnung:

$$M^2 = \frac{1}{2} M'^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{M'^2}{q} \left( \left\{ \frac{\Sigma B \cdot \Sigma(CC) - \Sigma C \cdot \Sigma(BC)}{\Sigma(BB) + \Sigma(CC)} \right\}^2 + \left\{ \frac{\Sigma B \cdot \Sigma(BC) - \Sigma C \cdot \Sigma(BB)}{\Sigma(BB) + \Sigma(CC)} \right\}^2 \right) \right\}$$

d. h. es hat  $M^2$  einen nur wenig grösseren Werth als  $\frac{1}{2} M'^2$ .

Dabei beträgt die Anzahl der Einstellungen für  $M'$   $2(q-1)$ , für  $M$  nur  $q$ , woraus man erkennt, dass auch auf dem Nebenpunkte Richtungsbeobachtungen viel vortheilhafter sind, als Winkelbeobachtungen. Es wird sich allerdings zeigen, dass es nicht rathsam ist, die Winkel alle von einem Hauptpunkte aus zu nehmen, man verbindet besser diametral liegende Hauptpunkte. Jedenfalls ändert im Allgemeinen dieser Umstand das Resultat obiger Vergleichung nicht dahin ab, dass Richtungsbeobachtungen sich ungünstiger als Winkelbeobachtungen herausstellen würden — immer unter der Voraussetzung, dass die Hauptpunkte im Umkreise um den Neben-

punkt nicht sehr ungleich vertheilt sind. Der Beweis hierzu kann umsomehr wegbleiben, weil sich andererseits auch zeigen wird, dass „reine Richtungsbeobachtungen“, d. h. solche, die alle sichtbaren Punkte in Einen Satz vereinigen, nicht rätlich sind, sondern wenigstens mit Winkelbeobachtungen combinirt werden müssen, sollen die Nebenpunkte nach allen Richtungen gleiche Präcision  $H$  erhalten. Es gilt Dieses ebenso für die Beobachtungen auf den Hauptpunkten, wie auf den Nebenpunkten.

Man kann daher sagen: „Werden gleichviele Einstellungen gemacht, um Nebenpunkte nach der ersten oder zweiten Methode zu bestimmen, so ist bei gleicher Beobachtungsweise die Ausgleichungsarbeit für beide dieselbe. Für beide Methoden sind ferner Richtungsbeobachtungen etwa gleichviel günstiger, als Winkelbeobachtungen.“ (Vergleiche Abschnitt 39.).

## 29.

Die wirklich erreichte Genauigkeit kam bei diesen Untersuchungen noch nicht in Frage. Die theoretische Vergleichung beider Methoden soll nun zeigen, dass im Falle von Winkelbeobachtungen bei gleicher Mühe die zweite Methode in der Regel bessere Resultate als die erste Methode giebt, und dass, wie schon erwähnt, reine Richtungsbeobachtungen im Allgemeinen nicht vorkommen werden, da einzelne Richtungen ein grösseres Gewicht als die andern erhalten müssen, soll die Triangulation ein günstiges Resultat geben.

Es würde dann zu folgern sein, dass im Allgemeinen die zweite Methode die günstigere ist.

## 30.

Im Anschluss an Fig. 7 seien  $A$  und  $B$  zwei Hauptpunkte,  $P$  ein Nebenpunkt und dabei  $\sphericalangle A = \alpha$ ,  $\sphericalangle B = \beta$ ,  $\sphericalangle P = \varphi$ ,  $AB = 2c$ ,  $AP = a$ ,  $BP = b$ . Die Visur von  $A$  nach  $P$  giebt dann für die rechtwinkligen Coordinaten  $x$  und  $y$  von  $P$  die Gleichung

$$0 = -x \cdot \cos \alpha + (c + y) \sin \alpha,$$

wenn der Coordinatenanfang  $Q$  in die Mitte von  $AB$  gelegt wird und  $QB$  die positive Achse der  $x$  wieder in dem Sinne ist, dass die Coordinate  $x$  von  $P$  senkrecht zur  $x$ -Achse zu nehmen ist.

Sind  $(x)$  und  $(y)$  scharfe Näherungswerthe,  $(x) + \Delta x = x$ ,  $(y) + \Delta y = y$ , so wird für die Verbesserungen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  der Näherungswerthe:

$$45) 0 = -\lambda - \Delta x \cdot \cos \alpha + \Delta y \cdot \sin \alpha; \quad \lambda = (x) \cos \alpha - (c + (y)) \sin \alpha.$$

Der absolute Werth  $\lambda$  ist der Abstand des Punktes  $((x), (y))$  von der Visur  $AP$ .

Die Gleichung 45) hat die Form der Gleichung 27);  $\lambda$  erscheint daher als Beobachtungsgrösse mit dem mittlern Fehler  $\pm a \cdot \omega$ , wenn  $\omega$  den

mittlern Fehler in  $\alpha$  bezeichnet. Für die numerische Rechnung nimmt man das zu  $(x)$  und  $(y)$  gehörige  $(\alpha)$  aus der Gleichung  $\tan(\alpha) = \frac{(x)}{c + (y)}$ , setzt den Beobachtungswert  $\alpha = (\alpha) + \Delta\alpha$  und erhält einfacher

$$46) 0 = \Delta\alpha - \Delta x \cdot \frac{\cos(\alpha)}{(a)} + \Delta y \cdot \frac{\sin(\alpha)}{(a)}; \quad (a) = (x) \sin(\alpha) + (c + (y)) \cos(\alpha).$$

Setzt man hierin links anstatt Null  $d\alpha$  als wahrscheinliche Verbesserung des Beobachtungswertes, so ist es üblich, die entstehende Fehlergleichung noch mit der Wurzel des Gewichtes  $\left(\text{proportional } \frac{1}{\omega}\right)$  zu multipliciren. Geschieht ein Gleiches für die zu Gleichung 45) gehörige Fehlergleichung, so nimmt diese selbstverständlich dieselbe Form an wie jene.

Wird  $P$  von  $B$  aus visirt, so erhält bei gleicher Anzahl Einstellungen wie vorher das entsprechende  $\lambda$  die mittlere Abweichung  $\pm b \cdot \omega$ .

## 31.

Die Winkelmessung in  $P$ ,  $\varphi = \sphericalangle APB$ , giebt für diesen Punkt einen kreisförmigen geometrischen Ort (Fig. 7.) mit dem Mittelpunkte  $M$  und der Gleichung

$$y^2 + (x - c \cdot \cot \varphi)^2 - \left(\frac{c}{\sin \varphi}\right)^2 = 0, \quad \text{oder: } y^2 + x^2 - 2cx \cdot \cot \varphi - c^2 = 0.$$

Zu den Näherungswerten  $(x)$ ,  $(y)$  gehört ein genäherter Werth  $(\varphi)$  nach der Gleichung

$$\cot(\varphi) = \frac{(x)^2 + (y)^2 - c^2}{2c(x)}$$

und man erhält damit analog den Gleichungen 45) und 46) für die Verbesserungen  $\Delta y$ ,  $\Delta x$  und  $\Delta \varphi$

$$47) 0 = [(y)^2 + (x)^2 - 2c \cdot (x) \cot \varphi - c^2] + 2(y) \cdot \Delta y + 2[(x) - c \cdot \cot(\varphi)] \cdot \Delta x,$$

$$48) 0 = \Delta \varphi + \Delta x \cdot \frac{(x) - c \cdot \cot(\varphi)}{c(x)} \sin^2(\varphi) + \Delta y \cdot \frac{(y) \sin^2(\varphi)}{c(x)}.$$

Bedeutet  $(P)$  die genäherte Lage von  $P$ , so ist die erste Parenthese in Gleichung 47) soviel wie  $(M(P))^2 - \text{Rad.}^2$ ,  $\text{Radius} = \frac{c}{\sin \varphi}$ .

Ist nun  $\lambda = -M(P) + \text{Rad.}$ ,

also der Abstand des Punktes  $(P)$  von dem Kreise, der dem Winkel  $\varphi$  entspricht, so geht Gleichung 47) über in

$$49) 0 = -\lambda + \Delta x \cdot \frac{(x) - c \cdot \cot(\varphi)}{c} \sin(\varphi) + \Delta y \cdot \frac{(y)}{c} \sin(\varphi),$$

wie immer unter Vernachlässigung der Glieder  $\Delta^2$ . Für diese Gleichung kann man noch setzen

$$0 = -\lambda - \Delta x \cdot \cos \gamma + \Delta y \cdot \sin \gamma,$$

um auf die Form 27 zu kommen.  $\gamma$  ist hierin der Neigungswinkel der-

jenigen Kreistangente  $TT$  gegen  $AB$  (Fig. 7.), welcher der Punkt ( $P$ ) am nächsten liegt.

Zu der Beobachtungsgrösse  $\lambda$  gehört der mittlere Fehler

$$\pm \frac{(x)}{\sin(\varphi)} \cdot \omega = \pm \left(\frac{ab}{2c}\right) \cdot \omega,$$

wie die Differentiation des ersten Klammersausdruckes in Gleichung 47) lehrt.

Die Gleichungen 45) bis 49) lassen sich leicht für jedes beliebige Coordinatensystem transformiren und ebenso die Formeln für  $(\alpha)$ ,  $(\varphi)$  u. s. f. zu leichter Berechnung der Coefficienten von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  umändern. Dieses bedarf hier keiner Ausführung weiter und es kann daher zur Vergleichung der Methoden 1. und 2. zurückgekehrt werden.

## 32.

Die mittlern parallelen Verschiebungen der den Visuren  $AP$  von  $A$  und  $B$  aus, sowie der Winkelmessung in  $P$  entsprechenden substituirten Geraden haben sich ergeben zu

$$50) \quad m_1 = \pm a\omega, \quad m_2 = \pm b\omega, \quad m_3 = \pm \frac{ab}{2c} \cdot \omega.$$

Solange daher  $P$  innerhalb des von den Punkten  $A$  und  $B$  aus als Mittelpunkten beschriebenen krümmeligen Rhombus  $AC_1C_2B$  (Fig. 7.) liegt, ist  $m_3^2 < m_1^2$  und auch  $m_3^2 < m_2^2$ . Rückt  $P$  der Seite  $AB$  näher, sodass  $AP$ ,  $BP$  und  $TT$  ziemlich gleiche Richtung annehmen, so wird für beide Visuren  $AP$  und  $BP$  zusammengenommen das mittlere Fehlerquadrat

$$m_3'^2 = 1 : \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} \cdot \omega^2,$$

dagegen wird

$$m_3^2 = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} \cdot \omega^2, \quad \text{also } m_3'^2 = m_3^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{a^2 + b^2}.$$

Daher ist in diesem Falle sogar  $m_3'^2$  immer grösser als  $m_3^2$  und zwar ist der Unterschied beider am grössten für  $a = b$ , wo  $m_3'^2 = 2m_3^2$  wird.

$a = 1$ ,  $b = 3$  giebt  $m_3'^2 = 1,6 \cdot m_3^2$  und  $a = 0$  giebt  $m_3'^2 = m_3^2$ .

Bedenkt man noch, dass  $m_3'$  aus 2 Winkelmessungen,  $m_3$  aus nur einer solchen hervorgegangen ist, so kann man sagen:

„Weicht der Winkel  $\varphi$  mit dem Scheitel  $P$  nicht sehr von zwei Rechten ab, so ist die Winkelmessung in  $P$  zwei- bis viermal so günstig, als eine Winkelmessung in  $A$  oder  $B$ .“  
Und hieraus folgt weiter:

„Liegt ein Nebenpunkt in der Nähe des Diagonalendurchschnitts eines von Hauptpunkten  $A, B, \dots$  gebildeten Vierecks, so bestimmt er sich 'bei gleicher Mühe' etwa drei- bis viermal so genau durch Winkelmessung in  $P$  als durch

solche von den Hauptpunkten ( $A, B, \dots$ ) aus, wenn man nur gegenüberliegende Hauptpunkte zusammen verbindet.“

In den meisten praktisch vorkommenden Fällen ist es wohl möglich, mehr als drei Hauptpunkte im Umkreise um  $P$  herum zu sehen; liegt aber  $P$  überhaupt im Innern eines Viereckes (Polygones), so lassen sich immer 4 ( $n$  Winkel) an  $P$  so auswählen und messen, dass ihre substituirtten Geraden  $TT$  den Punkt  $P$  ebenso gut bestimmen, als  $n$  Visuren von den Ecken aus. Beobachtet man aber nur die vortheilhaftesten Winkel (also namentlich solche zwischen gegenüberliegenden Hauptpunkten), so ist im Allgemeinen — für gleiche Mühe — sogar die Genauigkeit eine zwei- bis vierfache von derjenigen, welche durch Eckvisuren erreicht werden kann.

Bewegt sich  $P$  in eine Polygonseite, d. h. kommen die Hauptpunkte scheinbar im Halbkreise um  $P$  herum zu liegen, so nimmt die Güte der Bestimmung nach der zweiten Methode ab; doch erst, wenn  $P$  aus dem Polygone heraustritt, kann sie unter diejenige der ersten Methode herabsinken und die Methode selbst unbrauchbar werden. Dieser Ausnahmefall tritt gewiss nicht ein, wenn — wie in Fig. 8. —  $P$  von den Ecken  $H_1$  und  $H_n$ , deren Distanz  $H_1 H_n$  von  $P$  aus unter dem grössten Gesichtswinkel erscheint, mindestens ebenso weit entfernt ist, als von den andern Ecken  $H_2, \dots, H_{n-1}$  und gleichzeitig deren Abstände von  $P$  sehr verschieden sind.

Befindet sich  $P$  in sehr grosser Entfernung vom Polygone, so sind zwar alle Geraden  $TT$ , durch Winkelmessung in  $P$  bestimmt, viel ungenauer, als die Anschnitte von den Ecken aus, aber während diese nahezu dieselbe Richtung haben, schneiden sich die  $TT$  im Allgemeinen unter günstigen Winkeln. Daher kommt hier die zweite Methode in Vortheil.

Vorstehende Sätze, nicht gut anders als durch Induction zu beweisen, hier völlig zu begründen, kann nicht meine Aufgabe sein. Ich werde nur einige Beispiele, wo drei Hauptpunkte disponibel sind, specieller durchnehmen. Es ist dieses gerade derjenige Fall, wo die zweite Methode am unzuverlässigsten wird; doch tritt er in der Praxis nur äusserst selten ein. (So hat Herr Professor Nagel unter einem Complex von etwa 40 Nebenpunkten bei Zwickau — vergl. die Einleitung — nur einen einzigen derselben auf nur drei Hauptpunkte stützen können; sonst waren immer mindestens vier Hauptpunkte zu sehen.)

## 33.

Da einer guten Triangulation der Nebenpunkte immer eine Aufnahme derselben im Kleinen vorauszugehen hat, und man somit die Lage der Nebenpunkte gegen die sichtbaren Hauptpunkte kennt, kann der Fall, schliesslich für irgend einen der ersteren eine ungenügende Bestimmung

durchgeführt zu haben, nicht eintreten. Schon vor Beginn der Messungen wird man zu überlegen haben, welche Winkel für jeden Nebenpunkt zu messen sind, damit nach der Ausgleichung die Präcisionen  $H$  für alle beliebigen Richtungen durch einen Punkt möglichst gleich werden, damit aber auch der mittlere Fehler  $M$ , welcher die gegen die Hauptpunkte relative Gesamtgenauigkeit bezeichnet, für alle Nebenpunkte die gleiche Grösse erhält.

Diese Ueberlegung macht nicht sehr viele Mühe, da die strenge Erfüllung der soeben gestellten Forderungen nicht nöthig ist. In Abschnitt 23. ist auch gezeigt worden, welche Regeln man bei der Wahl der Schnitte selbst, sowie ihrer Präcisionen  $h$  zu befolgen hat, um die Forderungen zu erfüllen. Durch Uebung gelangt man bald dazu, in jedem Falle sofort aus der Anschauung der Figur die besten Schnitte zu erkennen und alsdann führt eine leichte Rechnung, unterstützt durch Constructionen, schnell zu den günstigsten Präcisionen derselben.

Soll nun  $M^2$  für alle Nebenpunkte einen constanten Werth ( $M^2$ ) erhalten, und entspricht den so gefundenen Präcisionen  $h$  vorerst ein Werth  $M^2$ , so hat man alsdann diese  $h$  noch im Verhältniss  $(M):M$  zu verändern, indem die Relation besteht

$$M : (M) = (h) : h.$$

Mittelst der  $(h)$  berechnet sich die Anzahl der Winkelmessungen. Für einen Schnitt von einem Hauptpunkte aus, z. B. für  $AP$  (Fig. 7.) fand sich  $m_1^2 = a^2 \cdot \omega^2$ , wo  $\omega$  der mittlere Fehler der Winkelmessung — man nehme jetzt an: Einer Winkelmessung — ist.

Durch  $n_1$  malige Messung geht  $m_1^2$  über in

$$m_1^2 = a^2 \cdot \frac{\omega^2}{n_1}$$

und sofern  $(h_1)^2 = \frac{1}{2m_1^2}$  ist, wird

$$n_1 = 2(h_1)^2 \cdot a^2 \omega^2.$$

In gleicher Weise ist für die Winkelmessung in  $P$

$m_3^2 = \left(\frac{ab}{2c}\right)^2 \cdot \omega^2$  bei einmaliger Messung,  $m_3^2 = \left(\frac{ab}{2c}\right)^2 \cdot \frac{\omega^2}{n_3}$  bei  $n_3$ maliger Messung,

daher

$$n_3 = 2(h_3)^2 \cdot \left(\frac{ab}{2c}\right)^2 \cdot \omega^2.$$

Werden auch Richtungsbeobachtungen gemacht, so complicirt sich wenigstens für die zweite Methode die Schätzung der  $(h)$  etwas. Man verfährt bei derselben etwa so: Mit Hilfe der Formeln in Abschnitt 28. 2<sup>b</sup> \*) berechnet man zuerst  $H$  für drei verschiedene Richtungen unter Annahme reiner Richtungsbeobachtungen. Hierzu nimmt man noch solche Winkel-

\*) Man vergl. auch Abschn. 39. Anmerkung.

beobachtungen, dass dadurch alle  $H$  gleich werden, oder dieses doch möglichst erreicht wird. Das Verfahren hierbei ist genau wie oben, wo nur Winkelmessungen vorausgesetzt wurden, wenn man nämlich mit Hilfe der drei berechneten  $H$  die Lage der Ellipse um  $P$ , welche ihren wahrscheinlichen Fehlern entspricht, ermittelt. Nach Abschnitt 13. ist es alsdann erlaubt, für die Richtungsbeobachtungen zwei Gerade zu substituieren, die in die Ellipsenachsen fallen und deren wahrscheinliche parallele Verschiebungen der halben Länge dieser Achsen gleich sind.

## 34.

In Verfolgung der zu Ende von Abschnitt 23. gemachten Bemerkung mögen nun noch die Bedingungen für  $M^2 = \text{Min.}$  „bei gleicher Mühe der Winkelmessung“ aufgesucht werden. Ist  $p$  ein von  $h$  und  $n$  unabhängiger Coefficient, so existirt zwischen  $h$  und  $n$ , der Anzahl der Messungen, die Beziehung  $h_\alpha^2 = \frac{n_\alpha}{p_\alpha^2}$ . Der mittlere Fehler  $\omega$  der einzelnen Messung ist dabei als constant angenommen. Hiermit reducirt sich die gestellte Aufgabe auf diejenige,

$$M^2 = \frac{\Sigma(h^2)}{2\Sigma(h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2(\gamma_\alpha - \gamma_\beta))} = \text{Min. zu machen, bei } \Sigma n = \Sigma h^2 p^2 = \text{Const.}$$

Eine ähnliche Rechnung wie in Abschnitt 23. giebt  $q$  Bedingungen von der Form

$$K \cdot p_i^2 = \Sigma[h_\alpha^2 h_\beta^2 \sin^2(\gamma_\alpha - \gamma_\beta)] - \Sigma(h^2) \cdot \Sigma[h_\alpha^2 \sin^2(\gamma_i - \gamma_\alpha)],$$

wenn  $q$  die Anzahl der Geraden und  $K$  eine zu bestimmende Grösse ist.

Nennt man nun  $H_i$  die Präcision an der Stelle von  $h_i$  nach der Ausgleichung und hat  $N$  die frühere Bedeutung, so lässt sich auch sagen: „Es müssen für ein Min. im obigen Sinne die Werthe  $K \cdot N = \frac{1}{p_i^2} \left\{ 1 - \frac{\Sigma(h^2)}{H_i^2} \right\}$  für alle  $i$  gleich werden.“ Da nun die  $p_i$  im Allgemeinen nicht gleich sind, so werden es auch die  $H_i$  nicht, und es ist dieses Grund genug, von der Erreichung eines solchen Min. abzusehen.

## 35.

Wird in einem Dreieck  $ABC$ , Fig. 9., der Punkt  $P$  nach der ersten Methode bestimmt, so sind die Quadrate der Präcisionen bei  $P$  für die drei Eckvisuren:

$$\text{für } AP. h_1^2 = \frac{n_1}{2a_1^2 \omega^2}, \text{ für } BP. h_2^2 = \frac{n_2}{2a_2^2 \omega^2}, \text{ für } CP. h_3^2 = \frac{n_3}{2a_3^2 \omega^2},$$

wenn  $n_1, n_2, n_3$  die Anzahl der Messungen der Winkel in  $P$ ,  $a_1, a_2, a_3$  resp. gleich  $AP, BP$  und  $CP$  sind, endlich  $\omega$  den mittlern Fehler einer einzigen Winkelmessung darstellt.

Die Zwischenwinkel sind für

$$(1.2) = \varphi_3 = \sphericalangle APB; \quad (1.3) = \varphi_2 = \sphericalangle APC; \quad (2.3) = \varphi_1 = \sphericalangle BPC.$$

Daher ist

$$51) \begin{cases} M_1^2 = \frac{1}{4\omega^2} \cdot \left( \frac{n_1}{a_1^2} + \frac{n_2}{a_2^2} + \frac{n_3}{a_3^2} \right) N_1, \text{ wobei} \\ N_1 = 4\omega^4 : \left\{ \frac{n_1 n_2}{a_1^2 a_2^2} \sin^2 \varphi_3 + \frac{n_1 n_3}{a_1^2 a_3^2} \sin^2 \varphi_2 + \frac{n_2 n_3}{a_2^2 a_3^2} \sin^2 \varphi_1 \right\}. \end{cases}$$

Nach der Ausgleichung treten an die Stelle der  $h_1 h_2 h_3$  die Werthe

$$52) \begin{cases} H_1^2 = 2\omega^2 : N_1 \cdot \left( \frac{n_2}{a_2^2} \sin^2 \varphi_3 + \frac{n_3}{a_3^2} \sin^2 \varphi_2 \right) \\ H_2^2 = 2\omega^2 : N_1 \cdot \left( \frac{n_1}{a_1^2} \sin^2 \varphi_3 + \frac{n_3}{a_3^2} \sin^2 \varphi_1 \right) \\ H_3^2 = 2\omega^2 : N_1 \cdot \left( \frac{n_1}{a_1^2} \sin^2 \varphi_2 + \frac{n_2}{a_2^2} \sin^2 \varphi_1 \right). \end{cases}$$

Beiläufig sei bemerkt: Die  $H$  werden unter Annahme von  $n_1 = n_2 = n_3$  in demjenigen Punkte gleich, für welchen ist (Fig. 10.)

$$\frac{\sin^2 \varphi_3}{a_2^2} + \frac{\sin^2 \varphi_2}{a_3^2} = \frac{\sin^2 \varphi_3}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{a_3^2} = \frac{\sin^2 \varphi_2}{a_1^2} + \frac{\sin^2 \varphi_1}{a_2^2}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{1}{(PB'')^2} + \frac{1}{(PC'')^2} = \frac{1}{(PC'')^2} + \frac{1}{(PA'')^2} = \frac{1}{(PA'')^2} + \frac{1}{(PB'')^2},$$

wenn  $A'AA''$  parallel  $B''PC''$  und senkrecht  $AP$  ist, ebenso  $B'BB''$  parallel  $A'PC''$  und senkrecht  $BP$ , sowie  $C'CC''$  parallel  $B'PA''$  und senkrecht  $CP$  sind.

Die Messung der Winkel  $\varphi$  in  $P$  (2. Methode) giebt zur Bestimmung von  $P_3$  kreisförmige geometrische Oerter, für welche die Geraden I., II., III. (Fig. 9.) substituirt werden können. Die Präcisionen derselben sind resp.

$$h_1'^2 = \frac{2c_1^2}{a_2^2 a_3^2} \cdot \frac{n_1'}{\omega^2}; \quad h_2'^2 = \frac{2c_2^2}{a_1^2 a_3^2} \cdot \frac{n_2'}{\omega^2}; \quad h_3'^2 = \frac{2c_3^2}{a_1^2 a_2^2} \cdot \frac{n_3'}{\omega^2};$$

ferner hat man für ihre Zwischenwinkel zu setzen (ohne Rücksicht auf den Quadranten)

$$\left. \begin{aligned} (I. II) &= \alpha_2 + \beta_1 = \varphi_3 - C, \\ (I. III) &= \alpha_1 + \beta_3 = \varphi_2 - B, \\ (II. III) &= \alpha_3 + \beta_2 = \varphi_1 - A, \end{aligned} \right\} \text{ worin } A, B, C \text{ die drei Dreieckswinkel bezeichnen und die } \alpha \text{ und } \beta \text{ dieselbe Bedeutung wie in Fig. 9. haben.}$$

Damit ergibt sich weiter für die Präcisionen  $H$  und den mittlern Fehler  $M$  nach der Ausgleichung:

$$53) \begin{cases} M_2^2 = \frac{N_2}{(\omega \cdot a_1 a_2 a_3)^2} \cdot (a_1^2 c_1^2 n_1' + a_2^2 c_2^2 n_2' + a_3^2 c_3^2 n_3') \\ N_2 = \frac{(\omega \cdot a_1 a_2 a_3)^2 \cdot \omega^2}{4n_1' n_2' n_3'} : \left( \frac{c_1^2 c_2^2}{a_3^2 n_3'} \cdot \sin^2(\varphi_3 - C) + \frac{c_1^2 c_3^2}{a_2^2 n_2'} \cdot \sin^2(\varphi_2 - B) \right. \\ \left. + \frac{c_2^2 c_3^2}{a_1^2 n_1'} \cdot \sin^2(\varphi_1 - A) \right). \end{cases}$$

$$54) \begin{cases} H_1'^2 = 1:2L_2 \cdot (a_2^2 c_2^2 n_2' \sin^2(\varphi_3 - C) + a_3^2 c_3^2 n_3' \sin^2(\varphi_2 - B)) \\ H_2'^2 = 1:2L_2 \cdot (a_1^2 c_1^2 n_1' \sin^2(\varphi_3 - C) + a_3^2 c_3^2 n_3' \sin^2(\varphi_1 - A)) \\ H_3'^2 = 1:2L_2 \cdot (a_1^2 c_1^2 n_1' \sin^2(\varphi_2 - B) + a_2^2 c_2^2 n_2' \sin^2(\varphi_1 - A)), \text{ wobei} \\ L_2 = N_2 : (\omega \cdot a_1 a_2 a_3)^2 \text{ ist}^* \end{cases}$$

36.

Das gleichseitige Dreieck.

1) Im Mittelpunkt desselben ist

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \frac{4}{3} c^2; \quad \varphi_3 = \varphi_2 = \varphi_1 = 120^\circ.$$

Indem man nun alle  $n$  einander gleich nimmt, werden

$$M_1^2 = \frac{\Sigma n}{4\omega^2 a^2} \cdot N_1; \quad N_1 = \frac{16}{9} \cdot \frac{\omega^4 a^4}{n^2} = \frac{16\omega^4 a^4}{(\Sigma n)^2} \text{ also auch } M_1^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n},$$

wobei  $\Sigma n = 3n$  ist. Ferner werden für alle Richtungen die  $H$  gleich,  $H^2 = 1 : M_1^2$ .

\*) Diese Formeln gestatten indess noch eine weitere Zusammenziehung. Mit Hilfe der Figur sieht man nämlich ein, dass

$$\begin{aligned} \frac{4c_1 c_2}{a_3} \sin(\varphi_3 - C) &= \frac{4c_1 c_2}{a_3} \sin(\alpha_2 + \beta_1) = \frac{2c_1 \sin \alpha_2 \cdot 2c_2 \cos \beta_1 + 2c_1 \cos \alpha_2 \cdot 2c_2 \sin \beta_1}{a_3} \\ &= \sin \varphi_1 (a_1 - a_3 \cos \varphi_2) + \sin \varphi_2 (a_2 - a_3 \cos \varphi_1) \\ &= a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2 + a_3 \sin \varphi_3 = \Sigma (a \sin \varphi). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\left(\frac{c_1 c_2}{a_3}\right)^2 \sin^2(\varphi_3 - C) = \left(\frac{c_1 c_3}{a_2}\right)^2 \sin^2(\varphi_2 - B) = \left(\frac{c_2 c_3}{a_1}\right)^2 \sin^2(\varphi_1 - A) = \frac{1}{16} \Sigma^2 (a \sin \varphi)$$

und hiermit werden

$$53^*) N_2 = \frac{4\omega^2 \cdot (\omega \cdot a_1 a_2 a_3)^2}{\Sigma^2 (a \sin \varphi)} : (n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3'),$$

$$54^*) \begin{cases} H_1'^2 = 8c_1^2 : L_2 a_2^2 a_3^2 \cdot \Sigma^2 (a \sin \varphi) \cdot (n_2' + n_3') = \frac{2(n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3')}{(\omega \cdot a_1 a_2 a_3)^2} \cdot \frac{a_1^2 c_1^2}{n_2' + n_3'} \\ H_2'^2 = 8c_2^2 : L_2 a_1^2 a_3^2 \cdot \Sigma^2 (a \sin \varphi) \cdot (n_1' + n_3') = \div \cdot \frac{a_2^2 c_2^2}{n_1' + n_3'} \\ H_3'^2 = 8c_3^2 : L_2 a_1^2 a_2^2 \cdot \Sigma^2 (a \sin \varphi) \cdot (n_1' + n_2') = \div \cdot \frac{a_3^2 c_3^2}{n_1' + n_2'} \end{cases}$$

Die  $H'$  werden unter Annahme gleicher Beobachtungszahlen  $n$  in demjenigen Punkte alle gleich, wo  $a_1 c_1 = a_2 c_2 = a_3 c_3$  oder  $a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{c_1} : \frac{1}{c_2} : \frac{1}{c_3}$ , so dass sich nach den Proportionen

$$a_1 : a_2 = c_2 : c_1, \quad a_1 : a_3 = c_3 : c_1, \quad a_2 : a_3 = c_3 : c_2$$

die Lage des Punktes leicht ermitteln lässt. Halbirt man nämlich im Dreieck  $ABC$  jeden der 3 Winkel, so theilen die Halbierungslinien derselben die Seiten in demselben Verhältnisse, in welchem die Längen der resp. anliegenden Seiten stehen. Durch je einen Theilpunkt und die der betreffenden Seite gegenüberliegende Ecke lässt sich nun ein Kreis legen, dessen Mittelpunkt auf dieser Seite liegt. Der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Kreise ist sodann der gesuchte Punkt (in Fig. 14. 15. und 17. mit  $P_0$  bezeichnet).

Weiter hat man

$$M_2^2 = \frac{c^2 \cdot \Sigma n'}{\omega^2 a^4} \cdot N_2; \quad N_2 = \frac{\omega^4 a^8}{c^4 \cdot (\Sigma n')^2}, \quad \text{also } M_2^2 = \frac{16}{9} \cdot \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n'}, \quad \Sigma n' = 3n' = \Sigma n.$$

Ebenso wie alle  $H$  werden auch sämtliche  $H'$  gleich,  $H'^2 = 1 : M_2^2$ .

2) In der Mitte einer Seite, etwa  $BC$ , ist

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 3c^2, & a_2 &= a_3 = c, \\ \varphi_1 &= 180^0, & \varphi_2 &= \varphi_3 = 90^0 \\ \varphi_3 - C &= \varphi_2 - B = 30^0; & \varphi_1 - A &= 120^0. \end{aligned}$$

Auch sieht man, dass  $n_2 = n_3$ ,  $n_2' = n_3'$  zu nehmen sind. Damit wird:

$$M_1^2 = \frac{n_1 + 6n_2}{12\omega^2 c^2} \cdot N_1; \quad N_1 = \frac{6\omega^4 c^4}{n_1 n_2}; \quad H_1^2 = \frac{n_1}{6\omega^2 c^2}; \quad H_2^2 = H_3^2 = \frac{n_2}{\omega^2 c^2}$$

$$M_2^2 = \frac{3n_1' + 2n_2'}{3\omega^2 c^2} \cdot N_2; \quad N_2 = \frac{3\omega^4 c^4}{(2n_1' + n_2') n_2'}; \quad H_1'^2 = \frac{3\omega^2 c^2}{n_2' \cdot N_2};$$

$$H_2'^2 = H_3'^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{(n_1' + n_2') N_2}$$

Nimmt man noch  $n_1 = n_2 = n_3$ ;  $n_1' = n_2' = n_3'$ ,  $\Sigma n = \Sigma n'$ , so wird abgekürzt

$$M_1^2 = 10,5 \cdot \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n}; \quad M_2^2 = 5,0 \cdot \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n'}; \quad \text{die } H \text{ sind dabei wie auch die } H' \text{ sehr ungleich.}$$

Damit  $M_1^2$  so klein wie für den Mittelpunkt des Dreiecks werde, hat man etwa doppelt soviel zu messen, wie dort; für  $M_2^2$  würde man etwa dreimal soviel Messungen zu machen haben.

Nimmt man  $n_1 = 6n_2 = 6n_3$ , so werden alle  $H$  gleich, nämlich:

$$\Sigma n = 8n_2; \quad M_1^2 = \frac{1}{H^2} = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}, \quad \text{also } M_1^2 \text{ bei gleicher Mühe etwas kleiner wie vorher.}$$

Möglichste Gleichheit der  $H'$  erreicht man durch Annahme von  $n_1' = 0$ ; nämlich:

$$H_1'^2 = \frac{3\omega^2 c^2}{n_2' \cdot N_2}; \quad H_2'^2 = H_3'^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{n_2' \cdot N_2}, \quad N_2 = \frac{3\omega^4 c^4}{n_2' n_2'}; \quad \text{ferner wird}$$

$$\Sigma n' = 2n_2'; \quad \text{also } M_2^2 = \frac{4c^2 \omega^2}{\Sigma n'} \quad \text{d. i. nur halb so gross, wie } M_1^2.$$

„Die zweite Methode ist also für Punkte in der Mitte der Seiten günstiger als die erste,  $M_2^2 = \frac{M_1^2}{2}$ . Macht man die  $H$  resp.  $H'$  möglichst gleich, so erlangt man die gleiche Genauigkeit mit weniger Mühe, als wenn ohne Rücksicht darauf alle  $n$  einfach gleich genommen werden.“

3) Rückt  $P$  einer Ecke, etwa  $A$ , in einer Seite, etwa  $AB$ , immer näher, so ist es erlaubt, bei kleinen  $a_1$  näherungsweise zu setzen: (Fig. 11.)

$$a_2 = a_3 = 2c; \quad \varphi_1 = 60^0, \quad \varphi_2 = 120^0, \quad \varphi_3 = 180^0;$$

$$\varphi_3 - C = 120^0; \quad \varphi_2 - B = 60^0; \quad \varphi_1 - A \text{ wird sehr klein, } \sin^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{a_1^2}{c^2}.$$

Die Werthe  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2 - B$  sind zwar wenig anders als hier angegeben, aber da keiner der Sinus dieser Winkel der Null nahe ist, verschwindet der Einfluss der kleinen Aenderungen.

Es wird damit

$$M_1^2 = \frac{1}{4\omega^2} \cdot \left( \frac{n_1}{a_1^2} + \frac{n_2 + n_3}{4c^2} \right) N_1; \quad N_1 = \frac{256\omega^4 c^4 a_1^2}{3n_3 (4n_1 c^2 + n_2 a_1^2)},$$

$$H_1^2 \text{ oder } H_2^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3n_3 N_1}; \quad H_3^2 = \frac{32\omega^2 c^2 a_1^2}{3(4n_1 c^2 + n_2 a_1^2) N_1}.$$

Gleichheit aller  $H$  ist nicht möglich, da alle drei Visuren in einem spitzen Winkelraum liegen; sie wird möglichst erreicht mit  $n_2 = 0$  und

$$n_3 = n_1 \cdot \frac{4c^2}{a_1^2}, \text{ das giebt}$$

$$H_1^2 \text{ oder } H_2^2 = H_3^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3n_3 N_1}, \quad N_1 = \frac{256\omega^4 c^4}{3n_3 n_3}; \quad M_1^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3n_3} \text{ oder, da}$$

$$\Sigma n = n_1 + n_1 \cdot \frac{4c^2}{a_1^2} \text{ d. i. nahezu } \Sigma n = n_3, \text{ auch } M_1^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3\Sigma n}.$$

Bei Gleichheit aller  $n$   $n_1 = n_2 = n_3$  ist dagegen  $M_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2}{\Sigma n}$  mit Vernachlässigung der kleinen Glieder.

Es ist sonach rätlich, die  $n$  wie vorher zu nehmen; gegen die Lage von  $P$  im Dreiecksmittelpunkt hat man sodann immer noch doppelte Arbeit, um ein gleich grosses  $M$  zu erhalten.

Weiter findet sich (Fig. 11.)

$$M_2^2 = L_2 (a_1^2 c^2 n_1' + 4c^4 (n_2' + n_3')); \quad L_2 = \frac{4\omega^2}{3c^2} : (n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3')$$

$$H_1'^2 = 1 : 6L_2 c^4 (n_2' + n_3'); \quad H_2'^2 = 1 : \frac{3}{2} L_2 c^2 a_1^2 (n_1' + n_3')$$

$$\text{und } H_3'^2 = 1 : \frac{3}{2} L_2 c^2 a_1^2 (n_1' + n_2').$$

Gleichheit der  $H'$  ist nicht erreichbar \*); möglichst angestrebt wird sie durch Annahme von  $n_2' = n_3'$  und  $n_1' = n_2' \cdot \frac{8c^2 - a_1^2}{a_1^2}$ , womit  $\Sigma n$  nahezu  $= n_1'$  und

$$M_2^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\omega^2 a_1^2}{n_2'} = \frac{32\omega^2 c^2}{3\Sigma n}.$$

Dagegen wird bei  $n_1' = n_2' = n_3'$   $M_2^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{3\Sigma n}$  d. i. so wie vor-

her, nur sind die  $H'$  noch verschiedener als vorher, da nicht einmal  $H_1'$  und  $H_2'$  (oder  $H_3'$ ) gleich werden.

Auch für die jetzt behandelte Lage von  $P$  ist somit  $M_1^2 \geq M_2^2$ .

\*) Da die Rechnung nur näherungsweise richtig ist, kann es nicht befremden, dass trotz Gleichheit dreier  $H'$  doch nicht dieselbe aller beliebigen  $H'$  stattfindet:  $H_2'$  und  $H_3'$  sind Präcisionen für nahezu dieselbe Richtung.

4) Rückt  $P$  der Ecke  $A$  auf der Winkelhalbierungslinie näher, und wird daher  $a_1$  wieder sehr klein, so gilt folgende Näherungsrechnung: (Fig. 12.)

$$a_2 = a_3 = 2c; \varphi_1 = 60^0; \varphi_2 = \varphi_3 = 150^0$$

$$\varphi_3 - C = 90^0 = \varphi_2 - B; \varphi_1 - A \text{ sehr klein, } \sin^2 = \frac{a_1^2}{4c^2}$$

Für  $n_2 = n_3$  gehen über  $M_1^2, N_1$  u. s. w. in

$$M_1^2 = \frac{4n_1 c^2 + 2n_2 a_1^2}{16\omega^2 a_1^2 c^2} \cdot N_1; N_1 = \frac{256}{n_2} \cdot \frac{c^4 a_1^2 \omega^2}{8n_1 c^2 + 3n_2 a_1^2}$$

$$H_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2}{n_2 N_1}; H_2^2 = H_3^2 = \frac{32a_1^2 c^2 \omega^2}{(4c^2 n_1 + 3n_2 a_1^2) N_1}$$

Möglichst gleiche  $H$  giebt  $n_1 = 0$  und wird dabei, weil  $\Sigma n = n_2 + n_3$ ,

$$M_1^2 = \frac{64\omega^2 c^2}{3\Sigma n}$$

Dagegen ist für  $n_1 = n_2 = n_3 \quad \Sigma n = 3n$

und mit Vernachlässigung kleiner Glieder  $M_1^2 = \frac{24\omega^2 c^2}{\Sigma n}$ , also wenig anders.

Weiter findet sich bei  $n_2' = n_3'$

$$M_2^2 = L_2 (a_1^2 c^2 n_1' + 8c^4 n_2'); L_2 = \omega^2 : c^2 (2n_1' + n_2') n_2'$$

$$H_1'^2 = 1 : 16L_2 c^4 n_2'; H_2'^2 = H_3'^2 = 1 : 2L_2 a_1^2 c^2 (n_1' + n_2')$$

Gleichheit aller  $H'$  verlangt  $n_1' = n_2' \cdot \frac{8c^2 - a_1^2}{a_1^2}$ , womit nahe  $\Sigma n = n_1'$

$$\text{und } M_2^2 = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}$$

Dagegen ist bei  $n_1 = n_2 = n_3 \quad M_2^2 = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}$ , d. i. nicht ungün-

stiger als vorher; nur sind hier die  $H$  sehr ungleich.

Stellt man zusammen, was in 1) bis 4) gefunden wurde, so hat man:

„Bei gleicher Mühe ( $\Sigma n = \text{Const.}$ ) werden die Coefficienten von  $\frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n}$ , entsprechend den  $M_1^2$  und  $M_2^2$ :

	$M_1^2 \quad M_2^2$ bei Gleichheit aller $n$			$M_1^2 \quad M_2^2$ bei ungleichen $n$			
1) Dreiecksmitte	5,3	1,8	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Alle } H \text{ gleich.} \\ \text{Alle } H' \text{ gleich.} \end{array} \right.$	5,3	1,8	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Alle } H \text{ und alle } H' \\ \text{gleich.} \end{array} \right.$	
2) Seitenmitte	10,5	5,0		$\left. \begin{array}{l} \text{Ungleiche } H; \\ \text{Ungleiche } H'. \end{array} \right\}$	8.		4.
3) In der Seite nahe der Ecke	16.	10,7	10,7		10,7	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Möglichst gleiche} \\ \text{ } H; \text{ ebenso } H'. \end{array} \right.$	
4) Nahe der Ecke in der Winkelhalbierungslinie.	24.	8.	21,3		8.		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mögl. gleiche } H; \\ \text{ } \text{gleiche } H'. \end{array} \right.$

Diese Tabelle zeigt 1) den besondern Vortheil, den die zweite Methode innerhalb des Dreiecks gewährt, 2) wie ausserordentlich verschiedene  $M$  man durch gleiche Mühe bei verschiedenen Punktlagen erhält.

5) Liegt  $P$  ausserhalb des Dreiecks im rückwärtsverlängerten Winkelraum (etwa für  $\sphericalangle BAC$ ), so gelten bei grösserer Nähe an  $A$  die Verhältnisse wie unter 3) und 4).

Geht man in grössere Entfernung von  $A$ , so werden  $M_1$  und  $M_2$  nach und nach immer mehr einander gleich; während sich nun bei Anwendung der zweiten Methode alle  $H'$  gleich machen lassen, ist dieses für die  $H$  nach der ersten Methode ganz unmöglich.

Wird die Entfernung  $AP = e$  sehr gross, so entstehen Schnittfiguren, wie für  $P_2$  in Fig. 11. und 12.

Eine leichte Rechnung giebt näherungsweise unter Annahme eines sehr grossen  $e$

zu Fig. 11. 
$$\begin{cases} M_1^2 = \frac{4\omega^2 \cdot e^4}{3c^2 \cdot \Sigma n}, & \text{wenn } \Sigma n = n_1 + n_2 + n_3, n_1 = n_2 \text{ und } n_3 = 2n_1, \\ M_2^2 = \frac{\omega^2 \cdot e^4}{c^2 \cdot \Sigma n'}, & \text{wenn } \Sigma n = n_1 + n_2 + n_3, n_1' = n_2' = n_3' \text{ ange-} \\ & \text{nommen werden.} \end{cases}$$

Ferner ist

zu Fig. 12. 
$$\begin{cases} M_1^2 = \frac{\omega^2 \cdot e^4}{c^2 \cdot \Sigma n}, & \Sigma n = n_2 + n_3, n_1 = 0, n_2 = n_3; \\ M_2^2 = \frac{\omega^2 \cdot e^4}{c^2 \cdot \Sigma n'}, & \Sigma n = n_1 + n_2 + n_3, n_1' = n_2' = n_3' \text{ gesetzt.} \end{cases}$$

Während die Gleichheit der  $M$  für beide Methoden für grosse Entfernungen des Punktes  $P$  vom Dreieck hiermit bewiesen ist, zeigt die Figur unmittelbar, dass die erste Methode sehr ungleiche, die zweite Methode aber gleiche  $H$  ergiebt.

6) Liegt  $P$  im offenen Winkelraum  $BAC$ , Fig. 13., so ist die zweite Methode unbrauchbar und nur bei grösserer Entfernung des Punktes vom Dreiecke kann sie der ersten Methode gleichgestellt werden. Für sehr grosse Entfernungen erhält man Resultate, wie soeben unter 5) gefunden wurden. Am ungünstigsten sind die Lagen  $P_2$  in der Winkelhalbierungslinie. Je seitlicher bei gleichem Abstände von  $CB$   $P_1$  rückt, um so besser bestimmt es sich nach der zweiten Methode.

Für  $P_2$ , wo Dreieck  $ABC$  congruent Dreieck  $P_2BC$  ist, hat man

$$a_2^2 = a_3^2 = 4c^2; a_1^2 = 12c^2, \varphi_2 = \varphi_3 = 30^0, \varphi_1 = 300^0; \varphi_3 - C = \varphi_3 - B = 30^0 \\ \varphi_1 - A = 240^0.$$

$$M_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (n_1 + 6n_2)}{2n_1 n_2 + 9n_2 n_2} \text{ für } n_2 = n_3; \Sigma n = n_1 + 2n_2;$$

$$M_2^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (3n_1' + 2n_2')}{2n_1' n_2' + n_2' n_2'} \text{ bei } n_2' = n_3'; \Sigma n = n_1' + 2n_2'.$$

Möglichste Gleichheit der Präcisionen  $H$  resp.  $H'$  verlangt  $n_1 = 0$ ,  $n_1' = 0$ . In jedem Falle aber ist bei gleicher Mühe  $M_2^2$  etwa  $3 \cdot M_1^2$ .

Damit ist erwiesen, dass Lagen  $P$  ausserhalb des Dreiecks sich im Allgemeinen nach der ersten Methode besser als nach der zweiten Methode bestimmen. In der Praxis kommen indess solche Lagen kaum vor, da von einem Punkt ausserhalb des Dreiecks  $ABC$  andere nahe Hauptpunkte  $D, E, F$  etc. sichtbar werden.

## 37.

Was im Vorhergehenden für das gleichseitige Dreieck gefunden wurde, gilt auch für das ungleichseitige, so lange dieses nicht sehr spitze oder stumpfe Winkel enthält. Der günstige Raum für die zweite Methode verschiebt sich dann, wie es die schraffirten Flächen in Fig. 14. und 15. ungefähr andeuten. Sehr stumpfe Dreiecke sind am ungünstigsten; daher möge der Fall dreier Punkte in einer Geraden (Fig. 16. und 17.) bei Gleichheit der Längen  $BA$  und  $AC = 2c$  besondere Beachtung finden. Im Anschluss an Fig. 16. hat man:

1. Lage von  $P$  in  $D$ .  $a_2^2 = a_3^2 = 8c^2$ ;  $a_1^2 = 4c^2$ ;  $n_2 = n_3$   
 $c_1^2 = 4c^2$ ;  $c_2 = c_3 = c$ ;  $n_2' = n_3'$   
 $\varphi_3 = \varphi_3 - C = \varphi_2 = \varphi_2 - B = 45^\circ$ ;  $\varphi_1 = \varphi_1 - A = 90^\circ$ .

$$M_1^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (n_1 + n_2)}{2n_1 n_2 + n_2 n_2} \quad \text{und} \quad M_2^2 = \frac{16\omega^2 c^2 (n_1' + n_2')}{2n_1' n_2' + n_2' n_2'}$$

Beide Werthe werden gleich für  $n_1 = n_1'$ ,  $n_2 = n_2'$ ,  $n_3 = n_3'$ .

Gleichheit der  $H$  resp.  $H'$  verlangt  $n_1 = 0 = n_1'$ ,  $n_2 = n_3$ ;  $n_2' = n_3'$ ; damit wird

$$\underline{M_1^2 = M_2^2 = \frac{1}{H^2} = \frac{1}{H'^2} = 32 \cdot \frac{\omega^2 c^2}{\Sigma n}, \quad \Sigma n = 2n = 2n'}$$

Bei Gleichheit aller  $n = n'$  ist der Betrag für  $M_1^2$  und  $M_2^2$  derselbe.

2. Lage  $P$  in  $D_1$ , wo  $D_1$  sehr nahe an  $A$  in der Linie  $DA$  liegt. Man erhält näherungsweise:

$$a_1 \text{ sehr klein, } a_2^2 = a_3^2 = 4c^2; \quad n_2 = n_3; \quad n_2' = n_3'$$

$$\varphi_3 = \varphi_3 - C = \varphi_2 = \varphi_2 - B = 90^\circ; \quad \sin^2 \varphi_1 = \sin^2 (\varphi_1 - A) = \frac{a_1^2}{c^2}$$

$$M_1^2 = \frac{8\omega^2 c^4 (2c^2 n_1 + n_2 a_1^2)}{8n_1 n_2 c^4 + n_2 n_2 \cdot a_1^4}; \quad M_2^2 = \frac{\omega^2 (2c^2 n_2' + a_1^2 n_1')}{2n_2' n_1' + n_2' n_2'}$$

$n_1 = n_2 = n_3$ ;  $n_1' = n_2' = n_3'$  geben (mit Vernachlässigung kleiner Glieder)

$$\underline{M_1^2 = \frac{6\omega^2 c^2}{\Sigma n}; \quad M_2^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{\Sigma n'}}$$

Die Präcisionen sind aber dabei sehr ungleich nach verschiedenen Richtungen. Die  $H$  und resp. die  $H'$  werden gleich, wie auch der Anblick der Figur lehrt, für

$$2c^2 n_1 = n_2 a_1^2, \quad 2c^2 n_2' = n_1' a_1^2,$$

also nahezu

$$\Sigma n = 2n_2 \quad \Sigma n' = n_1', \quad \text{und das giebt}$$

$$M_1^2 = \frac{8\omega^2 c^2}{\Sigma n}; \quad M_2^2 = \frac{2\omega^2 c^2}{\Sigma n'}.$$

3. Lage  $P$  in  $D_2$  nahe an  $B$ , wobei jedoch  $D_2 B$  senkrecht  $CB$  sein mag. (Fig. 16.)

$$a_1^2 = 4c^2, \quad a_3^2 = 16c^2; \quad a_2 \text{ sehr klein}$$

$$\varphi_3 = \varphi_3 - C = \varphi_1 = \varphi_1 - A = 90^0; \quad \sin^2 \varphi_2 = \sin^2 (\varphi_2 - A) = \frac{a_2^2}{16c^2}.$$

$$\left. \begin{aligned} M_1^2 &= \frac{64\omega^2 c^4 \cdot (16c^2 n_2 + 4a_2^2 n_1 + a_2^2 n_3)}{256n_1 n_2 c^4 + n_1 n_3 a_2^4 + 64n_2 n_3 c^4} \\ M_2^2 &= \frac{\omega^2 c^2 \cdot (16c^2 n_1' + a_2^2 n_2' + 16c^2 n_3')}{n_1' n_2' + n_1' n_3' + n_2' n_3'} \end{aligned} \right\} \text{hierbei sind die } H \text{ resp. } H'$$

ungleich, wenn man alle  $n$  gleich gross nimmt.

Man erhält im letztern Falle  $M_1^2 = \frac{48\omega^2 c^2}{5\Sigma n}, \quad M_2^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{\Sigma n}; \quad \Sigma n = 3n = 3n'.$

Giebt man den Visuren von  $A$  und  $C$  aus gleichen Einfluss, setzt  $n_3 = 4n_1$ , so wird  $M_1^2 = \frac{128\omega^2 c^4 (2c^2 n_2 + n_1 a_2^2)}{128n_1 n_2 c^4 + n_1^2 a_2^4}.$

Gleichheit der  $H$  verlangt  $2c^2 n_2 = n_1 a_2^2$  und damit geht  $M_1^2$  über in  $\frac{20\omega^2 c^2}{\Sigma n}$ , wenn man setzt

$$\Sigma n = n_1 + \frac{n_1 a_2^2}{2c^2} + 4n_1 = 5n_1 \text{ nahezu.}$$

Daher ist es nicht rationell, den beiden erwähnten Visuren gleichen Einfluss zu geben. Besser ist es,  $n_3 = 0$ , sowie wegen Gleichheit der  $H$   $4c^2 n_2 = n_1 a_2^2$  zu nehmen:

$$M_1^2 = \frac{8c^2 \omega^2}{n_1} = \frac{8c^2 \omega^2}{\Sigma n}, \quad \text{da } \Sigma n = n_1 + n_1 \cdot \frac{a_2^2}{4c^2 n_2} \text{ also nahezu gleich } n_1 \text{ ist.}$$

Nimmt man ferner  $n_1' = n_3'$ , wodurch I. und III. gleichen Einfluss erlangen, so wird

$$M_2^2 = \frac{\omega^2 c^2 \cdot (32c^2 n_1' + a_2^2 n_2')}{2n_2' n_1' + n_1' n_1'}.$$

Gleichheit der  $H'$  tritt ein bei  $32c^2 n_1' = a_2^2 n_2'$ ; dafür geht  $\Sigma n$  über in nahezu  $n_2'$ , und also  $M_2^2$  in  $M_2^2 = \frac{32\omega^2 c^2}{\Sigma n'}.$

Mit Hilfe der jetzt gewonnenen Formeln und der Figur 16. lässt sich der Satz aussprechen: „Solange  $P$  innerhalb des schraffirten Raumes in Figur 17. liegt, ist die zweite Methode ebenso gut und etwas besser als die erste Methode; in jedem andern Falle ist sie weniger genau als diese.“

Man wird schon im Vorhergehenden die Bemerkung gemacht haben, dass eine Combination beider Methoden, also die Anwendung der dritten

Methode, zuweilen vortheilhaft sein muss. Es fragt sich nur, ob dieses häufig vorkommen kann.

Hat man nur zwei Hauptpunkte  $A$  und  $B$  (Fig. 18.), so ist die dritte Methode so lange vorzüglich, als  $P$  ausserhalb des Halbkreises über  $AB$  liegt und dabei wenigstens einer der Aussenwinkel des Dreiecks  $ABP$  bei  $A$  oder  $B$  nicht viel kleiner als  $90^\circ$  ist. Im gleichseitigen Dreieck  $ABP$  werden alle Präcisionen  $H$  für  $P$  gleich, sobald man jeden Winkel gleich oft beobachtet.

Die Winkelmessung bei  $P$  wird wegzulassen sein, wenn  $P$  innerhalb des Halbkreises über  $AB$  zu liegen kommt. Entfernt sich  $P$  vom Halbkreise und rückt  $AB$  näher, so wird die Bestimmung unzureichend. (Vergl.  $P_1$  in Fig. 18.)

Man erkennt nun leicht, dass für eine Einschaltungstriangulirung die dritte Methode, sofern sie nur zwei Hauptpunkte als Ausgang nimmt, nicht so günstig ist wie die beiden ersten Methoden; denn alle Lagen von  $P$ , welche der dritten Methode günstig sind, werden die Benutzung noch eines dritten Punktes, ja meistens noch mehrerer Punkte gestatten, wodurch man bei gleicher Mühe der Winkelmessung, ohne die sämtlichen in Abschnitt 27. angegebenen Uebelstände überwinden zu müssen — sowohl die der ersten als die der zweiten Methode — mindestens dieselbe Genauigkeit erhalten kann.

Auch darf man nicht vergessen, dass die beiden ersten Methoden ein von den zufälligen Fehlern der Hauptpunkte freieres Resultat geben, als die dritte Methode, die offenbar den ganzen Fehler der zwei Hauptpunkte in den Nebenpunkt überträgt.

Denkt man sich die dritte Methode als reine Combination der beiden andern und vergleicht die Resultate „gleicher Mühe“, so ist wohl immer die zweite Methode vorzuziehen, nicht nur in praktischer, sondern auch in theoretischer Hinsicht; wie daraus hervorgeht, dass die erste Methode in den praktisch vorkommenden Fällen von Einschaltungen ungünstiger als die zweite ist. Diejenige Arbeit bei Anwendung der dritten Methode, welche der ersten Methode entspricht, drückt die Genauigkeit offenbar herab gegenüber der zweiten Methode, welche die ganze Arbeit am günstigsten verwendet.

## 39.

Die theoretische Vergleichung wurde unter der Annahme von Winkelbeobachtungen geführt. Es ist nun schon früher gefunden worden, dass die erste Methode ebenso wie die zweite sich etwas günstiger zeigt für reine Richtungsbeobachtungen, dass zu diesen aber, um eine gleichmässige Genauigkeit für jeden einzelnen Punkt  $P$  sowohl als auch vergleichsweise für verschiedene Punkte  $P$  zu erhalten, immer Winkelbeobachtungen zur Ergänzung zugezogen werden müssen.

Es ist nun von Interesse zu sehen, wie bei 3 Hauptpunkten sich die  $H$  unter Annahme reiner Richtungsbeobachtungen gestalten.

Die Formeln aus Abschnitt 28. 2b geben, sofern das System 42) sich reducirt auf

$$(1) - (2) = A_2 + B_2 x + C_2 y$$

$$(1) - (3) = A_3 + B_3 x + C_3 y$$

$$\text{und man einen Hilfswerth } (2) - (3) = (A_3 - A_2) + (B_3 - B_2)x + (C_3 - C_2)y \\ = A_1 + B_1 x + C_1 y$$

einführt:

$$\left\{ \begin{aligned} H_y^2 &= 1 : N \cdot \frac{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}{3}; \quad H_x^2 = 1 : N \cdot \frac{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}{3}, \\ (1 : N) &= \left\{ \frac{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}{3} \cdot \frac{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}{3} - \left( \frac{B_1 C_1 + B_2 C_2 + B_3 C_3}{3} \right)^2 \right\} \\ M^2 &= \frac{1}{2} \cdot N \cdot \left\{ \frac{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}{3} + \frac{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}{3} \right\}; \quad h = 1 \text{ gesetzt.} \end{aligned} \right.$$

Dieselben Werthe würde man erhalten durch  $\frac{2}{3}$  malige Messung jedes der drei Winkel an  $P^*$ ), wenn einer Einstellung die Präcision  $h = 1$  ebenso wie oben zukommt. Die Fehlergleichungen werden nämlich

$$\left\{ \begin{aligned} (1 \cdot 2) \sqrt{\frac{1}{3}} &= A_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} + B_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x + C_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot y \\ (1 \cdot 3) \sqrt{\frac{1}{3}} &= A_3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} + B_3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x + C_3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot y \\ (2 \cdot 3) \sqrt{\frac{1}{3}} &= A_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} + B_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot x + C_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot y \end{aligned} \right.$$

und daraus folgt z. B.

$$H_y^2 = 1 : N' \cdot \frac{1}{3} \sum_1^3 (BB), \quad N' = \left( \frac{1}{3} \right)^2 \left\{ \Sigma(BB) \cdot \Sigma(CC) - (\Sigma BC)^2 \right\};$$

d. i. wie oben.

Hiernach giebt die Anzahl von  $6 \cdot \frac{2}{3}$  Einstellungen bei Winkelbeobachtungen genau so viel Genauigkeit als 3 Einstellungen bei Richtungsbeobachtungen. Dieses etwas befremdende Resultat kann etwas strenger auch wie folgt abgeleitet werden im Anschluss an Abschnitt 25.

\*) Ebenso leicht findet man, dass ein Satz reiner Richtungsbeobachtungen zwischen  $q$  Hauptpunkten  $H$  und  $M$  ebenso ergiebt wie die  $\frac{2}{q}$  malige Messung aller der  $\frac{q(q-1)}{2}$  möglichen Winkel zwischen diesen  $q$  Hauptpunkten, dass daher bei dieser Art Winkelmessungen  $2(q-1)$  Einstellungen Dasselbe leisten als  $q$  Einstellungen bei Richtungsbeobachtungen. Diese Beziehung gilt überdies ganz allgemein für Winkel- und Richtungsbeobachtungen von einem Punkte aus.

Aus den Gleichungen  $\left. \begin{aligned} (1) - (2) &= A_2 + B_2 x + C_2 y \\ (1) - (3) &= A_3 + B_3 x + C_3 y \end{aligned} \right\}$  erhält man die wahrscheinlichsten Werthe  $x, y$  für  $(1) = (2) = (3) = 0$  und es ist überhaupt von einer Ausgleichung nicht die Rede (weshalb die Ableitung der  $H$  und  $M$  aus den allgemeinen Formeln vorhin nicht streng richtig war). Dem Fehlersystem  $u$  und  $v$  für  $x$  und  $y$  mögen Richtungsfehler (1), (2) und (3) entsprechen, wo

$$(1) - (2) = B_2 u + C_2 v \quad (1) - (3) = B_3 u + C_3 v.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist dabei

$$W_1 = x_1 \cdot e^{-[(1)^2 + (2)^2 + (3)^2]} \\ = x_1 \cdot e^{-[3(1)^2 - 2(1)(B_2 u + B_3 u + C_2 v + C_3 v) + (B_2 u + C_2 v)^2 + (B_3 u + C_3 v)^2]}.$$

Oder für  $(2) - (3) = B_1 u + C_1 v$

$$W_1 = x_1 \cdot e^{-\left\{ 3 \left[ (1) - \frac{B_2 u + B_3 u + C_2 v + C_3 v}{3} \right]^2 + \frac{(B_1 u + C_1 v)^2 + (B_2 u + C_2 v)^2 + (B_3 u + C_3 v)^2}{3} \right\}}.$$

Lässt man nun (1) für ein constantes System  $u, v$  alle möglichen Werthe durchlaufen, so wird

$$W_1 = W_{u,v} = x_2 \cdot e^{-\frac{1}{3} \left( (B_1 u + C_1 v)^2 + (B_2 u + C_2 v)^2 + (B_3 u + C_3 v)^2 \right)}.$$

Construirt man hierzu die Ellipsen wie früher, so erhalten diese gleiche Lage und Grösse mit den entsprechenden Ellipsen, welche sich durch  $\frac{2}{3}$ -malige Messung der drei Winkel ergeben würden.

### III. Zur Theorie der Basisnetze.

40.

Eine Basis,  $AB$ , eines Dreiecksnetzes ist immer beträchtlich kleiner, als die grossen Dreiecksseiten und es entsteht also die Aufgabe, eine der letzteren möglichst scharf durch Triangulationen aus der Grundlinie  $AB$  abzuleiten. Man ist gewöhnt, als zweckmässigstes Multiplicationsnetz ein solches von der Form 19) zu betrachten, welches aus der Basis  $AB$  eine erste Vierecksdiagonale  $C_1C_2$ , aus dieser eine zweite  $D_1D_2$ , etc. ableitet. Die letzte dieser Diagonalen ist die grosse, abzuleitende Dreiecksseite. Es wird in der That auch verhältnissmässig leicht sein, ein zur Basismessung passendes Terrain so auszusuchen, dass zunächst zu beiden Seiten der Basis zwei Punkte  $C$  liegen, welche weit bessere Fernsicht als die Endpunkte der Basis selbst gewähren. Doch kann auch der Fall eintreten, wo wenigstens einer der Endpunkte  $A$  oder  $B$  eine gute Fernsicht bietet und hier ist es fraglich, ob nicht ein Basisnetz von der Form 20), welches successive die Längen  $AC$ ,  $CD$ , etc. bestimmt, bessere Dienste leisten würde, als das schon erwähnte Multiplicationsnetz.

41.

Aus der Basis  $AB = 2c$  in Fig. 21. 22. 23. soll die gleiche Länge  $AC = C_1C_2 = 2s = a$ , wobei  $AC$  immer grösser als  $AB$  genommen werden wird, mit Hilfe eines oder zweier, der Basis anliegenden Dreiecke gefunden werden.

In dem Dreiecke  $ABP$ , wo  $P$  in Fig. 21. irgend welche Lage auf der Peripherie eines mit dem Radius  $AC$  um  $A$  beschriebenen Kreises erhalten kann, wird auf die Bestimmung der Länge  $AP = a$  den grössten Einfluss

nächst der Winkelmessung in  $B$  diejenige des Winkels  $P$  haben, welche den Schnitt III. in der Figur\*) giebt.

Die Visur von  $B$  aus schneidet  $AP$  am günstigsten, wenn der Winkel  $P$  ein Maximum erreicht, d. h. in dem in  $B$  rechtwinkligen Dreiecke  $AC'B$ , wie sich leicht beweisen lässt. Gleichzeitig bekommt der Schnitt III. zu  $AC'$  die günstigste Neigung, nämlich die senkrechte. Jedoch ist hierbei die Genauigkeit der Visur von  $B$  aus an der Stelle  $P$ , sowie diejenige des Schnittes III. noch nicht die grösstmögliche; sie nimmt zu, je kleiner der Winkel bei  $A$  wird, je mehr die Seite  $BP = b$  abnimmt. Daher ist zu vermuthen, dass die günstigste Dreiecksform nicht  $ABC'$ , sondern die eines Dreieckes ist, dessen Spitze  $P$  zwischen  $C'$  und  $C''$  liegt, wenn  $C''$  den zweiten Durchschnitt des Kreises um  $A$  mit dem Kreise, welcher dem gleichschenkligen Dreiecke  $ABC$  umschrieben ist, bezeichnet. Für letztern Punkt (Fig. 20.) ist die Neigung der Visur von  $B$  aus, sowie auch die des Schnittes III. gegen die Linie  $AC''$  dieselbe (ohne Rücksicht auf den Quadranten) wie im Dreiecke  $ACB$ .

Allgemein ist für eine beliebige Lage von  $AP$  die Präcision in der Bestimmung dieser Länge dieselbe, welche sich für eine bestimmende Gerade senkrecht zu  $AP$  aus den Formeln des Abschnittes 20. ergibt. Man hat dasselbst zu substituiren, indem man jene bestimmende Gerade als Achse der  $x$  betrachtet und wenn  $n_1, n_2, n_3$  die Beobachtungszahlen für die Winkel  $A, B, P$  bedeuten,

$$\text{wegen Visur } AP \quad \gamma_1 = 90^\circ \quad h_1^2 = \frac{n_1}{2a^2\omega^2},$$

$$\text{wegen Visur } BP \quad \gamma_2 = 90^\circ - P \quad h_2^2 = \frac{n_2}{2b^2\omega^2},$$

$$\text{wegen Schnitt III. } \gamma_3 = 90^\circ - B \quad h_3^2 = \frac{2n_3c^2}{a^2b^2\omega^2},$$

ferner die Zwischenwinkel  $(1.2) = P$ ;  $(1.3) = B$ ;  $(2.3) = A$ .

Damit wird das Quadrat der Präcision in der Bestimmung von  $AP$

$$H^2 = \frac{\left\{ \frac{n_1 \cdot n_2}{4a^2b^2\omega^4} \sin^2 P + \frac{n_1 n_3 c^2}{a^4 \cdot b^2 \omega^4} \sin^2 B + \frac{n_2 n_3 c^2}{a^2 b^4 \cdot \omega^4} \sin^2 A \right\}}{\left\{ \frac{n_1}{2a^2\omega^2} \cdot 1 + \frac{n_2}{2b^2\omega^2} \cdot \cos^2 P + \frac{2n_3 c^2}{a^2 b^2 \omega^2} \cdot \cos^2 B \right\}},$$

oder auch

$$55) \quad \begin{cases} H^2 = \frac{(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) \sin^2 P}{2\omega^2 (n_1 b^2 + n_2 \cdot a^2 \cos^2 P + 4n_3 c^2 \cdot \cos^2 B)}, \\ H^2 = \frac{(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) \cdot \sin^4 P}{8\omega^2 c^2 (n_1 \sin^2 A + n_2 \sin^2 B \cos^2 P + n_3 \sin^2 P \cdot \cos^2 B)}. \end{cases}$$

\*) Der Deutlichkeit wegen in derselben nur bei den besonderen Lagen  $C$  und  $C'$  von  $P$  angegeben.

Um die günstigsten Beobachtungszahlen  $n$  bei unveränderter Dreiecksform zu finden, suche man das Maximum von  $H^2$  für  $(n_1 + n_2 + n_3) = \text{Const.}$  Die Beziehungen der  $n$  unter einander werden dabei

$$\begin{aligned} & (n_2 + n_3) \cdot (n_1 \sin^2 A + n_2 \sin^2 B \cos^2 P + n_3 \sin^2 P \cos^2 B) - \sin^2 A (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) \\ &= (n_1 + n_3) \cdot (n_1 \sin^2 A + n_2 \sin^2 B \cos^2 P + n_3 \sin^2 P \cos^2 B) - \sin^2 B \cos^2 P (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) \\ &= (n_1 + n_2) \cdot (n_1 \sin^2 A + n_2 \sin^2 B \cos^2 P + n_3 \sin^2 P \cos^2 B) - \sin^2 P \cos^2 B (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 : n_1 - n_3 : n_2 - n_3 : (n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) = \\ = (\sin^2 B \cos^2 P - \sin^2 A) : (\sin^2 P \cos^2 B - \sin^2 A) : (\sin^2 P \cos^2 B - \sin^2 B \cos^2 P) \\ : (n_1 \sin^2 A + n_2 \sin^2 B \cos^2 P + n_3 \sin^2 P \cos^2 B). \end{aligned}$$

Setzt man für den Augenblick zur Abkürzung

$\sin^2 A = \alpha^2$ ;  $\sin^2 B \cos^2 P = \beta^2$ ;  $\sin^2 P \cos^2 B = \gamma^2$ ,  $\Sigma(n) = n_1 + n_2 + n_3$ , so findet sich

$$n_2 = \frac{n_1 (\gamma^2 - 2\beta^2 + \alpha^2) + \Sigma(n) \cdot (\beta^2 - \alpha^2)}{\gamma^2 - 2\alpha^2 + \beta^2},$$

$$n_3 = \frac{n_1 (\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2) + \Sigma(n) \cdot (\gamma^2 - \alpha^2)}{\gamma^2 - 2\alpha^2 + \beta^2},$$

$$n_2 - n_3 : (n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3) = \gamma^2 - \beta^2 : (n_1 \alpha^2 + n_2 \beta^2 + n_3 \gamma^2),$$

$$n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_3 = \frac{(-3n_1^2 + 2n_1 \cdot \Sigma(n)) (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - \alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) + \Sigma^2(n) \cdot (\beta^2 - \alpha^2) (\gamma^2 - \alpha^2)}{(\gamma^2 - 2\alpha^2 + \beta^2)^2},$$

$$n_1 \alpha^2 + n_2 \beta^2 + n_3 \gamma^2 = \frac{-2n_1 (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - \alpha^2 \beta^2 - \alpha^2 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) + \Sigma(n) \cdot (\gamma^4 + \beta^4 - \alpha^2 (\beta^2 + \gamma^2))}{(\gamma^2 - 2\alpha^2 + \beta^2)}.$$

Führt man  $A = 180 - (B + C)$ ,  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$  ein, so geht die Proportion über in

$$\begin{aligned} (3n_1 - \Sigma n) : [(-3n_1^2 + 2n_1 \Sigma(n)) (\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma)^2 + \Sigma^2(n) \cdot (\beta^2 + 2\beta\gamma) (\gamma^2 + 2\beta\gamma)] = \\ = 1 : [-2n_1 \cdot (\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma)^2 - 2\Sigma(n) \cdot ((\beta^2 + \gamma^2) \beta\gamma + \beta^2 \gamma^2)]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$n_1^2 + 2n_1 \cdot \frac{\Sigma(n) \cdot \beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma} + \frac{\Sigma^2(n) \cdot \beta^2 \gamma^2}{(\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma)^2} = 0, \text{ oder}$$

$$n_1 = \Sigma(n) \cdot \frac{-\beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}.$$

Damit hat man weiter

$$n_2 = \Sigma(n) \cdot \frac{\gamma^2 + \gamma\beta}{\beta^2 + \gamma^2 + \gamma\beta}; \quad n_3 = \Sigma(n) \cdot \frac{\beta^2 + \beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + \gamma\beta};$$

$$n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 = \Sigma^2(n) \cdot \frac{\gamma^2 \beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2 + \gamma\beta)^2};$$

$$n_1 \alpha^2 + n_2 \beta^2 + n_3 \gamma^2 = \Sigma(n) \cdot \frac{\gamma^2 \beta^2}{(\beta^2 + \gamma^2 + \gamma\beta)} \text{ und endlich}$$

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{8\omega^2 c^2} \cdot \frac{\sin^4 P}{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$$

Geht man auf die ursprüngliche Bezeichnung zurück, so sind die günstigsten Beobachtungszahlen  $n$  und der ihnen entsprechende Werth von  $H^2$

$$56) \left\{ \begin{array}{l} n_1 = -Q \cdot \sin B \cos B \cdot \sin P \cos P \\ n_2 = Q \cdot \sin A \cdot \cos B \cdot \sin P \\ n_3 = Q \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos P \end{array} \right\}, Q = \frac{\Sigma(n)}{\sin^2 B \cos^2 P + \sin^2 P \cos^2 B + \sin B \sin P \cos B \cos P};$$

$$H^2 = \frac{\Sigma n}{8 \omega^2 \cdot c^2} \cdot \frac{\sin^4 P}{\sin^2 B \cdot \cos^2 P + \sin^2 P \cos^2 B + \sin B \sin P \cos B \cos P}.$$

Diese Formeln sind praktisch nicht streng zu gebrauchen, denn für Dreiecke, in welchen Winkel  $B > 90^0$  ist, wird  $n_2$  negativ; dagegen ist für Dreiecke, wo  $B < 90^0$ , wieder  $n_1$  negativ. Nimmt man daher bei allen Dreiecksformen (Fig. 20.) zwischen  $ABC$  und  $ABC'$ , wo  $B < 90^0$ ,  $n_1$  sehr klein an, so geht  $H^2$  über in

$$57) H^2 = \frac{\sin^4 P}{8 \omega^2 c^2} : \left\{ \frac{\sin^2 B \cos^2 P}{n_3} + \frac{\sin^2 P \cos^2 B}{n_2} \right\}.$$

Unter Voraussetzung von  $n_2 + n_3 = \Sigma(n) = \text{Const.}$  wird dieses  $H^2$  am grössten für

$$\left. \begin{array}{l} n_2 : n_3 : \Sigma n = \sin P \cos B : \sin B \cos P : \sin A \\ \text{nämlich gleich} \end{array} \right\} 58).$$

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{8 \omega^2 c^2} \cdot \frac{\sin^4 P}{\sin^2 A}$$

$H^2$  nimmt beständig zu, wenn die Dreiecksspitze  $P$  sich von  $C$  nach  $C'$  bewegt und man hat insbesondere

$$59) \left\{ \begin{array}{l} \text{für das gleichschenklige Dreieck } ABC \\ n_1 = 0, n_2 = 2 \Sigma(n) \cdot \cos^2 A = \frac{2c^2}{a^2} \cdot \Sigma(n); n_3 = \Sigma(n) - n_2 \\ H^2 = \frac{2 \Sigma(n) \cdot c^2 \cdot (a^2 - c^2)}{\omega^2 \cdot a^6} \end{array} \right. \quad \text{dagegen}$$

für das rechtwinklige Dreieck  $ABC'$

$$60) \left\{ \begin{array}{l} n_1 = 0 = n_2; \quad \Sigma(n) = n_3 \\ H^2 = \frac{2 \Sigma n \cdot c^2}{\omega^2 a^2 (a^2 - 4c^2)} \end{array} \right.$$

Setzt man weiter für Dreiecke, wo  $B > 90^0$  ist,  $n_2 = 0$ , so wird

$$57^*) H^2 = \frac{\sin^4 P}{8 \omega^2 c^2} : \left( \frac{\sin^2 A}{n_3} + \frac{\sin^2 P \cdot \cos^2 B}{n_1} \right).$$

Ein Maximum hiervon tritt ein für

$$\left. \begin{array}{l} n_1 : n_3 : \Sigma(n) = - \sin P \cdot \cos B : \sin A : \sin B \cos P; \\ \text{es beträgt dann} \end{array} \right\} 61).$$

$$H^2 = \frac{\Sigma n}{8 \omega^2 c^2} \cdot \frac{\sin^2 P}{\sin^2 B} \cdot \tan^2 P = \frac{\Sigma n}{8 \omega^2 s^2} \cdot \tan^2 P.$$

Da Winkel  $P$  in  $C'$  einen grössten Werth erlangt, so ist das rechtwinklige Dreieck überhaupt bei Annahme der günstigsten Beobachtungszahlen  $n$  von der günstigsten Form zur Multiplication der Basis  $AB$ .

Obgleich negative Beobachtungszahlen nicht möglich sind, so kann man doch nach der Lage von  $P$  fragen, für welche  $H^2$  aus Gleichung 56) ein Maximum wird. Man erkennt dann einestheils, wie viel Verlust an Genauigkeit eintritt, indem man eben die negativen  $n$ -Werthe mit Null vertauscht, anderntheils aber hat die Untersuchung noch die praktische Bedeutung, zu der günstigsten Dreiecksform unter Annahme gleicher  $n$ ,  $n_1 = n_2 = n_3$ , zu führen, wie Gleichung 62) später zeigen wird. Um also das Maximum von  $H^2$  für veränderliche Lagen  $P$  (immer unter Voraussetzung von  $AP = a = 2s = \text{Const.}$ ) zu suchen, bringe man  $H^2$  zunächst auf die Form

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{2\omega^2} : (a^2 \cot^2 P + 4c^2 \cdot \csc^2 P; P - a^2 + 2ac \cos B \cos P \cdot \csc^2 P).$$

Durch Differentiation nach  $P$  und  $B$ , wobei zu bedenken ist, dass

$$\sin B : \sin P = a : 2c,$$

findet man die Bedingungsgleichung für das Max. von  $H^2$

$$0 = \frac{8ac^2}{a^2 + 4c^2} + 4c \cdot \cos B \cos P - a \sin^2 P.$$

Werden mit  $x, y, z$  und  $k$  folgende constructiv leicht darstellbare Grössen bezeichnet, nämlich

$$x = -2c \cos B = BM, \quad y = a \cos P = MP, \quad z = a \sin P = AM$$

$$k = \frac{2ac}{\sqrt{a^2 + 4c^2}} = AF, \text{ wenn } AF \text{ senkrecht zur Hypotenuse } NB \text{ des in}$$

$A$  rechtwinkligen Dreiecks  $ABN$  genommen wird, so geht obige Gleichung über in

$$xy + \frac{z^2}{2} = k^2,$$

und da  $b = y - x$ , sowie  $z^2 + x^2 = 4c^2$  ist, so wird daraus

$$x = \frac{k^2 - 2c^2}{b + \frac{x}{2}} = \frac{2c^2}{b + \frac{x}{2}} \cdot \frac{a^2 - 4c^2}{a^2 + 4c^2},$$

woraus  $x$  sich rasch ausprobiren lässt.

Betrachtet man  $x$  und  $b + \frac{x}{2}$  als Veränderliche, so erhellt, dass  $x$

rasch zunimmt, wenn  $P$  von  $C'$  nach  $C''$  geht, dagegen ändert sich  $b + \frac{x}{2}$  fast gar nicht:

$$\text{Für } C' \text{ hat man } \underline{x = 0}, \quad \underline{b + \frac{x}{2} = b} = \underline{\sqrt{a^2 - 4c^2}} = \underline{b'} = \underline{BC'},$$

$$\text{für } C'' \text{ wird } \sin P = \frac{2c}{a^2} \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \cos P = \frac{a^2 - 2c^2}{a^2}$$

(ebenso gross wie für  $P$ , wenn es die Lage  $C$  hat),

$$x'' = \frac{2c^2}{a}, \quad b = BC'' = \frac{a^2 - 4c^2}{a} = b''^*); \quad b'' + \frac{x}{2} = \frac{a^2 - 3c^2}{a}.$$

Während nun der Werth  $x \left( b + \frac{x}{2} \right)$  für  $C$  Null ist, erreicht er für  $C''$  einen Betrag, grösser als  $(k^2 - 2c^2)$ ; es wird nämlich für  $C''$

$$x'' \left( b + \frac{x''}{2} \right) - (k^2 - 2c^2) = 2c^2 \left\{ \frac{a^2 - 3c^2}{a^2} - \frac{a^2 - 4c^2}{a^2 + 4c^2} \right\} = \frac{2c^4 (5a^2 - 12c^2)}{a^2 (a^2 + 4c^2)},$$

was in praktischen Fällen stets positiv ist.

Zwischen  $C'$  und  $C''$  muss daher dasjenige  $P$  liegen, dessen entsprechendes  $x$  obige Gleichung erfüllt. Der Werth dieses  $x$  kann näherungsweise dadurch angegeben werden, dass man oben für  $b + \frac{x}{2}$  diejenige Grösse substituirt, welche  $b + \frac{x}{2}$  für  $C'$  oder  $C''$  annimmt. Die erstere Substitution giebt  $x$  zu klein, die letztere zu gross:

$$\frac{2c^2 \sqrt{a^2 - 4c^2}}{a^2 + 4c^2} < x < \frac{2c^2 (a^2 - 4c^2) a}{(a^2 + 4c^2) (a^2 - 3c^2)} \quad **)$$

Der Unterschied dieser Grenzen ist nicht von Belang, man erhält z. B. bei  $a^2 = 4s^2 = 12c^2$

$$0,35c < x < 0,38c;$$

bei  $a^2 = 4s^2 = 46c^2$  aber  $x = 0,28c$  aus beiden Grenzen.

In Fig. 21. ist  $P$  so gelegt, dass für Dreieck  $ABP$   $H^2$  ein Maximum wird und dazu gesetzt worden

$$x \leq \frac{2c^2 \cdot (a^2 - 4c^2) a}{(a^2 + 4c^2) (a^2 - 3c^2)} = \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{2c \cdot b'}{BN \cdot GC'} \right)^2,$$

welcher Werth sich ohne Mühe construiren lässt.

Berechnet man endlich  $H^2$  für das gleichschenklige, das rechtwinklige und das günstigste Dreieck, so ergibt sich

$$\text{bei } a^2 = 12c^2 \text{ resp.}$$

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2 \cdot c^2} \text{ mal } \frac{1}{78}, \text{ mal } \frac{1}{48}, \text{ mal } \frac{1}{46};$$

\*) Es ist also  $(BC) \cdot (BC'') = (BC')^2$ ,  $BC'$  von  $BC$  und  $BC''$  das geometrische Mittel.

\*\*)  $x$  ist hiernach immer kleiner, als die Projection  $AG'$  von  $AG = c$  auf  $AC'$ ;  $x < AG'$ .

bei  $a^2 = 46c^2$  resp.

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2 \cdot c^2} \text{ mal } \frac{1}{1081}, \text{ mal } \frac{1}{966}, \text{ mal } \frac{1}{953}.$$

Diese Zusammenstellung zeigt, wie gering der Verlust ist, welchen man erleidet, indem das rechtwinklige Dreieck für dasjenige der günstigsten Form — aber wegen z. Th. negativer  $n$  unmögliche — substituirt wird, denn es bietet mit dem Dreiecke der günstigsten Form fast gleiche Genauigkeit.

Bisher war immer vorausgesetzt worden, dass die Winkel des Dreiecks auf die rationellste Weise nach den günstigsten Beobachtungszahlen beobachtet werden. Nimmt man indess jeden Winkel gleich oft,

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{\Sigma(n)}{3},$$

so geht  $H^2$  über in

$$62) H^2 = \frac{\Sigma(n)}{16 \omega^2 c^2} \cdot \frac{\sin^4 P}{\sin^2 B \cos^2 P + \sin^2 P \cos^2 B + \sin B \cos B \sin P \cos P},$$

also von dem Werthe bei günstigsten  $n$  ungefähr die Hälfte nur. Da das veränderliche Glied in  $H^2$  völlig übereinstimmt mit demjenigen von  $H^2$  aus Gleichung 56), so ist — wie schon früher angedeutet — die Rechnung auf Seite 167—169 zur Bestimmung der günstigsten Form des Dreiecks auch für den Ausdruck der Gleichung 62) gültig, nur ist das Dreieck der günstigsten Form ( $ABP$  Fig. 21.) im jetzigen Falle nicht mehr praktisch unbrauchbar, wie sich zufolge der Werthe der  $n$  von selbst versteht. Das rechtwinklige Dreieck giebt  $H^2$  genau halb so gross wie in Gleichung 60); dagegen giebt das gleichschenklige Dreieck die Formel

$$H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2} \cdot \frac{c^2 (a^2 - c^2)}{a^2 (a^4 - 2a^2 c^2 + 4c^4)}.$$

$$\text{Dieser Werth ist für } a^2 = 12c^2 \quad H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2 c^2} \cdot \frac{1}{135},$$

$$\text{für } a^2 = 46c^2 \quad H^2 = \frac{\Sigma(n)}{\omega^2 c^2} \cdot \frac{1}{2073}$$

d. i. ebenfalls nahezu nur die Hälfte des früheren Werthes.

Nach diesen Erörterungen möge nun zu derjenigen Form des Multiplicationsnetzes übergegangen werden, welche zunächst aus  $AB$  eine erste Diagonale  $C_1 C_2$  (Fig. 21. 22. 23.) ableitet.

#### 42.

Die günstigste Form der Dreiecke eines derartigen Netzes ist offenbar die gleichschenklige; ihr entspricht (Fig. 21.) der Rhombus  $AB C_1 C_2$ . Jedoch werden sehr häufig auch andere Formen vorkommen und es

können Fig. 22. und 23. als Grenzformen angesehen werden, zwischen denen sich jene bewegen.

Im Anschluss an Fig. 21. hat man in dem allgemeinen Ausdrucke für  $H^2$  aus Abschnitt 20. zu setzen, um das Quadrat der Präcision in der Bestimmung der Längen  $C_1 G$  und  $C_2 G$  zu erhalten,

$$\begin{aligned} \text{wegen Visur } AC_1 \quad h_1^2 &= \frac{\sin^2 \varphi}{2 \omega^2 c^2} \cdot n_1 \quad \gamma_1 = 90^\circ - \varphi \\ & \qquad \qquad \qquad (1.2) = 2\varphi = \sphericalangle AC_1 B \\ \text{wegen Visur } BC_1 \quad h_2^2 &= h_1^2 \quad \gamma_2 = 90^\circ - \varphi \end{aligned}$$

$$\text{wegen Winkel- } \left. \begin{array}{l} \\ \text{messung in } C_1 \end{array} \right\} h_3^2 = \frac{2 \sin^4 \varphi}{\omega^2 c^2} \cdot n_3 \quad \gamma_3 = 0 \quad (1.3) = (2.3) = 90^\circ - \varphi,$$

wobei  $n_1 = n_2$  als selbstverständlich eingeführt wurde.

Mit diesen Werthen gehen über  $\Sigma(h^2 \sin^2 \gamma)$  und  $(1:N)$  in

$$\Sigma(h^2 \sin^2 \gamma) = \frac{n_1}{c^2 \omega^2} \cdot \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi; \quad (1:N) = \frac{n_1 (n_1 + 2n_3)}{\omega^4 c^4} \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi,$$

und es wird für  $C_1 G$ , ebenso für  $C_2 G$

$$H^2 = \frac{(n_1 + 2n_3) \sin^4 \varphi}{\omega^2 c^2},$$

daraus folgt das Quadrat der Präcision in  $C_1 C_2$ , der abgeleiteten Diagonale

$$63) \quad H^2 = \frac{(n_1 + 2n_3) \sin^4 \varphi}{2 \omega^2 c^2} = \frac{(n_1 + 2n_3) c^2}{2 \omega^2 (c^2 + s^2)^2}.$$

Erscheint die Basis um die Mitte  $G$  gedreht und zwar soweit, dass je ein Winkel an der Basis in jedem Dreiecke  $90^\circ$  wird, wie in Fig. 22., so sind zu substituieren

$$\text{wegen } AC_1 \quad h_1^2 = \frac{n_1}{2b_1^2 \omega^2} \quad \gamma_1 = 90^\circ - \psi \quad (1.2) = 90^\circ - \beta_1$$

$$\text{wegen } BC_1 \quad h_2^2 = \frac{n_2}{2a_1^2 \omega^2} \quad \gamma_2 = \beta_1 + \psi \quad (1.3) = \beta_1$$

$$\text{wegen Schnitt III. } h_3^2 = \frac{2n_3 c^2}{a_1^2 b_1^2 \omega^2} \quad \gamma_3 = 90^\circ - \psi - \beta_1 \quad (2.3) = 90^\circ.$$

Damit hat man

$$\Sigma(h^2 \sin^2 \gamma) = \frac{n_1 \cos^2 \psi}{2b_1^2 \omega^2} + \frac{n_2 \sin^2 (\beta_1 + \psi)}{2a_1^2 \omega^2} + \frac{2n_3 c^2 \cos^2 (\beta_1 + \psi)}{a_1^2 b_1^2 \omega^2},$$

$$(1:N) = \frac{n_1 n_2 \cos^2 \beta_1}{4a_1^2 b_1^2 \omega^2} + \frac{n_1 n_3 c^2 \sin^2 \beta_1}{a_1^2 b_1^4 \omega^4} + \frac{n_2 n_3 c^2}{a_1^4 b_1^2 \omega^4}, \text{ also}$$

das Quadrat der Präcision für  $C_1 G$  (und  $C_2 G$ )

$$H^2 = \frac{2c^2}{\omega^2 \cdot a_1^2} \cdot \frac{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1 a_1^2 \cos^2 \psi + n_2 b_1^2 \sin^2 (\beta_1 + \psi) + 4n_3 c^2 \cos^2 (\psi + \beta_1)}.$$

Da hierin der besondere Werth von  $\psi$  noch nicht eingeführt ist, kann diese Formel auch auf Fig. 23. für  $AC_1$ , resp.  $AC_2$  Anwendung finden, indem man  $\psi = 0$  nimmt.

Zunächst ist für Fig. 22:

$$b_1^2 = s^2 - c^2; \quad a_1^2 = s^2 + 3c^2; \quad \cos \psi = \frac{b_1}{s}; \quad \sin(\beta_1 + \psi) = \frac{s^2 + c^2}{a_1 s}$$

$$\sin \beta_1 = \frac{b_1}{a_1}; \quad \cos \beta_1 = \frac{2c}{a_1}; \quad \cos(\beta_1 + \psi) = \frac{c b_1}{s a_1}$$

somit

$$H^2 = \frac{2c^2 \cdot s^2}{\omega^2 (s^2 - c^2)} \cdot \frac{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1 (s^2 + 3c^2)^2 + n_2 (s^2 + c^2)^2 + 4n_3 c^4}$$

Das Quadrat der Präcision für  $C_1 C_2$  ist wieder nur die Hälfte

hiervon,  $H'^2 = \frac{H^2}{2}$ ,

$$64) \quad H'^2 = \frac{c^2 s^2}{\omega^2 (s^2 - c^2)} \cdot \frac{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1 (s^2 + 3c^2)^2 + n_2 (s^2 + c^2)^2 + 4n_3 c^4}$$

Bezüglich der Fig. 23. hat man in der Formel für  $H^2$  auf voriger Seite zunächst die Indices 1 an  $a$  und  $b$  mit 2 zu vertauschen, sodann aber zu substituieren

$$b_2 = s; \quad a_2 = s^2 + 4c^2; \quad \psi = 0; \quad \sin \beta_2 = \frac{s}{a_2}; \quad \cos \beta_2 = \frac{2c}{a_2}$$

es wird hiermit, ähnlich wie oben, für  $C_1 C_2$

$$65) \quad H'^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1 (s^2 + 4c^2)^2 + n_2 \cdot s^4 + 16n_3 c^4}$$

Werden in jedem Dreiecke die drei Winkel gleich oft beobachtet, und setzt man

$$2(n_1 + n_2 + n_3) = 6n = \Sigma n, \quad \text{so werden}$$

$$66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für Fig. 21. } H'^2 = \frac{\Sigma n \cdot c^2}{4 \omega^2 (c^2 + s^2)^2}; \\ \text{für Fig. 22. } H'^2 = \frac{\Sigma n}{4 \omega^2} \cdot \frac{c^2 s^2}{(s^2 - c^2)(s^4 + 4c^2 s^2 + 7c^4)}; \\ \text{für Fig. 23. } H'^2 = \frac{\Sigma n}{4 \omega^2} \cdot \frac{c^2}{s^4 + 16c^4 + 4c^2 s^2}; \end{array} \right.$$

d. h. es ist Fig. 21. günstiger wie Fig. 22. und diese günstiger als Fig. 23.

#### 43.

Die Werthe von  $H^2$  können bedeutend vergrößert werden — unter Voraussetzung gleicher Mühe,  $\Sigma n = \text{Const.}$  — wenn die Beobachtungszahlen so verschieden genommen werden, dass  $H^2$  einen Maximalwerth erreicht.

1) Für  $H'^2$  aus Gleichung 63), zu Fig. 21. gehörig, nehme man

$$\underline{n_1 = n_2} \text{ sehr klein, also } \underline{\Sigma n = 2n_3} \text{ nahezu,}$$

und hat damit

$$67) \quad H'^2 = \frac{\Sigma n \cdot c^2}{2 \omega^2 (c^2 + s^2)^2},$$

d. i. gegen den Werth aus Gleichung 66) das Doppelte.

2) Für  $H'^2$  aus Gleichung 64), zu Fig. 22. gehörend, ist die Rechnung schwieriger. Hinsichtlich der  $n$  gleicht nun Ausdruck 64) völlig dem zweiten der Ausdrücke 55), es lassen sich daher die daselbst gewonnenen Resultate übertragen, wenn man setzt für  $\sin^2 A$ , dort  $\alpha^2$  genannt im weiteren Laufe der Rechnung,

$$\sin^2 A = \alpha^2 = (s^2 + 3c^2)^2, \text{ ferner}$$

$$\sin^2 B \cos^2 P = \beta^2 = (s^2 + c^2)^2; \sin^2 P \cdot \cos^2 B = \gamma^2 = 4c^4.$$

Die daselbst angegebene Relation  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$  bleibt auch hier gültig.

Man bemerkt nun sofort, dass für das Maximum  $n_1$  sich negativ ergeben wird. Nimmt man daher  $n_1 = 0$  (oder sehr klein), so giebt Gleichung 64):

$$H'^2 = \frac{c^2 s^2}{\omega^2 (s^2 - c^2)} : \left\{ \frac{(s^2 + c^2)^2}{n_3} + \frac{4c^4}{n_2} \right\}.$$

Sucht man jetzt das Maximum für  $H'^2$  bei  $2(n_2 + n_3) = \Sigma n = \text{Const.}$ , so erhält man die Relation zwischen  $n_2$  und  $n_3$

$$(s^2 + c^2) : 2c^2 = n_3 : n_2; \quad \Sigma n = \frac{s^2 + 3c^2}{c^2} \cdot n_2$$

und es wird

$$68) \quad H'^2 = \frac{\Sigma n}{2\omega^2} \cdot \frac{c^2 s^2}{(s^2 - c^2)(s^2 + 3c^2)^2}.$$

3) Verfährt man mit  $H'^2$  aus Gleichung 65) so, wie mit  $H'^2$  aus Gleichung 64), dann findet man ebenfalls einen negativen Werth von  $n_1$  für ein Maximum von  $H'^2$ . Man wird dem entsprechend  $n_1$  sehr klein nehmen. Für  $n_1 = 0$  giebt Gleichung 65)

$$H'^2 = \frac{c^2}{\omega^2} : \left( \frac{s^4}{n_3} + \frac{16c^4}{n_2} \right).$$

Dieses wird ein Grösstes, wenn zwischen  $n_2$  und  $n_3$  die Relation stattfindet

$$s^2 : 4c^2 = n_3 : n_2;$$

$$\text{also } \Sigma n = 2(n_2 + n_3) = \frac{s^2 + 4c^2}{2c^2} \cdot n_2, \quad \text{und}$$

$$69) \quad H'^2 = \frac{\Sigma n}{2\omega^2} \cdot \frac{c^2}{(s^2 + 4c^2)^2}.$$

Die Werthe von  $H'^2$  der letzten beiden Gleichungen sind ungefähr doppelt so gross, als diejenigen für dieselben Figuren aus Gleichung 66). Uebrigens sieht man, dass den wesentlichsten Einfluss auf die Bestimmung der Länge  $C_1 C_2 = AC$ , wie bei nur einem Dreiecke an der Basis, die Winkel bei  $C_1$  und  $C_2$  haben.

44.

Um einen Ueberblick über die Resultate zu erhalten, möge eine Zusammenstellung der  $H$  und  $H'$  folgen und zwar für zwei verschiedene Längen von  $C_1 C_2 = AC = 2s = a$ :

1)  $s^2 = 3c^2$

wird einer kleinsten Multiplication der Basis  $2c$  entsprechen und man hat dafür

$s^2 = 3c^2$	$H^2 = \frac{\Sigma n}{\omega^2 c^2}$ multiplicirt mit		Verhältnisse der günstigsten $n$ .
1) Ein Dreieck.	$n_1 = n_2 = n_3$ .	günstigste $n$ .	$n_1 : n_2 : n_3 : \Sigma n$
Gleichschenkliges Dreieck $ABC$	$\frac{1}{135}$	$\frac{1}{78}$	0 : 17 : 83 : 100
Rechtwinkliges Dreieck $ABC'$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{48}$	0 : 0 : 100 : 100
Günstigstes Dreieck $ABP$	$\frac{1}{13}$	—	— — — —
2) Zwei Dreiecke.			
Rhombische Form (Fig. 21.)	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	0 : 0 : 50 : 100
Form von Fig. 22.	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{48}$	0 : 17 : 33 : 100
Form von Fig. 23.	$\frac{1}{148}$	$\frac{1}{98}$	0 : 29 : 21 : 100

Hierin ist  $\Sigma(n) = 100$  gesetzt und bedeutet bei einem Dreiecke ( $n_1 + n_2 + n_3$ ), bei zwei Dreiecken, da sie doch jenem entsprechen,  $2(n_1 + n_2 + n_3)$ .

Es sei weiter 2)  $s^2 = 11,5c^2$ , einer grössten Multiplication der Basis entsprechend:

$s^2 = 11,5c^2$ .	Coefficienten von $\frac{\Sigma n}{\omega^2 c^2}$		Günstigste $n$ :
1) Ein Dreieck.	$n_1 = n_2 = n_3$ .	$n$ ungleich.	$n_1 : n_2 : n_3 : \Sigma(n)$
Das gleichschenklige Dreieck	$\frac{1}{2973}$	$\frac{1}{981}$	0 : 5 : 95 : 100
Das rechtwinklige Dreieck	$\frac{1}{1932}$	$\frac{1}{966}$	0 : 0 : 100 : 100
Günstigste Form $ABP$	$\frac{1}{1907}$	—	— — — —
2) Zwei Dreiecke.			
Rhombische Form (Fig. 21.)	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{312}$	0 : 0 : 50 : 100
Form von Fig. 22.	$\frac{1}{677}$	$\frac{1}{313}$	0 : 7 : 43 : 100
Desgl. für Fig. 23.	$\frac{1}{777}$	$\frac{1}{480}$	0 : 13 : 37 : 100

Die Tabelle lehrt:

„Man bestimmt 1) die gleiche Länge  $AC = C_1 C_2$  immer günstiger aus zwei Dreiecken als aus nur einem Dreiecke. 2) Dabei sind im erstern Falle Formen, wo die Basis gegen ihre Lage im Falle der rein rhombischen Form nur gedreht erscheint, wesentlich günstiger, als solche, bei welchen die Basis in ihrer Richtung verschoben erscheint. 3) Die Winkel, welche der Basis gegenüberliegen, sind die eigentlich maassgebenden der Bestimmung.“

45.

Es möge nun noch die Frage erörtert werden, wieviel man (vergl. Fig. 19. und 20.) einzelne Dreiecke oder Rhomben anzuwenden hat, um

eine grössere Länge aus der Basis  $AB$  bei gleicher Mühe am genauesten abzuleiten.

Ist  $m_1^2$  das Quadrat des mittleren Fehlers der ersten abgeleiteten Seite, so wird für die nächste abgeleitete Seite

$$m_2^2 = m_1^2 \cdot \frac{s^2}{c^2} + m_1^2 \cdot \frac{s^2}{c^2},$$

wo der erste Summand wegen der fehlerhaften Winkelmessung bei Ableitung der zweiten Seite aus der ersten und der zweite Summand wegen des Fehlers  $m_1$  in der letztern angesetzt worden sind. Selbstverständlich ist dabei Voraussetzung, dass die zur Verbindung der ersten und zweiten Abgeleiteten dienende Figur derjenigen ähnlich sei, welche zur Herleitung der ersten Abgeleiteten aus der Basis diene.

Allgemein ist für eine  $p$ te Abgeleitete das Quadrat des mittlern Fehlers

$$m_p^2 = m_1^2 \cdot \left(\frac{s^2}{c^2}\right)^{p-1} + m_{p-1}^2 \cdot \frac{s^2}{c^2} \text{ und daher}$$

$$70) \quad m_p^2 = m_1^2 \cdot p \cdot \left(\frac{s^2}{c^2}\right)^{p-1},$$

und nennt man  $S$  die Länge der  $p$ ten Abgeleiteten, so ist dabei

$$\left(\frac{s}{c}\right)^p \cdot 2c = S.$$

1) Für das rechtwinklige Dreieck folgt aus Gleichung 61) u. 62)

$$m_1^2 = \frac{1}{2H^2} = \frac{\varepsilon}{\Sigma n} = \frac{s^2}{\tan^2 P},$$

wo  $\varepsilon = 4 \omega^2$  oder  $8 \omega^2$  ist, je nachdem man die günstigsten  $n$  oder gleiche  $n$  annimmt.

Damit wird

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon}{\Sigma n} \cdot \frac{s^2}{\tan^2 P} \cdot p \cdot \left(\frac{s^2}{c^2}\right)^{p-1}.$$

Bezeichnet man nun mit  $N = p \cdot \Sigma n$  die Summe aller Winkelmessungen, welche constant zu bleiben hat für dieselben  $c$  und  $S$ , und führt man in  $m_p^2$  hiernach ein

$$\Sigma n = \frac{N}{p},$$

ferner

$$p = \frac{l \left(\frac{S}{2c}\right)}{l \left(\frac{s}{c}\right)},$$

wo  $l$  den *log. nat.* bedeutet, so geht  $m_p^2$  über in

$$m_p^2 = \left\{ \frac{\varepsilon S^2}{4N} \left(l \frac{S}{2c}\right)^2 \right\} : \left( \tan P \cdot l \frac{1}{\sin P} \right)^2.$$

$m_p^2$  wird ein Minimum für  $\frac{\partial m_p^2}{\partial P} = 0$ , d. i. für

$$\cos^2 P = l \frac{1}{\sin P}.$$

Diesem entspricht  $P = 27^0$ ,  $s = 2,20 c$  d. h. das rechtwinklige Dreieck ist am günstigsten, wenn die Hypotenuse  $AC'$  von der bekannten Kathete (Basis) das 2,20fache beträgt. Es ist dabei

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon \cdot S^2}{\sin^2 2P \cdot N} \left( l \frac{S}{2c} \right)^2; \sin 2P = 0,81.$$

Für  $P = 22^0$  wird  $m_p^2 = \frac{\varepsilon \cdot S^2}{(0,80)^2 N} \left( l \frac{S}{2c} \right)^2$ , also wenig grösser, für  $P = 32^0$  tritt an Stelle der Zahl  $(0,80)^2$  im Nenner von  $m_p^2$   $(0,79)^2$ , für  $P = 45^0$  und  $P = 13^0$  aber  $(0,69)^2$ .

Man erkennt daraus, dass alle Dreiecke, deren Winkel  $P$  (d. i. Winkel  $C'$ ) zwischen  $45^0$  und  $13^0$  liegt, nahezu die gleiche, nämlich die Maximalsicherheit bieten.

2) Für die rhombische Form des Netzes ist nach 66) und 67)

$$m_1^2 = \frac{1}{2H'^2} = \frac{\varepsilon'}{\Sigma n} \cdot \frac{c^2}{\sin^4 \varphi},$$

wo  $\varepsilon' = 2\omega^2$  oder  $\omega^2$  ist, je nachdem die  $n$  gleichwerthig oder die günstigsten sind. Aus Gleichung 70) folgt hiermit

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon'}{\Sigma n} \cdot \frac{c^2}{\sin^4 \varphi} \cdot p \cdot \left( \frac{s^2}{c^2} \right)^{p-1},$$

oder auch

$$m_p^2 = \left\{ \frac{\varepsilon' S^2}{N} \left( l \frac{S}{2c} \right)^2 \right\} : (\sin 2\varphi \cdot l \cot \varphi)^2,$$

und bezüglich  $\varphi$  wird dieses ein Minimum, wenn

$$1 = \cos 2\varphi \cdot l \cot \varphi,$$

d. i.

$$2\varphi = 33^0.$$

Das rhombische Multiplicationsnetz ist daher am günstigsten, wenn die Winkel, welche der bekannten Diagonale (Basis) gegenüber liegen,  $33^0$  betragen. Die Multiplication beträgt dabei in jedem Rhombus etwa das  $\frac{10}{3}$ fache.

Der entsprechende kleinste Werth von  $m_p^2$  beträgt

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon' \cdot S^2}{\tan^2 2\varphi \cdot N} \left( l \frac{S}{2c} \right)^2,$$

oder

$$m_p^2 = \frac{\varepsilon' \cdot S^2}{(0,65)^2 \cdot N} \left( l \frac{S}{2c} \right)^2.$$

Da nun  $\varepsilon = 4 \varepsilon'$ , so ist zwischen den kleinsten Werthen von  $m_p^2$  für die Netze aus rechtwinkligen Dreiecken und Rhomben die Relation vorhanden:

$$m'_p{}^2 = \left( \frac{0,80}{0,65} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot m_p^2,$$

oder

$$m'_p{}^2 = \frac{4}{11} \cdot m_p^2,$$

wo  $m_p^2$  sich auf das Rhombennetz bezieht. Man sieht daraus, dass es sehr unvorthailhaft ist, „Dreiecke“ und nicht Rhomben zu nehmen.

Für  $2\varphi = 60^0$  wird in  $m_p^2$  aus dem Divisor  $(0,65)^2$   
 $(0,48)^2$ ,

für  $2\varphi = 50^0$  ebenso . . . . .  $(0,59)^2$ .

Interessant ist für letztere Grösse von  $2\varphi$ , dass sie derjenigen Rhombenform entspricht, für welche  $m_p^2$  ein Min. ist, ohne Rücksicht auf die Mühe.

Schreibt man nämlich  $m_p^2$  in der Form

$$m_p^2 = \left\{ \frac{\varepsilon' S^2}{\Sigma n} \cdot l \frac{S}{2c} \right\} \cdot (\sin^2 2\varphi \cdot l \cot \varphi)$$

so wird dieses  $m_p^2$  bei constantem  $\Sigma n$  und veränderlichem  $\varphi$  ein Min. für  $2\varphi = 50^0$ , doch ist dabei die Mühe, entsprechend der Gesamtzahl  $N = p \cdot \Sigma n$  aller Winkelmessungen, veränderlich mit der Zahl der Dreiecke.

## 46.

Man könnte noch manche ähnliche Betrachtung über die Basisnetze anstellen. Hier sei nur noch ein wichtiger Punkt erwähnt. Die vorhergehenden Berechnungen zeigen nämlich, dass in jedem Basisnetze gewisse, als „maassgebende Winkel“ bezeichnete Winkel hervorragenden Einfluss haben, auch dann, wenn alle Beobachtungszahlen gleich genommen werden. Es kann daher auch nicht davon die Rede sein, dass das Resultat ein wirklich ausgeglichenes ist, denn die maassgebenden Winkel unterdrücken sozusagen den Einfluss der anderen. Dem lässt sich allerdings abhelfen, wenn man die maassgebenden Winkel wenig, die andern oft beobachtet, also gerade nicht so verfährt, wie es bisher als rationell bezeichnet worden ist. Abgesehen von der Ungereimtheit, die darin liegt, erzielt man dadurch doch nur soviel, dass das Endresultat aus etwa zwei Einzelresultaten sich bestimmt. Daher ist es jedenfalls zweckmässiger, die maassgebenden Winkel auf die feinste Art zu ermitteln, sie vielleicht mit mehreren guten Theodoliten zu beobachten, kurzum dafür zu sorgen, dass in ihnen selbst schon ein sicheres, weiterer Ausgleichung nicht bedürftiges Resultat vorliegt.

Anhangsweise sei ferner bemerkt, dass Richtungsbeobachtungen (insbesondere bei dem Rhombusnetze) Anwendung finden könnten. Besonderer Untersuchung bedarf dieser Fall nicht, eben darum, weil die maassgebenden Winkel den grössten Einfluss behaupten, sodass in das Resultat der Character der Richtungsbeobachtungen wenig eingeht\*).

\*) Einige Bemerkungen über günstigste Basisnetze finden sich auch in dem Vorwort von Struve zu der Ermittlung des Höhenunterschieds zwischen dem Schwarzen u. Kaspischen Meere etc. von Fuss, Sabler u. Sawitsch. Petersburg 1849. Seite IX. u. f. Besonders umfassend sind aber die Untersuchungen hierüber in dem Werke: „die kleine Speyerer Basis“ von F. M. Schward 1822.

#### IV. Ueber die günstigste Vertheilung der Hauptpunkte eines grossen Dreiecksnetzes.

47.

Es kann nicht die Aufgabe dieser Arbeit sein, über die Grösse der Entfernungen benachbarter Hauptpunkte etwas Maassgebendes anzuführen, ebenso wenig wie im vorhergehenden Hauptabschnitte die wirkliche Länge der Basis in den Kreis der Betrachtungen gezogen wurde. Bessel empfahl möglichst grosse Distanzen, Struve fand Distanzen von 3 bis 4 geographischen Meilen als die praktisch zweckmässigsten, namentlich hinsichtlich der Schnelligkeit der Messungsarbeit und der Elimination der Lateralrefraction.

Man scheint indess im Allgemeinen der Ansicht zu sein, die grösste Genauigkeit durch Verbindung möglichst weit entfernter Nachbarpunkte erreichen zu können, und lässt das Terrain in gewissen Richtungen Lateralrefraction vermuthen, so sucht man ihren Einfluss durch Controlverbindungen zu mindern. Ist die Messung Theil einer Gradmessung, so ist sicher dabei auch der Zweck „geringsten Kostenaufwandes“ erreicht; triangulirt man aber nur, um die Grundlage einer Landesvermessung zu erhalten, so geben Punkte in kurzen Distanzen meist ausreichende Genauigkeit bei weniger Gesamtkosten.

Im Folgenden möge der in neuerer Zeit häufigste Fall der Combination beider Endzwecke durch eine einzige Triangulation festgehalten werden. Diese muss, soll sie möglichst vortheilhaft sein, die Lage einer grössern Anzahl gleichmässig vertheilter Punkte zu ermitteln suchen. Es hätte einestheils keinen Sinn, im Allgemeinen eine andere Vertheilung anzunehmen, andernteils erleichtert aber die gleichmässige Vertheilung der Punkte ihre gleichmässige Bestimmung, sowie auch diejenige der Punkte zweiter Classe. Unter „gleichmässiger Bestimmung“ ist dabei eine solche zu verstehen, welche nicht nur Punkte in gleicher Entfernung von der Basis gleichgenau angiebt (also mit gleichem  $M$  ermittelt), sondern auch jeden einzelnen Punkt gleichmässig nach allen Richtungen bestimmt ( $H$  constant). Wenn sich überhaupt eine Triangulation dem entsprechend vornehmen lässt, so ist es gewiss diejenige, deren Nachbarpunkte zu regelmässigen Figuren verbunden werden können.

48.

Kann man alle Nachbarpunkte in gleiche Entfernung legen, so erhält man als Grundfigur des Netzes das gleichseitige Dreieck. Dieser Grundfigur steht am nächsten das Quadrat mit zwei Diagonalen.

Weitere Grundformen giebt es nicht. Denn ist  $ABCD \dots$  (Fig. 24.) eine solche Grundform, also ein reguläres  $n$ -Eck, innerhalb dessen keine Netzknotenpunkte liegen, so muss der Winkel des  $n$ -Eckes sich im Umkreise jeder Ecke ( $B$  z. B.) eine ganze Anzahl Male auftragen lassen, weil jeder Punkt Theil ist von mehreren Vielecken gleicher Form. Das giebt

$$4 : \frac{2n - 4}{n} = \text{einer ganzen Zahl,}$$

oder  $\frac{4}{n - 2} = \text{einer ganzen Zahl,}$  was nur möglich ist für  $n = 3, 4$  und  $6$ .

Das reguläre Sechseck giebt durch die zu seiner Construction nöthigen Diagonalen ein dem Netze aus gleichseitigen Dreiecken verwandtes Netz. Es bleiben hiernach nur die erwähnten zwei Grundfiguren übrig.

Bei gleicher Punktzahl auf gleicher Fläche sind die Distanzen benachbarter Punkte für beide Grundfiguren ziemlich gleich; denn indem einem Quadrate immer etwa zwei Dreiecke entsprechen werden, muss

$$s_q^2 = 2 s_d^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}; \quad s_q = 0,93 s_d$$

sein, wo  $s_q$  die Quadratseite,  $s_d$  die Dreiecksseite bedeuten.

Die in der Praxis vorkommenden Netzformen werden aber, falls nicht besondere örtliche Verhältnisse es hindern, zwischen dem Quadratnetze und regulären Dreiecknetze schwanken. Es ist daher im Folgenden ein Vergleich beider Grenzfälle dahin ausgeführt worden, welcher von beiden das Verhältniss entsprechender Seiten der Grundfiguren am genauesten „bei gleicher Mühe“ angiebt.

## 49.

Im Anschluss an Fig. 25. sei  $ABC$  ein im Innern des Netzes gelegenes, gleichseitiges Dreieck. Die Messung von  $\sphericalangle BAC = \alpha$  und  $\sphericalangle ABC = \beta$  giebt für die Gegenseiten  $BC = a$  und  $AC = b$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \text{wobei } d\left(\frac{a}{b}\right) = \cot \alpha d\alpha - \cot \beta d\beta = \frac{d\alpha - d\beta}{\sqrt{3}}$$

die Grösse des Fehlers in  $\frac{a}{b}$  bezeichnet, welcher den Winkel Fehlern  $d\alpha$  und  $d\beta$  entspricht.

Diese Formel gilt für jedes andere Seitenverhältniss im Dreiecke, und es hat daher das gleichseitige Dreieck die Eigenschaft, sich von jeder Seite aus gleich gut construiren zu lassen. (Vergl. Abschnitt 38).

Die Beobachtung des dritten Winkels  $\sphericalangle ACB = \gamma$  hat auf  $d\left(\frac{a}{b}\right)$  im Mittel keinen Einfluss, denn  $\gamma$  controlirt nur die Summe von  $\alpha$  und  $\beta$ , indem

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^0 = 0$$

sein soll. Findet man nun rechts anstatt Null einen Werth  $v$ , so sind aus

$$d\alpha + d\beta + d\gamma = v$$

die wahrscheinlichen Aenderungen  $d\alpha = d\beta = d\gamma = \frac{v}{3}$ , daher  $d\alpha - d\beta$ ,

wie es in  $d\left(\frac{a}{b}\right)$  nur vorkommt, gleich Null. Bezeichnet nun  $\pm \omega$  den mittleren Fehler in der Messung der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  (in Bogen) und  $\pm \delta$  den mittleren Fehler in  $\frac{a}{b}$ , so ist also bei Messung von  $\alpha$  und  $\beta$  oder  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$

$$71a) \quad \delta^2 = \frac{2}{3} \omega^2.$$

Da nun das Dreieck  $ABC$  von andern Dreiecken umschlossen wird, muss man  $\frac{a}{b}$  noch aus der Dreieckskette (1. 2. 3. 4. 5), sowie aus der Kette (1. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5), (Fig. 25.), welche als unabhängig von einander angesehen werden können, berechnen. Die erste Kette giebt  $\frac{a}{b}$  durch 5 Seitenverhältnisse, die zweite durch 9 solche. Obgleich sich nun jedes dieser Verhältnisse schliesslich für sich betrachtet ebenso genau bestimmt, wie  $\frac{a}{b}$  für sich betrachtet, so darf man doch hier, wo benachbarte Dreiecke in Frage kommen, den Seitenverhältnissen diese Genauigkeit nicht beilegen, wie sofort klar ist. Nennt man  $\pm \delta_2$  und  $\pm \delta_3$  die mittleren Fehler in  $\frac{a}{b}$  aus beiden Ketten,  $\pm m_1$  den noch unbekanntem, aus allen Einzelbestimmungen sich ergebenden mittlern Fehler in  $\frac{a}{b}$ , so wird

$$5 m_1^2 < \delta_2^2 < 5 \delta^2; \quad 9 m_1^2 < \delta_3^2 < 9 \delta^2.$$

Betrachtet man weiter die Winkel um  $A$  und  $B$ , so zeigt sich, dass diese bei den Bestimmungen von  $\delta_2$  und  $\delta_3$  bisher nur zum kleinen Theil in Anwendung gekommen sind. Man wird daher der Wahrheit näher kommen, wenn man sich  $\alpha$  und  $\beta$  noch aus den Summgleichungen der Winkel um  $A$  und  $B$  bestimmt denkt und zwar mit dem mittlern Fehler  $\pm \frac{\omega}{\sqrt{5}}$ , wie leicht einzusehen. Das Quadrat des mittlern Fehlers der Bestimmung von  $\frac{a}{b}$  mit Hilfe von  $\alpha$  und  $\beta$  geht damit über in

$$\delta_1^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \omega^2 = \frac{5}{9} \omega^2.$$

In die obern Grenzen von  $\delta_2^2$  und  $\delta_3^2$  darf dieser Werth für  $\delta^2$  nicht eingeführt werden. Es kommt z. B. in der Kette (1. 2. 3. 4. 5.) der Quo-

tient  $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_3}$  vor, und da  $\alpha_2$  und  $\beta_3$  gleich sind, sowie derselben Summengleichung angehören, gilt für den Quotienten eine ähnliche Bemerkung, wie sie früher für  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  gemacht wurde: Der Einfluss der Summengleichungen fällt bei den Dreiecksketten beinahe gänzlich weg.

Vernachlässigt man nun noch den geringen Einfluss verschiedener Polygonzusammenschlüsse, so bekommt man zur Bestimmung von  $\pm m_1$ , dem schliesslichen mittlern Fehler in  $\left(\frac{a}{b}\right)$ , die Ungleichung

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{9}\omega^2} + \frac{1}{5m_1^2} + \frac{1}{9m_1^2}} < m_1^2 < \frac{1}{\frac{1}{\frac{5}{9}\omega^2} + \frac{1}{5\delta^2} + \frac{1}{9\delta^2}}$$

Die obere Grenze giebt  $m^2 < 0,44 \omega^2$  und hiermit giebt die untere Grenze  $0,40 \omega^2 < m^2$ . Der Gesamtbestimmung des Verhältnisses zweier Nachbarseiten im Netze (zweier Seiten desselben Dreieckes) entspricht sonach das mittlere Fehlerquadrat

$$71b) \quad \underline{m_1^2 = 0,42 \omega^2.}$$

Hat man Richtungen beobachtet, so ändert sich  $\delta^2$  in 71a) gar nicht, dagegen muss für  $m_1^2$  der Factor  $\frac{5}{6}$  in  $\delta_1^2$  weggelassen werden, wie sich von selbst versteht.  $\delta_2^2$  und  $\delta_3^2$  bleiben in den früheren Grenzen eingeschlossen; denn betrachtet man z. B. wieder  $\dots \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_3} \dots$  in der Kette (1. 2. 3. 4. 5.), so könnte man zunächst erwarten, dass der mittlere Fehler dieses Verhältnisses sich anders als zu  $\left(\frac{2\delta^2}{2}\right)$  ergeben würde, da  $\alpha_2$  und  $\beta_3$  eine Visur gemeinsam haben. Man überzeugt sich indess leicht, dass dieses keinen Einfluss hat, indem man  $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_3}$  differenzirt und die Richtungsfehler einführt. (Vergleiche später eine ähnliche Rechnung bei Untersuchung des Quadrates.) Aus der Ungleichung

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}\omega^2} + \frac{1}{5m_1'^2} + \frac{1}{9m_1'^2}} < m_1'^2 < \frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}\omega^2} + \frac{1}{5\delta^2} + \frac{1}{9\delta^2}}$$

folgt wie vorher  $0,51 \omega^2 > m_1'^2 > 0,46 \omega^2$

$$71c) \quad \underline{m_1'^2 = 0,48 \omega^2.}$$

$m_1'^2$  ist somit nicht viel grösser als  $m_1^2$ .

Das Verhältniss  $AB : CD$  im Rhombus  $ABCD$  bestimmt sich aus

( $ABC$  und  $CDB$ ), aus ( $ABC$ , 1, 2, 3, 4) und aus (9, 8, 7, 6,  $CDB$ ), also auf drei verschiedenen, ziemlich unabhängig von einander bestehenden Wegen. ( $ABC$  und  $CDB$ ) geben  $\frac{AB}{CD} = \frac{\sin ACB \sin CDB}{\sin BCD \sin CAB}$ , und da diese Winkel in verschiedenen Summgleichungen vorkommen, ist das Quadrat des mittlern Fehlers

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot (4\omega^2) = \frac{10}{9} \omega^2.$$

Berücksichtigt man nun die beiden Ketten aus je 5 Dreiecken und nennt  $m_2^2$  das Quadrat des mittlern Fehlers der schliesslichen Bestimmung von  $\frac{AB}{CD}$ , so ist

$$\frac{1}{\frac{10}{9}\omega^2 + \frac{1}{5m_1^2} \cdot 2} < m_2^2 < \frac{1}{\frac{10}{9}\omega^2 + \frac{1}{5\delta^2} \cdot 2},$$

$$72a) \quad 0,55 \omega^2 < m_2^2 < 0,67 \omega^2; \quad \underline{m_2^2 = 0,61 \omega^2}.$$

Für Richtungsbeobachtungen hat man unter Weglassung des Factors  $\frac{5}{6}$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\omega^2 + \frac{1}{5m_1'^2} \cdot 2} < m_2'^2 < \frac{1}{\frac{4}{3}\omega^2 + \frac{1}{5\delta^2} \cdot 2},$$

$$72b) \quad 0,63 \omega^2 < m_2'^2 < 0,74 \omega^2; \quad \underline{m_2'^2 = 0,68 \omega^2}.$$

Das Verhältniss der Seiten  $AB:BD$  im Rhombus bestimmt sich aus

( $ABC$  und  $CDB$ ); ( $ABC$ , 1, 2, 3, 4,  $CDB$ ); (9, 8, 7, 6) und zwar wieder ziemlich unabhängig. Erstere 2 Dreiecke geben

$$\frac{AB}{BD} = \frac{\sin ACB \sin CDB}{\sin BCD \sin CAB};$$

die Winkel des erstern Verhältnisses gehören hierbei zu derselben Summgleichung, der Factor  $\frac{5}{6}$  darf daher auf sie nicht angewendet werden.

Man erhält das Quadrat des mittlern Fehlers dieser Bestimmung zu

$$\frac{1}{3} \omega^2 \left( 2 \cdot \frac{5}{6} + 2 \right) = \frac{11}{9} \omega^2.$$

$m_3^2$ , das mittlere Fehlerquadrat aus allen Bestimmungen, wird mithin

$$\frac{1}{\frac{11}{9}\omega^2 + \frac{1}{6m_1^2} + \frac{1}{4m_1'^2}} < m_3^2 < \frac{1}{\frac{11}{9}\omega^2 + \frac{1}{6\delta^2} + \frac{1}{4\delta'^2}}$$

$$73a) \quad 0,56 \omega^2 < m_3^2 < 0,69 \omega^2; \quad \underline{m_3^2 = 0,62 \omega^2}.$$

5\*

Für Richtungsbeobachtungen kommt wieder der Factor  $\frac{5}{6}$  in Wegfall und man findet, ähnlich wie früher:

$$73b) \quad 0,62 \omega^2 < m'_3{}^2 < 0,72 \omega^2; \quad m'_3{}^2 = 0,67 \omega^2.$$

Man erkennt hieraus, dass sich die Verhältnisse zweier Rhombuseiten, die zu verschiedenen Dreiecken gehören, ziemlich gleich genau bestimmen. Es mögen daher im Folgenden solche Seiten (also  $AB$  und  $BD$ ,  $AB$  und  $CD$  etc.) kurz „Gegenseiten“ heissen. Liegt der Rhombus nicht im Netze, sondern isolirt, so ist das mittlere Fehlerquadrat des Verhältnisses solcher Gegenseiten

$$74) \quad \delta'^2 = 2 \cdot \delta^2.$$

## 50.

Für ein im Innern des Netzes gelegenes Quadrat  $ABCD$  (Fig. 26.) hat man zunächst die directen Bestimmungen

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin ACB}{\sin ABC}, \quad d\left(\frac{AB}{AC}\right) = d(ACB) - d(ABC) \text{ und}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\sin ACB}{\sin CAB} \cdot \frac{\sin BDC}{\sin CBD}, \quad d\left(\frac{AB}{CD}\right) = d(ACB) - d(CBD).$$

Werden also nur die nöthigsten Winkel gemessen, so bestimmen sich beide Verhältnisse gleich genau. Das mittlere Fehlerquadrat beträgt  $2\omega^2$ . Beobachtet man alle Winkel, so hat man noch

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin ADB}{\sin ABD} \cdot \frac{\sin ACD}{\sin CDA}; \quad d\left(\frac{AB}{AC}\right) = d(ADB) - d(CDA)$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\sin ADB}{\sin ABD} \cdot \frac{\sin ACD}{\sin CAD}; \quad d\left(\frac{AB}{AC}\right) = d(ADB) - d(CAD).$$

Die sämtlichen Bestimmungen aus den Winkelmessungen im Quadrate hängen daher von den  $45^\circ$ -Winkeln ab. Ein Einfluss der rechten Winkel kommt erst herein, wenn man die Gleichung zwischen den 3 Winkeln jedes Dreieckes berücksichtigt. Die erste Bestimmung von  $\frac{AB}{BC}$  ändert sich jedoch auch dann nicht, weil die betreffenden Winkel derselben Summgleichung angehören; in den andern Verhältnissen jedoch ist es erlaubt, überall das mittlere Fehlerquadrat eines Winkels gleich  $\frac{2}{3}\omega^2$  anzunehmen, da die Summgleichungen die einzelnen Winkel noch mit dem Gewicht  $\frac{1}{2}$  bestimmen. Man hat daher für das erste und zweite Verhältniss die Bestimmungen mit den Fehlerquadraten:

$$2\omega^2, \quad \frac{4}{3}\omega^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{4}{3}\omega^2, \quad \frac{4}{3}\omega^2.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Bestimmungen jedes Verhältnisses

völlig unabhängig von einander sind, nicht etwa irgend ein Winkel oder eine Summgleichung mehrfach Anwendung fanden. Es sind sogar für  $\frac{AB}{AC}$  noch die Winkel  $CDB, CAB, BCD$  und  $CBD$  unberücksichtigt, doch geben sie nur Summgleichungen von  $ACB$  und  $ABC, ADB$  und  $CDA$ , ihr Einfluss ist mithin Null.

Vereinigt man die Resultate, so ist das Quadrat des m. F.

$$75 a) \left\{ \begin{array}{l} \text{für } \frac{AB}{AC} \dots \dots \vartheta^2 = \frac{\omega^2}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}\omega^2; \\ \text{für } \frac{AB}{CD} \dots \dots \vartheta^2 = \frac{\omega^2}{2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\omega^2. \end{array} \right. \quad *)$$

Diese Rechnung gilt in gleicher Weise für Winkel- und Richtungsbeobachtungen.

Im letztern Falle könnte man vermuthen, dass z. B. die zweite Bestimmung von  $\frac{AB}{BC}$  einen andern mittlern Fehler erhalte. Nun ist  $d\left(\frac{AB}{BC}\right) = d(ADB) - d(ADC) = 2d(A) - d(B) - d(C)$ , wo  $d(A)$  etc. die Richtungsfehler sind. Im Mittel ist ein Richtungsfehler  $\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ , also bleibt der mittlere Fehler von  $\frac{AB}{BC}$  hier genau so gross, als wenn die Winkel unabhängig von einander gemessen worden wären.

$\frac{AB}{AC}$  bestimmt sich weiter durch die Ketten (1. 2. 3.) und (9. 8. 7. 16. 15. 14. 13. 12. 11), erstere drei Nachbarseitenverhältnisse, letztere 4 solche und 2 Gegenseitenverhältnisse enthaltend. Für die mittlern Fehler dieser Verhältnisse hat man Werthe einzuführen, die zwischen  $\vartheta$ , resp.  $\vartheta'$  und denjenigen mittlern Fehlern liegen, welche sich schliesslich für  $\frac{AB}{AC}$ , resp.  $\frac{AB}{CD}$  aus allen Bestimmungen ergeben. Letztere Grössen mögen mit  $m$  und  $m_1$  bezeichnet werden. Berücksichtigt man nun noch die Summgleichungen der Winkel um  $A, B, C, D$ , welche für die erste der directen Bestimmungen von  $\frac{AB}{AC}$  den Factor  $\frac{7}{8}$  erheischen und nennt man das m. Fehlerquadrat für das Mittel der beiden directen Bestimmungen

$$\vartheta_1^2 = \frac{\omega^2}{\frac{1}{2 \cdot \frac{7}{8}} + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{4}\omega^2,$$

\*) Eine strenge Ausgleichung gab genau gleiche Resultate.

so ist

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta_1^2} + \frac{1}{3 \cdot m^2} + \frac{1}{4 m^2 + 2 m_1^2}} < m^2 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta_1^2} + \frac{1}{3 \vartheta^2} + \frac{1}{4 \vartheta^2 + 2 \vartheta'^2}};$$

die obere Grenze giebt  $m^2 < 0,51 \omega^2$ .

Für  $\frac{AB}{CD}$  hat man 2 ganz gleiche indirecte Bestimmungen aus (3. 2. 10. 9. 8. 7.) und (11. 12. 13. 14. 15. 16) mit je 4 Nachbarseiten- und einem Gegenseitenverhältnisse. Wegen der Summgleichungen um  $A, B, C, D$  ist der Factor  $\frac{7}{8}$  bei beiden directen Bestimmungen, also bei  $\vartheta'^2$  selbst in Anwendung zu bringen. Nennt man daher

$$\vartheta_1'^2 = \frac{7}{8} \cdot \vartheta'^2 = \frac{7}{12} \omega^2,$$

so wird

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta_1'^2} + 2 \cdot \frac{1}{4 m^2 + m_1^2}} < m_1^2 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta_1'^2} + 2 \cdot \frac{1}{4 \vartheta^2 + \vartheta'^2}}.$$

Die obere Grenze giebt  $m_1^2 < 0,45 \omega^2$ .

Führt man jetzt die Näherungswerthe in die untern Grenzen ein, so ergibt sich

$$75b) \left. \begin{array}{l} m^2 > 0,43 \omega^2 \\ m^2 < 0,51 \omega^2 \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} m_1^2 > 0,40 \omega^2 \\ m_1^2 < 0,45 \omega^2 \end{array}$$

$$75b) \quad \underline{m^2 = 0,47 \omega^2}, \quad \underline{m_1^2 = 0,42 \omega^2}.$$

Man kann hiernach für  $\frac{AB}{AC}$  und  $\frac{AB}{CD}$  das mittlere Fehlerquadrat zu  $0,45 \omega^2$  annehmen.

Sind Richtungsbeobachtungen gemacht, so ist nur der Factor  $\frac{7}{8}$  wegzulassen, sonst ändert sich an der Rechnung weiter nichts.

Die Ungleichungen gehen über in

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{3 m'^2} + \frac{1}{4 m'^2 + 2 m_1'^2}} < m'^2 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta^2} + \frac{1}{3 \vartheta^2} + \frac{1}{4 \vartheta^2 + 2 \vartheta'^2}}$$

für  $\frac{AB}{AC}$ , sodass also

$$m'^2 < 0,53 \omega^2,$$

und für  $\frac{AB}{CD}$  in

$$\frac{1}{\frac{1}{\vartheta'^2} + 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot m'^2 + m_1'^2}} < m_1'^2 < \frac{1}{\frac{1}{\vartheta'^2} + 2 \cdot \frac{1}{4 \vartheta^2 + \vartheta'^2}}$$

woraus

$$m_1'^2 < 0,50 \omega^2 \quad \text{folgt.}$$

Hiermit geben die untern Grenzen resp.

$$m'^2 > 0,45 \omega^2 \qquad m_1'^2 > 0,44 \omega^2$$

und da

$$m'^2 < 0,53 \omega^2 \qquad m_1'^2 < 0,50 \omega^2$$

war, so kann man setzen

$$75c) \quad \underline{m'^2 = 0,49 \omega^2.} \qquad \underline{m_1'^2 = 0,47 \omega^2.}$$

Hiernach kann das mittlere Fehlerquadrat für  $\frac{AB}{AC}, \frac{AB}{CD}$  zu  $0,48 \omega^2$  bei Richtungsbeobachtungen gesetzt werden.

51.

Die gewonnenen Formeln stellen sich am übersichtlichsten dar, wenn man noch alle Fehlerquadrate auf gleiche Mühe, etwa diejenige für Winkelbeobachtungen in einem Quadratnetze, reducirt. Man hat hier in einem Quadrate 12 Winkel zu messen, d. i. soviel wie 24 Einstellungen; dieses gilt für ein Quadrat im Netze ebenso, wie für ein isolirtes Quadrat. Dagegen hat man im Rhombus nur 6 Winkelmessungen gleich 12 Einstellungen zu machen. Für Richtungsbeobachtungen im isolirten Quadrate, resp. Rhombus beträgt die Anzahl der Einstellungen 12, resp. 10, dagegen hat man für dieselben Figuren im Netze nur 8, resp. 6 Einstellungen zu rechnen, da die begrenzenden Visuren (z. B.  $AB, AC \dots$ ) auch für die Nachbarfiguren gelten, also nur zur Hälfte in Anschlag zu bringen sind. Reducirt man nun alle mittleren Fehlerquadrate auf 24 Einstellungen, so ergibt sich, wenn  $\pm \omega$  der mittlere Fehler einer Winkelmessung ( $\pm \frac{\omega}{\sqrt{2}}$  der einen Richtung) ist:

	Mittleres Fehlerquadrat des			
	Verhältn. 2r Nachbar-		und 2r Gegenseiten	
	Winkel	Richtungen	Winkel	Richtungen
Rhombus isolirt,	$0,33 \omega^2$	$0,28 \omega^2$	$0,67 \omega^2$	$0,56 \omega^2$
„ im Netz,	0,21	0,12	0,31	0,17
Quadrat isolirt,	0,80	0,40	0,67	0,33
„ im Netze	0,47	0,16	0,42	0,16

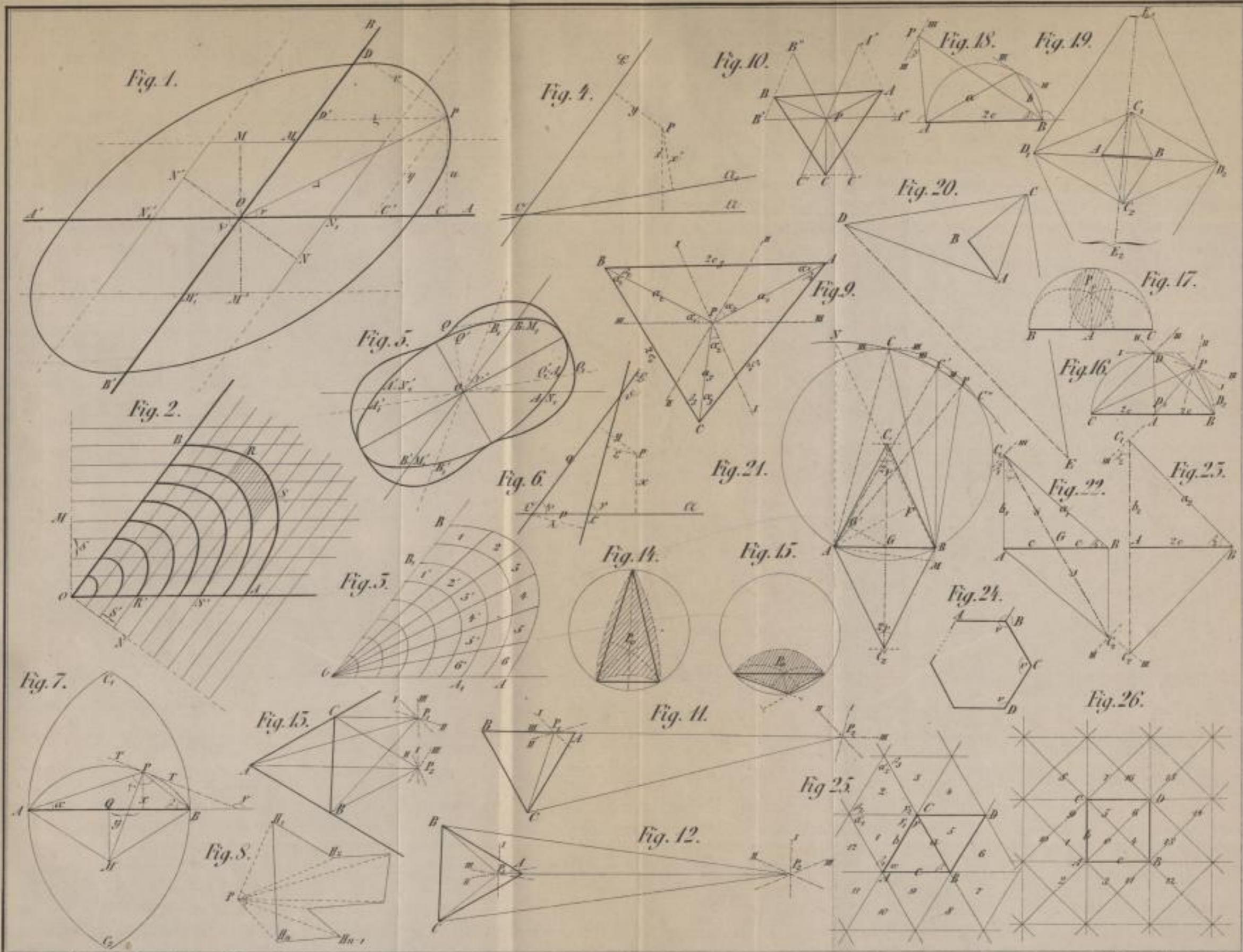
Wenn nun auch die Zahlen dieser Tabelle, soweit sie sich auf Figuren im Netze beziehen, der Vernachlässigungen wegen nur relativen Werth für die Vergleichung des Rhombus und Quadrates im Netze besitzen, so erhellt doch daraus mit Gewissheit, dass insbesondere bei Richtungsbeobachtungen das Quadratnetz recht günstige Bestimmungen liefert und dem Dreiecksnetz gleichgestellt zu werden verdient.

52. Schluss.

Um die Arbeit nicht zu sehr auszudehnen, sind weitere Betrachtungen über Netzformen im Allgemeinen, über Kranzsysteme (was z. Th.

eine Rechnung wie in Abschn. 45. geben würde) und Anderes mehr nicht angestellt worden. Freilich ist nicht zu verkennen, dass das hier Gegebene nur den leichtesten Theil der Discussion der Landestriangulirung vollständiger abhandelt, nämlich die Einschaltung der Punkte niederster Ordnung, und dass der vierte Hauptabschnitt sehr dürftig ausgefallen ist. Wer jedoch weiss, welche Anhäufung von Fragen bei der Untersuchung eines Hauptnetzes entsteht und wie gerade hier die speciellen Terrainverhältnisse zu berücksichtigen sind, wird es nicht sonderbar finden, dass zunächst das Einfachere eingehender untersucht wurde, um so mehr, als in demselben das Allgemeinere, in allen Fällen Giltige zur Darstellung gelangte.

Anmerkung zu Abschn. II. 32. Da unter gleichen Umständen die aufgewandte Mühe umgekehrt proportional  $M^2$  ist, in diesem Abschnitte es aber darauf ankam, die Resultate gleicher Mühe zu vergleichen, so hat sich der Verf. erlaubt, hier — abweichend vom gewöhnlichen Gebrauche — die Genauigkeit in der Bestimmung des Punktes ebenfalls umgekehrt proportional dem Quadrate des mittleren Gesamtfehlers  $M$  zu setzen, sodass sie direct proportional der aufgewandten Mühe wird.





Studien

über

rationelle Vermessungen

im Gebiete der höheren Geodäsie.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

in der philosophischen Facultät der Universität Leipzig

verfasst von

Friedrich Robert Helmert.

Mit einer Figurentafel.

Leipzig,

Druck von B. G. Teubner.

1868.

00039



Rich. Oesterreich  
Buchbinderei  
Dresden.

Geodae. 113

