17

mit 10 angebundenen Schriften!!

Vom Zeuner-Archiv übernommen

18

Theorie

der

überhitzten Wasserdämpfe.

Von

Dr. **Gustav Zeuner,**
Professor der Mechanik und theoretischen Maschinenlehre und Director des eidgenössischen Polytechnicums in Zürich.

(Hierzu Blatt 1.)

(Separatabdruck aus der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Band XI, Heft 1.)

Berlin, 1866.

Es ist schon oft darauf hingewiesen worden, daß die Anwendung der überhitzten Dämpfe, statt der gesättigten, bei den Dampfmaschinen mit wesentlichen Vortheilen verbunden sein müsse; die Beobachtungen und entsprechenden Versuche, unter denen die schönen und bekannten Versuche von Hirn*) obenan stehen, deuten auch entschieden darauf hin, daß die Dampfmaschinen mit überhitztem Dampfe der Vortheile wegen, welche sie hinsichtlich des Brennmaterialverbrauches bieten, mehr und mehr in Anwendung kommen werden.

Seit länger als einem Jahrzehnt hat man, besonders in Amerika, Beobachtungen über die Vortheile der überhitzten Dämpfe gemacht und, wenn man die ganz außerordentlich günstigen Resultate betrachtet, welche Wethered mit gemischten Dämpfen (Mischung von gesättigtem und überhitztem Dampfe) gefunden haben will, hat man Grund zu erstaunen, daß die Ueberhitzung der Dämpfe für Dampfmaschinen nicht weit allgemeiner in Anwendung gekommen ist.**)

Abgesehen von gewissen praktischen Schwierigkeiten, auf die man, wenigstens bei Anwendung hoch überhitzter Dämpfe stößt, findet das Gesagte aber eine Erklärung in dem Umstande, daß alle bisher angestellten Versuche zusammen genommen zwar auf Vortheile der Anwendung der überhitzten Dämpfe hindeuten, daß aber der Grad der Erhöhung des Nutzens überhitzter Dämpfe gegenüber gesättigten Dämpfen noch keineswegs festgestellt ist. Die Resultate der Versuche widersprechen sich in dieser Beziehung außerordentlich, und einzelne solcher Angaben sind nicht ohne gerechte Zweifel aufgenommen worden.

Ueber solche Zweifel werden uns noch so zahlreiche Versuche nicht hinweghelfen; denn über derartige Fragen kann nur eine gründliche Kenntniß der physikalischen Eigenschaften der Dämpfe überhaupt entscheiden. Eine Theorie der überhitzten Dämpfe ist aber auch von hoher wissenschaftlicher Bedeutung; bis jetzt kannte man das Verhalten dieser Dämpfe nur für die beiden Grenzzustände, nämlich für ihren Condensationspunkt, wenn sie eben in den Sättigungszustand übergehen, oder für den Zustand höchster Ueberhitzung, in welchem ihre Eigenschaften vollständig mit denen der permanenten Gase übereinstimmen.

Die Formeln, welche die mechanische Wärmetheorie für die beiden Grenzzustände der Luftarten hinstellt, sind der Ableitung und dem Baue nach ganz von einander verschieden, und es war bisher nicht möglich, aus den Gleichungen, welche sich auf gesättigte Dämpfe, sowie auf Dampf- und Flüssigkeitsmischungen beziehen, diejenigen für die permanenten Gase abzuleiten und umgekehrt, oder das Verhalten der Dämpfe auf dem Uebergange von einem in den anderen Grenzzustand darzulegen.

Theoretische Untersuchungen über das Verhalten der überhitzten Dämpfe wurden bis jetzt nur von Hirn*) angestellt und diese sind in neuerer Zeit von mir näher besprochen worden**). Hirn geht von einem gewissen Satze aus, den ich das „Hirn'sche Gesetz" genannt habe und auf welchen ich im Folgenden ebenfalls zu sprechen kommen werde; in Verbindung mit Resultaten seiner Versuche löst dann Hirn einige der wichtigsten technischen Probleme. Die Rechnungsresultate werden aber auf großen Umwegen gewonnen, weil auch Hirn nicht auf die Fundamentalgleichung für überhitzte Wasserdämpfe gekommen ist, nämlich auf die Beziehung, welche zwischen Druck, Volumen und Temperatur stattfindet. Es ist mir nun gelungen, diese Beziehung festzustellen, und damit waren mir an der Hand der Grundformeln der mechanischen Wärmetheorie sofort die Mittel gegeben, hinsichtlich des Verhaltens der überhitzten Dämpfe, zunächst speciell der überhitzten Wasserdämpfe, alle Fragen zu lösen, die bis jetzt nur für permanente Gase und gesättigte Dämpfe gelöst werden konnten. In der vorliegenden Abhandlung will ich die Resultate meiner Untersuchungen mit gleichzeitiger Anwendung auf die wichtigsten technischen Aufgaben vorführen. Ich beschränke mich aber nur auf Untersuchung der Wasserdämpfe; es wird keinen Schwierigkeiten unterliegen, auf dem von mir angezeigten Wege auch überhitzte Dämpfe anderer Art der Untersuchung zu unterwerfen.

Voruntersuchungen.

Bezeichnen wir mit v das specifische Volumen, d. h. das Volumen der Gewichtseinheit (eines Kilogrammes) Dampf, mit p den specifischen Druck (Druck in Kilogrammen pro Quadratmeter) und mit t die Temperatur nach Celsius, so läßt sich, wenn Druck und Volumen bekannt sind, sehr leicht entscheiden, ob man es in einem bestimmten Falle mit reinem gesättigtem Dampfe, oder mit überhitztem Dampfe, oder mit der Gewichtseinheit Mischung von Dampf und Flüssigkeit zu thun hat. Bei dem gesättigten Dampfe, dessen Volumen wir speciell mit

*) Sur la théorie de la surchauffe dans les machines à vapeur. Bulletin de la société industrielle de Mulhouse. t. XXVIII. 1857.

**) Vergl. Dinse: Ueber die Verwendung des überhitzten Dampfes in den Dampfmaschinen (diese Zeitschrift, Bd. IX, S. 373).

*) Hirn: Théorie mécanique de la chaleur. Première partie. Seconde édition. Paris, 1865.

**) Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. Zweite Auflage. Leipzig, 1866. S. 426 u. F.

Da in der Folge mehrfach auf diese Schrift verwiesen werden muß, so soll die Abkürzung Gr. d. m. W. benutzt werden.

v_1 bezeichnen wollen, stehen bei einer gewissen Dampfart Druck und Volumen in einer bestimmten und bekannten Beziehung; wenigstens läßt sich nach den Lehren der mechanischen Wärmetheorie das dem Drucke p entsprechende Volumen v_1 berechnen. Trägt man für reinen gesättigten Dampf (ohne Beimischung von Flüssigkeit) für verschiedene Pressungen das Volumen v_1 als Abscisse und den Druck p als Ordinate auf (Fig. 1), so erhält man eine Curve DD, welche ich die „Grenzcurve" nenne, und deren Verlauf für Wasserdämpfe unten weiter besprochen werden wird. Jedem Punkte der Curve oder jedem Drucke entspricht eine bestimmte Temperatur t_1 oder, wenn wir die Temperatur, was in der Folge immer geschehen soll, vom absoluten Nullpunkte ab rechnen, die absolute Temperatur $T_1 = 273 + t_1$, und diese Temperatur ist auf Grund von Versuchen für jeden Druck bekannt. Trägt man nun in einem gegebenen Falle das Volumen (der Gewichtseinheit) als Abscisse und den Druck als Ordinate auf und fällt der Punkt in die Grenzcurve, so ist das ein Beweis, daß wir es mit reinem gesättigtem Dampfe zu thun haben; fällt dagegen der Endpunkt a der Ordinate in den Raum zwischen Grenzcurve und Coordinatenaxen, so ist bei gleichem Drucke p die Temperatur T_1 die nämliche, das Volumen aber kleiner; die Gewichtseinheit Masse enthält neben Dampf auch Flüssigkeit. Der Dampf ist von gleicher Beschaffenheit, wie vorhin; ist x die specifische Dampfmenge, d. h. die Dampfmenge in der Gewichtseinheit Mischung, so ist $(1-x)$ das Gewicht der Flüssigkeit, und wenn σ das specifische Volumen der Letzteren ist, so ist das Volumen v' der Mischung:

$$v' = x v_1 + (1-x)\sigma,$$

und hieraus berechnet sich leicht das Mischungsverhältniß x für das gegebene Volumen v'.

Fällt dagegen der Endpunkt der Ordinate in den Raum außerhalb der Grenzcurve DD, etwa nach T (Fig. 1), so ist das ein Beweis, daß die gegebene Dampfmasse überhitzt ist; in diesem Falle ist die entsprechende Temperatur $T > T_1$ und nicht durch den Druck p allein bestimmt, sondern hängt auch noch vom Volumen v ab. Die Beziehung:

$$T = F(p, v)$$

ist es eben, die bis jetzt für überhitzte Dämpfe unbekannt war, und die ich zunächst feststellen werde. Wir werden in der Folge nach dem Vorschlage Bauschinger's die im Vorstehenden angedeutete Beziehung die „Zustandsgleichung" nennen. Bis jetzt vermuthete man von dieser Beziehung nur, daß sie in die Form

$$pv = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

übergehe, die für permanente Gase gilt, und in welcher R eine von der Gasart abhängige Constante ist, wenn der Punkt T (Fig. 1) sehr weit von der Grenzcurve abliegt, d. h. der Dampf sehr stark überhitzt ist.

Bei der Ableitung der Zustandsgleichung für überhitzte Wasserdämpfe gehe ich nun von folgendem Satze der Wärmetheorie aus, den ich a. a. O. abgeleitet habe.*)

Sind für die Gewichtseinheit eines Körpers der Druck p_2 und das Volumen v_2 gegeben, und dehnt sich derselbe ohne Zu- und Ableitung von Wärme aus oder wird derselbe comprimirt, ohne daß gleichzeitig eine Mittheilung oder Entziehung von Wärme erfolgt, so beschreibt der Endpunkt der Ordinate eine Curve $A_2 A_2$ (Fig. 2), die ich mit Rankine die adiabatische Curve nenne. Befindet sich derselbe Körper im Zustande a_1, durch den Druck p_1 und das Volumen v_1 gegeben, so entspricht dem Punkte a_1 eine zweite adiabatische Curve $A_1 A_1$. Soll der Körper aus dem Zustande a_2 in den Zustand a_1 übergeführt werden, so ist hierzu die Mittheilung einer gewissen Wärmemenge erforderlich; ist dQ die Wärmemenge für eine unendlich geringe Zustandsänderung, so habe ich nun a. a. O. bewiesen, daß das Integral

$$\int \frac{dQ}{AT},$$

in welchem A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ist, d. h. die Wärmemenge, welche der Arbeit von einem Meterkilogramm entspricht ($A = \frac{1}{424}$), daß dieses Integral immer auf denselben Werth führt, wenn der Uebergang von einer bestimmten Curve $A_2 A_2$ nach einer zweiten vorgeschriebenen adiabatischen Curve $A_1 A_1$ erfolgt, gleichgültig wie sich auf dem Uebergange $a_2 a_1$ der Druck p mit dem Volumen v ändert, d. h. welches auch die Uebergangscurve $a_2 a_1$ sein mag, fernerhin gleichgültig, wo der Ausgangspunkt a_2 auf der ersten und der Endpunkt a_1 auf der zweiten adiabatischen Curve liegt. Der Einfachheit wegen bezeichne ich den Werth des Integrales mit P; den Werth selbst nenne ich aus Gründen, die ich a. a. O. näher dargelegt habe*), das Wärmegewicht. Wir wollen nun das Wärmegewicht sogleich für eine Mischung von Wasser und Wasserdampf entwickeln.

Befinden sich in der Gewichtseinheit Mischung x Kilogrm. Dampf und beträgt der Druck p und ist t die Temperatur; ist ferner c die specifische Wärme des Wassers — nach Regnault ist zu setzen:

$$c = 1 + 0{,}00004\, t + 0{,}0000009\, t^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

und ist r die Verdampfungswärme, welche nach Regnault sich nach der Gleichung

$$r = 606{,}5 + 0{,}305\, t - \int_0^t c\, dt \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

berechnet, so findet sich nach Clausius**) die Wärmemenge dQ für eine unendlich geringe Zustandsänderung:

$$dQ = c\, dt + T d\left(\frac{xr}{T}\right).$$

Dividirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit AT, so ist die Integration ausführbar; setzen wir der Einfachheit wegen

$$\int_0^t \frac{c\, dt}{T} = \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

so folgt, wenn man die Werthe, welche dem Zustande a_2 (Fig. 2) entsprechen, mit dem Index 2 und die des Endzustandes mit dem Index 1 versieht, das Wärmegewicht:

$$P = \int \frac{dQ}{AT} = \frac{1}{A}\left[\left(\tau_1 + \frac{x_1 r_1}{T_1}\right) - \left(\tau_2 + \frac{x_2 r_2}{T_2}\right)\right] \quad (5).$$

Nehme ich nun an, der Uebergang geschehe auf der Grenzcurve DD (Fig. 3), so ist für diesen Uebergang

*) Gr. d. m. W. S. 84.

*) Gr. d. m. W. S. 68.

**) Vergl. Gr. d. m. W. S. 300.

Gustav Zeuner: Theorie der überhitzten Wasserdämpfe.

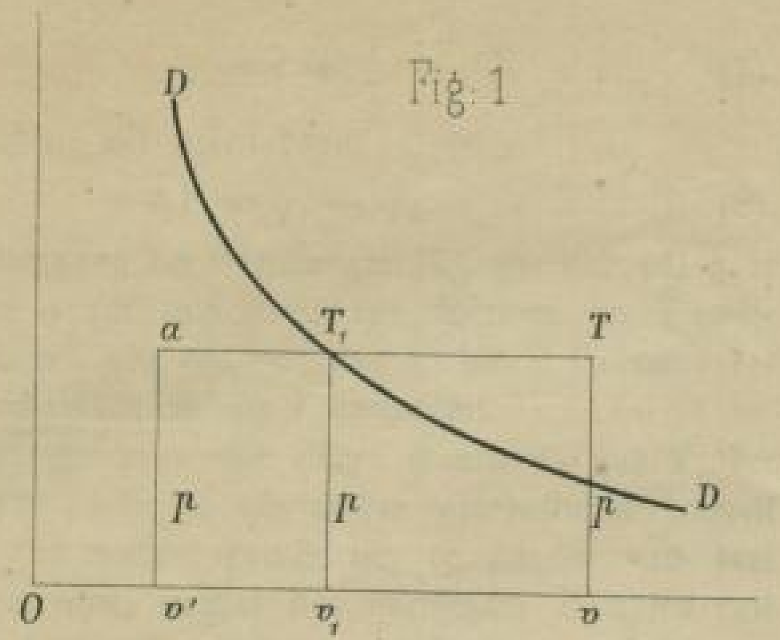


Fig. 1

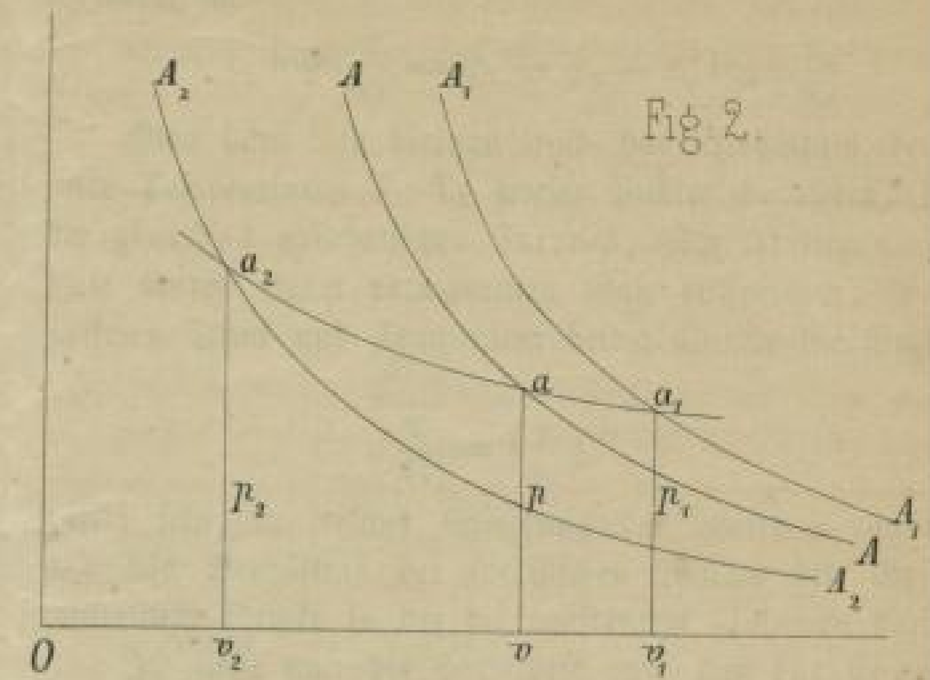


Fig. 2

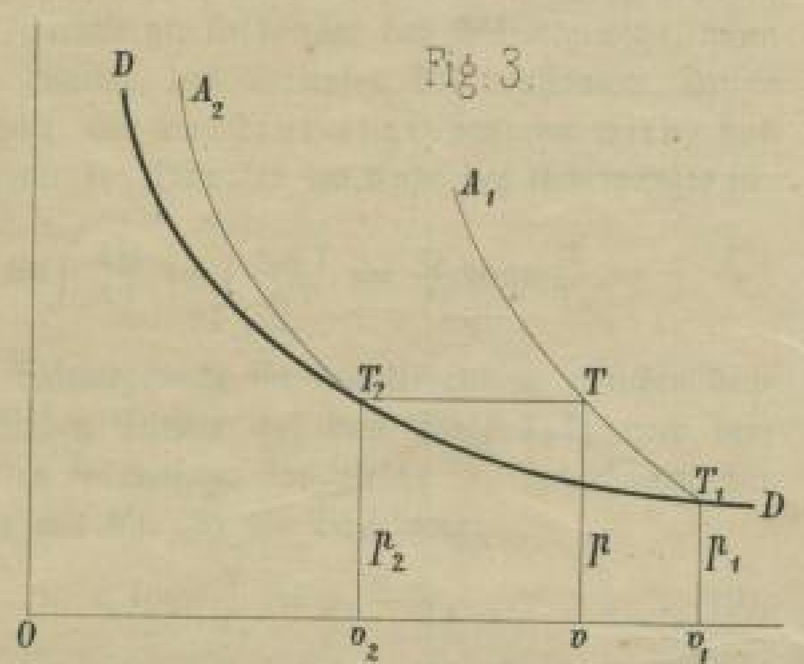


Fig. 3

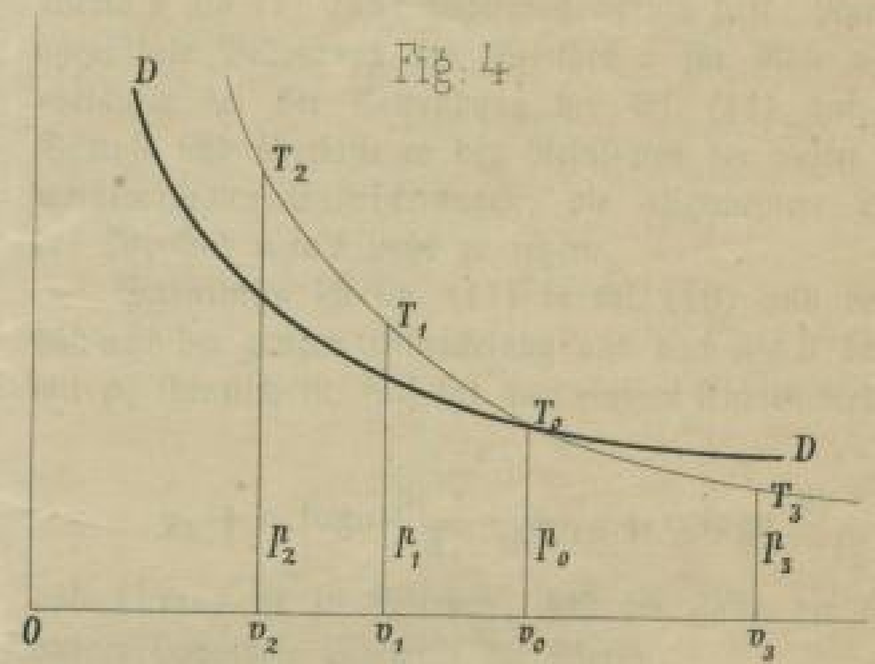


Fig. 4

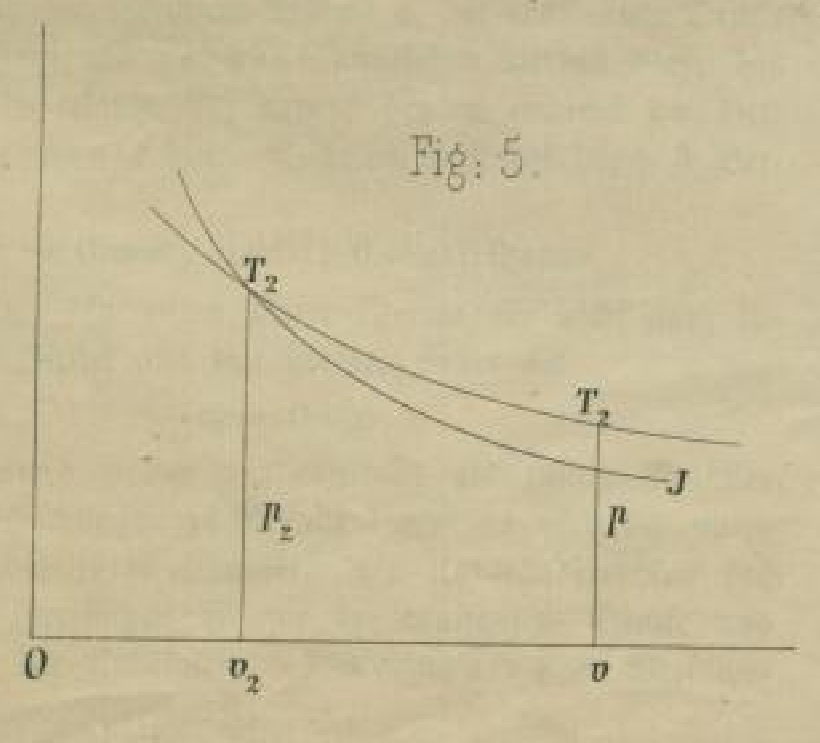
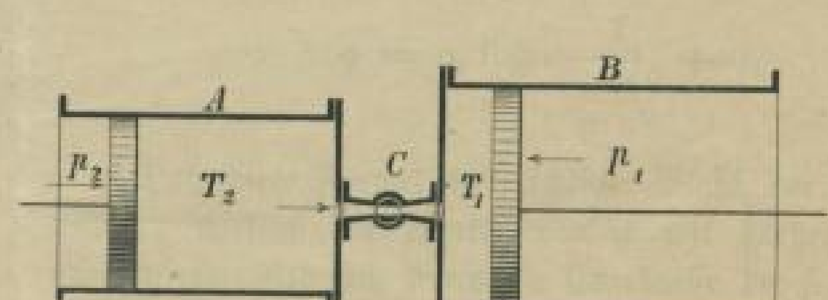


Fig. 5

Fig. 6



$x_1 = x_2 = 1$, weil hier der Dampf gesättigt und ohne Beimischung von Flüssigkeit ist; ich erhalte daher für diesen Uebergang

$$AP = \left(\tau_1 + \frac{r_1}{T_1}\right) - \left(\tau_2 + \frac{r_2}{T_2}\right) \quad . \; . \quad (6),$$

und dieser Werth läßt sich sonach für gegebene Anfangs- und Endtemperatur leicht ermitteln.

Der Einfachheit wegen soll bis auf Weiteres die Bezeichnung

$$\varphi = \tau + \frac{r}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

eingeführt werden; wir haben dann:

$$AP = \varphi_1 - \varphi_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Unter Benutzung der Gleichungen (2), (3) und (4) habe ich den Werth φ für eine Reihe von Werthen der Dampfspannung nach Gl. (7) berechnet und in der 3. Columne der auf Seite 6 folgenden Tabelle 1 aufgeführt.

Ich lege jetzt durch die beiden Punkte T_2 und T_1 der Grenzcurve DD (Fig. 3) die beiden adiabatischen Curven A_2 und A_1; von beiden Curven ist, da sie sich nach dem Raume hin erstrecken, welcher den überhitzten Dämpfen entspricht, der Verlauf noch unbekannt; erwärme ich nun den gesättigten Dampf von der Temperatur T_2 bei constantem Drucke $p_2 = p$ so weit, bis die zweite adiabatische Curve im Punkte T erreicht ist, so beträgt das Wärmegewicht, wenn die specifische Wärme des Dampfes bei constantem Drucke mit c_p bezeichnet und constant angenommen wird, und T die Temperatur des Dampfes am Ende des Ueberganges ist:

$$P = \int \frac{dQ}{AT} = \int_{T_2}^{T} \frac{c_p\, dT}{AT} = \frac{c_p}{A} \operatorname{logn} \frac{T}{T_2}.$$

Da das Wärmegewicht für den Uebergang zwischen denselben adiabatischen Curven auf dem Wege $T_2 T_1$ nach dem oben angeführten Grundsatze das gleiche ist, so erhalten wir in Verbindung mit Gl. (8) die Beziehung:

$$c_p \operatorname{logn} \frac{T}{T_2} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Diese Formel gilt allerdings nur unter der ausdrücklichen Annahme, daß die specifische Wärme c_p bei constantem Drucke für Wasserdampf als constant angesehen werden darf; daß diese Annahme erlaubt ist, darauf deuten zunächst die Versuche von Regnault hin. Regnault findet durch 4 Versuchsreihen:

$$c_p = 0{,}46881;\; 0{,}48111;\; 0{,}48080;\; 0{,}47963$$

und erklärt nur den ersten dieser Werthe für nicht ganz zuverlässig; als Mittel aus den übrigen findet sich

$$c_p = 0{,}4805,$$

und diesen Werth wollen wir ebenfalls als zuverlässig allen weiteren Untersuchungen zu Grunde legen; es wird sich unten zeigen, daß die obige Hypothese der Unveränderlichkeit des Werthes der specifischen Wärme bei constantem Drucke und die Annahme der Richtigkeit des Regnault'schen Versuchswerthes wohl gerechtfertigt sind.

Mit Hülfe der Gl. (9) könnte man, wenn die Temperaturen T_1 und T_2 gegeben sind, sehr leicht die Temperatur T des überhitzten Dampfes, entsprechend dem Punkte p, v, T der Fig. 3 berechnen oder auch durch Einführung verschiedener Werthe der Temperatur T_2 für eine ganze Reihe von Punkten der durch T_1 gehenden adiabatischen Curve A_1 die Temperatur T des überhitzten Dampfes berechnen. Damit wäre aber nicht viel gewonnen, und der wirkliche Verlauf der Curve A_1 dadurch noch keineswegs gegeben. Vielmehr handelt es sich zunächst um weitere Umformung der Gl. (9). Wird auf der linken Seite dieser Gleichung $c_p \operatorname{logn} T_1$ addirt und subtrahirt, so findet sich

$$c_p \operatorname{logn} \frac{T}{T_1} = \varphi_1 - \varphi_2 - c_p \operatorname{logn} \frac{T_1}{T_2} \qquad (10).$$

Man kann also hieraus auch das Verhältniß der absoluten Temperaturen $T : T_1$ zweier Punkte berechnen, die auf der gleichen adiabatischen Curve A_1 (Fig. 3) liegen. Würde diese Curve einem permanenten Gase entsprechen, so würde zwischen Druck und Temperatur beider Punkte die Beziehung

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

gültig sein, in welcher Gleichung der Werth $\varkappa$ constant ist und das Verhältniß der specifischen Wärme des Gases bei constantem Drucke zu der bei constantem Volumen darstellt.

Ich stelle nun die Hypothese auf, daß für überhitzte Dämpfe, wenigstens zunächst für Wasserdämpfe die Gl. (11) ebenfalls gültig ist, und daß auch hier der Werth $\varkappa$ als constant angesehen werden darf. Nur die eben angeführte Bedeutung des Werthes $\varkappa$ für Gase verlasse ich vorläufig bei der Anwendung der Gl. (11) auf überhitzte Dämpfe und überlasse es den Resultaten der weiter folgenden mathematischen Entwickelungen, die allgemeinere Bedeutung des Werthes $\varkappa$ in's Licht zu setzen.

Substituire ich Gl. (11) in Gl. (10) und beachte ich, daß nach der ganzen Entwickelung und nach Fig 3 der Druck p mit p_2 identisch ist, so folgt nach einigen leichten Reductionen:

$$\varphi_1 + c_p \operatorname{logn} \frac{p_1^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}{T_1} = \varphi_2 + c_p \operatorname{logn} \frac{p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}{T_2},$$

und hieraus ist zu schließen, daß im Falle der Richtigkeit meiner Hypothese allgemein der Werth

$$\varphi + c_p \operatorname{logn} \frac{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}{T}$$

für gesättigte Wasserdämpfe eine constante Größe sein müßte; bezeichne ich diese Constante mit φ_0, so fände sich statt der früher gegebenen Gl. (7) auch die Formel

$$\varphi = c_p \operatorname{logn} \frac{T}{p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}} + \varphi_0 \quad . \; . \; . \quad (12).$$

Daß diese Formel bei richtiger Wahl der Constanten $\varkappa$ und φ_0 wirklich die Werthe von φ mit großer Genauigkeit wiedergiebt, wird sich durch die Ergebnisse der folgenden Rechnungen zeigen.

Setze ich $\varkappa = \frac{4}{3} = 1{,}3333$, sonach $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ und $\varphi_0 = 1{,}0933$, sowie statt des natürlichen den Brigg'schen Logarithmus, so ergiebt sich zur Berechnung von φ die Formel:

$$\varphi = 0{,}2766 \log_{10} \frac{T^4}{p} - 1{,}0933 \quad . \; . \; . \quad (13),$$

wobei der Druck p in Atmosphären zu setzen und die Temperatur t nach Celsius den Tabellen von Regnault zu entnehmen ist.

Wie gut diese Formel den Werth von φ wiedergiebt, zeigt folgende Tabelle 1, welche in der 4. Columne φ nach Gl. (13) und in Columne 3 nach Gl. (7) berechnet angiebt.

Ich hätte die Uebereinstimmung sogar noch etwas erhöhen können, wenn ich den Werth $\varkappa$ nur wenig verschieden von $\frac{4}{3}$ angenommen hätte; ich ziehe jedoch vor, diesen runden Werth zu adoptiren, weil dadurch die numerischen Rechnungen im Weiteren außerordentlich vereinfacht werden.

Tabelle 1.

1 Druck in Atmosphären p	2 Temperatur t (C) nach Regnault	3 $\varphi = \tau + \frac{r}{T}$	4 φ nach Gl. (13)
0,1	46,21	1,9548	1,9538
0,2	60,45	1,8929	1,8912
0,5	81,71	1,8116	1,8111
1	100,00	1,7519	1,7520
2	120,60	1,6940	1,6946
3	133,91	1,6612	1,6619
4	144,00	1,6384	1,6391
5	152,22	1,6209	1,6217
6	159,22	1,6071	1,6076
7	165,34	1,5955	1,5958
8	170,81	1,5856	1,5858
9	175,77	1,5769	1,5769
10	180,31	1,5691	1,5691
11	184,50	1,5625	1,5621
12	188,41	1,5563	1,5557
13	192,08	1,5506	1,5503
14	195,53	1,5454	1,5445

Die hohe Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit der Hypothese, welche vorstehenden Formeln zu Grunde liegt, läßt sich auch in folgender Art darlegen.

Differentiirt man Gl. (12), so folgt:

$$d\varphi = c_p \frac{dt}{T} - c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{dp}{p} \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Differentiirt man dagegen Gl. (7), indem man die Bedeutung von τ nach Gl. (4) beachtet, so folgt:

$$d\varphi = \frac{1}{T}\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right) dt.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist aber eine Function, deren Werth sich leicht berechnen läßt, und die ich a. a. O. die Clausius'sche Temperaturfunction*) genannt habe. Bezeichnen wir diese Function, welche in der Theorie der gesättigten Dämpfe eine sehr merkwürdige Rolle spielt, mit h, so folgt auch

$$d\varphi = \frac{h}{T} dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die Verbindung mit Gl. (14) giebt dann die Beziehung:

$$h = c_p - c_p \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T\,dp}{p\,dt} \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Diese Formel läßt sich nun ebenfalls zur Prüfung meiner Hypothese verwenden.

So berechnet sich z. B. bei Wasserdampf für die Temperaturen 0°, 100° und 200° beziehungsweise:

$$h = -1{,}9166;\ -1{,}1333;\ -0{,}6766.$$

Ferner findet sich aus den Regnault'schen Formeln, welche die Beziehung zwischen Druck und Temperatur geben*), beziehungsweise:

$$\frac{T\,dp}{p\,dt} = 19{,}520;\ 13{,}344;\ 9{,}851.$$

Setze ich diese Werthe in Gl. (16) ein und setze ich zuerst voraus, es sei c_p constant und zwar nach Regnault 0,4805, so findet sich für die angenommenen Temperaturwerthe:

$$\varkappa = 1{,}3434;\ 1{,}3362;\ 1{,}3234.$$

Setze ich dagegen, wie es im Weiteren wie oben geschehen soll, $\varkappa = \frac{4}{3} = 1{,}3333$, so berechnet sich aus Gl. (16) umgekehrt:

$$c_p = 0{,}49397;\ 0{,}48514;\ 0{,}46255$$

und das Mittel aus den letzteren Werthen ist 0,4805, also sonderbarer Weise ganz genau mit Regnault's Mittelwerth in Uebereinstimmung.

Aus dem Vorstehenden ist zu schließen, daß sich die Größen $\varkappa$ und c_p, im Falle sich eine davon oder beide durch spätere genauere Untersuchungen als Veränderliche herausstellen sollten, was wahrscheinlich ist, nur sehr langsam ändern und daß es bis auf Weiteres erlaubt ist, sie als constant anzusehen. Die Resultate der folgenden Untersuchungen werden diese Annahme weiter rechtfertigen.

Ableitung der Zustandsgleichung für überhitzte Wasserdämpfe.

Die Zustandsgleichung stellt die Beziehung zwischen den Größen p, v und t oder $T = 273 + t$ dar. Betrachtet man die absolute Temperatur als eine Function des Druckes und Volumens gegeben, so ist:

$$dT = \left(\frac{dT}{dp}\right) dp + \left(\frac{dT}{dv}\right) dv,$$

oder auch, weil man dT durch dt ersetzen kann,

$$dT = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Die beiden partiellen Differentialquotienten lassen sich nun aber darstellen, wenn man von den Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie Gebrauch macht. Behalten wir die bisherige Bezeichnung bei und setzen wir die specifische Wärme bei constantem Volumen c_v, so sind diese Gleichungen für irgend einen Körper, vorausgesetzt, derselbe ändere während der Wärmemittheilung seinen Aggregatzustand nicht, folgende**):

$$A = \frac{d}{dp}\left[c_p\left(\frac{dt}{dv}\right)\right] - \frac{d}{dv}\left[c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)\right] \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}),$$

$$A.T = (c_p - c_v)\left(\frac{dt}{dv}\right)\left(\frac{dt}{dp}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}),$$

*) Gr. d. m. W. S. 312.

*) Gr. d. m. W. Tab. 1.

**) Gr. d. m. W. S. 543.

$$\left.\begin{aligned} dQ &= c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)dp + c_p\left(\frac{dt}{dv}\right)dv \\ dQ &= c_v\,dt + AT\left(\frac{dp}{dt}\right)dv \\ dQ &= c_p\,dt - AT\left(\frac{dv}{dt}\right)dp \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (III).$$

Dividire ich die letzte Gleichung durch T, so folgt:

$$\frac{dQ}{T} = c_p\frac{dt}{T} - A\left(\frac{dv}{dt}\right)dp.$$

Wie aus der in Gl. (5) und (8) angeführten Bezeichnung hervorgeht, ist aber $dQ : T$ mit $d\varphi$ identisch, und für den letzteren Werth fand sich nach Gl. (14)

$$d\varphi = c_p\frac{dt}{T} - c_p\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\cdot\frac{dp}{p}.$$

Aus der Vergleichung beider Formeln folgt daher die erste neue Beziehung für überhitzte Wasserdämpfe:

$$c_p\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{A\varkappa p}{(\varkappa - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Setze ich diesen Ausdruck in Gl. (I), so ist ferner, weil c_p und $\varkappa$ constant sind:

$$\frac{d}{dv}\left[c_v\left(\frac{dt}{dp}\right)\right] = \frac{A}{\varkappa - 1},$$

und hieraus durch Integration:

$$c_v\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{Av}{\varkappa - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

wobei ich freilich die Annahme mache, daß die Integrationsconstante, die im Allgemeinen eine Function von p sein könnte, Null sei. Diese Annahme wird aber durch die Uebereinstimmung der folgenden Rechnungsresultate mit der Beobachtung vollständig bestätigt.

Benutzt man nun Gl. (18) und (19) in Gl. (II), so ergiebt sich ferner nach einigen leichten Umformungen:

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + c_p\frac{(\varkappa - 1)^2}{\varkappa}\cdot\frac{T}{Apv} \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Bestimmen wir aus dieser Formel c_v und benutzen wir den Werth in Gl. (19), so folgt:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{Av}{c_p(\varkappa - 1)} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\cdot\frac{T}{p} \quad . \quad . \quad (21),$$

während Gl. (18) ergiebt:

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{A\varkappa p}{c_p(\varkappa - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Die Substitution dieser beiden Differentialquotienten in Gl. (17) giebt alsdann:

$$dT = \frac{A}{c_p(\varkappa - 1)}(v\,dp + \varkappa p\,dv) + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\cdot\frac{T}{p}dp \quad (23),$$

und das ist das Differential der Zustandsgleichung der überhitzten Wasserdämpfe.

Die Integration dieser Gleichung unterliegt keiner Schwierigkeit. Man erhält:

$$pv = BT - Cp^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

in welcher Gleichung B und C constante Werthe sind, von denen der erstere Werth sich aus der Gleichung

$$B = \frac{c_p(\varkappa - 1)}{A\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

berechnet. Für überhitzte Wasserdämpfe war nach Obigem $c_p = 0{,}4805$ und $\varkappa = 1{,}333$; man hat daher für diese Dämpfe $B = 50{,}933$; die andere Constante C bestimmt sich ebenfalls leicht, wie das Folgende ergeben wird.

Gl. (24) ist es denn nun, die ich als Zustandsgleichung der überhitzten Wasserdämpfe hinstelle. Mit größter Leichtigkeit läßt sich mit Hülfe dieser Gleichung, wenn von drei Größen p, v und T zwei gegeben sind, die dritte berechnen. Diese Zustandsgleichung unterscheidet sich von der Gleichung der permanenten Gase

$$pv = RT$$

nur durch das Glied $Cp^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$, welches wegen des Werthes von $\varkappa$ bei überhitzten Wasserdämpfen in die Form $C\sqrt[4]{p}$ übergeht.

Prüfung der neuen Zustandsgleichung.

Soll die angegebene Gleichung für überhitzte Wasserdämpfe richtig sein, so muß sie auch für den Grenzzustand, nämlich für den Fall gelten, daß der Dampf in den gesättigten Zustand übergeht; die Gleichung muß also, wenn man die einem gewissen Drucke p entsprechende Temperatur t substituirt, das specifische Volumen des gesättigten Dampfes geben. Diese Voraussetzung führt zunächst auf den Werth der Constanten C.

Die mechanische Wärmetheorie giebt z. B. für gesättigten Wasserdampf von einer Atmosphäre Druck ($p = 10334$) und $t = 100^\circ$, $T = 373^\circ$ das Volumen v von einem Kilogramm Dampf $v = 1{,}6506$ Cubikmeter. Benutze ich diese Werthe in Gl. (24), so findet sich:

$$C = 192{,}50.$$

Ist nun die Gleichung richtig, so muß sie auch für jeden anderen Druck das specifische Volumen des gesättigten Dampfes ergeben; wie weit sich das bestätigt, zeigt die folgende Tabelle 2 auf Seite 8.

Die 2. Columne giebt das specifische Volumen des gesättigten Dampfes für verschiedene Pressungen, berechnet nach den Grundformeln der mechanischen Wärmetheorie; die 3. Columne ist nach Gl. (24) berechnet, wobei nur zu bemerken ist, daß die oben gegebenen Werthe von B und C für den Fall gelten, daß der Druck p in Kilogrammen pro Quadratmeter substituirt wird. Setzen wir bei numerischen Rechnungen p in Atmosphären, so haben wir in der Formel:

$$\left.\begin{aligned} pv &= BT - C\sqrt[4]{p} \\ B = 0{,}0049287 &\text{ und } C = 0{,}18781 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (26)$$

anzunehmen.

Die Tabelle enthält in der letzten Columne noch die Werthe $\frac{C}{B}\sqrt[4]{p}$, von denen in der Folge noch mehrfach Gebrauch gemacht wird.

Man ersieht, daß die Uebereinstimmung der Werthe beider Zahlenreihen eine sehr befriedigende ist, und daß man obige Gleichung zugleich auch für reine gesättigte Dämpfe in Anwendung bringen kann. Nur für Dampfspannungen von weniger als einer Atmosphäre treten Abweichungen auf, die schon zu groß erscheinen können. Ich glaube jedoch, daß für solche Pressungen auch die Werthe, auf welche die mecha-

Tabelle 2.

Druck in Atmosphären	Specifisches Volumen des gesättigten Wasserdampfes		Werthe von $\frac{C}{B}\sqrt[4]{p}$
	nach der mechanischen Wärmetheorie	nach Gl. (24)	
0,1	14,552	14,677	21,429
0,2	7,543	7,583	25,483
0,5	3,171	3,181	32,043
1	1,6504	1,6506	38,106
2	0,8598	0,8583	45,316
3	0,5874	0,5861	50,151
4	0,4481	0,4474	53,891
5	0,3636	0,3630	56,982
6	0,3064	0,3060	59,640
7	0,2652	0,2650	61,983
8	0,2339	0,2339	64,087
9	0,2095	0,2096	66,002
10	0,1897	0,1900	67,764
11	0,1735	0,1739	69,398
12	0,1599	0,1604	70,924
13	0,1483	0,1489	72,357
14	0,1383	0,1383	73,711

nische Wärmetheorie führt, nicht ganz sicher sind. Durch die geringste Aenderung in den eingeführten Constanten hätte übrigens für solche Dämpfe eine bessere Uebereinstimmung hervorgebracht werden können; man brauchte nur in ähnlicher Weise, wie es Regnault mit seinen Formeln gethan hat, welche die Beziehung zwischen Druck und Temperatur darstellen, Dampf von mehr als einer Atmosphäre von dem zu unterscheiden, dessen Druck geringer als eine Atmosphäre ist. Für unsere weiteren Zwecke genügen jedoch die oben gewählten Constanten vollständig; da ich vor Allem die Bedürfnisse der Technik im Auge habe, und bei Dampfmaschinen jederzeit höherer Dampfdruck in Anwendung kommt, so sollen an den angenommenen Constanten keine Aenderungen vorgenommen werden.

Nach Gl. (24) oder (26) läßt sich nun leicht das Volumen des überhitzten Dampfes für beliebigen Druck und jede Temperatur berechnen; setzt man $T = 273 + t$ und $t = 100$, 110, 120 u. s. w., sowie $p = 1$ in Gl. (26), so folgen beispielsweise für überhitzten Wasserdampf von einer Atmosphäre Druck für die angenommenen Temperaturen die im Folgenden angegebenen Werthe des specifischen Volumens:

$t = 100^0$	$v = 1{,}6506$	Cbkmtr.	$t = 160^0$	$v = 1{,}9463$	Cbkmtr.
110	1,6999	"	170	1,9956	"
120	1,7492	"	180	2,0449	"
130	1,7984	"	190	2,0942	"
140	1,8477	"	200	2,1435	"
150	1,8970	"	210	2,1927	"

Hirn hat für einige verschiedene Werthe des Druckes und der Temperatur das specifische Volumen beobachtet. Die folgende kleine Uebersicht zeigt, wie vortrefflich seine Versuchsresultate mit den Ergebnissen unserer Formel übereinstimmen.

Druck in Atmosphären	Temperatur Celsius	Specifisches Volumen Cubikmeter	
		nach Hirn's Versuch	nach Gl. (26)
1	118,5	1,74	1,7417
1	141	1,85	1,8526
3	200	0,697	0,6917
4	165	0,4822	0,4733
4	200	0,522	0,5164
4	246	0,5752	0,5731
5	162,5	0,3758	0,3731
5	205	0,414	0,4150

Berechnet man für gleichen Druck und gleiche Temperatur das specifische Volumen v' von atmosphärischer Luft, so giebt das Verhältniß $v' : v$ das specifische Gewicht des Dampfes in Hinsicht der Luft; so erhält man z. B. für die Temperaturen 100^0, 150^0, 200^0 bei einer Atmosphäre Druck beziehungsweise 0,6401, 0,6316 und 0,6250, also mit stärker werdender Ueberhitzung abnehmend.*)

Zu näherer Prüfung der Zuverlässigkeit unserer Zustandsgleichung für Dämpfe mag nun auch der Ausdehnungscoefficient für überhitzten Dampf bestimmt werden.

Ist α der Ausdehnungscoefficient, so schreibt sich für Gase das Gesetz von Mariotte und Gay-Lussac in folgender bekannten Form:

$$\frac{pv}{p_1 v_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}.$$

Findet die Ausdehnung bei constantem Drucke Statt, so ist $p = p_1$ und man erhält aus vorstehender Formel:

$$\alpha = \frac{v_1 - v}{v t_1 - v_1 t}.$$

Findet dagegen die Erwärmung bei constantem Volumen Statt, so ist $v_1 = v$ und dieselbe Gleichung giebt dann:

$$\alpha = \frac{p_1 - p}{p t_1 - p_1 t}.$$

Die erstere Formel giebt, wie man sich ausdrückt, den Ausdehnungscoefficienten für Volumenänderung, die zweite den für Druckänderung. Geht man zum Differential über, so findet sich aus den gegebenen Formeln für Volumenänderung:

$$\alpha = \frac{1}{v\frac{dt}{dv} - t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

und für Druckänderung:

$$\alpha = \frac{1}{p\frac{dt}{dp} - t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Für ein vollkommenes Gas geben beide Formeln den gleichen Werth $\alpha = 0{,}003665$; nicht so bekanntlich bei einem wirklichen Gase oder bei Dämpfen.

Ersetzen wir in Gl. (24) T durch $a + t$, wobei $a = 273$

*) Gr. d. m. W. S. 442.

ist, und setzen wir, indem wir differentiiren, erst v und dann p constant, so folgt, wie sich leicht verfolgen läßt:

$$v \frac{dt}{dv} = \frac{pv}{B}$$

$$p \frac{dt}{dp} = \frac{pv}{B} + \frac{C}{B} \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Diese Werthe in Gl. (27) und (28) substituirt und pv durch Gl. (24) ersetzt, giebt dann für überhitzte Dämpfe den Ausdehnungscoefficienten α für Volumenänderung:

$$\alpha = \frac{1}{a - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

und für Druckänderung:

$$\alpha = \frac{1}{a - \frac{C}{B\varkappa} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Beide Werthe sind also verschieden, und zwar ist der letztere Werth, weil $\varkappa > 1$ ist, immer etwas kleiner als der erstere, was mit Regnault's Beobachtungen an Gasen übereinstimmt; dann ist auch α stets größer als $1 : a = 0{,}003665$, was in gleicher Art die Beobachtung bestätigt. Ferner erscheint α um so größer, je größer der Druck p ist; auch dieses Resultat wird durch das Experiment bestätigt. Hat doch Regnault selbst beim Wasserstoffgas, welches in seinem Verhalten einem permanenten Gase am nächsten steht, bei verschiedenem Drucke etwas von einander abweichende Werthe für den Ausdehnungscoefficienten gefunden.

Nach Gl. (29) und (30) sind die folgenden Werthe für einige Werthe des Druckes p für überhitzte Wasserdämpfe berechnet; da p in Atmosphären gilt, so wurde von den bei Gl. (26) angegebenen Constanten Gebrauch gemacht, überdies wie bisher $\frac{\varkappa-1}{\varkappa} = \frac{1}{4}$ gesetzt.

	Ausdehnungscoefficient bei Volumenänderung:	bei Druckänderung:
$p = 0{,}1$	$\alpha = 0{,}003975$	$\alpha = 0{,}003892$
$0{,}5$	$0{,}004150$	$0{,}004017$
1	$0{,}004257$	$0{,}004090$
5	$0{,}004629$	$0{,}004343$
10	$0{,}004872$	$0{,}004501$.

Die vorstehenden Formeln bestätigen alle Sätze, auf welche bis jetzt die Versuche, betreffend den Ausdehnungscoefficienten von Gasen und Dämpfen, geführt haben; ich darf daher das Gegebene als einen weiteren Beweis der Zuverlässigkeit der neuen Zustandsgleichung ansehen. Ein neues Resultat geht aber noch aus den Gleichungen (29) und (30) hervor, daß nämlich der Ausdehnungscoefficient α nur vom Drucke p, nicht aber vom Volumen und dem Grade der Ueberhitzung abhängt. Es existirt keine Beobachtung, welche diesen Satz widerlegt; will man ihn nicht in voller Allgemeinheit annehmen, so muß man nach den obigen Entwickelungen wenigstens zugeben, daß er für überhitzte Wasserdämpfe in der Nähe des Condensationspunktes als genau genug angesehen werden darf.

Es mag nun endlich die specifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes bei constantem Volumen (c_v) näher bestimmt werden. Bei einem vollkommenen Gase ist der oben mit $\varkappa$ bezeichnete Werth mit dem Verhältnisse $c_p : c_v$ identisch; nicht so ist es bei Dämpfen. Hier gilt die oben unter Nr. (20) aufgefundene Gleichung:

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + c_p \frac{(\varkappa - 1)^2}{\varkappa} \cdot \frac{T}{Apv}.$$

Benutzen wir hier Gl. (24) und (25), so folgt nach leichter Reduction

$$\frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{1 - \frac{C}{B} \frac{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{T}} \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Mit Hülfe dieser Formel findet sich nun für jeden gegebenen Zustand des überhitzten Dampfes das Verhältniß $c_p : c_v$ und hieraus, weil c_p bekannt ist, der Werth c_v. Schon aus der Formel ist zu entnehmen, daß mit zunehmender Ueberhitzung der Werth $c_p : c_v$ sich dem Werthe $\varkappa$ nähert; bei kleinem Drucke und sehr großer Ueberhitzung würde daher bei Wasserdampf $c_p : c_v = \frac{4}{3}$ und hiernach $c_v = 0{,}3604$ sein, und den letzteren Werth betrachte ich als die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Volumen, wenn der Dampf durch starke Ueberhitzung bei geringem Drucke ganz in den Zustand eines permanenten Gases übergegangen ist. Die Gleichung lehrt ferner, daß das Verhältniß $c_p : c_v$ zunimmt und c_v abnimmt, je mehr sich der Dampf dem gesättigten Zustande nähert. So ergiebt z. B. Gl. (31) für gesättigten Wasserdampf von 0,1, 0,5, 1 und 5 Atmosphären Druck folgende Resultate:

$p =$	$0{,}1$	$0{,}5$	1	5
$\frac{c_p}{c_v} =$	$1{,}3581$	$1{,}3664$	$1{,}3713$	$1{,}3849$
$c_v =$	$0{,}3538$	$0{,}3516$	$0{,}3504$	$0{,}3470$.

Auffallend könnte es scheinen, daß der Werth der specifischen Wärme c_v bei constantem Volumen wächst, je weiter man, vom gesättigten Zustande des Dampfes ausgehend, mit der Ueberhitzung fortschreitet. Nach der Vorstellung, die man sich von Gasen und Dämpfen macht, erwartet man eher das Umgekehrte. Die weiteren Untersuchungen werden aber unser Resultat bestätigen und erklären.

Die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, angewendet auf überhitzte Dämpfe.

Ist die Gewichtseinheit von überhitztem Dampfe gegeben durch Druck, Volumen und Temperatur, so werden mit der Mittheilung der Wärmemenge dQ Aenderungen dieser Größen verbunden sein. Die oben aufgeführten Gleichungen (III) geben allgemein die Beziehungen, welche hierbei unter diesen Größen stattfinden. Für überhitzte Dämpfe ergiebt sich, wenn man die Gleichungen (18) bis (23) entsprechend in den Gleichungen (III) benutzt:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \frac{A}{\varkappa - 1}(v\,dp + \varkappa p\,dv) \\ dQ &= c_p\left(dt - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{T}{p}dp\right) \\ dQ &= c_v\left(dt + (\varkappa - 1)\frac{T}{v}dv\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (32),$$

und diese Gleichungen unterscheiden sich von denen der permanenten Gase nicht in der Form, sondern nur dadurch, daß der Werth c_v der specifischen Wärme bei constantem Volumen hier veränderlich erscheint und nach Gl. (20) zu beurtheilen ist, während er bei Gasen constant ist und zwar sich durch $c_v = c_p : \varkappa$ ermittelt.

Ist die Zustandsänderung umkehrbar, d. h. ist während der Volumenänderungen der Dampfdruck p mit dem äußeren Drucke immer im Gleichgewichte, so ist die Arbeit, welche der Ausdehnung dv entspricht: pdv, und die entsprechende Wärmemenge Apdv; von der mitgetheilten Wärmemenge dQ wird die letztgenannte sonach zu äußerer Arbeit verbraucht, und der Rest wird zur Erhöhung der inneren Arbeit verwendet (zur Veränderung der Schwingungsgeschwindigkeiten und der Stellung der kleinsten Theile). Bezeichnen wir die Veränderung der inneren Arbeit mit dU, so folgt:

$$A dU = dQ - A p dv,$$

und wenn man dQ durch die erste der Gleichungen (32) ersetzt, nach einfacher Umformung:

$$A dU = \frac{A}{\varkappa - 1} d(pv) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Integrirt man diese Gleichung, indem man von einem gewissen Anfangszustande ausgeht, so folgt:

$$A (U - U_1) = \frac{A}{\varkappa - 1} (pv - p_1 v_1).$$

Die Differenz $U - U_1$ giebt den Mehrbetrag der inneren Arbeit, und da hier diese Differenz mit A multiplicirt erscheint, so ist diese Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen. Nehme ich an, der Anfangszustand sei Wasser von 0° Temperatur, und bezeichne ich die linke Seite vorstehender Gleichung mit J, so schreibt sich die Formel auch

$$J = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} pv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34).$$

J_0 bedeutet eine noch zu bestimmende Constante und J giebt nun an, wie viel Wärme im überhitzten oder gesättigten Dampfe vom Drucke p und Volumen v mehr enthalten ist, als im Wasser von 0° Temperatur. Ich nenne J kurz die Dampfwärme.

Die Formel muß für überhitzte und gesättigte Dämpfe gleichzeitig gelten; für die letztere Art von Dämpfen kann man aber nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie die Dampfwärme ermitteln, und daher bietet sich ein Mittel, nicht nur die Constante J_0 zu bestimmen, sondern auch zu erproben, ob die Gl. (34) zunächst für gesättigte Dämpfe von beliebigem Drucke gilt.

Denkt man sich 1 Kilogrm. Wasser unter dem Drucke p von 0° auf t° erwärmt, so erfordert das eine Wärmemenge:

$$q = \int_0^t c\, dt,$$

wobei c nach Gl. (2) eingesetzt wird; man erhält:

$$q = t + 0{,}00002\, t^2 + 0{,}0000003\, t^3.$$

Wird nun das Wasser unter constantem Drucke p vollständig in gesättigten Dampf verwandelt, so ist schließlich im Dampfe eine gewisse Wärmemenge ϱ mehr enthalten, als vorher im Wasser von gleicher Temperatur; ich nenne ϱ die innere latente Wärme und fand für Wasserdampf*):

$$\varrho = 575{,}40 - 0{,}791 \, . \, t.$$

*) Gr. d. m. W. S. 282.

Nun ist offenbar für gesättigten Dampf:

$$J = q + \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

So findet sich z. B. für gesättigten Wasserdampf von einer Atmosphäre Druck (p = 10334), weil t = 100° ist, J = 596,80; setzt man diesen Werth in Gl. (34) und überdies v = 1,6506 nach obiger Tabelle 2, so folgt umgekehrt für die Constante J_0 dieser Gleichung:

$$J_0 = 476{,}11.$$

Unter Benutzung der Werthe von v der Tabelle 2 sind dann nach Gl. (34) die Werthe der letzten Columne der folgenden Tabelle berechnet worden, während die der vorletzten der Formel $q + \varrho$ entsprechen.

Tabelle 3.

Druck in Atmosphären	Dampfwärme J für gesättigten Wasserdampf	
	nach Gl. (35)	nach Gl. (34)
1	596,80	596,80
2	601,42	601,62
3	604,47	604,68
4	606,81	606,97
5	608,73	608,81
6	610,39	610,38
7	611,86	611,74
8	613,18	612,96
9	614,38	614,05
10	615,49	615,05

Man erkennt die befriedigende Uebereinstimmung der Werthe beider Zahlenreihen und kann hierin einen neuen Beweis der Zuverlässigkeit der für das Verhalten überhitzter Dämpfe hingestellten Sätze finden.

Die Gl. (34) spricht das „Hirn'sche Gesetz" aus. Durch Betrachtungen ganz anderer Art kam Hirn zu dem Resultate, daß, wenn man von einem gewissen Anfangszustande ausgeht, der Mehrbetrag der inneren Arbeit oder, wie wir es nennen, die Dampfwärme, dem Producte pv proportional sei, und dieses Resultat legt Hirn dann seinen Untersuchungen zu Grunde.*)

Zu sehr bemerkenswerthen Resultaten, die zu weiterer Bestätigung der Richtigkeit der von mir aufgestellten Zustandsgleichung der überhitzten Dämpfe führen, gelangt man, wenn man Gl. (24) in Gl. (34) benutzt. Es folgt dann:

*) In meiner Besprechung des Hirn'schen Satzes (Gr. d. m. W., S. 435) habe ich auf Grund der Resultate numerischer Rechnungen den Satz nur als näherungsweise richtig hingestellt. Ich halte jedoch den Satz jetzt für streng richtig und suche die Abweichungen, auf welche die dort angestellten Rechnungen führten, in dem Umstande, daß ich mich in der Anwendung der Regnault'schen Formeln allzu stark den Versuchsgrenzen näherte, an welchen die empirischen Formeln von Regnault unsicher werden. Fernerhin nahm ich dort an, wie es bis jetzt allgemein geschehen ist, Wasserdampf von jedem Drucke nähere sich mit zunehmender Ueberhitzung im Verhalten bald einem permanenten Gase, während ich mich jetzt der Ansicht zuneige, daß der Wasserdampf nur bei sehr geringem Drucke und größer werdender Ueberhitzung in den Zustand eines vollkommenen Gases übergeht.

$$J = J_0 + \frac{AB}{\varkappa - 1}\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right),$$

oder den Werth B aus Gl. (25) benutzt:

$$J = J_0 + \frac{c_p}{\varkappa}\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Bei kleinem Drucke p und hoher Ueberhitzung kann man nun in der oben gegebenen Gl. (31) das Quadrat des Gliedes

$$\frac{C}{B} \frac{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{T}$$

vernachlässigen und erhält dann statt der angezogenen Gleichung:

$$\frac{c_p}{c_v} = \varkappa + (\varkappa - 1) \frac{C}{B} \frac{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{T}.$$

Bestimmt man hieraus $c_p : \varkappa$ und führt man den Werth in Gl. (36) ein, so ergiebt sich unter den gleichen Voraussetzungen nach leichter Umformung

$$J = J_0 + \left(1 - \frac{C}{B\varkappa} \frac{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{T}\right) c_v T \quad . \quad . \quad (37).$$

Bei sehr kleinem Drucke p und sehr starker Ueberhitzung, wobei der Dampf fast vollständig in den Zustand eines permanenten Gases übergegangen ist, läßt sich noch das zweite Glied in der Klammer vernachlässigen, und man hat dann:

$$J = J_0 + c_v T,$$

und diese Gleichung ist es, die man auch wirklich für permanente Gase hinstellt. Setzen wir, wie oben $J = AU$, wo U die innere Arbeit darstellt, so ist:

$$A dU = c_v dT,$$

woraus folgt, daß bei der Erwärmung der Gase die Vermehrung der inneren Arbeit der Temperaturerhöhung einfach proportional ist; ein Satz, von welchem Clausius in seiner Theorie der Gase ausgegangen ist.

Es soll nun schließlich auch noch für überhitzte Wasserdämpfe der Werth bestimmt werden, den man bei gesättigten Dämpfen die Gesammtwärme nennt, und für welche Regnault die empirische Formel:

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\, t$$

hingestellt hat. Es ist das diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um die Gewichtseinheit Wasser bei constantem, der Dampftemperatur t entsprechendem Drucke vollständig in gesättigten Dampf zu verwandeln.

Gehen wir weiter, indem wir uns überhitzten Dampf vom Volumen v unter den gleichen Verhältnissen erzeugt denken, so ist bei der Bildung die Arbeit $p(v - \sigma)$ verrichtet worden und die Wärmemenge $Ap(v - \sigma)$ verschwunden, wenn wir mit σ das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bezeichnen. Man kann aber ohne Bedenken σ gegen v vernachlässigen und erhält daher für die Gesammtwärme λ:

$$\lambda = J + Apv$$

oder unter Benutzung von Gl. (34):

$$\lambda = J_0 + \frac{A\varkappa}{\varkappa - 1} pv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

und unter Benutzung von Gl. (24) und (25):

$$\lambda = J_0 + c_p\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (39),$$

wobei wie oben $J_0 = 476{,}11$ zu setzen ist.

Da diese Gleichung auch für gesättigte Dämpfe gültig ist, so würde, im Falle solche sich wie permanente Gase verhielten, $C = 0$ sein, und dann wäre:

$$\lambda = J_0 + c_p T,$$

und der Vergleich mit der Regnault'schen Formel ergäbe dann für die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke $c_p = 0{,}305$, ein Resultat, auf welches ich unter denselben Voraussetzungen auch früher*) gekommen bin, das aber vorher schon von Rankine auf anderem Wege erhalten wurde. Gl. (39) erklärt jetzt deutlich den Grund der Abweichung von dem richtigen Werthe $c_p = 0{,}4805$.

Die nach Gl. (39) berechneten Werthe von λ für gesättigten Dampf stimmen ganz befriedigend mit denen der Regnault'schen Formel überein. Man erhält z. B. für:

	p =	0,5	1	5 Atmosphären,
nach Gl. (39)	λ =	631,15	637,02	653,05
„ Regnault	λ =	631,42	637,00	652,93.

Unsere Gl. (39) hat aber den Vorzug, daß sie allgemein auch für überhitzte Wasserdämpfe gilt.

Anwendungen.

Betrachtet man die von mir aufgestellte Zustandsgleichung der überhitzten Dämpfe, zunächst der Wasserdämpfe, als richtig (und ich glaube, daß durch das oben Gegebene die hohe Wahrscheinlichkeit ihrer Richtigkeit wenigstens für die gewöhnlich vorkommenden Dampfpressungen nachgewiesen ist), so ist nun das Mittel gegeben, eine ganze Reihe von Fragen zu lösen, deren Beantwortung bis jetzt unmöglich war. Vor Allem sind es diejenigen Probleme, die zugleich von technischer Bedeutung sind, welche mit Leichtigkeit gelöst werden können, und eine Theorie der Dampfmaschinen mit überhitztem Dampfe unterliegt nun keiner Schwierigkeit mehr. Es sollen hier nur einige der wichtigsten Fälle untersucht werden, von denen mehrere, weil entsprechende Versuche vorliegen, als weitere Bestätigung des oben Gegebenen dienen sollen.

Adiabatische Curve. Ist die Gewichtseinheit überhitzter Dampf von Druck p_2 und Volumen v_2 gegeben, und dehnt sich derselbe arbeitsverrichtend ohne Mittheilung und Entziehung von Wärme aus, so giebt die adiabatische Curve das Gesetz der Aenderung des Druckes p mit dem Volumen v an; diese Curve giebt auch das Gesetz an, nach welchem bei Dampfmaschinen mit überhitztem Dampfe die Expansionscurve im Indicatordiagramm verläuft. Ist der Anfangszustand durch die Werthe p_2, v_2, T_2 und der Endzustand durch p_1, v_1, T_1 gegeben (Fig. 4), so läßt sich nach den Gleichungen (32) leicht die Beziehung zwischen den einzelnen Größen finden; setzt man dort in den 3 Gleichungen $dQ = 0$, so folgt durch Integration:

$$p_1 v_1^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\varkappa-1} \quad (40),$$

*) Gr. d. m. W. S. 434.

das sind dieselben Gleichungen wie bei permanenten Gasen; nur ist dort bei atmosphärischer Luft $\varkappa = 1{,}410$, während bei **überhitztem** Wasserdampfe $\varkappa = 1{,}3333$ sich herausstellte.

Die Arbeit L bei der Ausdehnung, d. i. die Expansionsarbeit der Gewichtseinheit Dampf bei Dampfmaschinen, findet sich aus der Gleichung:

$$L = \int_{v_2}^{v_1} p\,dv,$$

und hieraus, wenn man p durch die Formel $p v^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa}$ ausdrückt:

$$L = \frac{p_2 v_2}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\varkappa - 1}\right] \quad . \; . \; . \quad (41).$$

Die Anwendung dieser Formel bei Dampfmaschinen setzt allerdings voraus, daß der Dampf während der Expansion überhitzt bleibe. Bei starker Expansion kann es aber vorkommen, daß von einem gewissen Momente an der Dampf gesättigt wird, und von da an findet ein Niederschlagen von Dampf Statt, und die Expansionscurve nimmt einen anderen Verlauf an. Im Augenblicke des Ueberganges durchschneidet die adiabatische Curve die Grenzcurve DD im Punkte T_0 (Fig. 4). Druck p_0 und Volumen v_0, welche diesem Punkte entsprechen, lassen sich aber ermitteln. Ich habe gezeigt*), daß der Verlauf der Grenzcurve DD genau genug durch die Formel:

$$p v^{n} = D$$

dargestellt werden kann, wobei für Wasserdampf $n = 1{,}0646$, und wenn p in Atmosphären gegeben ist, $D = 1{,}704$ zu setzen ist.

Da nun der Punkt $T_0 (p_0 v_0)$ sowohl in der Grenzcurve als in der adiabatischen Curve des überhitzten Dampfes liegt, so gelten für ihn die beiden Formeln:

$$p_0 v_0^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa} \text{ und } p_0 v_0^{n} = D,$$

und durch Verbindung folgt:

$$\frac{v_0}{v_2} = \left(\frac{p_2 v_2^{n}}{D}\right)^{\frac{1}{\varkappa - n}} \quad . \; . \; . \; . \quad (42).$$

Diese Gleichung giebt uns das Expansionsverhältniß $v_0 : v_2$, wenn der überhitzte Dampf am Ende der Expansion gerade in den gesättigten Zustand übergegangen sein soll. Ist in Wirklichkeit das Expansionsverhältniß $v_1 : v_2$ kleiner, als $v_0 : v_2$ (Fig. 4), so gilt für die Expansionsarbeit einfach obige Formel (41); ist es dagegen größer, etwa $v_3 : v_2$ (Fig. 4), so berechnet man die Arbeit erst für die Strecke $T_2 T_0$, indem man in Gl. (41) v_0 statt v_1 setzt. Für die weitere Strecke $T_0 T_3$ setzt man dagegen in Formel (41) $p_0 v_0$ statt $p_2 v_2$, ferner $v_3 : v_0$ statt $v_2 : v_1$ und endlich $1{,}135$ statt $\varkappa = 1{,}333$, wie ich für gesättigten Dampf, dem Anfangs kein Wasser beigemischt ist, a. a. O. angegeben habe.**)

Beispiel. Eine Dampfmaschine arbeitet mit überhitztem Dampfe von 5 Atmosphären Druck und $t_2 = 180^0$ Temperatur; welches ist das Expansionsverhältniß, wenn der Dampf am Ende gerade in den gesättigten Zustand übergegangen sein soll?

*) Gr. d. m. W. S. 294.
**) Gr. d. m. W. S. 339.

Das specifische Volumen v_2 dieses Dampfes ist nach Gl. (26):

$$v_2 = 0{,}39037 \text{ Cbkmtr.}$$

Gl. (42) giebt dann für das gesuchte Expansionsverhältniß $v_0 : v_2 = 1{,}322$.

Isodynamische Curve. Unter isodynamischer Curve verstehen wir diejenige Curve, nach welcher sich der Druck mit dem Volumen ändert, wenn die innere Arbeit, d. h. bei Dämpfen, die Dampfwärme constant sein soll. Ist wieder Druck und Volumen im Anfange p_2 und v_2, so giebt Gl. (34) unter der gemachten Voraussetzung:

$$J = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p_2 v_2 = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p v,$$

woraus folgt:

$$p v = p_2 v_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43).$$

Für überhitze Dämpfe ist sonach die isodynamische Curve eine **gleichseitige Hyperbel**, genau wie bei permanenten Gasen (Hirn'sches Gesetz).

Aus Gl. (36) folgt auf gleichem Wege:

$$T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = T_2 - \frac{C}{B} p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

und hieraus berechnet sich die Temperatur T für jeden anderen Druck p. Mit Ausdehnung und **Druckerniedrigung** ist daher immer eine **Temperaturabnahme** verbunden, während bei permanenten Gasen die Temperatur constant bleibt. Für überhitzten Dampf findet sich die Temperaturänderung:

$$t_2 - t = \frac{C}{B}\left(p_2^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right) \quad . \; . \; . \quad (44).$$

Die letzten Formeln lösen ein interessantes Problem. Wird ein mit Dampf gefülltes Gefäß mit einem luftleeren Raume in Verbindung gesetzt, so breitet sich der Dampf aus, und nachdem er in den Ruhezustand übergegangen ist, befindet er sich in überhitztem Zustande, vorausgesetzt, daß er rein und gesättigt war. Die Gleichungen (43) und (44) geben sogleich über den Endzustand p, v, t Aufschluß, denn die Dampfwärme ist hier im Anfange und am Ende offenbar die gleiche; es findet also bei der Expansion in den luftleeren Raum eine Temperatursenkung Statt, während ein vollkommenes Gas keine Temperaturänderung zeigt.

Hält z. B. ein Gefäß die Gewichtseinheit von reinem gesättigtem Wasserdampfe von $p_2 = 5$ Atmosphären, so ist das Volumen $v_2 = 0{,}3630$ und die Temperatur $t_2 = 152{,}22$ (vergl. Tab. 1 und 2). Verbindet man diesen Raum mit einem anderen, luftleeren, dessen Inhalt viermal so groß ist, so wird das Endvolumen $v = 5 v_2$, und daher ist der Enddruck nach Gl. (43) $p = 1$ Atmosphäre; dann folgt nach Gl. (44) die Temperatursenkung (benutze Tab. 2):

$$t_2 - t = 18^0{,}876$$

und die Temperatur am Ende $t = 133^0{,}34$. Dieser Dampf ist überhitzt, weil seine Temperatur mehr als 100^0 beträgt.

Die isothermische Curve. Dehnt sich die Dampfmasse bei constanter Temperatur aus, so ändert sich der Druck mit dem Volumen nach einer Curve, welche wir die isothermische nennen. Bei einem vollkommenen Gase ist diese Curve mit der isodynamischen identisch, d. h. sie ist auch eine gleichseitige

Hyperbel; nicht so ist es bei Dämpfen. Hier ist in unserer Zustandsgleichung

$$p v = B T - C p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$$

T constant, und sonach ist auch sogleich die Beziehung zwischen p und v gegeben. Für den Anfangszustand ist

$$p_2 v_2 = B T - C p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

und durch Subtraction folgt daher:

$$p v = p_2 v_2 + C\left(p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \quad . \quad . \quad (45),$$

während die Gleichung der isodynamischen Curve unter Nr. 43 angegeben ist. Lassen wir beide Curven vom Punkte T_2 (Fig. 5) ausgehen, so nähert sich die isodynamische Curve $T_2 J$ rascher der Abscissenaxe, als die isothermische Curve $T_2 T_2$.

Die Wärmemenge Q, welche der Gewichtseinheit Dampf beim Uebergange vom Drucke p_2 zum Drucke p bei constanter Temperatur mitzutheilen ist, findet sich durch die zweite der Gleichungen (32), wenn man $dT = 0$ setzt und integrirt:

$$Q = c_p \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} T \log n \frac{p_2}{p} \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Die Veränderung der Dampfwärme (innerer Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen) ist dagegen nach Gl. (36):

$$J - J_2 = \frac{c_p}{\varkappa} \frac{C}{B}\left(p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \quad . \quad . \quad (47).$$

Ist L die hierbei vom Dampfe verrichtete Arbeit, so folgt:

$$Q = J - J_2 + A L,$$

während bei Gasen einfach $Q = A L$ ist; man sagt daher bei Letzteren, daß bei der Expansion unter constanter Temperatur die ganze zugeführte Wärme in äußere Arbeit verwandelt werde. Vorstehende Untersuchungen zeigen jetzt, daß es bei überhitzten Dämpfen nicht so ist; hier wird nur ein Theil der Wärmemenge Q als Arbeit gewonnen, der andere Theil verschwindet, oder wird zu innerer Arbeit verbraucht, dieser letztere Theil ist in Arbeit gemessen:

$$U = \frac{c_p}{A\varkappa} \frac{C}{B}\left(p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right),$$

und die äußere Arbeit ist:

$$L = c_p \frac{\varkappa - 1}{A\varkappa} T \log n \frac{p_2}{p} - \frac{c_p}{A\varkappa} \frac{C}{B}\left(p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right).$$

Beide Größen lassen sich also aus dem Anfangs- und Enddrucke berechnen.

Die vorstehenden Resultate stimmen vollständig mit den Vorstellungen überein, welche man sich vom Verhalten der Dämpfe gemacht hat; nur war man bis jetzt nicht im Stande, den Theil der zugeführten Wärme zu ermitteln, der zu innerer Arbeit verbraucht wird.

Expandirt z. B. gesättigter Dampf von 5 Atmosphären bei constanter Temperatur auf 1 Atmosphäre Druck, so findet sich die mitzutheilende Wärme Q, wenn man in Gl. (46) $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{1}{4}$; $c_p = 0{,}4805$ und $T = 273 + 152{,}22$ substituirt:

$$Q = 82{,}204 \text{ Calorieen.}$$

Dagegen nach Gl. (47) die Veränderung der Dampfwärme:

$$J - J_2 = 6{,}803,$$

und endlich durch die Differenz beider Werthe die äußere Arbeit in Wärmeeinheiten gemessen:

$$A L = 75{,}401$$

oder die Arbeit selbst:

$$L = 31970 \text{ Meterkilogrm.}$$

Dampferzeugung bei constantem Drucke.

Wird die Gewichtseinheit gesättigter oder überhitzter Dampf bei constantem Drucke p aus Wasser von 0° Temperatur erzeugt, so ist nach Gl. (39) die erforderliche Wärmemenge:

$$\lambda = J_0 + c_p\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right),$$

und die gewonnene Arbeit ist:

$$p v = B T - C p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Hat die erzeugte Dampfmenge das Gewicht M, so finden sich die erforderliche Wärmemenge und die gewonnene Arbeit, wenn beide Formeln mit M multiplicirt werden.

Die Wärmemenge Q ist:

$$Q = M\left[J_0 + c_p\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)\right] \quad . \quad . \quad (48),$$

und die Arbeit L ist:

$$L = M\left(B T - C p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right).$$

Ist die Temperatur des Dampfes bei gleichem Drucke p eine andere, z. B. T_1, und soll die gewonnene Arbeit (also das Gesammtvolumen des erzeugten Dampfes) so groß wie vorhin sein, so gilt, wenn M_1 das Dampfgewicht ist, nach Vorstehendem die Beziehung:

$$M\left(T - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) = M_1\left(T_1 - \frac{C}{B} p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \quad (49).$$

Wäre also in einem gewissen Falle Druck p und Temperatur T_1 gegeben, und wir wollten diesen Dampf durch anderen von der Temperatur T ersetzen, so berechnet sich für den letzteren Fall das erforderliche Dampfgewicht M nach Gl. (49) und dann die nöthige Wärmemenge Q nach Gl. (48).

Angenommen, wir hätten M_1 Kilogrm. gesättigten Dampf von 5 Atmosphären Pressung, also von der Temperatur $t_1 = 152{,}22$, und wir wollten ein gleiches Volumen überhitzten Dampf von gleichem Drucke und der Temperatur $t = 200°$ herstellen, so wäre nach Gl. (49) (mit Benutzung von Tab. 1 und 2) das Gewicht der nöthigen Wassermenge:

$$M = 0{,}8852 \,.\, M_1.$$

Für den gesättigten Dampf giebt Gl. (48) die erforderliche Wärmemenge:

$$Q_1 = 653{,}05\, M_1$$

und für unseren überhitzten Dampf:

$$Q = 676{,}00 \,.\, M,$$

woraus folgt, wenn man die Beziehung von M und M_1 benutzt,

$$Q = 0{,}9163 \,.\, Q_1.$$

Es erfordert also die Herstellung des überhitzten Dampfes unter sonst gleichen Verhältnissen weniger Wärme, als die Herstellung des gleichen Volumens von gesättigtem Dampfe, und hierin ist der Vortheil derjenigen Dampfmaschinen begründet, welche mit überhitztem Dampfe arbeiten. Vorstehendes Beispiel gilt direct als Vergleich zweier Dampfmaschinen von gleicher Größe und gleichem Gange, von denen die eine mit gesättigtem Dampfe, die andere mit überhitztem Dampfe von 5 Atmosphären und 200° Temperatur arbeitet, vorausgesetzt, es finde keine Expansion statt. Es unterliegt keiner Schwierigkeit, den Vergleich auch auf Expansionsmaschinen auszudehnen; ich werde jedoch auf die Theorie der Dampfmaschinen mit Ueberhitzung bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen. Es sei hier nur bemerkt, daß bei Expansionsmaschinen der Vortheil der Ueberhitzung wieder etwas zurücktritt, weil die adiabatische Curve der überhitzten Dämpfe sich etwas rascher der Abscissenaxe nähert, als die der gesättigten Dämpfe; immerhin ist die Ueberhitzung vom theoretischen Standpunkte aus jederzeit zu empfehlen.

Erwärmung bei constantem Volumen.

Wird der Gewichtseinheit Dampf bei constantem Volumen Wärme mitgetheilt, so dient diese nur zur Veränderung der Dampfwärme, weil äußere Arbeit weder aufgewendet noch gewonnen wird. Wir haben sonach

$$Q = J - J_2,$$

wenn der Anfangszustand durch die Größen p_2, v_2, T_2 gegeben ist oder unter Benutzung der Gleichungen (34) und (36):

$$Q = \frac{A}{\varkappa - 1}(p - p_2)\, v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

oder

$$Q = \frac{c_p}{\varkappa}(T - T_2) - \frac{c_p}{\varkappa}\,\frac{C}{B}\left(p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \quad (51).$$

Die erste Gleichung führt uns auf die Beziehung zwischen Enddruck p und der mitzutheilenden Wärmemenge Q; die zweite Formel giebt uns die Endtemperatur T.

Die im Vorstehenden behandelten Probleme lassen sich leicht vermehren; mit Leichtigkeit lassen sich zunächst für überhitzte Dämpfe auch alle Aufgaben lösen, die ich in meinem Buche: „Grundzüge ꝛc." für gesättigte Dämpfe und Gase behandelt habe; von besonderem Interesse wären noch die Erscheinungen beim Ausflusse überhitzter Dämpfe aus Mündungen und die Veränderungen, welche mit dem Mischen von Dämpfen verbunden sind. Des beschränkten Raumes wegen, der mir hier zu Gebote steht, soll nur noch folgendes Problem behandelt werden, welches von Wichtigkeit ist, weil Versuche vorliegen, die eine neue Bestätigung meiner Ansichten über das Verhalten der überhitzten Dämpfe geben.

Es befinde sich in dem Gefäße A (Fig. 6) überhitzter oder reiner gesättigter Wasserdampf vom Drucke p_2, der Temperatur T_2 und dem specifischen Volumen v_2. Die Masse soll unter constantem Drucke p_2 durch ein Rohr C nach einem zweiten Cylinder B hinübergeschoben werden, wo sie sich durch Zurückschieben eines Kolbens unter constantem kleinerem Drucke p_1 Raum machen soll. Es fragt sich nun, welche Temperatur T_1 und welches specifische Volumen v_1 der Dampf in der Vorlage hat, vorausgesetzt, der Gleichgewichtszustand sei dort wieder eingetreten.

Verfolgen wir die Gewichtseinheit Dampf auf dem Wege von A nach B, so ist anfänglich die Dampfwärme J_2, am Ende J_1; in A nimmt der Dampf die Arbeit $p_2 v_2$ auf, und in B wird die Arbeit $p_1 v_1$ verbraucht. Die erstere Arbeit entspricht einer Vermehrung der Dampfwärme um $A p_2 v_2$, die letztere einer Verminderung um $A p_1 v_1$. Man hat daher, weil sonst Wärme weder zu- noch abgeleitet wird, die Beziehung:

$$J_2 + A p_2 v_2 - A p_1 v_1 = J_1.$$

Benutzen wir hier Gl. (34), wonach ist:

$$J_2 = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p_2 v_2 \text{ und } J_1 = J_0 + \frac{A}{\varkappa - 1} p_1 v_1,$$

so folgt nach leichter Reduction:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52),$$

woraus sich zunächst das specifische Volumen v_1 in der Vorlage berechnet.

Benutzen wir in dieser Formel Gl. (24), so folgt ferner:

$$B T_1 - C p_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = B T_2 - C p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

und hieraus, wenn wir die Temperatur nach Celsius einführen, die Temperatursenkung bei diesem Uebergange

$$t_2 - t_1 = \frac{C}{B}\left(p_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) \quad . \quad . \quad (53),$$

und dadurch ist auch die Temperatur t_1 in der Vorlage bestimmt.

Ist z. B. $p_2 = 13$ Atmosphären und $p_1 = 1$ Atmosphäre, so ist die Temperatursenkung nach Tab. 2 und Gl. (53):

$$t_2 - t_1 = 72{,}357 - 38{,}251 = 34^0{,}25.$$

Ist der Dampf im Raume A gesättigt, so ist (Tab. 1) $t_2 = 192{,}08$ und daher die Temperatur in der Vorlage:

$$t_1 = 157^0{,}83.$$

Ist dagegen derselbe Dampf schon Anfangs überhitzt, und beträgt die Temperatur $t_2 = 200$, 205 oder 210°, so findet sich, weil die Temperatursenkung bei gleichen Pressungen p_2 und p_1 dieselbe bleibt, beziehungsweise:

$$t_1 = 165^0{,}75,\ 170^0{,}75 \text{ und } 175^0{,}75.$$

Hirn findet *) durch Versuche für den ersten Fall $t_1 = 155^0{,}58$ und für die letzten drei Fälle $t_1 = 166^0$; $171^0{,}5$; 177^0.

Die Uebereinstimmung mit dem Ergebnisse meiner Rechnungen ist also ganz befriedigend.

Bei kleinerer Anfangspressung p_2 stellen sich etwas größere Differenzen heraus; so ist z. B., wenn in allen Fällen die Endpressung $p_1 = 1$ Atmosphäre ist, für:

		Rechnung:	Hirn's Versuch:
$p_2 = 5$ Atmosph.	$t_2 = 152^0{,}22$	$t_1 = 133^0{,}34$	$137^0{,}72$
5 „	$= 246^0$	$227^0{,}12$	$238^0{,}5$
3 „	$= 133^0{,}91$	$121^0{,}87$	$128^0{,}4$.

Ich schreibe die Abweichungen größeren Theiles der Unsicherheit und Schwierigkeit der Versuche zu.

Mit vorliegendem Falle hat man es nämlich zu thun, wenn der Dampf aus einem Dampfkessel in die freie Atmo-

*) Théorie mécanique de la chaleur. Sec. édition. S. 179 bis 180.

sphäre strömt. Die vorhin mit t_1 bezeichnete Temperatur ist dann die Temperatur des Dampfes, nachdem er sich außerhalb ausgebreitet hat, zur Ruhe übergegangen, und sein Druck auf eine Atmosphäre gesunken ist. Natürlich ist der Versuch so ohne Weiteres nicht ausführbar, weil die kalte atmosphärische Luft auf den Dampfstrahl erkältend einwirkt. Um das zu umgehen, ließ Hirn den Dampf in einen Holzkasten strömen, der von einem zweiten Kasten umgeben war; dieser zweite Kasten befand sich wieder innerhalb eines dritten. Der Dampf strömte, nachdem er sich im inneren ausgebreitet hatte, durch eine weite Oeffnung in den zweiten, von da in den dritten Kasten und von dort erst in's Freie. Die Oeffnungen waren so weit, daß der Druck im inneren Kasten, in welchem die Temperatur t_1 beobachtet wurde, kaum vom äußeren Atmosphärendrucke verschieden war. Es wäre sehr zu wünschen, wenn dieser schöne und sinnreiche Versuch von Hirn in ausgedehnterem Maße wiederholt würde.

Da für permanente Gase in Gl. (53) $C = 0$ zu setzen ist, so findet sich für diese die Temperatursenkung Null, ein Resultat, auf das ich schon Gr. d. m. W. S. 167 hingewiesen habe, welches aber nur für ein vollkommenes Gas Gültigkeit haben kann. Die wirklichen Gase werden Abweichungen in ähnlicher Art, wie Dämpfe zeigen, wie es übrigens auch schon durch die Versuche von Joule für den zuletzt behandelten Fall und von Regnault für alle Fälle nachgewiesen ist.

Zürich, den 17. October 1866.

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Stallschreiberstraße 47.