ABHANDLUNGEN

VIERTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

VIERTER BAND.

MIT NEUNZEHN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1855.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ZWEITER BAND.

MIT NEUNZEHN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1855.

INHALT.

DIE

THEORIE DER KREISVERWANDTSCHAFT

IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG

VON

A. F. MÖBIUS.

DIE THEORIE DER KREISVERWANDTSCHAFT

IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG.

Mit Anwendung einer im Jahre 1852*) von mir mitgetheilten Methode, welche von Sätzen der Longimetrie durch das Gebiet des Imaginären zu Sätzen der Planimetrie führt, hat sich mir, wie ich bereits am Schlusse jenes Aufsatzes bemerkt habe, durch Uebertragung der Collineationsverwandtschaft zwischen geradlinigen Systemen von Punkten auf Systeme von Punkten in Ebenen eine neue Art von Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren ergeben. Die Haupteigenschaften dieser Verwandtschaft habe ich in einem spätern Aufsatze**) mittelst jener Methode entwickelt, sie selbst aber Kreisverwandtschaft genannt, weil bei je zwei auf solche Art verwandten Figuren jedem Kreise der einen Figur ein Kreis in der andern entspricht.

Durch fortgesetzte Beschäftigung mit diesen Untersuchungen, insonderheit durch Ausdehnung derselben auf den Raum von drei Dimensionen, bin ich zu Resultaten gekommen, die mir der Veröffentlichung gleichfalls nicht unwerth scheinen, und die ich deshalb in Verbindung mit den früher mitgetheilten, hier jedoch auf andere Weise entwickelten, zum Theil auch erweiterten Sätzen über die Kreisverwandtschaft in vorliegender Abhandlung zusammengestellt habe. Namentlich habe ich gegenwärtig von jener das Imaginäre zu Hülfe nehmenden Methode keinen Gebrauch gemacht, sondern bin unmittelbar von der Definition der Kreisverwandtschaft durch Kreise ausgegangen.

---

*) I. Heft der Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellsch. der Wissensch. i. J. 1852.

**) I. Heft der Berichte etc. i. J. 1853.

Die Darstellungsweise, deren ich mich hier bedient habe, ist die rein geometrische, wobei ich jedoch, wie schon in meinem «barycentrischen Calcul», die Allgemeinheit, welche die analytische Methode gewährt, mit der Anschaulichkeit der rein geometrischen dadurch zu verbinden gesucht habe, dass ich in den Ausdrücken für Raumgrössen durch Nebeneinanderstellung von Buchstaben, welche deren Begrenzung bezeichnen, auf die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben stets die gehörige Rücksicht genommen habe.*)

---

*) Diese Rücksicht auf die Folge der Buchstaben in Ausdrücken von Abschnitten einer Geraden, so wie von Winkeln in einer Ebene, hat in letzter Zeit auch ein französischer Geometer in einem umfänglicheren Werke genommen und consequent durchgeführt, Herr Chasles in seinem sehr werthvollen *Traité de Géométrie supérieure,* Paris 1852. Wenn aber Herr Chasles in dieser Beziehung auf Seite III der Vorrede sich also ausspricht:

Jusq' à présent on n'a point introduit, d'une manière générale et systématique, en Géométrie, le principe des signes, pour marquer la direction des segments ou des angles, excepté dans la Géométrie analytique et dans quelques questions particulières, telles que la théorie des centres des moyennes distances et des moyennes harmoniques, où l'on ne considère que des segments formés sur une seule droite.

und weiterhin auf Seite IX:

On a donc beaucoup perdu à ne pas introduire systématiquement dans la Géométrie pure, le principe des signes; les progrès de la science en ont été nécessairement retardés.

so kann ich ihm bloss insofern beipflichten, als noch in keinem eigentlichen *Lehrbuche der Geometrie,* sein Werk selbst ausgenommen, das Princip der Zeichen bis jetzt Aufnahme gefunden hat. Ich wenigstens habe dasselbe nicht nur in meinem auch von Herrn Ch. angeführten bar. Calcul, wo ich es an die Spitze gestellt (§. 1.) und auch auf Flächen (§. 17. u. §. 165. Anmerk.) und körperliche Räume (§. 19.) ausgedehnt habe, sondern auch in allen seitdem (seit 1827) von mir veröffentlichten Schriften geometrischen und mechanischen Inhalts stets streng befolgt.

Der Sache selbst willen sei es mir noch gestattet, über eine mir nicht ganz richtig scheinende Bemerkung des H. Ch. auf S. IX ebendaselbst Einiges hinzuzufügen. H. Ch. behauptet dort nämlich, dass mehrere Sätze der Elementargeometrie, namentlich der Satz vom Quadrate der Hypotenuse, der Satz von der Proportionalität homologer Seiten in ähnlichen Dreiecken und der von der Proportionalität der Seiten eines Dreiecks mit den Sinussen der gegenüberstehenden Winkel, keine Anwendung des Princips der Zeichen gestatten.

Allerdings kommt bei dem pythagoräischen Satze das Princip der Zeichen nicht in Berücksichtigung, weil die diesen Satz darstellende Formel bloss Quadrate von Linien enthält, und weil, wenn A und B die Endpunkte einer Linie sind, AB^2 immer positiv ist, mag die positive Richtung der Linie von A nach B, oder von B nach A gehend genommen werden. Allein nicht eben so verhält es sich in Betreff der beiden andern Sätze.

Nicht unerwähnt darf ich noch lassen, dass schon in einer im Jahre 1833 im 8ten Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik er-

---

Denn sind a, b, c drei beliebig in einer Ebene gezogene Gerade, von denen sich b und c in A, c und a in B, a und b in C schneiden, bestimmt man willkührlich die positiven Richtungen von a, b, c, und hiernach die Zeichen der Segmente BC, CA, AB, setzt man hierauf noch von den zwei Sinnen, nach welchen eine Linie in der Ebene gedreht werden kann, den einen, etwa den von der Linken nach der Rechten, als positiven fest und bestimmt hiernach die Winkel bc, ca, ab also, dass bc den Winkel ausdrückt, um welchen die Gerade b um A nach *rechts* gedreht werden muss, bis ihre positive Richtung mit der positiven Richtung von c identisch wird u. s. w.: so verhält sich immer, *auch den Zeichen nach:*

$$BC : CA : AB = \sin bc : \sin ca : \sin ab.$$

Dass H. Ch. bei dieser Proportion das Princip der Zeichen nicht anwendbar findet, hat darin seinen Grund, dass er, statt, wie jetzt geschehen, *alle* Winkel einer und derselben Ebene nach einerlei Sinne zu rechnen, bloss diejenigen Winkel, die eine gemeinsame Spitze haben, nach einerlei Sinne schätzt, dagegen von Winkeln, deren Spitzen verschieden sind, die Sinne als unabhängig von einander betrachtet. (S. X. oben.) Eine solche Annahme kommt aber fast auf dasselbe hinaus, als wenn man von Abschnitten einer und derselben Geraden nur solche, die einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, in Bezug auf ihre Richtungen mit einander vergleichen, hingegen die Richtungen von Abschnitten, deren Anfangspunkte verschieden sind, als unabhängig von einander ansehen wollte.

Was endlich die Proportionen zwischen homologen Seiten zweier ähnlichen Dreiecke betrifft, so lassen sich die Hauptsätze dieser Lehre (Euclid. VI, 4. bis 7.) unter Beobachtung des Princips der Zeichen etwa folgendergestalt fassen:

Haben a, b, c, A, B, C dieselbe Bedeutung wie vorhin, werden $a', b', \ldots C'$ in analoger Bedeutung für ein zweites Dreieck genommen, und werden noch die positiven Richtungen der Geraden $a, b, \ldots c'$, und der Sinn, nach welchem bei jedem der beiden Dreiecke für sich die Winkel gerechnet werden sollen, nach Willkühr festgesetzt, so sind, wenn sich die Abschnitte

$$\text{I.}\quad B'C' : C'A' : A'B' = BC : CA : AB$$

verhalten, die Winkel $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ resp. $= bc$, ca, ab, oder auch resp. $= cb$, ac, ba; und umgekehrt. — Unmittelbar folgt hieraus, indem man von einer der Geraden, etwa von a, die vorher negative Richtung zur positiven nimmt, dass, wenn sich

$$\text{II.}\quad B'C' : C'A' : A'B' = CB : CA : AB$$

verhalten, die Winkel $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ resp. $= bc$, $ca + 180^\circ$, $ab + 180^\circ$, oder auch resp. $= cb$, $ac + 180^\circ$, $ba + 180^\circ$ sind; und umgekehrt.

Verhält sich ferner $C'A' : A'B' = CA : AB$, und ist $b'c' = bc$, so hat eine der beiden Doppelproportionen I. und II. mit ihren Folgen statt; unbestimmt aber bleibt es, welche, und man muss daher, um beide zusammenzufassen, schreiben:

$$B'C'^2 : C'A'^2 = BC^2 : CA^2,\quad 2\,c'a' = 2\,ca,\quad 2\,a'b' = 2\,ab.$$

Wenn endlich $C'A' : A'B' = CA : AB$, und $c'a' = ca$ ist, und wenn die Winkel ab und $a'b'$ in einerlei Quadranten fallen, so sind sie auch einander gleich, sowie $b'c' = bc$, und es verhält sich $B'C' : C'A' = BC : CA$.

schienenen Abhandlung des Herrn J. L. Magnus in Berlin (*nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie*), sowie in Desselben «Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833,» S. 236 u. S. 290, eine mit meiner Kreisverwandtschaft identische gegenseitige Beziehung zweier ebenen Systeme von Punkten, als ein specieller Fall einer noch allgemeineren Beziehung aufgestellt wird, wonach im Allgemeinen einer Geraden ein Kegelschnitt, einem Kegelschnitte eine Linie der vierten Ordnung, und überhaupt einer Linie der *n*ten Ordnung eine Linie der 2*n*ten entspricht, und wodurch man, wie Herr Magnus an einigen sehr merkwürdigen Beispielen zeigt, in den Stand gesetzt wird, aus Eigenschaften von Linien niederer Ordnung entsprechende Eigenschaften für Linien höherer Ordnung abzuleiten. Auch wird an dem zuletzt citirten Orte die Bemerkung, jedoch nur vorübergehends, hinzugefügt, dass, wenn, wie im Vorliegenden, die den Geraden der einen Ebene entsprechenden Kegelschnitte in der andern insgesammt Kreise sind, einem Kreise wiederum ein Kreis, nicht eine Linie der vierten Ordnung entspricht. Dass aber alsdann gewisse Doppelverhältnisse zwischen Linien und gewisse Summen oder Differenzen von Winkeln von der einen Figur zur andern ihre Werthe nicht ändern, finde ich von Herrn Magnus nicht bemerkt. Gleichwohl sind diese schon in meinem früheren Berichte erwiesenen Sätze und die neue daraus entspringende Classe von Aufgaben, wie es mir scheint, eben Dasjenige, wodurch die Kreisverwandtschaft, die einfachste nach den in meinem baryc. Calcul betrachteten fünf Verwandtschaften, für die Elemente der Geometrie einen ähnlichen Werth und Bedeutung, wie jene fünf früheren, erhält; weshalb ich auch diesen Sätzen und den daraus zu ziehenden Folgerungen vorzugsweise meine Aufmerksamkeit zugewendet habe.

Kreisverwandtschaft ebener Figuren.

§. 1. Angenommen, dass in zwei Ebenen jedem Punkte der einen ein Punkt, und nicht mehr als einer, in der andern dergestalt entspricht, dass von je vier Punkten der einen, welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in der andern gleichfalls in einem Kreise enthalten sind, so sollen jedes System von Punkten der einen Ebene und das von den entsprechenden Punkten in der andern gebildete System, also auch jede Linie der einen und die Linie der andern, welche die den Punkten der erstern Linie entsprechenden Punkte verbindet, einander kreisverwandt heissen.

Dabei machen wir, dem Princip der Stetigkeit gemäss, noch die Voraussetzung, dass von je zwei einander unendlich nahen Punkten der einen Ebene die entsprechenden in der andern gleichfalls — wenigstens im Allgemeinen — einander unendlich nahe sind.

§. 2. Im Folgenden wollen wir Punkte der einen Ebene mit nicht accentuirten Buchstaben, und die ihnen nach der Kreisverwandtschaft entsprechenden in der andern mit den gleichnamigen accentuirten Buchstaben bezeichnen; die zwei Ebenen selbst mögen resp. p und p' heissen.

Hiernach wird dem in p durch die Punkte A, B, C zu beschreibenden Kreise der Kreis $A'B'C'$ in p' entsprechen; und wenn D ein Punkt des erstern Kreises ist, so wird D' ein Punkt des letztern sein.

Bewegt sich ein Punkt X in einem Kreise mit ungeändertem Sinne, so bewegt sich X' im entsprechenden Kreise ebenfalls ohne Aenderung des Sinnes. Denn wo nicht, so würde ein und derselbe Punkt des letztern Kreises, auf welchen X' zuerst bei vorwärts- und später bei rückwärtsgehender Bewegung käme, den zwei verschiedenen Punkten des erstern Kreises entsprechen, in denen X gleichzeitig bei seiner stets vorwärtsgehenden Bewegung einträfe. — Ist daher $ABCD$ die Aufeinanderfolge von vier Punkten eines Kreises, so wird man auch im entsprechenden Kreise, von A' ausgehend, nach der einen Seite hin zunächst auf B', nach der andern zunächst auf D' treffen.

Eben so ist klar, dass, jenachdem zwei Kreise in p einander entweder schneiden, oder berühren, oder gar nicht begegnen, dasselbe jedesmal auch die zwei entsprechenden Kreise in p' thun, und dass im Falle des Scheidens oder des Berührens die zwei Schneidepunkte oder der Berührungspunkt des einen Paares den zwei Schneidepunkten oder dem Berührungspunkte des andern entsprechen.

§. 3. Im Allgemeinen wird jedem in endlicher Entfernung liegenden Punkte der einen Ebene ein endlich entfernter Punkt in der andern entsprechen. Es kann aber auch geschehen, dass einem gewissen endlich gelegenen Punkte der einen Ebene, es sei dem M in p, ein unendlich entfernter M' in der andern p' entspricht. Alsdann wird auch einem in p unendlich entfernten Punkte N ein endlich gelegener N' in p' entsprechen. Denn seien A und B zwei endlich entfernte mit M nicht in einer Geraden liegende Punkte in p, und A' und B' ebenfalls endlich entfernt in p', und entsprechen daher

die Kreise ABM und ABN den Kreisen $A'B'M'$ und $A'B'N'$.

Von diesen vier Kreisen ist der erste ABM völlig construirbar. Dagegen ist wegen der unendlichen Entfernung des N der Kreis ABN von der Geraden AB nicht zu unterscheiden; und ebenso ist, wenn nicht allein M', sondern auch N' unendlich entfernt in p' angenommen wird, jeder der Kreise $A'B'M'$ und $A'B'N'$ mit der Geraden $A'B'$ identisch. Mithin würde alsdann der Geraden $A'B'$ sowohl der Kreis ABM, als die Gerade AB, und folglich jedem Punkte in $A'B'$ ein Punkt in ABM und einer in AB entsprechen, welches der in §. 1. gestellten Definition entgegen ist; folglich u. s. w.

Auch kann, wenn dem in der einen Ebene p' unendlich entfernten Punkte M' ein endlich gelegener M in der andern p entspricht, einem nach einer andern Richtung als M' in p' unendlich entfernt liegenden Punkte P' nicht ein von M verschiedener Punkt P in p entsprechen. Denn sonst würden, wenn A und B zwei mit M und P nicht in Einem Kreise liegende Punkte wären, den Kreisen $A'B'M'$ und $A'B'P'$, d. i. einer und derselben Geraden $A'B'$ in p', zwei verschiedene Kreise ABM und ABP in p entsprechen. — *Entspricht daher einem endlich gelegenen Punkte der einen Ebene ein unendlich entfernter in der andern, so bleibt die Richtung, nach welcher der letztere liegt, völlig unbestimmt.*

Nehmen wir zuletzt noch an, dass N und N' unendlich, M aber endlich entfernt liegt, so ist auch M' endlich entfernt. Denn läge M' im Unendlichen, so würde nach dem eben Erwiesenen auch dem N' der Punkt M, und nicht der unendlich entfernte N, entsprechen.

Nach diesem Allen müssen wir entweder setzen, dass zwei gewissen endlich gelegenen Punkten (M und N') der einen und andern Ebene unendlich entfernte (M' und N) in der jedesmal andern entsprechen, — oder dass einem unendlich entfernten Punkte der einen Ebene ein unendlich entfernter in der andern entspricht, in welchem Falle, wie wir zuletzt sahen, jedem endlich liegenden Punkte der einen Ebene ein eben solcher in der andern entsprechen wird.

§. 4. Betrachten wir zuerst die aus der letztern Hypothese, als der einfachern, fliessenden Folgen. Angenommen also, dass dem in p unendlich entfernten Punkte N der in p' unendlich entfernte N' entspricht, so entspricht

1) dem Kreise ABN der Kreis $A'B'N'$, d. i. jeder Geraden der einen Ebene eine Gerade in der andern.

2) Zwei parallelen Geraden der einen Ebene entsprechen zwei parallele in der andern. Denn wäre der gegenseitige Durchschnitt der letztern Geraden ein endlich entfernter Punkt, so müsste es auch (vor. §.) der Durchschnitt der erstern sein.

3) Einem Parallelogramme entspricht daher ein Parallelogramm.

4) Lässt sich durch die vier Ecken des einen Parallelogramms ein Kreis beschreiben, so liegen auch die vier Ecken des andern in einem Kreise, d. h. einem Rechteck entspricht ein Rechteck, und folglich

5) einem rechten Winkel ein rechter Winkel.

6) Schneiden sich daher die zwei Diagonalen des einen Rechtecks rechtwinklig, so müssen, weil ihnen die Diagonalen des andern entsprechen, auch letztere sich rechtwinklig schneiden; d. h. einem Quadrate entspricht ein Quadrat. — Hieraus lässt sich leicht weiter folgern, dass

7) je zwei einander entsprechende Rechtecke einander ähnlich sind. Denn sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Seiten AB und BC sich wie zwei ganze Zahlen m und n verhalten. Man theile AB in m und BC in n gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit der jedesmal andern Seite und zerlege somit das Rechteck in mn Quadrate. Die dieser Figur entsprechende Figur wird daher ein auf gleiche Weise aus mn Quadraten zusammengesetztes Rechteck sein, also ein Rechteck $A'B'C'D'$, dessen Seiten $A'B'$ und $B'C'$ sich wie m und n verhalten, d. i. ein dem $ABCD$ ähnliches Rechteck.

Dass Aehnlichkeit zwischen beiden auch dann noch statt findet, wenn das Verhältniss $AB:BC$ irrational ist, wird hieraus auf bekannte Art weiter geschlossen.

8) Es ist daher auch das dem bei B rechtwinkligen Dreiecke ABC entsprechende Dreieck $A'B'C'$ dem erstern ähnlich. Und da jedes schiefwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, so sind je zwei einander entsprechende Dreiecke überhaupt, und folglich auch je zwei einander entsprechende Systeme von mehr als drei Punkten, einander ähnlich.

§. 5. Unter der Annahme, dass einem unendlich entfernten Punkte der einen Ebene ein unendlich entfernter in der andern entspricht, ist demnach die Kreisverwandtschaft mit der Verwandtschaft der Aehnlichkeit identisch. Da wir also durch diese Annahme zu keiner neuen Verwandtschaft geführt werden, so wollen wir die nach §. 3. hier noch zulässige Hypothese in Untersuchung nehmen, dass nämlich gewissen zwei endlich gelegenen Punkten M und N' in p und p' zwei unendlich entfernte M' und N in p' und p entsprechen. Diese Untersuchung wird sich aber mittelst des für die vorige Annahme gewonnenen Resultats sehr leicht erledigen lassen.

In der That beruhten die im vor. §. gemachten Schlüsse auf der Voraussetzung, dass die Punkte N und N' von den in Betracht gezogenen zwei Figuren — sie mögen f und f' heissen — in Entfernungen liegen, die gegen die Dimensionen dieser Figuren, welche wir uns als endliche dachten, unendlich gross sind. Dieselben Schlüsse werden daher auch noch Geltung haben, wenn f und f' unendlich klein sind, und die Punkte M' und N' sich in endlichen Entfernungen von ihnen befinden, oder auch nur N' von f' endlich, N aber von f unendlich entfernt ist. Denn obwohl dann die durch N' und Punkte von f' gehenden Kreise vollkommen construirbar sind, so lassen sich doch die hier allein zu berücksichtigenden Theile derselben von Geraden nicht unterscheiden.

Angenommen also, dass unter der zuletzt gemachten und von jetzt an allein noch in Betracht kommenden Hypothese Kreisverwandtschaft in der That möglich ist, — eine Möglichkeit, die im Folgenden streng bewiesen werden wird, — so werden je zwei nach dieser Verwandtschaft einander entsprechende Figuren, wenn die Dimensionen der einen und damit nach dem Gesetz der Stetigkeit, im Allgemeinen wenigstens, auch die der andern unendlich klein sind, einander ähnlich sein. Je zwei einander kreisverwandte endliche Figuren sind folglich in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

§. 6. Die endlich gelegenen Punkte M und N' der Ebenen p und p', welche den unendlich entfernten Punkten M' und N in p' und p entsprechen, wollen wir die Centralpunkte der Ebenen p und p' nennen. Aus dieser Definition ergeben sich mittelst des Bisherigen nachstehende Eigenschaften dieser Punkte.

a. Jedem in der einen Ebene durch ihren C.punkt beschriebenen Kreise (MAB) entspricht in der andern Ebene eine nicht durch ihren C.punkt gehende Gerade ($M'A'B'$), und umgekehrt jeder in der einen Ebene nicht durch ihren C.punkt gelegten Geraden (NAB) in der andern ein durch ihren C.punkt gehender Kreis ($N'A'B'$).

b. Jeder in der einen Ebene durch ihren C.punkt gezogenen Geraden (MAN) entspricht in der andern eine durch ihren C.punkt gehende Gerade ($M'A'N'$). Liegen daher zwei Punkte A und B der einen Ebene mit deren C.punkte in einer Geraden, so sind auch die entsprechenden Punkte A' und B' der andern Ebene mit dem C.punkte N' derselben in einer Geraden. Denkt man sich diese Geraden als unendlich grosse Kreise, und ist $MABN$ die Aufeinanderfolge der Punkte in dem einen Kreise, so ist $M'A'B'N'$ die Aufeinanderfolge im andern (§. 2.). Wenn demnach die zwei Punkte der einen Ebene auf einerlei Seite des C.punktes der Ebene liegen, so sind auch die entsprechenden Punkte in der andern auf einerlei Seite ihres C.punktes, und zwar entspricht der dem C.punkte M in der einen Ebene nähere Punkt A der vom C.punkte N' in der andern entferntere A'. Bewegt sich daher ein Punkt in der einen Ebene geradlinig auf ihren C.punkt zu, so bewegt sich in der andern der entsprechende Punkt geradlinig von ihrem C.punkte abwärts, und wenn der erstere Punkt dem C.punkte unendlich nahe kommt, so entfernt sich der letztere in das Unendliche. — Eben so leicht sieht man, dass, wenn die zwei Punkte der einen Ebene auf entgegengesetzten Seiten des C.punktes liegen, dasselbe beziehungsweise auch von den entsprechenden Punkten gilt.

c. Wird ein Kreis k in p von einer durch M gelegten Geraden a in A und B geschnitten, so liegen A und B auf einerlei oder verschiedenen Seiten von M, jenachdem M vom Kreise aus- oder eingeschlossen wird. Dasselbe gilt in Bezug auf N' von den Punkten A' und B', in denen die der a entsprechende Gerade den dem k entsprechenden Kreis schneidet. Nach vorigem Satze *werden* daher *von zwei einander entsprechenden Kreisen die C.punkte ihrer Ebenen entweder beide aus- oder beide eingeschlossen.*

d. Aehnlicherweise erhellet aus *b.*, *dass bei zwei einander entsprechenden die C.punkte ihrer Ebenen einschliessenden Kreisen jedem Punkte innerhalb des einen ein Punkt ausserhalb des andern entspricht, und dass, wenn die zwei Kreise die C.punkte ihrer Ebenen ausschliessen, jedem Punkte innerhalb oder ausserhalb des einen ein resp. innerhalb oder ausserhalb des andern liegender Punkt entspricht.*

§. 7. Beim Ausdrucke eines Kreises durch Nebeneinanderstellung dreier Buchstaben, welche irgend drei Punkte desselben bezeichnen, soll durch die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben zugleich der Sinn dargestellt werden, nach welchem man sich den Kreis durch die Bewegung eines Punktes beschrieben zu denken hat.

Seien nun ABC und XYZ zwei in der Ebene p enthaltene unendlich kleine, einander unendlich nahe und von M endlich entfernte Kreise, also auch die Kreise $A'B'C'$ und $X'Y'Z'$ in p' unendlich klein, einander unendlich nahe und von N' endlich entfernt (§. 6. *b*.). Dabei werden die Figuren $ABCXYZ$ und $A' \ldots Z'$, wegen ihrer unendlichen Kleinheit, einander ähnlich sein (§. 5.), woraus unmittelbar folgt, dass, jenachdem die durch die Folgen ABC und XYZ ausgedrückten Sinne einerlei, oder einander entgegengesetzt sind, auch die Sinne von $A'B'C'$ und $X'Y'Z'$ einerlei sind, oder nicht.

Wenn daher — so können wir weiter schliessen — nach Festsetzung des positiven Sinnes in jeder der beiden Ebenen p und p' gewisse zwei einander entsprechende unendlich kleine Kreise ABC und $A'B'C'$ gleichnamigen Sinnes sind, d. h. der Sinn des $A'B'C'$ positiv oder negativ ist, jenachdem das eine oder das andere der Sinn des ABC ist, so sind auch von je zwei andern einander entsprechenden unendlich kleinen und den erstern unendlich nahen Kreisen XYZ und $X'Y'Z'$ die Sinne gleichnamig.

Man sieht aber leicht, dass dieser Satz auch dann noch gelten muss, wenn letztere zwei Kreise von den zwei erstern endlich entfernt liegen. Denn man kann sich alsdann zwischen ABC und XYZ eine Reihe unendlich vieler unendlich kleiner Kreise DEF, GHJ, ... UVW construirt denken, von denen je zwei nächstfolgende einander, und überdies der erste DEF dem ABC und der letzte UVW dem XYZ, keiner aber dem M, unendlich nahe liegen. Die dieser Reihe entsprechende Reihe in p' wird von derselben Beschaffenheit sein, und es lässt sich nun wie vorhin aus dem gleichnamigen Sinne von ABC und $A'B'C'$ auf den gleichnamigen von DEF und $D'E'F'$, aus diesem auf den von GHJ und $G'H'J'$, u. s. w. und zuletzt aus dem von UVW und $U'V'W'$ auf den von XYZ und $X'Y'Z'$ schliessen.

Im Folgenden soll nach willkührlicher Festsetzung des positiven Sinnes in p der positive Sinn in p' stets also bestimmt werden, *dass von zwei gewissen einander entsprechenden unendlich kleinen Kreisbewegungen, und damit* nach dem eben Erwiesenen *auch von je zwei andern dergleichen die Sinne gleichnamig werden.* — Dass keiner von beiden Kreisen dem C.punkte seiner Ebene unendlich nahe liegen darf, braucht hier nicht zugesetzt zu werden, weil im gegentheiligen Falle nicht beide Kreise zugleich unendlich klein sein können.

Untersuchen wir noch das gegenseitige Verhalten der Sinne zweier entsprechenden Kreisbewegungen ABC und $A'B'C'$, wenn die zwei Kreise von endlicher Grösse sind. Sei D ein vierter auf C folgender und dem A vorangehender Punkt des Kreises ABC, und E ein innerhalb des Kreises in seiner Ebene p liegender Punkt, wonach, wie man leicht wahrnimmt, die zwei Kreisbewegungen $ABCD$ und CDE einerlei Sinne haben. In p' liegt alsdann, jenachdem von den zwei Kreisen ABC und $A'B'C'$ die C.punkte ihrer Ebenen aus- oder eingeschlossen werden, E' innerhalb oder ausserhalb des Kreises $A'B'C'$ (§. 6. *d.*), und es sind folglich die Sinne der Kreisbewegungen $A'B'C'D'$ und $C'D'E'$ resp. einerlei oder verschieden.

Setzen wir nun noch, dass die Hülfspunkte D und E dem C unendlich nahe liegen, und dass daher der Kreis CDE, mithin auch der Kreis $C'D'E'$, unendlich klein wird, so sind nach der vorhin gemachten Annahme die Sinne von CDE und $C'D'E'$ stets gleichnamig, und wir ziehen daher den Schluss, *dass je zwei einander entsprechende Kreisbewegungen gleichnamigen Sinnes sind, oder nicht, jenachdem sie beide die C.punkte ihrer Ebene aus-, oder einschliessen.*

§. 8. Um die weiterhin folgenden Sätze in möglichster Allgemeinheit darstellen und begründen zu können, achte ich es für nöthig, die den Algorithmus mit Winkeln betreffenden Hauptformeln hier einzuschalten.

Alle in derselben Ebene enthaltenen Winkel sollen nach einerlei Sinne gerechnet werden, und man hat hiernach unter dem Winkel ABC immer denjenigen zu verstehen, um welchen in seiner Ebene die Gerade BA um B nach dem vorher in der Ebene bestimmten positiven Sinne gedreht werden muss, bis die von B nach A gehende Richtung mit der von B nach C gehenden zusammenfällt.

Indem der positive Sinn in einer Ebene durch den Sinn irgend einer Kreisbewegung in derselben, also durch die Nebeneinanderstellung dreier nach diesem Sinne auf einander folgender Punkte des Kreises, ausgedrückt wird, so ist, wenn A, B, C nicht in einer Geraden liegen, bei dem durch die Folge ABC ausgedrückten positiven Sinn der Ebene jeder der drei Winkel ABC, BCA, CAB erhaben; hohl dagegen, wenn CBA den positiven Sinn darstellt.

Je zwei um 360^0 unterschiedene Winkel oder Winkelsummen können stets als identisch betrachtet werden, und es wird daher $\pm 360^0$ mit 0,

-180^0 mit $+180^0$; -270^0 mit $+90^0$, etc. im Folgenden gleich geachtet werden.

Dieses vorausgeschickt, ist immer die Winkelsumme

$$(1) \quad ABC+CBA=0, \text{ mithin } CBA=-ABC;$$

$$(2) \quad ABC+BCA+CAB=180^0.$$

Liegt der Punkt D mit A, B, C in einer Ebene, so ist

$$(3) \quad ABC+CBD=ABC-DBC=CBD-CBA=ABD.$$

Dasselbe wird durch die Formeln

$$(3^*) \quad a^\wedge b+b^\wedge c=a^\wedge b-c^\wedge b=b^\wedge c-b^\wedge a=a^\wedge c$$

ausgedrückt, worin a, b, c drei in einer Ebene enthaltene und ihren positiven Richtungen nach bestimmte Gerade bedeuten.

Eben so wie (2), ist $CDA+ACD+DAC=180^0$, und es kommt, wenn man diese Gleichung zu (2) addirt, mit Berücksichtigung von (3):

$$(4) \quad ABC+BCD+CDA+DAB=0,$$

wie auch die vier Punkte $A,..D$ in der Ebene liegen mögen.

Sind A, B, C drei Punkte einer Geraden, so ist

$$(5) \quad ABC=0, \text{ oder } =180^0,$$

jenachdem B ausserhalb, oder zwischen A und C liegt.

Sind A, B, C, D vier Punkte eines Kreises, so ist

$$(6) \quad ABC+CDA=ABC-ADC=0, \text{ oder } =180^0,$$

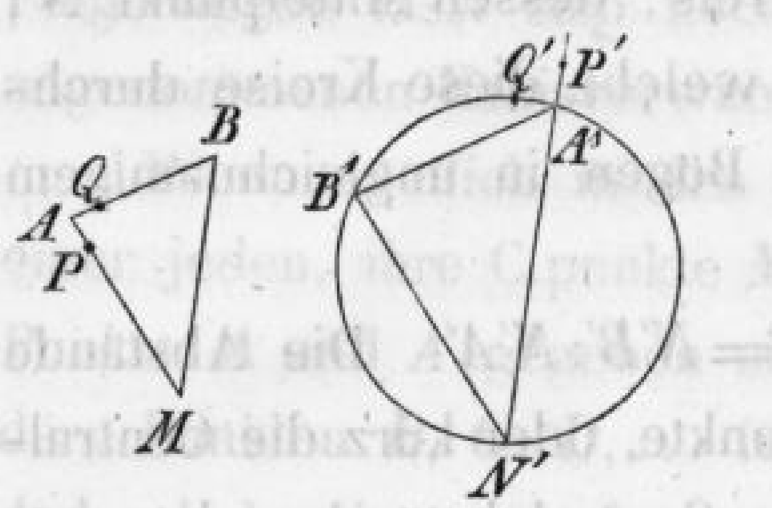
jenachdem B und D auf einerlei, oder verschiedenen Seiten der Sehne AC liegen, oder, was dasselbe sagt: jenachdem die Sehnen AC und BD sich ausserhalb oder innerhalb des Kreises schneiden.

Zusatz. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei einander ähnliche Dreiecke, und sind ihre dadurch zugleich ausgedrückten Sinne gleichnamig, so ist der Winkel $A'B'C'=ABC$, $B'C'A'=BCA$, etc. Bei ungleichnamigen Sinnen ist $A'B'C'=-ABC=CBA$, etc.

Wenn daher ABC und $A'B'C'$ zwei in zwei kreisverwandten Figuren einander entsprechende Dreiecke von unendlich kleinen Seiten sind, so ist nach §. 5. und zufolge der in §. 7. gemachten Voraussetzung der Winkel $A'B'C'=ABC$, $B'C'A'=BCA$, etc.

§. 9. Lehrsatz. *Die zwei Dreiecke MAB und $N'B'A'$, welche zwei Punkte A und B der einen Ebene mit dem C.punkte M der letztern und die zwei ihnen entsprechenden in umgekehrter Folge genommenen Punkte A' und B' der andern Ebene mit deren C.punkte N' bilden, sind einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes.*

Beweis. Seien P und Q zwei dem A unendlich nahe Punkte, welche von A geradlinig nach M und nach B zu liegen. Alsdann werden auch P' und Q' dem A' unendlich nahe sein, und zwar P' in der Geraden $N'A'$ über A' hinaus (§. 6. *b.*); Q' aber wird ein Punkt des der Geraden AB entsprechenden Kreises $A'B'N'$ sein (§. 6. *a.*) und in diesem Kreise mit B' auf einerlei Seite der Sehne $A'N'$ liegen, weil $AQBN$ die Aufeinanderfolge der Punkte in dem entsprechenden unendlichen Kreise ist (§. 2.).



Es ist nun der Winkel $MAB = PAQ = P'A'Q'$ (§. 8. Zus.) $= 180^0 - Q'A'N' = A'N'Q' + N'Q'A'$ (§. 8. (2)) $= N'Q'A'$, wegen der unendlichen Kleinheit von $A'N'Q'$. Ferner ist $N'Q'A' = N'B'A'$ (§. 8. (6)), und daher $MAB = N'B'A'$. Auf analoge Weise zeigt sich, dass der Winkel $ABM = B'A'N'$; folglich u. s. w.

Zusatz. Die aus den eben gemachten Schlüssen fliessende Gleichung $N'B'A' = P'A'Q'$ kann uns noch zu einer späterhin nützlich werdenden Formel hinleiten. Es ist nämlich $P'A'Q' = A'P'{}^{\wedge}A'Q' = N'A'{}^{\wedge}A'Q'$, weil $A'P'$ und $N'A'$ einerlei Richtung haben. Die Richtung $A'Q'$ aber ist einerlei mit der Richtung der Kreisbewegung $A'B'N'$ im Punkte A'. Man kann daher den Winkel $P'A'Q'$, $= N'B'A'$, auch durch $N'A'{}^{\wedge}A'B'N'$ vorstellen und erhält damit, A, B, C statt A', B', N' geschrieben, die für je drei Punkte gültige Formel

$$CBA = CA{}^{\wedge}ABC,$$

worin die Ternion ABC neben dem Winkelzeichen die Richtung bedeutet, welche der von A durch B nach C gehende Kreisbogen im Punkte A hat. Auch lässt sich diese Formel noch darstellen durch

$$ABC = ABC{}^{\wedge}CA \text{ oder}$$

$$ABC = ABC{}^{\wedge}AC + 180^0.$$

§. 10. **Folgerungen.** *a.* Wegen der Aehnlichkeit und des gleichnamigen Sinnes der Dreiecke MAB und $N'B'A'$ ist der Winkel $AMB = B'N'A' = -A'N'B'$, d. h. der Winkel, den in der einen Ebene zwei durch ihren C.punkt gelegte Gerade mit einander machen, ist dem von den entsprechenden und daher (§. 6. *b.*) durch den C.punkt der andern Ebene gehenden Geraden gebildeten Winkel gleich, nur von entgegengesetztem Zeichen.

b. Ist $MA = MB$, so ist auch $N'A' = N'B'$. Einem Kreise, dessen Mittelpunkt M ist, entspricht folglich ein Kreis, dessen Mittelpunkt N'; und zwei einander entsprechende Punkte, welche diese Kreise durchlaufen, beschreiben gleichzeitig ähnliche Bögen in ungleichnamigem Sinne (§. 7.).

c. Ueberhaupt verhält sich $MA : MB = N'B' : N'A'$. Die Abstände der Punkte der einen Ebene von deren C.punkte, oder kurz die Centralabstände dieser Punkte, sind demnach den Centralabständen der entsprechenden Punkte der andern Ebene umgekehrt proportional, oder, was dasselbe ausdrückt: von einem Paare entsprechender Punkte zum andern ist das Product aus ihren Centralabständen von constanter Grösse.

d. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MAB und $N'B'A'$ folgt noch die Proportion $$AB : BM = B'A' : A'N';$$
und eben so hat man, wenn C und C', D und D' noch zwei andere Paare sich entsprechender Punkte sind, wegen der ähnlichen Dreiecke MBC und $N'C'B'$, etc.
$$MB : BC = N'C' : C'B',$$
$$CD : DM = D'C' : C'N',$$
$$MD : DA = N'A' : A'D'.$$
Die Zusammensetzung dieser vier Proportionen giebt
$$AB . CD : BC . DA = A'B' . C'D' : B'C' . D'A',$$
eine von den C.punkten freie zwischen vier Paaren entsprechender Punkte bestehende Proportion.

Uebrigens werden in diesen Proportionen — und so auch in allen später folgenden — alle einzelnen Linien, als welche im Allgemeinen in verschiedenen Geraden liegen, in absolutem d. i. positivem Sinne genommen.

e. Eine dieser Proportion analoge Gleichung lässt sich auch zwischen den Winkeln der beiden Figuren ableiten. Denn es ist der Winkel
$$ABM = B'A'N', \text{ und eben so}$$
$$MBC = N'C'B',$$
$$CDM = D'C'N',$$
$$MDA = N'A'D'.$$

Die Addition dieser vier Gleichungen giebt aber mit Berücksichtigung der Formel (3) in §. 8.:
$$ABC + CDA = B'A'D' + D'C'B', \text{ und dieses}$$
$$= A'B'C' + C'D'A',$$
weil nach (4) ebds. $B'A'D' + A'D'C' + D'C'B' + C'B'A' = 0$ ist.

f. Mittelst des Lehrsatzes in §. 9. und der jetzt aus ihm gezogenen Folgerungen lässt sich noch die Realität der bisher nur problematisch angenommenen Kreisverwandtschaft leicht darthun.

Wenn nämlich in den beiden Ebenen p und p' der positive Sinn einer jeden, ihre C.punkte M und N' und zwei einander entsprechende Punkte A und A' gegeben sind, so kann man nach §. 9. zu allen andern Punkten $B, C, D, \ldots$ in p die entsprechenden $B', C', D', \ldots$ in p' dadurch bestimmen, dass man die Dreiecke $N'A'B'$, $N'A'C'$, $N'A'D'$, etc. ähnlich und gleichnamigen Sinnes mit den Dreiecken MBA, MCA, MDA, etc. macht; und es ist nun noch zu zeigen, dass, wie es die Definition der Kreisverwandtschaft verlangt, von je vier Punkten in p oder p', welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in p' oder p gleichfalls in einem Kreise enthalten sind.

In der That sind in Folge der gemachten Construction erstens die Winkel $A'N'B'$, $A'N'C'$, $A'N'D'$, etc. $= -AMB, -AMC$, etc., und daher überhaupt jeder von zweien der Richtungen $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$,.... gebildete Winkel $=$ dem von den zwei entsprechenden unter den Richtungen $MA, MB, MC, \ldots$ gebildeten Winkel, nur von entgegengesetztem Zeichen, z. B. $B'N'C' = CMB$; es sind zweitens die Längen $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$,... den Längen MA, MB, MC,... verkehrt proportional, z. B. $N'B' : N'C' = MC : MB$. Mithin sind die Dreiecke MBC und $N'C'B'$, und eben so nächst den vorhin genannten auch je zwei andere Dreiecke, welche an M und N' von zwei Paaren entsprechender Punkte in umgekehrter Folge gebildet werden, einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes. Es besteht folglich zwischen je vier Punkten, etwa $A, .. D$, der einen Ebene und den entsprechenden $A', .. D'$ in der andern die in *e.* erhaltene Winkelgleichung $$ABC + CDA = A'B'C' + C'D'A'.$$

Liegen nun $A, .. D$ in einem Kreise, und ist daher nach §. 8. (6) die linke Seite dieser Gleichung $=0$, oder $=180^0$, so müssen zufolge dieser Gleichung und mit Anwendung des auch umgekehrt geltenden Satzes in §. 8. $A', .. D'$ gleichfalls in einem Kreise liegen, wie zu beweisen war. — Man bemerke nur noch, dass, nach demselben Satze, jenachdem sich die Sehnen AC und BD des erstern Kreises ausserhalb oder innerhalb desselben schneiden, ein Gleiches von den entsprechenden Sehnen des letztern geschieht, was damit übereinstimmt, dass die sich entsprechenden Punkte sich entsprechender Kreise in jedem nach einerlei Ordnung auf einander folgen (§. 2.).

§. 11. Um die in *d.* und *e.* des vor. §. erhaltenen Beziehungen zwischen kreisverwandten Figuren einfach ausdrücken zu können, wollen wir ein durch vier Punkte $A, .. D$ einer Ebene bestimmtes Verhältniss von der Form $AB.CD:BC.DA$ ein **Doppelverhältniss**, und eine Winkelsumme von der Form $ABC+CDA$, die sich auch als der Winkelunterschied $ABC-ADC$ oder $CDA-CBA$ schreiben lässt, einen **Doppelwinkel** nennen.

Dieses festgesetzt, **ist bei zwei kreisverwandten ebenen Figuren** nach der Folgerung *d.* **jedes Doppelverhältniss, und** nach *e.* **jeder Doppelwinkel der einen Figur dem auf gleiche Weise aus den entsprechenden Punkten der andern gebildeten Doppelverhältnisse oder Doppelwinkel gleich.**

Weil D.verhältnisse und D.winkel die einfachsten von den C.punkten unabhängigen Grössen sind, welche bei der Kreisverwandtschaft von einer Figur zur andern gleiche Werthe haben, und weil sich deshalb erwarten lässt, dass diese Grössen bei unsern weitern Untersuchungen besonders häufig in Rechnung kommen werden, so wollen wir im Voraus einen Algorithmus uns zu bilden suchen, mit dessen Hülfe wir dergleichen Rechnungen möglichst kurz und bequem ausführen können.

Betrachten wir zuerst das D.verhältniss $AB.CD:BC.DA$, so ergiebt sich aus dessen erstem Gliede das zweite, wenn man im ersten statt dessen ersten, zweiten, dritten und vierten Buchstaben resp. den zweiten, dritten, vierten und ersten setzt. Wir wollen daher dieses D.verhältniss, um uns das doppelte Schreiben seiner Buchstaben zu ersparen, durch sein erstes Glied allein, das wir nach Weglassung des Multiplicationszeichens (.) mit Haken einschliessen, also durch

$$(ABCD)$$

ausdrücken.

Umgekehrt wird hiernach von dem abgekürzt ausgedrückten D.verhältnisse $(BCDA)$ das erste Glied $BC.DA$ und das zweite $CD.AB$ sein. Zugleich ersehen wir hieraus, dass $(BCDA) =$ dem reciproken Werthe von $(ABCD)$ ist, und dass daher, wenn man in dem Ausdrucke eines D.verhältnisses die cyklische Aufeinanderfolge der Buchstaben, auch dem Sinne nach, beibehält, zum ersten Buchstaben aber den ursprünglich zweiten nimmt, der Werth des neuen D.verhältnisses dem reciproken des ursprünglichen gleich ist. Man hat demnach

$$(ABCD) = \frac{1}{(BCDA)} = (CDAB) = \frac{1}{(DABC)}\,.$$

Lassen wir jetzt die Buchstaben nach einem dem ursprünglichen entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, behalten aber den ersten Buchstaben als ersten bei, so verwandelt sich der Werth des D.verhältnisses gleichfalls in den reciproken. Denn aus $(ABCD)$ wird auf solche Weise $(ADCB), = AD.CB:DC.BA, = \frac{1}{(ABCD)}$. Gleicherweise findet sich $(BADC) = \frac{1}{(BCDA)} = (ABCD)$, und eben so

$$(CBAD) = \frac{1}{(ABCD)},\ (DCBA) = (ABCD).$$

§. 12. Immer giebt es drei verschiedene Vierecke, welche dieselben vier Punkte A, B, C, D zu Ecken haben. Es sind diese Vierecke, wenn man stets D die vierte Ecke sein lässt:

$$ABCD,\ BCAD,\ CABD.$$

Jedes derselben lässt sich auf achterlei Weise ausdrücken, indem man die cyklische Folge seiner Ecken, nicht auch den Sinn dieser Folge, unverändert bleiben lässt, und man erhält somit die vier und zwanzig aus den vier Elementen $A, .. D$ zu bildenden Permutationen.

Der vorige §. hat uns gezeigt, dass je zwei der acht Ausdrücke des ersten Vierecks, und damit überhaupt je zwei der acht Ausdrücke eines und desselben Vierecks, als Ausdrücke von D.verhältnissen, entweder einander gleich sind, oder in reciproker Beziehung zu einander stehen. Dagegen sind je zwei Ausdrücke zweier verschiedenen Vierecke im Allgemeinen von einander unabhängig. Wohl aber giebt es eine Relation zwischen je drei Ausdrücken, deren jeder einem andern der drei Vierecke angehört; denn es ist, wenn diesmal auch auf die Zeichen bei der Entwickelung Rücksicht genommen wird:

$$(ABCD)\,(BCAD)\,(CABD) = -1.$$

Zusatz. In dem besondern Falle, wenn die vier Punkte in einer Geraden liegen, sind auch je zwei zu verschiedenen Vierecken gehörige Ausdrücke, und somit je zwei aller vier und zwanzig Ausdrücke, von einander abhängig. Denn, wie man leicht findet, ist alsdann mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1,$$

worin der erste Ausdruck zum ersten und der zweite zum zweiten Viereck gehört.

Letztere Formel stimmt übrigens ganz mit derjenigen überein, die sich, gleichfalls unter der Voraussetzung, dass die vier Punkte in einer Geraden enthalten sind, bereits in meinem baryc. Calcul S. 247, III. findet, obgleich die Ausdrücke dort in einer etwas andern Bedeutung als hier genommen werden, indem das dortige (A, B, C, D) einerlei mit dem hiesigen $(ACBD)$ ist. Ich habe aber jene ältere Bezeichnungsweise verlassen und diese neue gewählt, besonders um deswillen, weil die letztere auch den noch zusammengesetzteren Vieleckschnittsverhältnissen (Bar. Calc. S. 299) angepasst werden kann, indem man z. B. das Dreieckschnittsverhältniss

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}$$

auf eine der vorigen entsprechende Weise durch $(ABCDEF)$ ausdrückt.

§. 13. Ganz analoge Beziehungen, wie zwischen den bei einem System von vier Punkten einer Ebene sich bildenden D.verhältnissen, finden auch zwischen den durch ein solches System bestimmten D.winkeln statt. — In der That ist nach §. 8. (4) der D.winkel

$$BCD+DAB=-ABC-CDA.$$

Werde nun die Winkelsumme $ABC+CDA$ oder, was dasselbe ist, der Winkelunterschied $ABC-ADC$, der Kürze willen schlechthin durch

$$ABCD$$

ausgedrückt, so dass man, um hieraus die Winkelsumme oder den Winkelunterschied rückwärts abzuleiten, die drei ersten Buchstaben des Ausdrucks in ihrer Folge als ersten Winkel schreibt und als die drei Buchstaben des zweiten Winkels, wenn er additiv sein soll, den dritten, vierten und ersten Buchstaben des Ausdrucks setzt, ihn dagegen, soll er subtractiv sein, aus dem ersten Winkel dadurch folgert, dass man dessen mittlern Buchstaben in den vierten des Ausdrucks verwandelt.

Die vorige Gleichung ist hiernach zu schreiben

$$BCDA=-ABCD,$$

und daraus zu schliessen, dass, wenn man einen solchen Ausdruck, ohne die cyklische Folge seiner Buchstaben und den Sinn dieser Folge zu ändern, mit seinem zweiten Buchstaben anfangen lässt, sein Werth in den entgegengesetzten übergeht. Es ist daher

$$ABCD=-BCDA=CDAB=-DABC.$$

Gleicherweise verwandelt sich der Werth des Ausdrucks in den entgegengesetzten, wenn man, die Folge und den Anfangsbuchstaben beibehaltend, den Sinn der Folge umkehrt. Denn man hat

$$ADC+CBA=-ABC-CDA, \text{ also}$$

$$ADCB=-ABCD, \text{ und eben so}$$

$$BADC=-CBAD=DCBA=ABCD.$$

Alle acht Ausdrücke, welche einerlei cyklische Folge haben und daher ein und dasselbe der drei im vor. §. gedachten Vierecke ausdrücken, sind demnach ihren absoluten Werthen nach einander gleich; je zwei derselben sind aber mit einerlei oder verschiedenen Zeichen behaftet, jenachdem die zwei ihnen homologen Ausdrücke für D.verhältnisse entweder einander gleich sind, oder der eine das Reciproke des andern ist, — so dass die jetzigen D.winkel sich wie die Logarithmen der entsprechenden D.verhältnisse verhalten.

Eben so, wie im vor. §., sind ferner auch hier je zwei zu verschiedenen Vierecken gehörige Ausdrücke von einander unabhängig, wogegen zwischen je drei Ausdrücken, welche zu den drei verschiedenen Vierecken gehören, immer eine Relation statt hat. Denn es ist

$$ABC + BCA + CAB = 180^{\circ}, \text{ und}$$
$$CDA + ADB + BDC = 0;$$

folglich, wenn man diese Gleichungen addirt:

$$ABCD + BCAD + CABD = 180^{\circ},$$

eine Formel, die zu der entsprechenden im vor. §. gleichfalls in logarithmischer Beziehung steht.

§. 14. Zusätze. *a.* Liegen A, B, C, D in einem Kreise, so ist, jenachdem sich die Sehnen AC und BD ausserhalb, oder innerhalb des Kreises schneiden,

$$ABCD = 0, \text{ oder } = 180^{\circ} \text{ (§. 8. (6))},$$

also überhaupt $2 . ABCD = 0$;

und umgekehrt folgt aus dieser Gleichung die Kreislage der vier Punkte.

b. Sind A, B, C, D, E irgend fünf Punkte einer Ebene, so hat man

$$ACBD = ACB - ADB, \quad ADBE = ADB - AEB$$

und $AEBC = AEB - ACB$, folglich

$$ACBD + ADBE + AEBC = 0,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$ACBD + ADBE = ACBE.$$

Es lässt sich diese Formel leicht dadurch behalten, dass in jedem ihrer drei Glieder A der erste und B der dritte Buchstabe ist, und dass, wenn man diese zwei Buchstaben weglässt, die restirende Formel $CD + DE + EC = 0$, oder $CD + DE = CE$ die bekannte Relation zwischen den durch drei Punkte in einer Geraden bestimmten Abschnitten darstellt.

Nachträglich werde hier noch die analoge zwischen D.verhältnissen obwaltende Relation bemerkt:

$(ACBD)(ADBE)(AEBC)=1$ oder, was dasselbe ist,
$(ACBD)(ADBE)=(ACBE)$. (Vergl. Bar. Calc. S. 250.)

c. Der D.winkel $ABC-ADC$ kann mittelst derselben Buchstaben auch als ein einziger Winkel dargestellt werden. In der That ist nach §. 9. Zus. $CBA=CA^{\wedge}ABC$, $CDA=CA^{\wedge}ADC$.
Die erstere dieser Gleichungen von der letztern abgezogen, giebt aber mit Anwendung der Formel (3*) in §. 8.:

$$ABC-ADC=ABC^{\wedge}ADC,$$

worin die zwei Ternionen zur Rechten zwei Kreise oder vielmehr die Richtungen bedeuten, nach denen sich zwei, diese Kreise nach den zugleich mit ausgedrückten Sinnen derselben beschreibenden, Punkte beim Duchgange durch A bewegen.

d. Die identische Gleichung $ABCD=BADC$ lässt sich hiernach auch schreiben $ABC^{\wedge}ADC=BAD^{\wedge}BCD$,
wonach, *wenn durch je drei von vier in einer Ebene liegenden Punkten Kreise beschrieben werden, die Winkel, welche irgend zwei dieser vier Kreise mit einander machen, den von den jedesmal zwei übrigen Kreisen gebildeten Winkeln gleich sind.*

e. Dieselbe Transformation, auf die Gleichung $ABCD=A'B'C'D'$ (§. 10. *e.*) angewendet, giebt

$$ABC^{\wedge}ADC=A'B'C'^{\wedge}A'D'C'$$

und lehrt uns damit den Satz, dass bei zwei kreisverwandten Figuren je zwei sich schneidende Kreise der einen sich unter denselben Winkeln, wie die entsprechenden Kreise der andern Figur, schneiden; was übrigens schon aus der Erwägung hervorgeht, dass die Durchschnittswinkel zweier Kreise einerlei mit denen sind, welche die zwei in dem einen oder andern Durchschnitte zusammenstossenden Elemente des einen und des andern Kreises mit einander machen, und dass kreisverwandte Figuren in ihren Elementartheilen einander ähnlich sind (§. 5).

§. 15. Von den zwei in den letztvorhergehenden §§. betrachteten Grössenformen $(ABCD)$ und $ABCD$ ist jede von den vier durch vier Punkte einer Ebene bestimmten Linien BA, BC, DA, DC, und zwar die erstere bloss von den Längen, die letztere bloss von den Richtungen dieser Linien abhängig. Es ist nämlich $(ABCD)$ = dem Verhältnisse zwischen den Verhältnissen $BA:BC$ und $DA:DC$, und $ABCD$ = dem Unterschiede zwischen den Unterschieden, um welche einerseits die Richtung BC von der BA, und andererseits die Richtung DC von der DA abweicht.

Zwischen der Verwandtschaft der Aehnlichkeit und der Kreisverwandtschaft findet hiernach, ausser der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen kreisverwandter Figuren, noch eine andere merkwürdige Beziehung statt. Sowie nämlich bei zwei einander ähnlichen Figuren $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ die einfachen Linienverhältnisse $BA:BC$ und $B'A':B'C'$, desgleichen die Unterschiede zwischen den Richtungen dieser Linien oder die Winkel ABC und $A'B'C'$ von gleicher Grösse sind, so bleiben bei kreisverwandten Figuren Verhältnisse zwischen jenen einfachen Verhältnissen und nicht minder Unterschiede zwischen jenen einfachen Unterschieden oder Winkeln von einer Figur zur andern constant.

Zusatz. Sowie die D.verhältnisse, bleiben auch die in §. 12. Zus. angedeuteten noch zusammengesetzteren Verhältnisse zwischen Linien bei kreisverwandten Figuren von gleicher Grösse, indem sich jedes derselben in ein Product von D.verhältnissen auflösen lässt. Denn es ist, alle Linien in absolutem Sinne genommen:

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DA}\times\frac{AD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA},$$

oder mit Anwendung der abgekürzten Schreibart:

$$(ABCDEF)=(ABCD)\,(ADEF).$$

Analoges hat bei der Zusammensetzung von drei oder mehrern Winkeln statt. Denn versteht man unter $ABCDEF$ die Summe der drei Winkel ABC, CDE, EFA, so ist

$$ABCDEF=ABC+CDA+ADE+EFA=ABCD+ADEF.$$

Der dreitheilige Winkel $A\ldots.F$, als der Summe zweier D.winkel gleich, hat mithin ebenfalls in allen kreisverwandten Figuren denselben Werth.

Uebrigens sieht man leicht, dass die einfachen in §. 11. bei D.verhältnissen und in §. 13. bei D.winkeln bemerkten Relationen auch bei den zusammengesetzteren Verhältnissen und Winkeln obwalten, indem

$$(ABCDEF)=\frac{1}{(BCDEFA)}=(CDEFAB)=\text{etc.}$$
$$=(FEDCBA)=\frac{1}{(EDCBAF)}=\text{etc. und}$$
$$ABCDEF=-BCDEFA=CDEFAB=\text{etc.}$$
$$=FEDCBA=-EDCBAF=\text{etc. ist.}$$

§. 16. Merkwürdige Relationen bestehen noch zwischen den aus denselben vier Punkten gebildeten D.verhältnissen einerseits und den

D.winkeln andererseits. Um sie zu erhalten denke man sich zu einem beliebigen System von vier in einer Ebene liegenden Punkten A, B, C, D ein kreisverwandtes System $A', .. D'$ construirt und nehme dabei D als C.punkt jener Ebene, also D' unendlich entfernt an. Alsdann sind die D.verhältnisse und D.winkel der Figur $A .. D$ den einfachen Verhältnissen zwischen den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ und dessen Winkeln gleich, und alle die bekannten Relationen, welche zwischen diesen einfachen Verhältnissen und Winkeln statt haben, müssen bei den entsprechenden D.verhältnissen und D.winkeln der Figur $A .. D$ sich wiederfinden.

In der That verhält sich (§. 10. *d.*)

$$AB . CD : BC . DA = A'B' . C'D' : B'C' . D'A' = A'B' : B'C',$$

weil, wegen der unendlichen Entfernung des D', $C'D' : D'A' = 1 : 1$ ist, und eben so $BC . AD : CA . DB = B'C' : C'A'$.

Ferner hat man

$$ABCD = A'B'C'D' = A'B'C',$$

weil aus demselben Grunde der Winkel $C'D'A' = 0$ ist; und gleicherweise

$$BCAD = B'C'A', \quad CABD = C'A'B'.$$

Die drei Winkel

$$ABCD, \; BCAD, \; CABD,$$

deren Summe wir bereits in §. 13. $= 180^0$ fanden, sind demnach die Winkel eines Dreiecks, dessen ihnen gegenüberliegende Seiten sich wie

$AC . BD$, $BA . CD$, $CB . AD$ verhalten. *)

Insbesondere ist daher

$$\sin ABCD : \sin BCAD = AC . BD : BA . CD = (CABD).$$

Folgerungen. *a.* Sind die drei D.winkel $ABCD$, $BCAD$, $CABD$ eines ebenen Vierecks den einfachen Winkeln $A'B'C'$, etc. eines Dreiecks gleich, so sind auch die drei D.verhältnisse $(ABCD)$, etc. beim Viereck den einfachen Verhältnissen $A'B' : B'C'$, etc. beim Dreieck gleich, und umgekehrt.

b. Wenn der C.punkt D der Ebene ABC ausserhalb (innerhalb) des Kreises ABC liegt, so liegt auch der C.punkt der Ebene $A'B'C'$ ausserhalb

---

*) Ich habe diesen Satz bereits in meinem im Eingange zuerst erwähnten Aufsatze S. 49 aufgestellt und durch Anwendung complexer Grössen bewiesen. Ich hielt ihn damals für neu. Wie ich indessen durch meinen geehrten Freund, Herrn Dr. Balzer in Dresden, später benachrichtigt worden bin, ist derselbe Satz nebst mehreren aus ihm gezogenen interessanten Folgerungen schon in einer in Grunert's Archive der Math. Bd. II. S. 240 befindlichen Abhandlung des Herrn Prof. Bretschneider in Gotha enthalten.

(innerhalb) des Kreises $A'B'C'$ (§. 6. *c.*). Die Sinne der Kreisbewegungen ABC und $A'B'C'$ sind alsdann gleichnamig (ungleichn.) (§. 7.), und folglich die Winkel ABC und $A'B'C'$ gleichartig, d. i. beide hohl, oder beide erhaben (ungleichartig, d. i. der eine hohl, der andere erhaben) (§. 8. Zus.). Der Winkel $A'B'C'$ ist aber nach dem Obigen $= ABCD$, und folglich $ABCD$ gleichartig (ungleichartig) mit ABC.

Jenachdem daher von vier Punkten $A, .. D$ in einer Ebene der eine D ausser- oder innerhalb des durch die drei übrigen A, B, C zu beschreibenden Kreises liegt, ist der D.winkel $ABCD$ gleichartig oder ungleichartig mit dem einfachen ABC.

---

§. 17. In §. 10. ist gezeigt worden, wie zu einem Systeme in einer Ebene p liegender Punkte $A, B, \ldots$ in einer andern Ebene p' ein ihm kreisverwandtes $A', B', \ldots$ construirt werden kann, wenn noch die positiven Sinne in p und in p', die beiden C.punkte M und N', sowie der Punkt A' gegeben sind. Somit sind von drei Punkten M, N, A in p die entsprechenden M', N', A' in p' gegeben, nur dass dabei N und M' unendlich entfernt liegen. Indessen kann man hiernach erwarten, dass überhaupt mit drei willkührlich angenommenen Punkten in p', welche irgend dreien des Systems in p entsprechen, das System in p' sich construiren lassen wird. — Nachfolgende Sätze werden diese Erwartung rechtfertigen.

Lehrsatz. Nach Feststellung der positiven Sinne in den Ebenen p und p' zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kann in der Ebene des einen ABC ein Punkt M unzweideutig so bestimmt werden, dass die D.winkel des Vierecks $ABCM$ den Winkeln des Dreiecks $A'B'C'$ gleich werden, nämlich

$$ABCM = A'B'C',\quad BCAM = B'C'A',\ \text{also auch}\ CABM = C'A'B'.$$

Beweis. Nach §. 14. *c.* ist die erste dieser Gleichungen identisch mit

$$ABC\hat{\ }AMC = A'B'C',$$

und die zweite, wofür man auch $ACBM = A'C'B'$ schreiben kann, identisch mit

$$ACB\hat{\ }AMB = ABC\hat{\ }AMB + 180^0 = A'C'B'.$$

Hiernach findet sich M, als der zweite Durchschnitt zweier Kreise, von denen der eine AMC, durch A und C gehend, mit dem Kreise ABC in A einen Winkel $= A'B'C'$ bildet, und der andere AMB, durch A und B gehend, mit demselben Kreise ABC in A einen Winkel $= A'C'B' + 180^0$ macht.

Zusatz. Die Sinne in den Ebenen p und p' sind von einander unabhängig. Wird der Sinn in p so angenommen, dass der Winkel ABC hohl ist, so kann nach der Bestimmung des Sinnes in p' der Winkel $A'B'C'$ entweder gleichfalls hohl, oder auch erhaben sein. Jede dieser zwei Bestimmungen giebt aber für den Punkt M einen andern Ort. Denn bei der erstern (letztern) ist der Winkel ABC mit $A'B'C'$, also auch mit $ABCM$ gleichartig (ungleichartig), und M liegt folglich (vor. §. Zus. b.) ausserhalb (innerhalb) des Kreises ABC.

§. 18. Lehrsatz. Werden, wie es nach vorigem Satze möglich ist, in den Ebenen zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ resp. die Punkte M und N' so bestimmt, dass nach Festsetzung der Sinne in den beiden Ebenen die D.winkel des Vierecks $ABCM$ den Winkeln des Dreiecks $A'B'C'$, und ebenso die D.winkel des Vierecks $A'B'C'N'$ den Winkeln des Dreiecks ABC gleich werden, so sind die Dreiecke $N'A'B'$, $N'B'C'$, $N'C'A'$ resp. den Dreiecken MBA, MCB, MAC ähnlich und mit ihnen gleichnamigen Sinnes.

Beweis. Zu Folge der geforderten Lage von M und N' soll sein

$$ABC + CMA = A'B'C' \quad \text{und} \quad A'B'C' + C'N'A' = ABC.$$

Die Addition dieser Gleichungen giebt $C'N'A' + CMA = 0$ oder

$$(a) \qquad C'N'A' = AMC.$$

Aus derselben Gleichheit der D.winkel der Vierecke $ABCM$ und $A'B'C'N'$ mit den Winkeln der Dreiecke $A'B'C'$ und ABC folgt ferner (§. 16. Zus. a.)

$$AB \,.\, CM : BC \,.\, AM = A'B' : B'C' \quad \text{und}$$

$$A'B' \,.\, C'N' : B'C' \,.\, A'N' = AB : BC, \quad \text{mithin}$$

$$(b) \qquad C'N' : A'N' = AM : CM.$$

Aus (a) in Verbindung mit (b) fliesst aber, dass die Dreiecke $N'C'A'$ und MAC einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes sind; und ähnlicherweise lässt sich dasselbe für die Dreiecke $N'A'B'$ und MBA, $N'B'C'$ und MCB beweisen.

§. 19. Lehrsatz. Soll zu einem Systeme von Punkten $A, B, C, D, \ldots$ in einer Ebene p ein ihm kreisverwandtes in einer Ebene p' construirt werden, so können drei Punkte des letztern, — es seien die den A, B, C entsprechenden A', B', C', — desgleichen die positiven Sinne in p und p' willkührlich genommen werden. Alsdann aber ist der jedem vierten

Punkte des erstern Systems entsprechende Punkt des letztern unzweideutig bestimmt.

Beweis. Man füge auf die in §. 17. bemerkte Weise zu den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ die Punkte M und N' hinzu, so sind nach §. 18. die Dreiecke MBA und $N'A'B'$, sowie MCA und $N'A'C'$ einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes. Und wenn auf gleiche Art zu jedem vierten Punkte D der entsprechende D' dadurch bestimmt wird, dass man dem Dreiecke MDA das Dreieck $N'A'D'$ ähnlich und gleichnamigen Sinnes macht, so sind die Figuren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ kreisverwandt (§. 10. *f.*).

Zusätze. *a.* In den Fällen, wenn einer der beiden Kreise ABC und $A'B'C'$, oder auch beide, gerade Linien sind, ist die Bestimmung der C.punkte M und N' nach §. 17. mit Hülfe von D.winkeln nicht mehr statthaft, sondern es müssen D.verhältnisse angewendet werden.

In der That, liegen A, B, C in einer Geraden, und desgleichen auch A', B', C', so sind in denselben Geraden resp. auch M und N' begriffen, so dass

$$(ABCM) = (A'B'C'M') = -A'B' : B'C'$$
$$\text{und } (A'B'C'N') = (ABCN) = -AB : BC.$$

Hiernach werden unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, wenn das Verhältniss $-(A'B' : B'C') : (AB : BC) = e : 1$ gesetzt wird, M und N' mittelst der Proportionen

$$CM : MA = e : 1 \text{ und } C'N' : N'A' = 1 : e \quad \text{gefunden.}$$

Liegen aber nur A', B', C' in einer Geraden, so ist M ein Punkt des Kreises ABC und darin nach derselben Proportion wie vorhin zu bestimmen. Es geschieht dieses mittelst eines die Linie CA rechtwinklig und harmonisch in dem Verhältnisse $e:1$ schneidenden Kreises (vergl. §. 22. *a.*), indem von den zwei Durchschnitten desselben mit dem Kreise ABC derjenige der Punkt M ist, von welchem aus A, B, C im Kreise in derselben Ordnung wie A', B', C' in der Geraden auf einander folgen. N' kann hierauf dadurch gefunden werden, dass man das Dreieck $N'A'B'$ ähnlich und gleichnamigen Sinnes mit MBA macht.

b. Der Punkt D' kann, ohne vorherige Ermittelung der C.punkte M und N', auch geradezu mit Hülfe der Formeln

$$ABC^{\wedge}ADC = A'B'C'^{\wedge}A'D'C' \text{ und } ACB^{\wedge}ADB = A'C'B'^{\wedge}A'D'B'$$

(§. 14. *e.*) gefunden werden, wonach D' der zweite Durchschnitt zweier Kreise ist, von denen der eine, durch A' und C' gehend, mit dem Kreise

$A'B'C'$ einen Winkel $= ABC^{\backprime}ADC$, und der andere, durch A' und B' gehend, mit dem Kreise $A'C'B'$ einen Winkel $= ACB^{\backprime}ADB$ macht.

§. 20. Sind von der Figur, welche mit der gegebenen $ABCDE\ldots$ kreisverwandt sein soll, bloss die Punkte A', B', C', nicht aber zugleich der positive Sinn ihrer Ebene p', gegeben, so ist der jedem vierten Punkte D in p entsprechende Punkt D' in p' im Allgemeinen zweideutig, und es können daher, jenachdem man den einen oder den andern Sinn der Drehung in p' für den positiven nimmt, zwei verschiedene die drei ersten Punkte gemein habende Figuren $A'B'C'D'E'\ldots$ und $A'B'C'D''E''\ldots$ construirt werden, deren jede mit $ABCDE\ldots$ kreisverwandt ist, und die es daher auch unter sich sind.

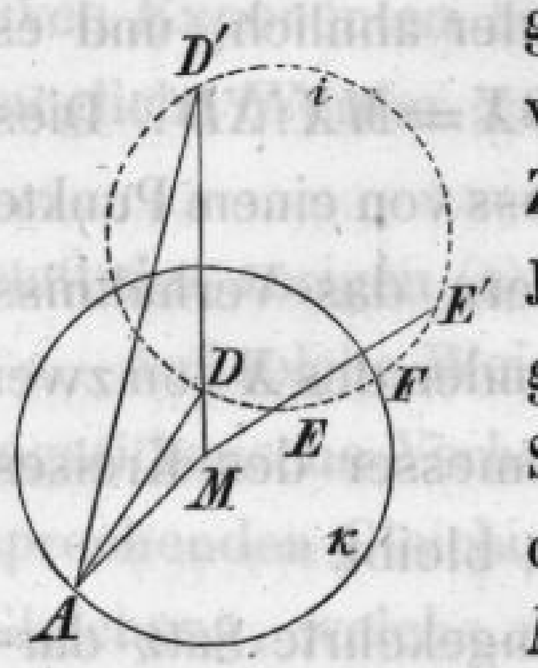
Zu jeder ebenen Figur $ABCDE\ldots$ lässt sich demnach in ihrer Ebene eine ihr kreisverwandte $A'B'C'D'E'\ldots$ construiren, von welcher mit drei Punkten A, B, C der erstern die entsprechenden Punkte A', B', C' zusammenfallen, während dadurch, dass man einen und denselben Sinn der Ebene als den positiven für die eine Figur und als den negativen für die andere nimmt, die übrigen Punkte D', E', ..., im Allgemeinen wenigstens, von den entsprechenden D, E, ... verschieden sind.

§. 21. Das gegenseitige Verhalten zweier solcher Figuren bietet mehreres Merkwürdige dar, was nicht nur an sich, sondern auch des später Folgenden willen, eine nähere Betrachtung verdient.

1) Bezeichnet man, wie bisher, die C.punkte der beiden Figuren mit M und N', so sind nach §. 9., weil jeder der Punkte A, B, C sich selbst entsprechen soll, die Dreiecke MAB und $N'BA$, MBC und $N'CB$, MCA und $N'AC$ einander ähnlich, aber auch gleich, weil $AB = BA$, etc.; folglich $MA = N'B$ und $MC = N'B$, folglich $MA = MC$, und ebenso $= MB$, sowie $N'A = N'B = N'C$. Es coincidirt daher N' mit M im Mittelpunkte des durch A, B, C zu beschreibenden Kreises, welchen man k nenne.

Allerdings kann den Proportionen $MA : MB : MC = N'A$: etc. $= 1:1:1$ auch dadurch genügt werden, dass man M und N' unendlich entfernt annimmt. Alsdann aber entspricht einem unendlich entfernten Punkte M oder N der einen Figur ein unendlich entfernter M' oder N' der andern, und die zwei Figuren sind folglich einander nicht bloss kreisverwandt, sondern auch ähnlich (§. 5.) und gleich und decken einander, da die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ coincidiren.

2) Nach dem Satze in §. 9. sind ferner die Dreiecke MAD und $N'D'A$, $= MD'A$, einander ähnlich und gleichnamigen, also jetzt entgegengesetzten Sinnes (wie es auch MAB und MBA, etc. waren), folglich der Winkel $AMD = -D'MA$ (§. 8. Zus.) $= AMD'$, und es verhält sich $MD : MA = MA : MD'$. Je zwei einander entsprechende Punkte D und D' liegen daher mit M in einer Geraden und auf einerlei Seite von M dergestalt, dass MA oder der Halbmesser des Kreises k die mittlere Proportionallinie zwischen MD und MD' ist, oder, was dasselbe ist: je zwei einander entsprechende Punkte liegen in einem Durchmesser des k und theilen ihn harmonisch.



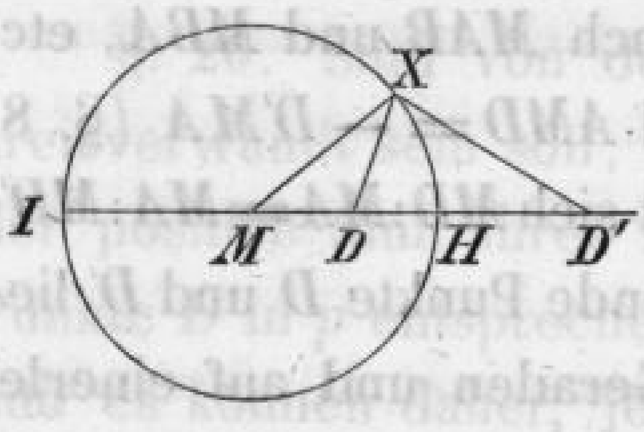
Ebenso wie A, B, C, entspricht daher auch jeder andere Punkt des Kreises k sich selbst, und jedem Punkte innerhalb des k entspricht ein Punkt ausserhalb, und umgekehrt. Der einem vierten Punkte D entsprechende D' ist folglich dann und nur dann unzweideutig bestimmbar, wenn D im Kreise ABC liegt.

3) Aus der in 2) erhaltenen Relation zwischen D und D' folgt, dass, wenn dem D in der einen Figur der Punkt D' in der andern entspricht, dem D', als einem Punkte der erstern Figur, der Punkt D in der letztern entsprechen wird. Das Entsprechen der beiden Figuren ist daher ein sogenanntes involutorisches.

4) Je zwei Paare entsprechender Punkte, wie D, D' und E, E', liegen in einem Kreise i; denn es ist $MD \, . \, MD' = MA^2 = ME \, . \, ME'$. Auf gleiche Weise erhellet, dass auch der jedem andern Punkte des i entsprechende Punkt in i enthalten ist, und daher i sich selbst zum entsprechenden Kreise hat. Ist F einer der beiden Durchschnitte des i mit k, so coincidirt F' mit F, und die Gerade MFF' wird eine Tangente des i. Der durch zwei Paare entsprechender Punkte zu beschreibende Kreis entspricht demnach sich selbst und schneidet den Kreis k rechtwinklig, sowie umgekehrt jeder den k rechtwinklig schneidende Kreis sich selbst entspricht.

5) Für je zwei einander entsprechende Kreise ist M der eine der beiden Aehnlichkeitspunkte. Dies erhellet am leichtesten in dem Falle, wenn M ausserhalb des einen, und damit auch ausserhalb des andern Kreises liegt (§. 6. c.). Denn die zwei alsdann von M an den einen Kreis zu ziehenden Tangenten müssen, als sich selbst entsprechende Gerade, auch den andern berühren; folglich u. s. w.

§. 22. Folgerungen und Zusätze. *a.* Ist X irgend ein Punkt des Kreises k und daher ein sich selbst entsprechender, so sind die Drei-



ecke MDX und MXD' einander ähnlich, und es verhält sich deshalb $MD:DX = MX:XD'$. Dies giebt den bekannten Satz, dass von einem Punkte X eines Kreises zum andern das Verhältniss $DX:XD'$ zwischen den Abständen des X von zwei festen Punkten D und D', durch welche ein Durchmesser des Kreises harmonisch getheilt wird, unverändert, $= MD:MX$, bleibt.

Mittelst derselben Figur lässt sich auch der umgekehrte Satz darthun, dass der ebene Ort eines Punktes X, dessen Abstände von zwei festen Punkten D und D' der Ebene in einem gegebenen Verhältnisse $= e:1$ stehen, ein Kreis ist, welcher die Linie DD' rechtwinklig und harmonisch schneidet. Denn bestimmt man in der Geraden DD' den Punkt M also, dass der Winkel $DXM = DD'X$ wird, so entstehen die zwei einander ähnlichen Dreiecke MDX und MXD', und es verhält sich daher

$$MD:MX = MX:MD' = DX:XD' = e:1,$$

mithin $MD:MD' = ee:1$, und es ist folglich M eben so, wie D und D', ein fester Punkt. Deshalb, und weil $MX = MD:e = e.MD'$, ist der Ort von X ein Kreis, welcher M zum Mittelpunkte hat. Bezeichnen endlich H und J die Durchschnitte dieses Kreises mit DD', so hat man $DH:HD' = DJ:JD' = e:1$, und es sind folglich D, D' und H, J zwei harmonirende Paare von Punkten.

b. Sowie daher, wenn A, B, C feste Punkte sind, der durch die Gleichung $2.ABCX = 0$ bestimmte Ort von X ein Kreis ist (§. 14. *a.*), so ist es auch der durch die Gleichung

$$(a) \qquad (ABCX) = 1$$

d. i. durch die Proportion $AX:XC = AB:BC$ bestimmte Ort. Bei ersterer Gleichung sind A, B, C Punkte des Kreises selbst; bei letzterer ist nur B ein solcher, indem der Proportion Genüge geschieht, wenn B statt X gesetzt wird, und durch A und C wird ein Durchmesser des Kreises harmonisch getheilt.

c. In vorliegender Abhandlung werden, wie schon erinnert worden (§. 10. *d.*), alle Linien in absolutem Sinne genommen, so dass zwischen AB und BA kein Unterschied statt hat. Berücksichtigt man aber diesen Unterschied, so kann das vorige $(A..X)$ ebensowohl $= -1$, als $= +1$ sein, da ein D.verhältniss nach der willkührlichen Annahme der von einander unabhängigen Richtungen der vier Geraden, in denen seine vier Linien begriffen sind, ebensowohl einen negativen, als einen positiven Exponenten haben kann; und man muss daher, um beide gleich mögliche Werthe zusammenzufassen,

$$(ABCX)^2 = 1$$

statt des vorigen (a) schreiben.

Auf solche Weise tritt aber auch hier das schon in §. 13. bemerkte logarithmische Verhältniss der Gleichungen mit D.winkeln zu den entsprechenden Gleichungen mit D.verhältnissen wieder hervor, indem die Gleichung, welche mit Hülfe eines D.winkels ausdrückt, dass X irgend ein Punkt eines Kreises ist, nicht einfach $A..X = 0$, oder $= 180^0$, sondern $2.ABCX = 0$ war.

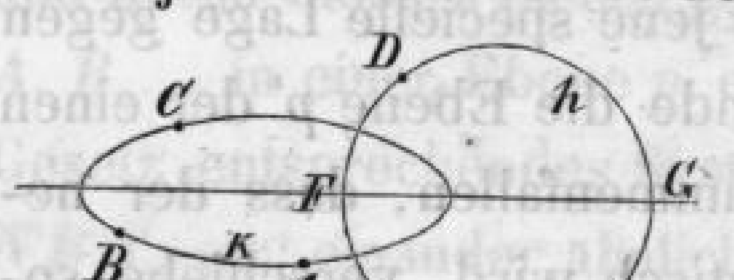
d. Wird der durch die Gleichung

$$(1) \quad (ADBX) = 1$$

bestimmte Ort von X im Raume überhaupt genommen, so ist er die Kugelfläche, welche durch Drehung des durch (1) zugleich ausgedrückten in der Ebene ADB enthaltenen Kreises um AB als Axe entsteht. Eben so sind

$$(2) \quad (CDAX) = 1 \quad \text{und} \quad (3) \quad (BDCX) = 1$$

die Gleichungen zweier anderer Kugelflächen, welche die Geraden CA und BC zu Axen haben und daher die Ebene ABC rechtwinklig schneiden. Da in jeder von ihnen beiden der Punkt D liegt, so schneiden sie einander



in einem durch D gehenden die Ebene ABC rechtwinklig, es sei in F und G, treffenden Kreise h, von welchen FG ein Durchmesser ist.

Dieser Kreis wird demnach durch die Gleichungen (2) und (3) in Verbindung, also auch durch die damit identische Doppelproportion

$$(h) \quad AX:BX:CX = AD:BD:CD$$

ausgedrückt; und weil mit (h) auch der Gleichung (1) Genüge geschieht, so schneiden sich die drei Kugelflächen (1), (2) und (3) in einem und demselben Kreise h.

e. Weil F und G in h liegen, und sie daher Oerter von X in (h) sind, so verhalten sich

$$(4) \quad AF:BF:CF = AG:BG:CG = AD:BD:CD.$$

Deshalb, und weil F und G zugleich Punkte der Ebene ABC sind, ist der durch die Gleichung $(k) \quad (FAGX) = 1$

ausgedrückte Kreis k der Kreis ABC selbst, indem die mit (k) identische Proportion $FX:GX=FA:GA$ erfüllt wird, nicht nur wenn A, sondern auch, wegen (4), wenn B oder C statt X gesetzt wird. Dabei fallen nach b. F und G in einen Durchmesser des Kreises und theilen ihn harmonisch.

Die Kreise k und h haben daher eine solche Lage gegen einander, *dass ihre Ebenen sich rechtwinklig schneiden, dass in die Durchschnittslinie dieser Ebenen zwei Durchmesser der Kreise fallen, und dass der eine dieser Durchmesser den andern harmonisch theilt.* Hiernach kann man, wenn der eine Kreis k, und von dem andern h der eine seiner beiden Durchschnitte F und G mit der Ebene des k gegeben sind, den Kreis h sofort construiren, und es muss folglich die ihn ausdrückende Proportion (h), in welcher A, B, C Punkte des k, und X, D Punkte des h sind, gültig bleiben, wo auch die Punkte A, B, C in k genommen werden mögen. Nennen wir daher zwei Kreise, die in der eben beschriebenen gegenseitigen Lage sind, zwei conjugirte Kreise, so können wir den Satz aufstellen:

Sind in zwei conjugirten Kreisen, A, B irgend zwei Punkte des einen, und X, Y irgend zwei Punkte des andern, so verhält sich

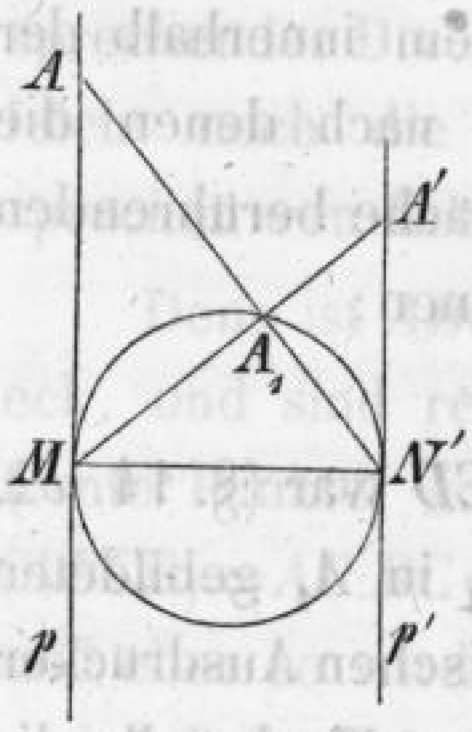
$$AX:BX=AY:BY\text{*)} \text{ und es ist daher } (AXBY)=1.$$

§. 23. Die im §. 21. betrachtete specielle gegenseitige Lage zweier kreisverwandten Figuren gewinnt dadurch ein allgemeineres Interesse, dass man je zwei kreisverwandte Figuren in jene specielle Lage gegen einander bringen kann. Man lasse zu dem Ende die Ebene p' der einen Figur mit der Ebene p der andern also zusammenfallen, dass der negative Sinn in p' mit dem positiven in p identisch wird, verschiebe sodann p' auf p, bis N' mit M coincidirt, und drehe zuletzt p' in sich um M, bis irgend zwei einander entsprechende Punkte, A und A', mit M in einer Geraden und auf einerlei Seite von M liegen. Denn dann werden dieselbe Lage gegen M auch je zwei andere einander entsprechende Punkte, B und B', etc. haben, und die mittleren Proportionallinien zwischen MA und MA', zwischen MB und MB', etc. werden von gleicher Grösse, die man c nenne, sein. Jeder Punkt des in p um M als Mittelpunkt und mit c als Halbmesser beschriebenen Kreises und kein anderer, wird folglich mit dem ihm entsprechenden Punkte zusammenfallen.

---

*) Chasles, Traité de géométrie supérieure, art. 795.

§. 24. In eine andere noch merkwürdigere Lage können wir die jetzt mit p auf besagte Weise coincidirende Ebene p' gegen p versetzen, wenn wir sie parallel mit p und ohne Drehung in sich fortführen, so dass ihr bisher mit M coincidirender C.punkt N' ein auf p in M errichtetes Perpendikel von einer Länge $=c$ beschreibt. Am Ende dieser Bewegung, wo $MN'=c$ geworden, haben MA und $N'A'$, ebenso wie anfangs, noch einerlei Richtung. Die Dreiecke AMN' und $MN'A'$ liegen daher in einer und derselben auf p und p' normalen Ebene, sind folglich resp. bei M und N' rechtwinklig und deshalb und wegen der Proportion $AM:MN'=MN':N'A'$ einander ähnlich. Mithin ist der Winkel $AN'M = MA'N' = 90^0 - N'MA'$, und es schneiden sich daher MA' und $N'A$ rechtwinklig. Aus analogem Grunde schneiden sich auch MB' und $N'B$, MC' und $N'C$, etc. unter rechten Winkeln. Die Durchschnittspunkte selbst, die man resp. A_1, B_1, C_1, etc. nenne, liegen folglich auf einer Kugelfläche, von welcher MN' ein Durchmesser ist.



Somit erscheinen die zwei ebenen Figuren $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ als die stereographischen Projectionen einer und derselben, das einemal aus N', das anderemal aus M betrachteten, sphärischen Figur $A_1B_1C_1\ldots$, und man sieht hieraus leicht, wie man mit Anwendung einer Kugelfläche und durch blosses Ziehen gerader Linien zu einem Systeme von Punkten A, B, ... in einer Ebene p ein ihm in einer andern Ebene p' nach dem Gesetz entsprechendes System A', B', ..., dass die Dreiecke MAB und $N'B'A'$, etc. einander ähnlich sind (§. 9.), construiren kann.

Man lege nämlich die zwei Ebenen p und p' mit ihren Punkten M und N' berührend an eine Kugelfläche, so dass MN' ein Durchmesser der Kugel wird, projicire hierauf die in p gegebenen Punkte A, B, ... von N' aus auf die Kugelfläche, und diese Projectionen A_1, B_1, ... von M aus auf die Ebene p', und es werden die damit erhaltenen Punkte die gesuchten A', B', ... sein.

Zugleich entspringt aus dieser Construction ein neuer Beweis für die Kreisverwandtschaft der beiden Figuren. Denn es ist eine schon von Ptolemäus gekannte Eigenschaft der stereographischen Projection, dass bei ihr jeder Kreis auf der Kugelfläche sich wieder als Kreis projicirt, so wie umgekehrt jeder Kreis in der Projectionsebene, auf die Kugelfläche projicirt, einen Kreis giebt.

Eben so folgt aus einer andern Haupteigenschaft der stereographischen Projection, aus der Aehnlichkeit zwischen den kleinsten Theilen einer sphärischen Figur und den entsprechenden Theilen in der Projection, dass, wie schon in §. 5. gezeigt worden, dieselbe Eigenschaft auch kreisverwandten Figuren zukommen muss.

Da hiernach unter denselben Winkeln, unter welchen sich zwei Kreise auf der Kugel schneiden, sich auch die projicirten Kreise in der Ebene begegnen (vergl. §. 14. *e.*), so ist, wenn einem innerhalb der Kugelfläche befindlichen Auge die positiven Sinne, nach denen die Winkel auf dieser Fläche und die Winkel in der die Fläche berührenden Projectionsebene gerechnet werden, identisch erscheinen:

$$ABC^{\wedge}ADC = A_1B_1C_1{}^{\wedge}A_1D_1C_1.$$

Wenn man daher eben so, wie $ABC^{\wedge}ADC = ABCD$ war (§. 14. *c.*), auch den von zwei Kugelkreisen $A_1B_1C_1$ und $A_1D_1C_1$ in A_1 gebildeten Winkel kurz durch $A_1B_1C_1D_1$ ausdrückt, so werden zwischen Ausdrücken solcher Art bei einem System von Punkten auf einer Kugelfläche alle die Relationen statt finden, welche wir in §. 13. und §. 14. *a. b. d.* bei einer ebenen Figur zwischen D.winkeln erhalten haben. — So werden z. B., da durch vier nicht in einer Ebene begriffene Punkte immer eine Kugelfläche beschrieben werden kann, von den vier Kreislinien, welche man durch je drei solcher vier Punkte legen kann, je zwei sich unter denselben Winkeln, wie die jedesmal zwei übrigen schneiden.

§. 25. Eine sphärische Figur und ihre stereographische Projection haben aber mit kreisverwandten Figuren nicht bloss das gegenseitige Entsprechen von Kreisen und die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen gemein, sondern *es ist* auch, wie bei letztern Figuren, *jedes D.verhältniss zwischen vier Punkten auf der Kugel dem D.verhältnisse zwischen den stereographischen Projectionen dieser Punkte gleich.*

Der Beweis dieser, wie es scheint, bisher noch nicht bemerkten Gleichheit lässt sich folgendergestalt führen. — Wegen der rechten Winkel bei M und A_1 (vor. Fig.) ist

$$N'A \, . \, N'A_1 = MN'^2, \text{ und eben so } N'B \, . \, N'B_1 = MN'^2,$$

$$\text{folglich } N'A : N'B = N'B_1 : N'A_1.$$

Deshalb und wegen der Identität der Winkel $AN'B$ und $A_1N'B_1$ sind die Dreiecke $AN'B$ und $B_1N'A_1$ einander ähnlich; folglich

$$AB : N'B = B_1A_1 : N'A_1, \text{ und eben so}$$
$$CB : N'B = B_1C_1 : N'C_1; \text{ folglich}$$
$$AB : BC = (A_1B_1 : B_1C_1) : (N'A_1 : N'C_1), \text{ und ebenso}$$
$$AD : DC = (A_1D_1 : D_1C_1) : (N'A_1 : N'C_1); \text{ folglich}$$
$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

§. 26. Zusätze. *a.* Mit Hülfe dieser aus dem Begriffe der stereographischen Projection unmittelbar gefolgerten Gleichheit entsprechender D.verhältnisse in den Figuren AB... und A_1B_1... kann sehr leicht noch die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen und das Entsprechen von Kreisen bei diesen Figuren bewiesen werden.

Denn ist ABC, und daher auch $A_1B_1C_1$, ein unendlich kleines Dreieck, und sind resp. D und D_1 zwei endlich von diesen Dreiecken entfernte Punkte, so verhält sich $AD : DC = A_1D_1 : D_1C_1 = 1:1$; folglich ist $(ABCD) = AB:BC$ und $(A_1B_1C_1D_1) = A_1B_1 : B_1C_1$, folglich $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$; und eben so wird bewiesen, dass $BC:CA = B_1C_1 : C_1A_1$. Mithin sind ABC und $A_1B_1C_1$, d. h. je zwei einander entsprechende unendlich kleine Dreiecke, einander ähnlich.

Liegen ferner die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 der Kugelfläche in der genannten Folge in einem Kreise, so ist nach einem Satze des Ptolemäus

$$A_1B_1 \,.\, D_1C_1 + A_1D_1 \,.\, B_1C_1 = B_1D_1 \,.\, C_1A_1 \text{ oder}$$
$$(A_1B_1D_1C_1) + (A_1D_1B_1C_1) = 1; \text{ folglich auch}$$
$$(\alpha) \quad (ABDC) + (ADBC) = 1,$$

woraus, da der Satz des Ptolemäus auch umgekehrt gilt, die Kreislage der Punkte A, B, C, D fliesst.

b. Der ptolemäische Satz und dessen Umkehrung können sehr einfach mit Hülfe des Satzes in §. 16. bewiesen werden, dass in einem Dreiecke, dessen Winkel $= ABCD$, $BCAD$, $CABD$ sind, die gegenüberliegenden Seiten sich wie $AC.BD$, $BA.CD$, $CB\ AD$ verhalten. Denn liegen die Punkte A, B, C, D in dieser Folge in einem Kreise, und ist daher

$$(1) \quad ABCD = 180^0,$$

also ein Winkel des Dreiecks $= 180^0$, so ist die ihm gegenüberliegende Seite der Summe der beiden andern gleich, folglich

$$(2) \quad BA.CD + CB.AD = AC.BD,$$

welches der directe Satz ist. Und da umgekehrt aus der Relation (2) zwischen den Seiten des Dreiecks die Winkelgleichung (1) folgt (§. 16. Folg. *a.*), so muss auch der umgekehrte Satz bestehen.

c. Der ptolemäische Satz und seine Umkehrung sind für die Kreisverwandtschaft insofern noch von besonderem Werthe, als ihnen zufolge diese Verwandtschaft auch dadurch definirt werden kann, dass jedes D.verhältniss zwischen je vier Punkten der einen Ebene dem D.verhältnisse zwischen den entsprechenden Punkten der andern gleich ist. Denn sind A, B, C, D vier in einem Kreise auf einander folgende Punkte, und besteht daher zwischen ihnen nach dem directen ptol. Satze die Gleichung (2) oder (α), so muss nach dieser Definition dieselbe Gleichung auch zwischen $A', .. D'$ Gültigkeit haben, und es müssen folglich nach dem umgekehrten Satze $A', .. D'$ in Kreislage sein.

Auf gleiche Art kann, wie hier noch bemerkt werden mag, die Kreisverwandtschaft auch durch die Gleichheit entsprechender D.winkel definirt werden; denn der Satz, dass, wenn $A, .. D$ in einem Kreise liegen, $A..D = 0$, oder $= 180^0$ ist, gilt ebenfalls auch umgekehrt.

d. Bei dem vorhin gegebenen Beweise des umgekehrten Satzes des Ptolemäus wurde stillschweigend die Bedingung hinzugedacht, dass die vier Punkte $A, .. D$ in einer Ebene liegen. Es ist aber sehr bemerkenswerth, *dass diese Bedingung gar nicht zugesetzt zu werden braucht,* sondern eine Folge der Gleichung (2) oder (α) selbst ist. Denn beschreibt man durch A, B, C, D, was immer möglich ist, eine Kugelfläche und projicirt hierauf diese vier Punkte stereographisch auf eine Ebene nach $A_{,}, .. D_{,}$, so ist nach Obigem $(ABDC) = (A_{,}B_{,}D_{,}C_{,})$ und $(ADBC) = (A_{,}D_{,}B_{,}C_{,})$. Besteht daher zwischen $A, .. D$ die Gleichung (α), so wird diese auch durch die vier Punkte $A_{,}, .. D_{,}$ der Ebene erfüllt, und es müssen daher letztere, wie in *b.* gezeigt worden, in einem Kreise $k_{,}$ liegen. Es ist aber dieser Kreis die stereographische Projection des auf der Kugel durch A, B, C zu beschreibenden Kreises k, und da $D_{,}$ ein Punkt von $k_{,}$ ist, so muss D in k liegen; folglich u. s. w.

Eben so kann, wenn bei vier Punkten $A, .. D$ im Raume, $ABCD$ stets als abgekürzter Ausdruck des Winkels $ABC \hat{} ADC$ genommen wird, die Gleichung $A..D = 0$, oder $= 180^0$, wie von selbst einleuchtet, nicht anders bestehen, als wenn $A, .. D$ in einer Ebene und darin in einem Kreise liegen.

Kreisverwandtschaft sphärischer Figuren.

§. 27. Nach §§. 24. und 25. hat eine sphärische Figur mit ihrer stereographischen Projection auf eine Ebene alle die Grössen und Beziehungen gemein, welche zwei ebenen kreisverwandten Figuren gemeinschaftlich zukommen. Wir können daher die Kreisverwandtschaft, die wir bisher auf ebene Figuren beschränkten, auch auf sphärische ausdehnen, indem wir eine ebene Figur und eine sphärische, oder zwei sphärische kreisverwandt nennen, wenn jedem Kreise der einen ein Kreis in der andern entspricht.

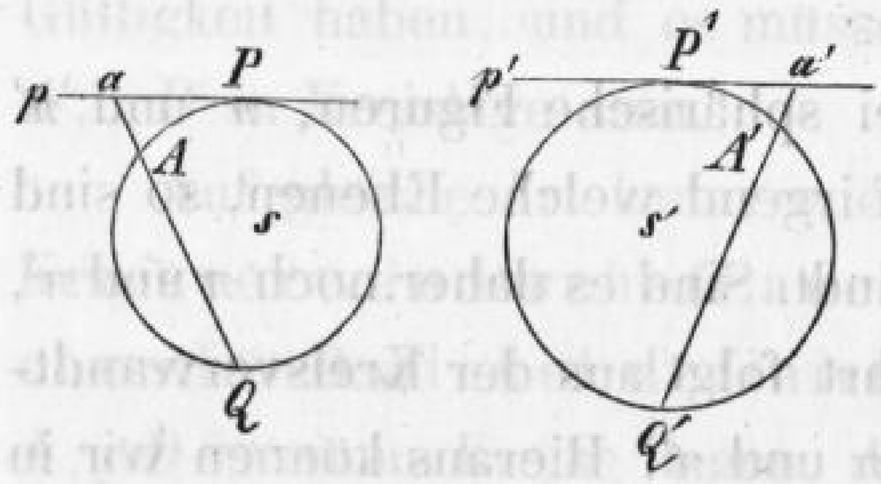
Bedeuten demnach σ und σ' zwei sphärische Figuren, π und π' ihre stereographischen Projectionen auf irgend welche Ebenen, so sind σ und π, ingleichen σ' und π', kreisverwandt. Sind es daher noch π und π', so sind es auch σ und σ', und umgekehrt folgt aus der Kreisverwandtschaft zwischen σ und σ' die zwischen π und π'. Hieraus können wir in Verbindung mit den Sätzen in §. 24. und 25. weiter schliessen:

In zwei kreisverwandten sphärischen Figuren sind je zwei einander entsprechende D.verhältnisse, so wie je zwei dergleichen D.winkel, einander gleich. Denn sind σ und σ', also auch π und π', kreisverwandt, so ist jedes D.verhältniss in σ dem entsprechenden in π, dieses dem entsprechenden in π', und dieses dem entsprechenden in σ' gleich. Eben so wird der Beweis für entsprechende D.winkel geführt, nur dass ein solcher hier stets in der am Ende des vor. §. angegebenen Bedeutung genommen wird. Und da hiernach je zwei Kreise der einen Figur sich unter Winkeln von derselben Grösse, wie die entsprechenden Kreise der andern schneiden, so sind, ebenso wie zwei kreisverwandte ebene Figuren (vergl. §. 14. *e*.), auch zwei sphärische in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

Ist umgekehrt in zwei sphärischen Figuren σ und σ' jedes D.verhältniss der einen dem entsprechenden der andern gleich, so sind die Figuren kreisverwandt. Denn unter der gemachten Voraussetzung ist auch jedes D.verhältniss in π dem entsprechenden in π' gleich; folglich sind π und π' kreisverwandt (§. 26. *c*.), folglich auch σ und σ'. — Auf gleiche Art folgt die Kreisverwandtschaft zwischen σ und σ' auch aus der Gleichheit je zweier entsprechender D.winkel.

§. 28. Ist ein System von Punkten $A, B, C, D, \ldots$ einer Kugelfläche s gegeben, und sind von den entsprechenden Punkten einer andern Kugelfläche s' irgend drei, etwa A', B', C', und überdies die Sinne beider Flächen (folg. §.) gegeben, so kann man eben so, wie bei ebenen Figuren, zu jedem vierten Punkte D in s den entsprechenden D' in s' unzweideutig finden.

Sind nämlich P und P' irgend zwei Punkte in s und s', Q und Q' deren Gegenpunkte, so lege man in P und P' an s und s' zwei berührende Ebenen p und p', projicire auf p von Q aus die Punkte A, B, C, D nach a, b, c, d, und auf p' von Q' aus die Punkte A', B', C' nach a', b', c', und bestimme nach §. 19. Zus. b. in p' den dem d entsprechenden Punkt d', indem

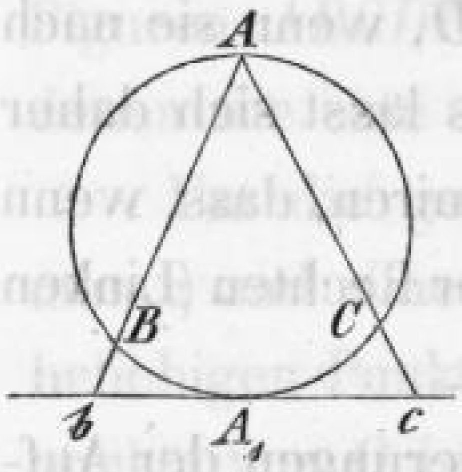


man hierbei die Sinne in p und p' einerlei mit den Sinnen der in p und p' bei P und P' fallenden Elemente von s und s' nimmt. Die Projection des d' von Q' aus auf s' wird alsdann der gesuchte Punkt D' sein.

Auch kann man D' geradezu, wie in §. 19. Zus. b., durch Construction zweier Kreise $A'D'C'$ und $A'D'B'$ auf der Fläche s' erhalten, welche mit Rücksicht auf die vorausgetzten Sinne in s und s' den Winkelgleichungen $ABCD = A'B'C'D'$ und $ACBD = A'C'B'D'$ Genüge thun.

§. 29. Im Bisherigen ist bis auf §§. 24. und 28. bei Winkelbestimmungen stets nur der Sinn in einer Ebene, nicht aber der Sinn in einer Kugelfläche, in Betracht gekommen. Es ist aber der letztere ein von dem erstern wohl zu unterscheidender Begriff. Denn eben so, wie ein in einem Kreise sich nach einem und demselben Sinne bewegender Punkt von einem Elemente zum andern die Richtung seiner Bewegung ändert, und es deshalb angemessen erscheint, bei dieser Bewegung für den Begriff, welcher dem Begriffe der Richtung bei einem sich in einer Geraden bewegenden Punkte entspricht, ein anderes Wort Sinn zu gebrauchen: so ist auch bei einer Kugelfläche der Sinn von einem Flächenelemente zum andern verschieden, und es sollte eigentlich ein neuer Ausdruck gewählt werden, um den Complex dieser verschiedenen Sinne aller Elemente einer Kugelfläche zu bezeichnen, auf dieselbe Art, wie das Wort Sinn den Inbegriff der verschiedenen Richtungen aller Elemente eines Kreises darstellt. In Ermangelung eines mir hierzu geeignet scheinenden Ausdrucks mag vor der Hand das Wort Sinn auch in dieser potenzirten Bedeutung angewendet werden.

Bei einer Kreisbewegung ist mit der Richtung, nach welcher ein Element des Kreises beschrieben wird, die Richtung des nächstfolgenden, mit dieser die Richtung des weiterhin folgenden, etc. und damit der Sinn der Bewegung gegeben. Sind daher A und B zwei einander unendlich nahe Punkte eines Kreises, so ist durch die Folge AB zugleich sein Sinn gegeben; es ist nämlich derjenige, nach welchem ein den Kreis beschreibender Punkt, nachdem er durch A gegangen, zunächst durch B geht. Ist dagegen AB ein endlicher Bogen des Kreises, so wird durch die Folge AB ohne weitere Bemerkung der Sinn noch nicht bestimmt, sondern erst nach Zutritt eines dritten Punktes C, also durch die Folge ABC, als wonach ein den Kreis beschreibender und dabei von A ausgehender Punkt zunächst nach B und dann erst nach C gelangen soll. Auch kann man, was auf dasselbe hinauskömmt, von A aus die Punkte



B und C auf eine den Kreis im Gegenpunkte von A berührende Gerade nach b und c projiciren und, indem man durch die Folge bc die Richtung jedes Elements dieser Geraden ausgedrückt annimmt, den durch ABC ausgedrückten Sinn des Kreises als denjenigen definiren, der mit der Richtung des Elements übereinstimmt, welches der Kreis mit der Geraden gemein hat.

Aehnlicherweise lässt sich nun auch der Sinn einer Kugelfläche bestimmen. Wie beim Kreise, ist auch hier mit dem Sinne irgend eines Elements der Fläche der Sinn jedes an dasselbe grenzenden Elements, hiermit der Sinn jedes weiterhin folgenden Elements, und solchergestalt der Sinn der Fläche selbst gegeben, so dass, wenn A, B, C drei einander unendlich nahe Punkte der Fläche und daher in einem Elemente derselben begriffen sind, die jedoch nicht in einem Kreise von endlicher Grösse liegen dürfen, durch eine ihrer Combinationen, wie ABC, der Sinn der Kugelfläche bestimmt ist. Sind aber nicht alle drei Punkte einander unendlich nahe, so wird durch ABC zwar der Sinn des endlichen Kugelkreises, in dem sie enthalten sind, ohne Weiteres aber noch nicht der Sinn der Fläche selbst bestimmt. Dieses geschieht erst durch Hinzufügung eines vierten Punktes D der Fläche, welcher mit den drei erstern nicht in einem Kreise liegt.

Um nun den durch irgend eine Aufeinanderfolge aller vier Punkte, etwa durch $ABCD$, ausgedrückten Sinn der Fläche sich zur Anschauung zu bringen, lege man auf analoge Art, wie beim Kreise, durch den Gegenpunkt von A, welcher A_1 heisse, eine die Kugel berührende Ebene, projicire auf diese von A aus die Punkte B, C, D nach b, c, d und nehme als Sinn des Elements, welches die Kugelfläche mit der Berührungsebene gemein hat, den durch die Folge bcd bestimmten Sinn der Ebene. Denn somit ist, wie schon erinnert worden, der Sinn auch für jedes andere Element, so wie der Sinn der Fläche selbst bestimmt.

Wir wollen hiernach, wenn bei einer Lage der Kugel, in welcher A ihr oberster und A_1 ihr unterster Punkt ist, die Kreisbewegung bcd, also auch die BCD, nach der Rechten geht, den durch $ABCD$ ausgedrückten Sinn der Kugelfläche einen Sinn nach der Rechten nennen. Es leuchtet aber ein, dass alsdann auch bei einer solchen Lage der Kugel, in welcher die Richtung von A nach B von oben nach unten geht, die Kreisbewegung BCD nach rechts, und die Richtung CD, wenn sie nach vorn liegt, nach rechts gehend erscheinen wird; und es lässt sich daher der nach rechts (links) gehende Sinn auch dadurch definiren, dass, wenn A oben, B unten und CD vorn liegt, die Linie CD nach der Rechten (Linken gerichtet ist.

§. 30. Untersuchen wir noch, bei welchen Veränderungen der Aufeinanderfolge der vier Buchstaben der durch $ABCD$ ausgedrückte Sinn einer Kugelfläche sich in den entgegengesetzten verwandelt.

Weil die Folgen cbd und bdc den entgegengesetzten Sinn der Folge bcd ausdrücken, so wird auch jeder der Sinne $ACBD$ und $ABDC$ dem $ABCD$ entgegengesetzt sein.

Man sieht ferner ohne Mühe, dass, wenn bei nach unten gerichteter Linie AB die CD nach rechts gehend erscheint, dieselbe CD bei nach unten gerichteter BA nach links gerichtet sich zeigen wird, und dass daher die Sinne $ABCD$ und $BACD$ einander entgegengesetzt sind.

Werden demnach im Ausdrucke des Sinnes einer Kugelfläche durch die Folge von vier Punkten der Fläche die zwei ersten, oder, wie wir vorhin sahen, die zwei mittlern, oder die zwei letzten Punkte gegenseitig vertauscht, so verwandelt sich damit der Sinn in den entgegengesetzten. Durch fortgesetzte Vertauschung je zweier nächstfolgenden Buchstaben des Ausdrucks $ABCD$ können aber alle übrigen 23 aus $A, .. D$ zu bildenden Permutationen erhalten werden, und man wird somit in den Stand gesetzt, diejenigen unter ihnen, welche mit *ABCD* einerlei Sinn ausdrücken, und deren es eilf giebt, von den übrigen zwölf, welche den entgegengesetzten Sinn darstellen, abzusondern. Man erhält auf solche Weise dieselben zwei Gruppen, die ich in meinem baryc. Calcul S. 23 aufgestellt habe.

§. 31. Ist zu einem System von Punkten auf einer Kugelfläche s_1 ein kreisverwandtes System $A, B, C, D, E, \ldots$ auf einer andern Kugelfläche s construirt worden, und dieses also, dass man, A, B, C willkührlich annehmend, jeden der übrigen Punkte $D, E, \ldots$ durch Uebertragung gewisser Winkel von s_1 auf s bestimmt hat (§. 28. zu Ende): so kann man, eben so wie in §. 20. bei ebenen Figuren, von denselben A, B, C ausgehend, für die übrigen Punkte von den vorigen $D, E, \ldots$ verschiedene Oerter $D', E', \ldots$ finden, indem man bei dieser zweiten Construction die Winkel auf s nach einem dem vorigen entgegengesetzten Sinne rechnet. Man erhält somit die zwei einander kreisverwandten Figuren $ABCDE\ldots$ und $ABCD'E'\ldots$ auf derselben Kugelfläche s, von denen die eine durch die andere unzweideutig bestimmt wird.

Um die gegenseitigen Beziehungen dieser zwei Figuren, welche man σ und σ' nenne, näher zu untersuchen, projicire man sie von einem beliebigen Punkte O der Kugelfläche aus auf eine die Fläche im Gegenpunkte von O berührende Ebene und bezeichne diese Projectionen mit π und π', die, weil σ und σ' einander kreisverwandt sind, es gleichfalls sein werden (§. 27.). Da ferner den Punkten A, B, C in σ dieselben Punkte in σ' entsprechen, so werden auch die Projectionen von A, B, C, als Punkte in π, sich selbst zu entsprechenden in π' haben, und die Figuren π und π' werden daher in derselben Beziehung, wie die in §. 21. betrachteten, zu einander stehen. Jeder der Punkte, welcher mit den Projectionen von A, B, C in einem Kreise liegt, und kein anderer Punkt der Ebene, wird hiernach sich selbst entsprechen; das Entsprechen überhaupt wird ein involutorisches sein; u. s. w. Wegen der Kreisverwandtschaft zwischen $\pi, \pi', \sigma, \sigma'$ müssen aber alle diese Beziehungen zwischen π und π' auch zwischen σ und σ' statt haben, und wir schliessen somit auf nachstehende Eigenschaften zweier in derselben Kugelfläche begriffenen kreisverwandten Figuren, welche drei Punkte A, B, C, als sich selbst entsprechend, gemein haben:

1) Ausser A, B, C entspricht auch noch jeder andere Punkt sich selbst, welcher mit diesen dreien in einem Kreise k liegt. Je zwei

andere einander entsprechende Punkte der Kugelfläche liegen auf verschiedenen Seiten dieses k.

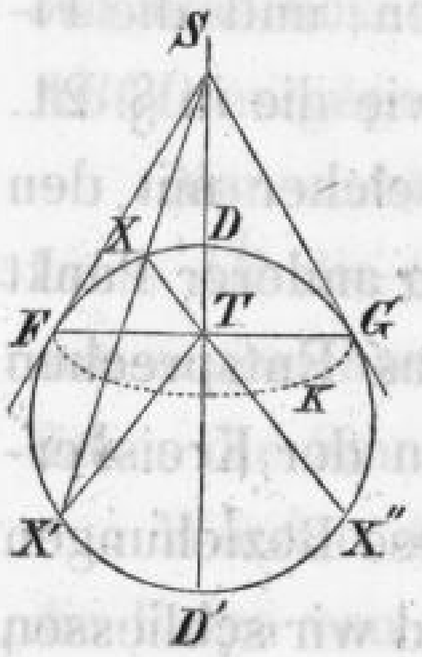
2) Die zwei Figuren sind in Involution.

3) Je zwei Paare entsprechender Punkte liegen in einem Kreise. Ein solcher Kreis entspricht sich selbst und schneidet den Kreis k rechtwinklig. Umgekehrt entsprechen sich alle Punkte eines den k rechtwinklig schneidenden Kreises paarweise, und somit der Kreis sich selbst.

Weitere Folgerungen. 4) Sei D einer der beiden Pole des k, so entspricht jeder durch D gelegte Hauptkreis sich selbst, weil er den k rechtwinklig schneidet; er enthält mithin auch den dem D entsprechenden und nach 1) von D verschiedenen Punkt D'. Da nun alle durch D gelegten Hauptkreise sich im Gegenpunkte von D schneiden, so ist D' mit diesem Gegenpunkte identisch, und es sind daher die Pole des k zwei einander entsprechende Punkte.

5) Wenn zwei in derselben Ebene enthaltene Systeme von Punkten in Involution sind, so fallen ihre C.punkte zusammen. Denn entspricht dem unendlich entfernten Punkte U der Ebene, als einem Punkte des zweiten Systems, der Punkt M im ersten, so entspricht auch dem U, als einem Punkte des ersten Systems, der Punkt M im zweiten.

Diesem Satze gemäss hat ein System von Punkten, welche in einem durch die Pole D und D' gehenden Hauptkreise oder Meridiane begriffen sind, mit dem ihm entsprechenden und daher in demselben Meridiane, also mit dem vorigen in einerlei Ebene enthaltenen Systeme einen gemeinsamen C.punkt M, den wir jetzt zu bestimmen suchen wollen.



6) Heissen F und G die Durchschnitte des in Betracht gezogenen Meridians mit dem Kreise k, so ist, weil jeder dieser zwei Punkte nach 1) sich selbst entspricht, das Dreieck MFG dem MGF ähnlich (§. 9.), folglich MFG ein gleichschenkliges Dreieck, und M ein Punkt der Axe DD'.

Die Bestimmung von M in DD' ist aber zweideutig, jenachdem man nämlich die gleichnamigen Sinne der zwei in derselben Ebene einander entsprechenden Systeme entweder einerlei, oder einander entgegengesetzt annimmt, und wonach zu jedem Punkte X der Meridianebene der entsprechende X' so zu bestimmen ist, dass die Dreiecke MFX und $MX'F$ einander ähnlich und entweder stets einerlei, oder stets verschiedenen Sinnes werden (§. 9.), X' selbst aber nur dann unzweideutig sich ergiebt, wenn, wie gegenwärtig, X, und damit auch X', ein Punkt des Meridians ist.

7) Nun sind die Sinne der Dreiecke MFG und MGF stets einander entgegengesetzt, wo auch M in der Axe DD' liegen mag, den einzigen Fall ausgenommen, wenn M der Durchschnitt T von DD' mit FG ist, da durch drei in einer Geraden liegende Punkte T, F, G ein Sinn der Ebene nicht ausgedrückt wird. Bei der ersten der zwei vorhin gemachten Annahmen, dass nämlich die Sinne der Dreiecke MFX und $MX'F$ stets einerlei sein sollen, muss folglich M mit T coincidiren.

8) Bei der zweiten der vorigen Annahmen sind dieselben einander ähnlichen Dreiecke entgegengesetzten Sinnes, folglich der Winkel $FMX' = -XMF = FMX$, folglich $XMX' = 0$, und es liegen daher X und X' mit M in einer Geraden. Ist aber X ein dem F unendlich naher Punkt des Meridians, so ist, weil F sich selbst entspricht, auch X' ein solcher, und die Gerade XX' wird eine Tangente des Meridians. Der Ort von M für die zweite Annahme, welcher S heisse, ist folglich der Durchschnitt der in F an den Meridian gelegten Tangente mit DD'.

9) Die Punkte T und S kann man auch als den Mittelpunkt des Kreises k und als die Spitze der die Kugelfläche in demselben Kreise berührenden Kegelfläche definiren, und es erhellet aus dem Voranstehenden, wie man mittelst des einen oder des andern dieser zwei Punkte für jeden Punkt X eines jeden Meridians, d. i. für jeden Punkt X der Kugelfläche, den entsprechenden X' leicht finden kann. — Mit Hülfe von T geschieht dieses, wenn man, wegen der Aehnlichkeit und der Gleichsinnigkeit der Dreiecke TDX und $TX'D'$, in der Meridianebene des X den Winkel $D'TX' = XTD$ macht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man den zweiten Durchschnitt X'' von XT mit der Kugelfläche bestimmt und im Hauptkreise DX den Bogen $DX' = X''D$ macht. Und denselben Punkt X' erhält man mittelst S noch einfacher als zweiten Durchschnitt von SX mit der Kugelfläche.

10) Liegen die Punkte X, Y, ... der Kugelfläche in einem Kreise, so sind auch X', Y', ... in einem solchen enthalten, wegen der Kreisverwandtschaft beider Systeme; und da zu Folge der eben gemachten Construction X' und X'', und eben so Y' und Y'', etc. gegen die Axe DD' eine symmetrische Lage haben, so liegen X'', Y'', ... in einem dem $X'Y'$... gleichen Kreise. Bezeichnen wir daher die drei Systeme, zu denen die Punkte X, X', X'' gehören, resp. mit σ, σ', σ'', so sind, ebenso wie

σ und σ', auch σ und σ'' kreisverwandt, und überdies auch in Involution, da dem X'', als einem Punkte des σ, der Punkt X in σ'' entspricht.

11) Für die zwei Systeme σ und σ'' sind T und S gleichfalls die beiden C.punkte, jedoch mit Vertauschung ihrer vorigen Rollen. Denn bedeuten X, Y zwei Punkte eines Meridiankreises, so sind in dessen Ebene die Dreiecke TXY und $TY''X''$ einander ähnlich und verschiedenen Sinnes, dagegen die Dreiecke SXY und $SY''X''$ einander ähnlich und einerlei Sinnes. Auch unterscheidet sich die Verwandtschaft zwischen σ und σ'' von der zwischen σ und σ' noch dadurch, dass in jedem Meridiane bei letzterer von gewissen zwei Punkten (F und G) ein jeder sich selbst entspricht, bei ersterer aber es keinen sich selbst entsprechenden Punkt giebt.

Dass übrigens durch T und S der Durchmesser DD' harmonisch getheilt wird, ist ohne Weiteres einleuchtend, und ich setze nur noch hinzu, dass, sowie S die Spitze einer die Kugel in einem Kreise, dessen Mittelpunkt T, berührenden Kegelfläche ist, T als die Spitze einer imaginären Kegelfläche angesehen werden kann, welche die Kugel in einem imaginären Kreise, dessen Mittelpunkt S ist, berührt, und dass die Summe der Quadrate der Halbmesser beider Kreise $= -ST^2$ ist.

12) Projicirt man, sei es von S, oder von T aus, als Centrum, einen Kugelkreis auf die Kugelfläche selbst, so erhält man nach 9) wiederum einen Kreis. Dies giebt, weil nach der verschiedenen Annahme des Kreises k der Punkt S jeder beliebige ausserhalb, und der Punkt T jeder beliebige innerhalb der Kugelfläche sein kann, den bemerkenswerthen Satz: *Ist von den zwei Schnitten einer Kegelfläche mit einer Kugelfläche der eine ein Kreis, so ist es auch der andere.*

Man kann hieraus noch folgern, *dass, wenn durch zwei Kreise, deren Ebenen nicht parallel sind, eine Kegelfläche beschrieben werden kann, sie auch in einer Kugelfläche liegen, und umgekehrt.*

Kreisverwandtschaft zwischen Figuren im Raume überhaupt.

§. 32. Unter der Annahme, dass die Kreisverwandtschaft auch auf den Raum von drei Dimensionen ausgedehnt werden kann, so dass, wenn bei zwei solchen Räumen irgend vier Punkte des einen in einem Kreise liegen, immer auch die vier entsprechenden des andern in einem Kreise begriffen sind, können wir, ohne noch die Realität dieser Annahme erwiesen zu haben, mit Hülfe der im Vorigen für kreisverwandte sphärische Figuren gefundenen Eigenschaften auf nachstehende Eigenschaften der Kreisverwandtschaft im Raume schliessen.

1) Liegen fünf Punkte A, B, C, D, E des einen Raumes r in einer Kugelfläche α, so lässt sich auch durch die entsprechenden fünf Punkte A',...E' des andern r' eine Kugelfläche beschreiben, und es entspricht daher jeder Kugelfläche des einen Raums eine Kugelfläche im andern.

Beweis. Man beschreibe die Kreise ABC und ADE, die sich, als zwei in α enthaltene Kreise, ausser in A noch in einem zweiten Punkte F dieser Fläche schneiden werden. Unter der gemachten Annahme werden mithin auch A', B', C', F' und A', D', E', F' in Kreisen liegen. Beschreibt man daher durch A', B', C', D' eine Kugelfläche, so liegt in dieser auch F', nämlich als Punkt des Kreises $A'B'C'$; in derselben Fläche liegt folglich auch der Kreis $A'D'F'$, mithin auch der Punkt E', als ein Punkt des letztern Kreises.

2) Da hiernach der durch irgend vier Punkte in r zu beschreibenden Kugelfläche die durch die entsprechenden vier Punkte in r' bestimmte Kugelfläche nach dem Gesetze der Kreisverwandtschaft entspricht, so ist nach §. 27. jedes zwischen vier Punkten des einen Raums stattfindende D.verhältniss dem von den entsprechenden vier im andern Raume gebildeten gleich. Und dasselbe gilt auch von D.winkeln, wenn diese in derselben Bedeutung wie auf Kugelflächen (ebds.) genommen werden; d. h. je zweien sich in zwei Punkten schneidenden Kreisen des Raumes r entsprechen in r' zwei Kreise, welche sich in zwei Punkten unter denselben Winkeln wie erstere schneiden.

3) Wenn A, B, C, also auch, wenigstens im Allgemeinen, A', B', C' einander unendlich nahe liegen, so sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander ähnlich, da sie als Elemente zweier kreisverwandten Kugelflächen angesehen werden können (§. 27.). Mithin sind auch je zwei entsprechende nach allen Dimensionen unendlich kleine Tetraeder einander ähnlich, indem die vier das eine begrenzenden Dreiecke den entsprechenden vier Dreiecken des andern ähnlich sind. Ueberhaupt also sind je zwei kreisverwandte räumliche Figuren, ebenso wie ebene und sphärische, in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

4) Hieraus folgt noch, dass die Winkel, unter denen sich in dem einen Raume zwei Kreise, — wenn auch nur in einem Punkte —, oder

ein Kreis und eine Kugelfläche, oder zwei Kugelflächen schneiden, den Winkeln gleich sind, unter denen sich die entsprechenden Kreise und Kugelflächen im andern Raume schneiden.

§. 33. Die in §. 3. in Bezug auf kreisverwandte ebene Figuren gemachten Schlüsse gelten, wie man leicht wahrnimmt, unverändert auch bei räumlichen Figuren, und es müssen daher, wenn die Kreisverwandtschaft mit der Aehnlichkeit nicht zusammenfallen soll, gewissen zwei endlich entfernten Punkten in r und r' — den C.punkten M und N' dieser Räume — zwei unendlich entfernte M' und N in r' und r nach unbestimmt bleibenden Richtungen entsprechen.

Hiernach entspricht der Kugelfläche $MABN$ die Kugelfläche $M'A'B'N'$, d. i. jeder durch M gelegten Ebene eine durch N' gehende Ebene, und ebenso jeder Geraden durch M eine Gerade durch N', und umgekehrt; wobei zugleich einleuchtet, dass von je zwei durch M und N' gelegten einander entsprechenden Ebenen die C.punkte, die ihnen für sich, als Ebenen, deren Punkte in kreisverwandter Beziehung stehen, zukommen, mit den C.punkten M und N' der beiden Räume identisch sind.

In Verbindung mit §. 9. folgt hieraus, dass für je zwei Paare entsprechender Punkte in r und r', wie A und A', B und B', die Dreiecke MAB und $N'B'A'$ einander ähnlich sind, dass mithin, wie bei zwei ebenen kreisverwandten Systemen von Punkten, so auch bei zwei räumlichen je zwei der Linien $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$, ... Winkel von derselben Grösse mit einander bilden, wie die entsprechenden unter den Linien MA, MB, MC, ..., und dass erstere Linien den letztern umgekehrt proportional sind.

§. 34. Soll daher zu einem Systeme von Punkten A, B, C, ... im Raume r ein ihm kreisverwandtes System in r' construirt werden, und werden dabei noch die C.punkte M und N' beider Räume als gegeben vorausgesetzt, so ziehe man durch N' gerade Linien a', b', c', ... nach solchen Richtungen, dass das System a', b', c', ... dem von den Richtungen MA, MB, MC, ... gebildeten gleich wird, dass also das eine System entweder geradezu, oder nach Verwandlung seiner Richtungen in die entgegengesetzten, mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann. Man nehme hierauf A' in a' willkührlich und bestimme dann B' in b', C' in c', etc. dergestalt, dass, auch hinsichtlich der durch die Richtungen bestimmten Vorzeichen, sich

$$N'B':N'A' = MA:MB,\ N'C':N'A' = MA:MC, \text{ etc. verhält.}$$

Dass nun das auf solche Weise erhaltene System A', B', C',... dem gegebenen A, B, C,... in der That kreisverwandt ist, lässt sich auf nachstehende Weise darthun. — In Folge der Construction sind die Dreiecke $N'B'A'$, $N'C'B'$, $N'D'C'$, $N\,A'D'$ resp. den Dreiecken MAB, MBC, MCD, MDA ähnlich. Hieraus fliesst eben so, wie in §. 10. *d.*, die Gleichheit der D.verhältnisse $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$, d. i. die Gleichheit je zweier D.verhältnisse zwischen entsprechenden Punkten. Liegen daher die Punkte A, B, C, D in dieser Folge in einem Kreise, und ist mithin

$$(ABDC)+(ADBC)=1 \quad (\text{§. 26. } a.),$$

so besteht dieselbe Gleichung auch zwischen A', B', C', D', woraus wir schliessen (§. 26. *d.*), dass, wie es die Kreisverwandtschaft erfordert, auch letztere vier Punkte in der genannten Folge in einem Kreise enthalten sind.

§. 35. Zusätze. *a.* Wie man sieht, ist hierdurch zugleich die Realität der Kreisverwandtschaft im Raume bewiesen (§. 32.), sowie auch der den Sätzen in §. 26. *c.* und §. 27. analoge Satz, dass die Kreisverwandtschaft im Raume durch die Gleichheit entsprechender D.verhältnisse definirt werden kann.

Da ferner bei zwei Systemen, deren jedes aus vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten besteht, durch die vier Punkte eines jeden sich eine Kugelfläche beschreiben lässt, und aus der Gleichheit entsprechender D.winkel in beiden Systemen auf die Kreisverwandtschaft (§. 27.) und damit auf die Gleichheit der D.verhältnisse beider Systeme geschlossen werden kann, so muss die im Früheren für ebene und sphärische Figuren erwiesene Definition der Kreisverwandtschaft durch Gleichheit entsprechender D.winkel auch für räumliche Figuren Geltung haben.

b. Bei der im vor. §. ausgeführten Construction bleiben folgende Stücke des Systems in r' der Willkühr überlassen: I. der Ort von A'; II. die durch $N'A'$ zu legende Ebene, in welcher B' enthalten sein soll; III. die Seite von $N'A'$ in dieser Ebene, auf welcher B', und IV. die Seite dieser Ebene selbst, auf welcher C' liegen soll. Nachdem man aber die Wahl über diese vier Stücke getroffen hat, ist das System in r' vollkommen bestimmt. Denn mit den drei ersten Stücken und dem Winkel AMB, welchem der Winkel $A'N'B'$ gleich ist, ist die Richtung $N'B'$ bestimmt, und mit dieser Richtung ist es der Ort von B' durch die Proportion $MB:MA = N'A':N'B'$. Mit dem vierten Stücke und den Winkeln AMC und BMC ergiebt sich hierauf die Richtung von $N'C'$, indem der von $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$ gebildete körperliche Winkel dem von MA, MB, MC gebildeten gleich sein muss; die Länge von $N'C'$ aber folgt aus einer der vorigen analogen Proportion. Eben so, wie C', lässt sich dann auch jeder der übrigen Punkte, z. B. D', unzweideutig finden, da, jenachdem C und D auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Ebene MAB sind, auch C' und D' auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Ebene $N'A'B'$ liegen müssen, und somit die Seite letzterer Ebene, auf welcher D' liegt, bestimmt ist.

c. Sind in r' ausser dem C.punkte N' noch die Stücke I. und II., d. i. der Punkt A' und die Ebene $N'A'B'$, nicht aber auch die Bestimmungen III. und IV. gegeben, so kann man in r' vier verschiedene Systeme construiren, deren jedes mit dem gegebenen in r kreisverwandt ist. Denn den Punkt B' kann man in der Ebene $N'A'B'$ sowohl rechter, als linker Hand von der Geraden $N'A'$, und den Punkt C' sowohl vor, als hinter derselben Ebene annehmen.

§. 36. Es ist nicht schwer, bei der in §. 34. gezeigten Construction eines einem gegebenen Systeme kreisverwandten Systems die zu treffenden Abänderungen anzugeben, wenn nicht mehr die C.punkte des einen und des andern unter die gegebenen Stücke gehören, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die den gegebenen Punkten M und N' entsprechenden Punkte M' und N endlich entfernt liegen, und daher jetzt noch gegeben sein müssen, da sie auch vorher in ihrer unendlichen Entfernung als zwei gegebene Punkte zu betrachten waren.

Um diese allgemeinere Aufgabe zu lösen, construire man zunächst ein System von Kreisen $M'A'N'$, $M'B'N'$, $M'C'N'$, etc., von denen sich je zwei in M' und N' unter denselben Winkeln, wie die zwei entsprechenden unter den Kreisen MAN, MBN, MCN, etc. in M und N, schneiden. Zu dem Ende lege man an letztere Kreise in M die geradlinigen Tangenten a, b, c,... und bestimme die positive Richtung einer jeden übereinstimmend mit der Richtung, welche das Element des von ihr berührten Kreises in M, gemäss dem durch die Aufeinanderfolge der drei Buchstaben (MAN, etc.) ausgedrückten Sinne des Kreises, hat. Man construire hierauf, wie in §. 34., ein dem Systeme der sich in M schneidenden Richtungen a, b, c,... gleiches System durch den Punkt M' gehender Richtungen a', b', c',... Das System von Kreisen, welche, durch M' und N'

gehend, in M' die a', b', c',... berühren und somit vollkommen bestimmt sind, — dieses System wird, wenn man noch die Sinne der Kreise übereinstimmend mit den Richtungen ihrer Tangenten a', b', c',... in M' annimmt, das verlangte sein.

Weil die Sinne letzterer Kreise auch durch die Folgen $M'A'N'$, $M'B'N'$, etc. ausgedrückt werden, so ist mit dem Sinne eines jeden zugleich noch bestimmt, auf welcher Seite der gemeinschaftlichen Sehne $M'N'$ im ersten der Punkt A', im zweiten der Punkt B', u. s. w. liegen muss.

Der Punkt A' kann im ersten Kreise auf der ihm zugehörigen Seite der Sehne $M'N'$ beliebig genommen werden. Wird alsdann das Verhältniss

$$\frac{M'A'}{A'N'} : \frac{MA}{AN} = \alpha$$

gesetzt, so hat man zufolge der auch im Raume statt findenden Gleichheit der D.verhältnisse zwischen entsprechenden Punkten:

$$\frac{M'B'}{B'N'} = \alpha . \frac{MB}{BN}, \frac{M'C'}{C'N'}, = \alpha . \frac{MC}{CN}, \text{ etc.}$$

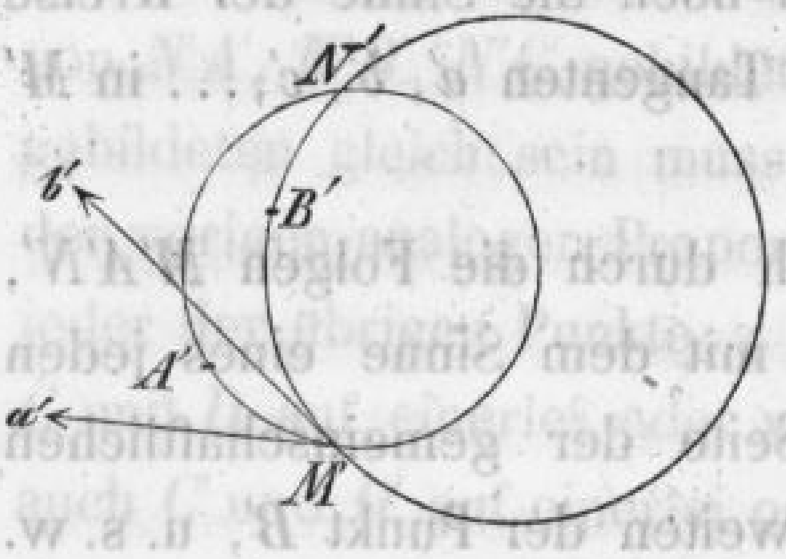
Hiermit aber lassen sich die Punkte B', C',..., da noch die Seiten von $M'N'$ bekannt sind, auf welchen sie in ihren Kreisen $M'B'N'$, etc. liegen müssen, unzweideutig finden, und die vorgesetzte Aufgabe ist daher gelöst.

§. 37. Zählen wir noch, wie in §. 35. *b.*, die Stücke auf, welche bei der eben gemachten Construction nach Willkühr bestimmt werden können. Sie sind, wenn wir von dem Systeme in r' gar nichts als gegeben voraussetzen:

I. die Punkte M', N' und A', wodurch zugleich der Kreis $M'A'N'$, die ihn in M' berührende Gerade a', und durch die letztgenannte Folge der drei Punkte die positive Richtung von a' gegeben sind;

II. die durch a' gehende Ebene, in welcher b' liegen soll, oder die Ebene $a'b'$. Weil a' und b' die Kreise $M'A'N'$ und $M'B'N'$ in M' berühren, so berührt diese Ebene die Kugelfläche $M'A'N'B'$, welche s' heisse, in M'. Der Mittelpunkt von s' ist der gegenseitige Durchschnitt der Axe des Kreises $M'A'N'$ und des in M' auf der Ebene $a'b'$ errichteten Perpendikels; denn beide Linien sind Axen von s'. Hiernach ist mit dem Kreise $M'A'N'$ und der Ebene $a'b'$ zugleich s' gegeben, und es kann daher als zweites Stück statt der Ebene $a'b'$ auch die Kugelfläche s' genommen werden;

III. die Seite von a' in der Ebene $a'b'$, auf welche der positive Theil der Richtung b' fallen soll, oder — weil der von M' durch B' bis N' gehende Kreisbogen und der positive Theil seiner Tangente b' auf einerlei Seite der Ebene $M'A'N'a'$ fallen — die Bestimmung, in welchem der zwei Theile der durch den Kreis $M'A'N'$ getheilten Kugelfläche s' der Punkt B' liegen soll;



IV. die Seite der Ebene $a'b'$, auf welche der positive Theil der Richtung c' fallen soll, die Bestimmung also, ob dieser Theil bei seinem Ausgange von M' zunächst in die von $a'b'$ in M' berührte Kugel s' eindringen soll, oder nicht, oder — weil bei statt findendem Eindringen, und nur dann, der von M' durch C' bis N' gehende Bogen im Innern von s' begriffen ist — die Bestimmung, ob C' innerhalb, oder ausserhalb der Kugelfläche s' liegen soll.

§. 38. Zusätze und Folgerungen. *a.* Dass die unter I. bis IV. aufgezählten Stücke nach Willkühr angenommen werden können, so dass nicht mittelst einiger derselben die übrigen in Folge der kreisverwandtschaftlichen Beziehungen zwischen beiden Figuren sich finden lassen, dies ist mit Rücksicht auf dasjenige, was bereits in §. 34. und §. 35. *b.* über die Construction des einem gegebenen Systeme in einem Punkte sich schneidender Richtungen gleichen Systems bemerkt worden, ohne Weiteres einleuchtend. Soll daher zu einem gegebenen Systeme im Raume ein kreisverwandtes construirt werden, und sind für irgend drei Punkte M, N, A des erstern die ihnen entsprechenden M', N', A' des letztern gegeben, so reichen diese noch nicht hin um zu den übrigen Punkten des erstern die entsprechenden des letztern zu finden. Wollte man dagegen die irgend vier Punkten des erstern Systems entsprechenden Punkte des letztern willkührlich gegeben sein lassen, so wären der gegebenen Stücke zu viel, da zwischen diesen vier Punkten sich D.verhältnisse und D.winkel bilden, welche den entsprechenden im erstern Systeme gleich sein müssen. Wohl aber kann man alle auf M', N', A' folgenden Punkte B', C', ... des zweiten Systems unzweideutig finden, wenn nächst jenen drei Punkten noch eine durch sie gehende Kugelfläche s', die einer gewissen durch M, N, A gehenden, etwa der noch den Punkt B enthaltenden, Kugelfläche s entspricht, und ausserdem noch die zwei bloss Lagenverhältnisse betreffenden Stücke III. und IV. gegeben sind.

b. Sind nicht zugleich letztere zwei Stücke, sondern bloss die drei Punkte M', N', A' und die Kugelfläche s' gegeben, so lassen sich damit ähnlicherweise, wie in §. 35. *c.*, vier verschiedene Systeme construiren. Bezeichnet man nämlich die der s' entsprechende Kugelfläche $MANB$ mit s, die zwei Theile, in welche die Fläche s (s') durch den Kreis MNA ($M'N'A'$) getheilt wird, mit α und β (α' und β'), die von s und s' eingeschlossenen Räume mit γ und γ', die ausserhalb s und s' befindlichen Räume mit δ und δ', so kann man den Punkten in α und β entweder die Punkte in α' und β', oder die in β' und α', und dabei jedesmal den Punkten in γ und δ entweder die Punkte in γ' und δ', oder die in δ' und γ' entsprechend setzen.

c. Zu einem gegebenen Systeme von Punkten im Raume lassen sich daher immer noch drei andere ihm kreisverwandte construiren, dergestalt, dass erstens drei gewisse Punkte M, N, A des Systems mit den ihnen in jedem der drei andern Systeme entsprechenden Punkten identisch sind, und damit auch jeder andere Punkt des Kreises MNA, welcher k heisse, mit den drei ihm entsprechenden zusammenfällt, und dass zweitens eine gewisse durch M, N, A gehende Kugelfläche s in jedem der drei andern Systeme sich selbst zur entsprechenden hat. Den vorhin mit α, β, γ, δ bezeichneten Flächen und Räumen des gegebenen Systems können nämlich in dem zu construirenden

entweder $\beta, \alpha, \gamma, \delta$, oder $\beta, \alpha, \delta, \gamma$, oder $\alpha, \beta, \delta, \gamma$

entsprechend gesetzt werden.

Eine nähere mit keiner Schwierigkeit verbundene Untersuchung dieser drei Fälle, wobei ich von der Betrachtung in §. 31. ausging, hat mich zu nachstehenden Resultaten geführt.

Das gegenseitige Entsprechen der Punkte ist in jedem der drei Fälle ein involutorisches. Die zwei Systeme haben daher stets einen gemeinschaftlichen C.punkt (vergl. §. 31. 5)). Bezeichnen wir diesen mit O und einen beliebigen Punkt des Kreises k mit E, so ist in jedem der drei Fälle für je zwei einander entsprechende Punkte X und X'

$$OX.OX' = OE^2.$$

Im ersten Falle ist O die Spitze des Kegels, welcher die Kugel s im Kreise k berührt; X und X' liegen mit O in einer Geraden und auf einerlei Seite von O.

Im zweiten Falle ist O der Mittelpunkt des Kreises k, und der Winkel XOX' wird von der Ebene dieses Kreises rechtwinklig halbirt.

Im dritten Falle ist O der Mittelpunkt der Kugel s; X und X' aber liegen, wie im ersten, mit O in einer Geraden und auf einerlei Seite von O.

d. Zwei kreisverwandte Systeme $A, B, C, \ldots$ und $A', B', C', \ldots$ im Raume können immer in eine solche Lage gegen einander gebracht werden, dass erstens die C.punkte beider in einem Punkte O zusammenfallen, und somit die Producte $OA . OA'$, $OB . OB'$, $OC . OC'$, etc. von gleicher Grösse sind, die man $= c^2$ setze; und dass zweitens von zwei Paaren entsprechender Punkte A und A', B und B' die zwei Punkte eines jeden mit O in einer Geraden und darin auf einerlei Seite O liegen. Alsdann werden die zwei Punkte aller übrigen Paare C und C', D und D', etc. entweder dieselbe Lage gegen O, wie die jener zwei erstern, haben, oder es werden alle die Winkel COC', DOD', etc. von der Ebene $OAA'BB'$ rechtwinklig halbirt werden.

Im erstern dieser zwei Fälle entspricht jeder Punkt der um O als Mittelpunkt mit c als Halbmesser beschriebenen Kugelfläche, und kein anderer, sich selbst. Nächstdem entspricht ausser dieser Kugelfläche noch jede andere sie rechtwinklig schneidende Kugelfläche, und keine andere, sich selbst. — Im letztern Falle sind es die Punkte des um O mit c in der Ebene OAB zu beschreibenden Kreises, so wie die durch diesen Kreis zu legenden Kugelflächen, welche sich selbst entsprechen.

Von den aus der Kreisverwandtschaft entspringenden Aufgaben.

§. 39. Der Hauptnutzen, den die Lehre von den Verwandtschaften der Figuren gewährt, besteht unstreitig darin, dass, wenn zwei Systeme von Punkten, als in einer gewissen Verwandtschaft zu einander stehend, bewiesen werden sollen, es nicht nöthig ist, für jedes Stück des einen Systems, welches eben dieser Verwandtschaft willen dem entsprechenden Stücke des andern Systems gleich sein muss, diese Gleichheit besonders darzuthun, sondern dass immer aus einer viel geringern Anzahl ν solcher Gleichheiten auf die Gleichheit je zweier der übrigen einander entsprechenden Stücke geschlossen werden kann, und dass daher zu Folge jeder Verwandtschaft bei einem Systeme von n Punkten aus irgend ν von einander unabhängigen Stücken, welche von einer durch die jedesmalige Verwandtschaft bedingten Beschaffenheit sind, alle übrigen Stücke von derselben Beschaffenheit gefunden werden können, — indem man nämlich ein zweites System von n Punkten construirt, in welchem die

ν Stücke, welche den ν gegebenen entsprechen, von gleicher Grösse mit den gegebenen sind. — Dabei ist ν eine von der Zahl n, von der Art der Verwandtschaft und von dem Umstande, ob das System in einer Geraden, oder in einer Ebene, oder im Raume enthalten ist, abhängige Zahl.

Aus jeder Verwandtschaft entspringt demnach eine besondere Classe geometrischer Aufgaben. Im zweiten Abschnitte meines «barycentrischen Calculs» habe ich die Classen von Aufgaben, welche aus den fünf dort behandelten Verwandtschaftsarten hervorgehen, einzeln aufgeführt. Dass nun auch die Kreisverwandtschaft zu einer besondern Classe von Aufgaben hinleitet, dies folgt im Betreff ebener Figuren sogleich aus dem Satze (§. 19.), dass, wenn zu einem Systeme von n Punkten $A, B, C, D, E, \ldots$ in einer Ebene ein ihm kreisverwandtes $A', B', \ldots$ construirt werden soll, die drei Punkte A', B', C' willkührlich angenommen werden können, und dass es hinreicht, wenn für jeden der $n-3$ übrigen Punkte $D', E', \ldots$ zwei D.winkel, für D' die D.winkel $ABCD$ und $ACBD$,
für E' die D.winkel $ABCE$ und $ACBE$,
u. s. w. gegeben sind. Hat man aber mit diesen $2n-6$ D.winkeln das kreisverwandte System construirt, so hat man damit zugleich alle übrigen D.winkel und alle D.verhältnisse des ursprünglichen Systems gefunden, indem diese Grössen in beiden Systemen gleiche Werthe haben. Wenn man daher D.winkel und D.verhältnisse, als Grössen, deren jede durch vier Punkte bestimmt wird, unter dem gemeinsamen Namen Quaternionen begreift, so müssen von jenen $2n-6$ D.winkeln alle übrigen Quaternionen des Systems als Functionen darstellbar sein. Man wird folglich, indem man irgend $2n-5$ Quaternionen des Systems als Functionen jener $2n-6$ D.winkel ausdrückt und aus diesen $2n-5$ Gleichungen letztere D.winkel eliminirt, zwischen den $2n-5$ Quaternionen wenigstens Eine Gleichung erhalten, und zwar nur Eine, wenn je $2n-6$ derselben von einander unabhängig sind.

Bei einem Systeme von n Punkten in einer Ebene können demnach, wenn von den durch sie gebildeten Quaternionen irgend $2n-6$ von einander unabhängige gegeben sind, alle übrigen Quaternionen gefunden werden.

§. 40. Ein anderer Beweis dieses Satzes, der uns zugleich zu der möglich einfachsten Lösung der aus dem Satze entspringenden Aufgaben führen wird, ist folgender.

Man denke sich zu dem Systeme der n Punkte $A, B, \ldots L, M$ ein ihm kreisverwandtes $A', B', \ldots L', M'$ hinzu und nehme an, dass einer der n Punkte des letztern — es sei M' — unendlich entfernt liege. Jeder Quaternion des erstern Systems, welche den Punkt M enthält, wird alsdann im letztern eine ihr gleiche Ternion, d. i. eine schon durch drei Punkte bestimmte Grösse, entsprechen, indem z. B. der D.winkel $MCBA = CMAB = BAMC = ABCM =$ dem einfachen Winkel $A'B'C'$, und das D.verhältniss $(MCBA) = (CMAB) =$ etc. $=$ dem einfachen Verhältnisse $A'B' : B'C'$ wird. Eben so ist umgekehrt jede Ternion von einer dieser beiden Formen im zweiten Systeme einer den Punkt M enthaltenden Quaternion im ersten gleich. Die Aufgabe: bei einem ebenen Systeme von n Punkten $A, B, \ldots L, M$ aus x Quaternionen desselben alle übrigen zu finden, wird somit darauf zurückgebracht: bei einem ebenen Systeme von $n-1$ Punkten $A', B', \ldots L'$ aus x Stücken desselben, welche theils Ternionen, theils Quaternionen und somit Functionen von Ternionen sind, alle übrigen Ternionen des Systems zu finden.

Bekanntlich aber können bei einem ebenen Systeme von $n-1$ Punkten aus $2(n-1)-4$ von einander unabhängigen Verhältnissen zwischen den gegenseitigen Abständen der Punkte, oder von solchen Verhältnissen abhängigen Grössen, also aus $2n-6$ Stücken, welche in ihrer einfachsten Form Ternionen von oben bemerkter Beschaffenheit sind, alle übrigen Stücke derselben Art gefunden werden. Es ist dieses nämlich der Satz, welcher der aus der Aehnlichkeit ebener Figuren entspringenden Classe von Aufgaben zu Grunde liegt (Baryc. Calc. S. 189). Mithin ist $x = 2n-6$, und es wird daher auch bei einem ebenen Systeme von n Punkten, von $2n-6$ von einander unabhängigen Quaternionen desselben jede $(2n-5)$te Quaternion abhängig sein. Die Gleichung aber, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, wird einerlei sein mit derjenigen, welche zwischen den entsprechenden Stücken des kreisverwandten Systems von $n-1$ endlich gelegenen Punkten statt hat und nach den bekannten Vorschriften der Polygonometrie gefunden wird.

Diese Reduction der durch die Kreisverwandtschaft begründeten Aufgaben auf solche, die aus der Aehnlichkeit der Figuren entspringen, erhellet übrigens auch daraus, dass alle dem Systeme $A, B, \ldots M$ kreisverwandte und daher auch einander kreisverwandte Systeme $A', B', \ldots M'$ durch die Bedingung, dass bei allen der Punkt M' unendlich entfernt liegen soll, einander ähnlich werden (§. 5.).

§. 41. Um hiernach aus irgend $2n-6$ von einander unabhängigen Quaternionen eines Systems von n Punkten $A, .. L, M$ in einer Ebene irgend eine $(2n-5)$te desselben zu finden, oder, was dasselbe sagt, um die zwischen den $2n-5$ Quaternionen bestehende Relation zu ermitteln, können wir, die im vor. §. zunächst auf das System $A', ... L'$ sich beziehende Lösung auf das System $A, .. L, M$ selbst übertragend und mit letzterem operirend, als ob es das erstere wäre, folgende Regeln aufstellen:

1) In jeder der $2n-5$ Quaternionen, welche den Punkt M enthält, bringe man denselben, wenn er nicht bereits die vierte Stelle einnimmt, durch Versetzung der vier Punkte ohne Aenderung des Werthes der Quaternion an die vierte Stelle (vergl. vor. §.), lasse hierauf M weg und verwandele damit die Quaternion in eine Ternion, nämlich den D.winkel $ABCM$ in den einfachen Winkel ABC, und das D.verhältniss $(ABCM)$ in das einfache $AB:BC$.

2) Jede der Quaternionen, in welcher M nicht vorkommt, drücke man durch zwei Ternionen aus, wie etwa $ABCD$ durch $ABC+CDA$, und $(ABCD)$ durch $(AB:BC)\,(CD:DA)$.

3) Man suche die Relation, welche bei dem Systeme von $n-1$ Punkten $A, B, ... L$ zwischen den $2n-5$ theils in Ternionen verwandelten, theils durch solche ausgedrückten Quaternionen besteht. Denn dieselbe Beziehung wird auch zwischen den $2n-5$ von den n Punkten $A, B, ... L, M$ gebildeten Quaternionen statt haben.

§. 42. Der kleinste Werth, den die Zahl n hierbei haben kann, ist 4, wodurch $2n-5=3$ wird. Bei einem Systeme von 4 Punkten wird daher aus je zwei von einander unabhängigen Quaternionen jede dritte sich finden lassen. In der That sind hier die Relationen zwischen

$$ABCD,\ BCAD,\ CABD,\ (ABCD),\ (BCAD),\ (CABD),$$

als worauf sich alle übrigen Quaternionen zwischen $A, .. D$ zurückführen lassen, einerlei mit den Relationen zwischen den durch Weglassung von D hervorgehenden Winkeln und Verhältnissen

$$ABC,\ BCA,\ CAB,\ AB:BC,\ BC:CA,\ CA:AB;$$

und man weiss aus der Trigonometrie, dass zwischen je dreien dieser sechs Stücke des Dreiecks ABC eine Relation besteht. Vergl. §. 16.

Für $n=5$ wird $2n-5=5$, und man wird daher bei einem Fünfeck $A...E$ zwischen je 5 Quaternionen desselben wenigstens Eine Relation angeben können.

Werde z. B. die Relation zwischen den fünf D.winkeln

$$BCDE=\alpha,\ CDEA=\beta,\ DEAB=\gamma,\ EABC=\delta,\ ABCD=\varepsilon$$

verlangt. — Durch Weglassung des Punktes E wird

$$\alpha=BCD,\ \beta=DCAE=DCA,\ \gamma=ABDE=ABD,$$
$$\delta=CBAE=CBA,\ \varepsilon=ABC+CDA=-\delta+CDA,$$

und unsere Aufgabe ist somit darauf zurückgebracht: beim Viereck $ABCD$ die Relation zwischen den fünf Winkeln BCD, DCA, ABD, CBA, CDA zu finden.

Folgendergestalt dürfte diese Relation sich am einfachsten entwickeln lassen. — Es verhält sich

$$BA:AC=\sin BCA:\sin ABC,$$
$$CA:AD=\sin CDA:\sin ACD,$$
$$DA:AB=\sin DBA:\sin ADB,$$

worin, wenn alle Winkel, wie gehörig, nach einerlei Sinne gerechnet werden, die Exponenten aller Verhältnisse positiv sind. Aus der Zusammensetzung dieser Proportionen folgt daher

$$(a)\quad \sin BCA\ \sin CDA\ \sin DBA=\sin ABC\,.\sin ACD\,.\sin ADB.$$

Es ist aber (§. 8. (3))

$BCA=BCD+DCA=\alpha+\beta$, $CDA=\delta+\varepsilon$, $DBA=-\gamma$,
$ABC=-\delta$, $ACD=-\beta$; ferner ist (§. 8. (4))
$BAD=ABC+BCD+CDA=\varepsilon+\alpha$, und daher (ebds. (2))
$ADB=180^0-DBA-BAD=180^0+\gamma-\varepsilon-\alpha$,

so wie sich auch alle übrigen von den Seiten und den Diagonalen des Vierecks $A..D$ gebildeten Winkel als Aggregate von α, β, .. ε darstellen lassen.

Die Substitution dieser Werthe von BCA, etc. in (a) giebt nun die gesuchte Relation:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\delta+\varepsilon)\sin\gamma+\sin\delta\sin\beta\sin(\varepsilon+\alpha-\gamma)=0,$$

eine Gleichung, die mit Anwendung der identischen Formel

$$4\sin x\sin y\sin z=\sin(y+z-x)+\sin(z+x-y)+\sin(x+y-z)$$
$$-\sin(x+y+z)$$

die, wie sich erwarten liess, symmetrische Gestalt

$$(A)\quad \sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon)+\sin(\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\alpha)+\sin(\gamma+\delta+\varepsilon-\alpha-\beta)$$
$$+\sin(\delta+\varepsilon+\alpha-\beta-\gamma)+\sin(\varepsilon+\alpha+\beta-\gamma-\delta)=\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$

annimmt.

Suchen wir noch die der eben behandelten analoge Aufgabe zu lösen und die zwischen den fünf D.verhältnissen

$$(BCDE), (CDEA), (DEAB), (EABC), (ABCD)$$

obwaltende Relation zu bestimmen.

Durch die ähnlicherweise wie vorhin zu bewerkstelligende Entfernung des E reduciren sich die vier ersten D.verhältnisse auf

$$BC:CD, DC:CA, AB:BD, CB:BA,$$

und die gesuchte Relation ist daher identisch mit derjenigen, welche resp. zwischen diesen vier einfachen Verhältnissen und dem D.verhältnisse $(AB.CD):(BC.DA)$ bei einem Viereck $A..D$ statt findet.

Man sieht aber sogleich, dass, wenn die letztere Relation entwickelt wäre, man mit Hülfe derselben aus irgend fünf der sechs Linien, welche die vier Punkte $A,..D$ mit einander verbinden, die sechste würde finden können. Die letztere Relation muss sich daher unmittelbar aus der Gleichung ergeben, die zwischen den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $ABCD$ statt hat. Diese Gleichung ist, wenn man

$$BC=\sqrt{f},\ CA=\sqrt{g},\ AB=\sqrt{h},\ AD=\sqrt{f'},\ BD=\sqrt{g'},\ CD=\sqrt{h'}$$

setzt:

$$fgh-(g+h-f)ff'-(h+f-g)gg'-(f+g-h)hh'$$
$$-f(h'-f')(f'-g')-g(f'-g')(g'-h')-h(g'-h')(h'-f')=0.\text{*})$$

Man setze nun die fünf Verhältnisse $BC:CD$, etc., deren gesenseitige Relation gesucht wird, resp. $=\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{d}}, \frac{1}{\sqrt{e}}$,

so wird $\frac{h'}{f}=a,\ \frac{g}{h}=b,\ \frac{g'}{h}=c,\ \frac{h}{f}=d,\ \frac{ff'}{hh'}=e,$

und damit $g=abf,\ h=df,\ f'=adef,\ g'=cdf,\ h'=af.$

Substituirt man endlich diese Werthe für g, h, f', g', h' in obiger Gleichung, so kommt nach Division derselben mit adf^3 die gesuchte zwischen a, b, c, d, e, d.i. zwischen $1:(BCDE)^2$, $1:(CDEA)^2$, etc., bestehende Relation:

$$(B)\quad 1-a-b-c-d-e+ab+bc+cd+de+ea$$
$$+(1-a)eab+(1-b)abc+(1-c)bcd+(1-d)cde+(1-e)dea$$
$$+abcde=0.$$

*) Denn bezeichnen l, m, n die Cosinus der Winkel BDC, CDA, ADB, so ist

$$g'+h'-f=2l\sqrt{g'h'},\quad h'+f'-g=2m\sqrt{h'f'},\quad f'+g'-h=2n\sqrt{f'g'}$$

und $$1-l^2-m^2-n^2-2lmn=0.$$

Durch Elimination von l, m, n aus diesen vier Gleichungen geht aber die obige zuerst wohl von Carnot in seiner *Geom. de posit.* entwickelte Gleichung hervor.

Zusatz. Hinsichtlich der letztern Formel verdient noch bemerkt zu werden, dass sie zugleich die zwischen den gegenseitigen Abständen von fünf Punkten im Allgemeinen geltende Bedingung darstellt, unter der, wenn vier der fünf Punkte in einer Ebene liegen, auch der fünfte in dieser enthalten ist.

In der That, liegen A, B, C, D in einer Ebene, und E ausserhalb derselben, so bestimme man ihr einen Punkt E_1 dergestalt, dass

$(BCDE_1)=(BCDE)=1:\sqrt{a}$ und

$(CDE_1A)=(CDEA)=1:\sqrt{b}$, dass mithin

(1) $DE_1:E_1B=DE:EB$ und

(2) $DE_1:E_1A=DE:EA$.

Dieses ist immer, und zwar auf doppelte Weise, möglich. Denn wegen (1) und (2) ist E_1 ein Punkt des durch die Doppelproportion

$$AX:BX:DX=AE:BE:DE$$

bestimmten durch E gehenden und von der Ebene ABD rechtwinklig halbirten Kreises (§. 22. *d.*); und weil E_1 zugleich in dieser Ebene liegen soll, so ist E_1 einer der beiden Endpunkte des Durchmessers, in welchem jener Kreis von der Ebene halbirt wird.

Haben nun die Buchstaben a, b, c, d, e die ihnen im Obigen durch die gegenseitigen Abstände der Punkte A, B, C, D, E zugewiesene Bedeutung, und bezeichnet man die auf gleiche Weise von den Punkten A, B, C, D, E_1 abhängigen Zahlen mit a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, so ist wegen (1) und (2)

(3) $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$, und überdies $e_1=e$.

Weil aber A, B, C, D, E_1 in einer Ebene liegen, so besteht jetzt zwischen a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 die vorhin zwischen a, b, c, d, e erhaltene Gleichung (B). Soll daher jene Relation zwischen $a, b, \ldots e$ selbst auch gegenwärtig noch statt haben, so muss wegen (3) noch $d_1=d$, also

$(E_1ABC)=(EABC)$ und daher $EC:E_1C=EA:E_1A$

sein. Hieraus aber folgt in Verbindung mit den Proportionen (1) und (2), wofür wir auch $EB:E_1B=ED:E_1D=EA:E_1A$

schreiben können, dass in einer gewissen durch B, D, A gehenden Kugelfläche, deren Mittelpunkt in EE_1 fällt, auch C liegen muss, und dass mithin, wenn A, B, C, D in einer Ebene sind, E aber ausserhalb derselben liegt, die Gleichung (B) nur in dem speciellen Falle noch besteht, wenn jene vier Punkte in einem Kreise, als dem Durchschnitte der Kugelfläche mit der Ebene, enthalten sind.

§. 43. Eine besondere Betrachtung haben wir noch dem Falle zuzuwenden, wenn die n Punkte $A, \ldots M$ des Systems in einem Kreise liegen. Diese Bedingung wird vollständig dadurch ausgedrückt, dass von den $n-3$ D.winkeln, welche mit gewissen dreien der n Punkte jeder der übrigen bildet, ein jeder entweder $=0$, oder $=180^0$ ist. Von den im Allgemeinen erforderlichen $2n-6$ von einander unabhängigen Quaternionen sind daher $n-3$ schon durch die Bedingung der Kreislage als bekannt anzusehen, und es müssen folglich nur noch $n-3$ Quaternionen, und zwar D.verhältnisse, gegeben sein, so wie auch die gesuchte Quaternion nur ein D.verhältniss sein kann. Bei einem System von n Punkten eines Kreises können daher aus $n-3$ von einander unabhängigen D.verhältnissen alle übrigen D.verhältnisse gefunden werden.

Dasselbe erhellet ähnlicherweise, wie in §. 40., auch daraus, dass jede mit der Kreisfigur $A \ldots LM$ kreisverwandte Figur $A' \ldots L'M'$, wobei M' unendlich entfernt liegt, in einer Geraden enthalten ist, dass alle diese Figuren, deren jede aus $n-1$ Punkten $A', \ldots L'$ in einer Geraden besteht, einander ähnlich sind, und dass, um eine einer solchen Figur ähnliche construiren zu können, von ersterer $(n-1)-2$ von einander unabhängige Verhältnisse zwischen den gegenseitigen Abständen ihrer $n-1$ Punkte gegeben sein müssen.

Uebrigens kann man die Zahl $n-3$ auch noch daraus folgern, dass jede Relation zwischen D.verhältnissen, die von beliebig in einem Kreise liegenden Punkten gebildet werden, zufolge der Natur der Kreisverwandtschaft auch dann noch bestehen muss, wenn die Punkte in einer Geraden genommen werden, und dass aus $n-3$ von einander unabhängigen D.verhältnissen zwischen n Punkten in einer Geraden alle übrigen sich finden lassen (Baryc. Calc. §. 187.).

Die Formel, welche bei n Punkten eines Kreises die Relation zwischen $n-3$ gegebenen und einem gesuchten D.verhältnisse ausdrückt, ist hiernach die nämliche, wie bei n Punkten einer Geraden. So wie aber im letztern Falle, wenn die Formel allgemeine Gültigkeit haben soll, bei jedem D.verhältnisse nicht bloss sein absoluter Werth, sondern auch sein Zeichen zu berücksichtigen ist, so muss ein Gleiches auch bei einem System von Punkten in einem Kreise geschehen, und wir haben daher noch das Merkmal zu ermitteln, an welchem das Vorzeichen eines D.verhältnisses, dessen vier Punkte in einem Kreise liegen, erkannt wird.

Sind $A, B, C,..$ Punkte einer Geraden, so ist das Verhältniss $AB:BC$ positiv oder negativ, jenachdem B zwischen oder ausserhalb A und C liegt, folglich das aus den zwei Verhältnissen $AB:BC$ und $CD:DA$ zusammengesetzte D.verhältniss $(ABCD)$ dann und nur dann negativ, wenn von den zwei Punkten B und D der eine zwischen, der andere ausserhalb A und C liegt, also wenn von den zwei Winkeln ABC und ADC der eine $=180^0$, der andere $=0$ ist, mithin wenn der D.winkel $ABCD$ $=180^0$ ist; dagegen wird das D.verhältniss positiv sein, wenn der gleichlautende D.winkel $=0$ ist. Wegen der Gleichheit entsprechender D.winkel in kreisverwandten Figuren wird folglich nach derselben Regel auch dann, wenn $A,..D$ in einem Kreise liegen, das D.verhältniss $(ABCD)$ mit dem einen oder andern Zeichen zu nehmen sein, also (§. 14. *a.*) mit dem negativen oder positiven, jenachdem sich die Sehnen AC und BD innerhalb oder ausserhalb des Kreises schneiden, oder — wie man sich auch ausdrücken könnte — jenachdem die Bögen AC und BD, keiner von ihnen grösser als der Halbkreis genommen, in einander greifen, oder nicht.

§. 44. Um das Vorstehende durch ein Beispiel zu erläutern, wird es hinreichen, die einfachste unter den hierher gehörigen Aufgaben zu wählen und zu zeigen, wie bei vier in einem Kreise begriffenen Punkten $A,..D$, und wo daher $n-3=1$ ist, aus einem der beiden D.verhältnisse

$$(ABCD)=a \text{ und } (ACBD)=b$$

das andere gefunden werden kann.

Angenommen, dass $A,..D$ in einer Geraden liegen, und darin D unendlich entfernt ist, wird

$$a=(AB:BC)\,(CD:DA)=-AB:BC=BA:BC,$$

wegen $CD:DA=-1$, und eben so

$$b=-AC:CB=AC:BC;$$

folglich $a+b=1$, wegen $BA+AC=BC$.

Mithin ist auch dann, wenn die vier Punkte in einer Geraden und alle endlich entfernt liegen, so wie auch dann, wenn sie in einem Kreise enthalten sind: $(ABCD)+(ACBD)=1$ (vergl. §. 26.);

und diese Gleichung gilt bei gehöriger Berücksichtigung der Zeichen allgemein, für jede Aufeinanderfolge der vier Punkte. Ist z. B. $ABDC$ diese Folge, so greifen weder AC und BD, noch AB und CD in einander, und es sind daher a und b positiv. Dagegen findet sich bei der Folge $ABCD$ a negativ und b positiv.

Zusatz. In jeder Gleichung zwischen D.verhältnissen, deren Punkte in einem Kreise liegen, so wie in jeder andern mit einer solchen identischen Gleichung, z. B. in der nach A, B, C symmetrisch geordneten

$$AD.BC + BD.CA + CD.AB = 0,$$

kann man die Zeichen der einzelnen Glieder auch dadurch ermitteln, dass man zuerst die Zeichen der einzelnen Linien nach folgender Regel bestimmt. Man wähle beliebigwo im Kreise einen Punkt M und nehme jede der Sehnen AD, BC, etc. negativ oder positiv, jenachdem man, im Kreise selbst stets nach einem und demselben Sinne fortgehend, um von A bis D, von B bis C, etc. zu gelangen, durch M gehen muss, oder nicht. — Die Richtigkeit dieser Vorschrift wird sogleich einleuchten, wenn man in einer kreisverwandten geradlinigen Figur den Punkt M unendlich entfernt annimmt.

§. 45. Sowie in Folge der Theorie der Kreisverwandtschaft ebener Figuren jede Relation zwischen D.verhältnissen, die von Punkten einer Geraden gebildet werden, auch für ein System von Punkten eines Kreises gilt, so muss, den Sätzen gemäss, die in §. 32. u. folg. in Bezug auf die Kreisverwandtschaft im Raume entwickelt worden sind, auch jede Gleichung zwischen Quaternionen einer ebenen Figur unverändert von der Ebene auf eine Kugelfläche übergetragen werden können, wie auch schon aus der Theorie der stereographischen Projection (§. 24. und 25.) hervorgeht.

Bei einem Systeme von n Punkten einer Kugelfläche wird demnach gleichfalls (§. 39.) durch $2n-6$ von einander unabhängige Quaternionen jede der übrigen bestimmt; nur dass hierbei unter $ABCD$ der von den zwei Kreisen ABC und ADC gebildete Winkel zu verstehen ist.

Bei vier Punkten einer Kugelfläche, d. i. *bei vier im Raume beliebig liegenden Punkten* $A, .. D$, werden daher zwischen

den Producten $BC.AD$, $CA.BD$, $AB.CD$ und
den Winkeln $BAC\hat{}BDC$, $CBA\hat{}CDA$, $ACB\hat{}ADB$

dieselben Relationen, wie zwischen den Seiten und den gegenüberliegenden Winkeln eines ebenen Dreiecks, statt haben.

Desgleichen werden die zwei in §. 42. für ein ebenes Fünfeck entwickelten Formeln (A) und (B) auch bei einem Systeme von fünf Punkten auf einer Kugelfläche bestehen. Und da die Formel (B) auch als die zwischen den gegenseitigen Abständen der fünf Punkte zu erfüllende Bedingung angesehen werden konnte, unter welcher, wenn vier der fünf Punkte in einer Ebene liegen, auch der fünfte in ihr begriffen ist, durch vier Punkte aber stet seine Kugelfläche beschrieben werden kann, so wird — den Gesetzen der Kreisverwandtschaft gemäss — dieselbe Formel (B) auch *die Bedingung* ausdrücken, *unter welcher die fünf Punkte in einer Kugelfläche enthalten sind;* wobei ich nur noch bemerke, dass der dort gedachte specielle Fall, in welchem dessen ungeachtet, dass der eine Punkt nicht in der Ebene der vier übrigen liegt, die Gleichung (B) dennoch gültig ist, hier keine Ausnahme begründet, indem alsdann die vier Punkte in einem Kreise liegen müssen, durch solche vier Punkte aber und jeden fünften sich immer eine Kugelfläche beschreiben lässt.

§. 46. Was noch die aus der Kreisverwandtschaft räumlicher Figuren hervorgehenden Aufgaben und insonderheit die Anzahl der Quaternionen anlangt, welche bei einem Systeme von n Punkten im Raume gegeben sein müssen, um alle übrigen Quaternionen finden zu können, so ergiebt sich diese Zahl auf eine den in §§. 39. und 40. bei ebenen Figuren angestellten Betrachtungen ganz analoge Weise.

Soll nämlich ein dem Systeme von n Punkten $M, N, A, B, C, \ldots$ kreisverwandtes construirt werden, so geschieht dieses nach §. 36. dadurch, dass man erstens an die $n-2$ Kreise MAN, MBN, $MCN, \ldots$ in M geradlinige Tangenten $a, b, c, \ldots$ legt und ein diesem Liniensystem gleiches System von Geraden $a', b', c', \ldots$ construirt, welche sich in dem willkührlichen Punkte M' schneiden. Hierbei kann a' beliebig durch M' gelegt werden; b' wird durch den Winkel $a'^{\wedge}b' = a^{\wedge}b$, und jede der $n-4$ übrigen Geraden $c', d', \ldots$ durch zwei Winkel, z. B. c' durch $a'^{\wedge}c' = a^{\wedge}c$ und $b'^{\wedge}c' = b^{\wedge}c$, bestimmt. Die Anzahl aller Winkel, welche somit dem ursprünglichen Systeme entnommen werden, ist $= 1 + 2(n-4)$, und jeder dieser Winkel ist eine Quaternion, z. B. $a^{\wedge}b = MAN^{\wedge}MBN = MANB$.

Nach willkührlicher Annahme von N' lassen sich nunmehr die $n-2$ Kreise $M'A'N'$, $M'B'N'$, $M'C'N'$, etc. beschreiben. In dem ersten derselben ist A' ein beliebiger Punkt; jeder der übrigen Punkte $B', C', \ldots$ aber wird in seinem Kreise durch ein D.verhältniss bestimmt, z. B. B' durch $(M'A'N'B') = (MANB)$. Die Anzahl der hierzu erforderlichen D.verhältnisse ist demnach $= n-3$.

Die Anzahl aller Quaternionen, welche zur Construction des kreisverwandten Systems nöthig sind, ist folglich $= 1 + 2(n-4) + n - 3 = 3n - 10$. Hieraus ist aber, wie in §. 39., zu schliessen, **dass bei einem Systeme von n Punkten im Raume aus irgend $3n-10$ von einander unabhängigen Quaternionen desselben alle übrigen Quaternionen gefunden werden können.**

Zu demselben Resultate kann man, wie in §. 40., auch dadurch gelangen, dass man das System von n Punkten auf ein anderes von $n-1$ Punkten reducirt, indem man für das erstere ein ihm kreisverwandtes setzt, dessen einer Punkt unendlich entfernt liegt. Jede diesen Punkt enthaltende Quaternion verwandelt sich damit auch hier in eine Ternion, und jede hierher gehörige Aufgabe in eine derjenigen, welche aus der Verwandtschaft der Aehnlichkeit entspringen. Wie man weiss, gilt aber hinsichtlich solcher Aufgaben, insofern sie den Raum betreffen, der Satz, dass bei einem System von $n-1$ Punkten aus $3(n-1)-7$, $= 3n-10$, von einander unabhängigen Stücken, welche theils Ternionen, theils Functionen solcher sind, alle übrigen Stücke derselben Art sich finden lassen.

Es leuchtet übrigens von selbst ein, dass die in §. 41. gegebenen Vorschriften, um eine zur Kreisverwandtschaft in der Ebene gehörige Aufgabe auf eine gewöhnliche der Polygonometrie zurückzuführen, auch gegenwärtig anwendbar sind, und ich will nur noch bemerken, dass für $n=4$, wo $3n-10=2$ wird, die Aufgabe mit der bereits in §. 42. für denselben Werth von n aufgestellten zusammenfällt.

---

§. 47. Sowie im Letztvorhergehenden, um eine Relation zwischen Quaternionen einer Figur zu erhalten, einer der Punkte der Figur unendlich entfernt angenommen, und damit jede diesen Punkt enthaltende Quaternion in eine Ternion verwandelt wurde, so kann man auch aus denselben auf der Natur der Kreisverwandtschaft beruhenden Gründen, aus jeder Gleichung zwischen Ternionen, d. h. aus jedem Satze, welcher eine Relation zwischen einfachen Winkeln und Linienverhältnissen betrifft, dadurch, dass man jeder Ternion einen und denselben neuen Punkt hinzufügt, einen entsprechenden Satz zwischen

Quaternionen ableiten. — Die Kreisverwandtschaft wird auf solche Weise eine sehr ergiebige Quelle neuer Sätze, deren Beschaffenheit aus den nachfolgenden Beispielen genüglich erhellen wird.

1) Daraus, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks $ABC + BCA + CAB = 180^0$ ist, folgt durch Zusetzung von D:

$$ABCD + BCAD + CABD = 180^0 \quad (\text{§. } 13.),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$BCD^\wedge BAD + CAD^\wedge CBD + ABD^\wedge ACD = 180^0.$$

Also auch *in einem von drei Kreisbögen gebildeten Dreiecke ABC ist, wenn sich die drei Kreise noch in einem Punkte D schneiden, die Summe der drei Winkel zweien Rechten gleich.*

Die analogen Sätze für cyklische in einer Ebene oder auf einer Kugelfläche construirte Vierecke, Fünfecke u. s. w. folgen hieraus von selbst.

2) Aus der trigonometrischen Grundformel $CA:AB = \sin ABC : \sin BCA$ fliesst
$$(CABD) = \sin ABCD : \sin BCAD \quad (\text{§. } 16.).$$

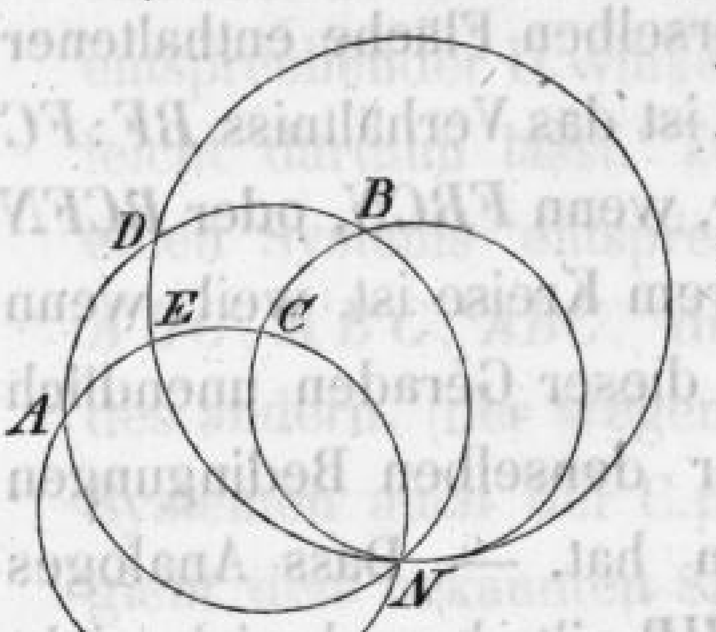
3) Ist $BAC = 180^0$, so ist $(AB:BC) + (AC:CB) = -1$. Ist daher $BACD = 180^0$, d. h. liegen die vier Punkte $B, . . D$ in der genannten Folge in einem Kreise, so hat man, weil für einen unendlich entfernten Punkt D $AD:DC = AD:DB = -1$ ist,
$$(ABCD) + (ACBD) = 1 \quad (\text{vergl. §§. } 44. \text{ und } 26.).$$

4) Ist $BAC = 90^0$, so ist $(AB:BC)^2 + (AC:CB)^2 = 1$. Aus $BACD = 90^0$ folgt daher $(ABCD)^2 + (ACBD)^2 = 1$, d. i.

$$AB^2 . CD^2 + AC^2 . BD^2 = AD^2 . BC^2.$$

Wenn demnach *bei einem ebenen Viereck die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel einen Rechten beträgt,* oder allgemeiner: *wenn bei einem Viereck BACD, mag es eben sein, oder nicht, die damit bestimmten Kreise BAC, BDC, und folglich auch die Kreise ACD, ABD, sich rechtwinklig schneiden, so ist die Summe der Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Seiten dem Producte aus den Quadraten der Diagonalen gleich;* ein neuer dem ptolemäischen ganz analoger Satz, der eben so aus dem pythagoräischen, wie der ptolemäische aus dem Satze fliesst, dass in einem Dreiecke, welches einen Winkel von 180^0 hat, die Summe der ihn bildenden Seiten der dritten Seite gleich ist.

5) Je zwei Seiten AB, AC eines Dreiecks werden von einer Parallele

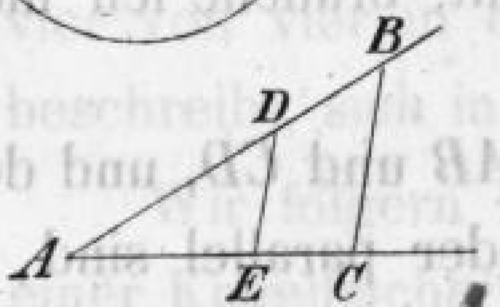


DE mit der dritten Seite in gleichen Verhältnissen geschnitten; oder, in Gleichungen ausgedrückt: Ist

$$(a)\ ADB = 180^0,$$
$$(b)\ AEC = 180^0,$$
$$(c)\ CBD + BDE = 180^0,$$

so verhält sich

$$(d)\ AD : DB = AE : EC;$$



woraus wir, den Punkt N hinzufügend, schliessen: Wenn

$$[a]\ ADBN = 180^0,\quad [b]\ AECN = 180^0,\quad [c]\ CBDN + BDEN = 180^0,$$

so ist
$$[d]\ (ADBN) = (AECN).$$

Es ist aber $[c]$ identisch mit

$$BDN^{\wedge}BCN = 180^0 - DEN^{\wedge}DBN = BDN^{\wedge}DEN,$$

und daher
$$[c^*]\ BCN^{\wedge}DEN = 0,$$

was man auch unmittelbar aus $BC^{\wedge}DE = 0$ hätte schliessen können.

Wenn man daher bei einem von drei sich in einem Punkte N schneidenden Kreisen ABN, ACN, BCN gebildeten Dreieck ABC durch N einen vierten Kreis DEN legt, welcher den einen jener Kreise BCN (wegen $[c^*]$) in N berührt und die beiden andern ABN und ACN (wegen $[a]$ und $[b]$) in D und E schneidet, so ist (nach $[d]$)

$$(AD : DB)\, BN = (AE : EC) \,.\, CN \text{ oder, was dasselbe ist (§. 12):}$$
$$(ADBNCE) = -1.$$

Eben so ergeben sich aus den Proportionen

$$BA : AD = CA : AE \text{ und } AD : DE = AB : BC$$

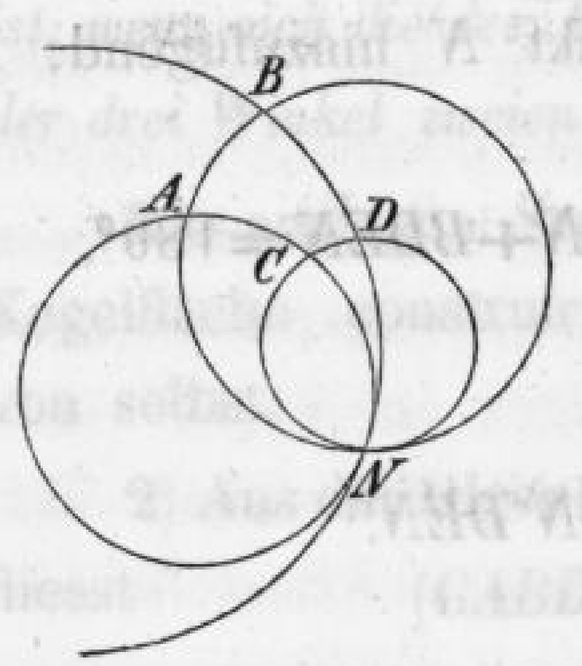
die Gleichungen $(BADN) = (CAEN)$ und $(DABCNE) = -1$.

Auch sind bei der Kreisfigur, ebenso wie bei der geradlinigen, die zwei Dreiecke ABC und ADE gleichwinklig.

6) Wird von den drei Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks eine vierte Gerade in F, G, H geschnitten, so ist bekanntlich

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AH}{HB} = -1.$$

Dieselbe Gleichung besteht folglich (§. 15. Zus.) auch dann, wenn von den drei durch vier Punkte A, B, C, N bestimmten und daher, wo nicht in einer Ebene, in einer Kugelfläche liegenden Kreisen BCN, CAN, ABN ein vierter durch N gehender und in derselben Fläche enthaltener Kreis in F, G, H geschnitten wird. — Dabei ist das Verhältniss $BF:FC$ positiv zu nehmen, wenn $BFCN$, negativ aber, wenn $FBCN$, oder $BCFN$ die Aufeinanderfolge dieser vier Punkte in ihrem Kreise ist, weil, wenn F mit B und C in einer Geraden, und N in dieser Geraden unendlich entfernt liegt, das Verhältniss $BF:FC$ unter denselben Bedingungen einen positiven, oder negativen Exponenten hat. — Dass Analoges auch von den Verhältnissen $CG:GA$ und $AH:HB$ gilt, brauche ich nicht hinzuzufügen.



7) Wenn die Geraden AB und CD, und desgleichen AC und BD einander parallel sind, so ist $AB = CD$ und $AC = BD$, also $BA:AC = DC:CA$ und $CA:AB = DB:BA$. Hieraus folgt der Satz:

Legt man in einer Ebene oder einer Kugelfläche durch einen Punkt N zwei Paare einander daselbst berührender Kreise ABN und CDN, ACN und BDN, so verhält sich

$$AB:CD = AN.BN:CN.DN \text{ d. i. } (ABNCDN) = 1$$

und $$AC:BD = AN.CN:BN.DN \text{ d. i. } (ACNBDN) = 1.$$

Uebrigens ist, wie bei dem geradlinigen Parallelogramm $ABDC$, auch bei dem gleichnamigen von den vier Kreisen gebildeten Vierecke die Summe je zweier nächstfolgender Winkel $= 180^0$.

8) Werden von vier sich in denselben zwei Punkten schneidenden Kreisen einer Ebene oder einer Kugelfläche zwei andere Kreise, deren jeder nur den einen jener zwei Punkte trifft, in A, B, C, D und in F, G, H, J geschnitten, so ist $(ABCD) = (FGHJ)$, wie aus dem bekannten Satze von vier sich in einem Punkte schneidenden und in einer Ebene liegenden Geraden hervorgeht. — Und da dieser Satz auch für ein System von vier sich in derselben Geraden schneidenden Ebenen gilt, *so wird auch von vier durch einen und denselben Kreis gelegten Kugelflächen jeder andere diesen Kreis einmal schneidende Kreis nach einem und demselben D.verhältnisse geschnitten.*

9) Werden die drei Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks von einer vierten Geraden in A', B', C' geschnitten, so sind die zwei Systeme

$$A, B, C, A', B', C' \text{ und } A', B', C', A, B, C$$

einander kreisverwandt, wie sich, sei es durch die Gleichheit je zweier entsprechender D.winkel, oder je zweier entsprechender D.verhältnisse, leicht darthun lässt. Den vier Geraden $A'BC$, $AB'C$, ABC', $A'B'C'$ des einen Systems entsprechen daher im andern die vier Kreise $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, ABC, die sich folglich in einem Punkte, dem C.punkte des andern, (der wegen der involutorischen Beziehung zwischen beiden Systemen auch der C.punkt des erstern ist,) schneiden müssen. Dies giebt den bekannten Satz, dass die vier Kreise, welche man um die vier von vier in einer Ebene enthaltenen Geraden gebildeten Dreiecke beschreibt, sich in einem Punkte schneiden.

Wir folgern hieraus weiter, dass, wenn vier in einer Ebene oder einer Kugelfläche liegende Kreise einen Punkt gemein haben, auch die vier neuen Kreise, welche um die von Bögen der erstern gebildeten Dreiecke beschrieben werden können, sich in Einem Punkte begegnen; oder mit andern Worten: *Haben sechs Punkte A, B, C, A', B', C' eine solche Lage, dass sich die vier Kreise $A'BC$, $AB'C$, ABC', $A'B'C'$ in einem Punkte schneiden, und weshalb die sechs Punkte, wo nicht in einer Ebene, in einer Kugelfläche liegen müssen, so schneiden sich auch die vier Kreise $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, ABC in einem Punkte.*

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.