

Mathem. 434.

Tractatio Geometrica.
DE
Q V A D R A T V R A
C I R C V L I , I N D E C E M
C A P I T A D I S T R I B V T A .

*ADVERSVS ERRORES TAM VETE-
rum, quam recentiorum mechanicorum.*

Scripta a M. IACOBO CHRISTMANNO. Ioannisbergensi, inclytæ
Academiae Heidelbergensis Professore.



434.

F R A N C O F V R T I ,
Ex Officina Paltheniana, Sumtibus Petri Kopfij.

M. D. X C V .

СЕВЕРНОЕ ОКИЕВЬЕ
А ЯУТА ИДАВО
МЭДИДИ ИДИОДИ
А ТУБЛЯКА АДАДАР



V O X A M

AD O. 1. 2. 9. 3.

3

CLARISSIMO VI-
R O, D. NICOLAO VIGNIERIO,
CHRISTIANISSIMI REGIS GALLIARVM,
Henrici IIII. Medico & Historiographo,
amico obseruando, Iacobus
Christmannus S.P.



VANTO amore & humanita-
tis studio, Vir Clarissime, profe-
quaris eruditionis & disciplina-
rum cultores, literatua non ita pri-
dem ad me missa, abundetestantur.
Scribis enim, nihil te magis optare, & in votis
habere, quam ut amicitiam cum hominibus li-
teratis ineas, eamq; mutuis officijs tuearis &
perpetuo conserues: qua in refacis, quod & Deus
& natura omnibus faciendum præscribit. Quod
autem fructum aliquem amicitiae nostrarę perce-
pisse prædicas, est cur mihi gratuler: quicquid e-
nim per filium tuum Nicolaum, optima indolis
ac spei adolescentem, de successione Califarum
Saracenicorum ad te transmisi, id totum à te in
Bibliothecam historicam relatum, & secunda
editione Reipubl. communicandum esse accepi.

A 2

Utinam & mihi aliquando occasio suppeditaretur, quae benevolentiam & studium meum erga te testificari possem: interea velim pro pignore amicitiae nostrae retineas Tractationem, meam Geometricam de Quadratura circuli, iudicioq; tuo accerrimo subijcas, & quam diligentissime examinandam proponas. Voluissem equidem libenterius otium meum in rebus Chronologicis consumere, nominiq; tuo celeberrimo materiam gratiorem consecrare: sed quia angustia temporis passa non est, ut longius euagarer, spero te munuscum hoc mathematicum animo & quicquidissimo suscepturnum, donec maiora & auribus tuis digniora proferre liceat. Disputatio antiquissima est, & inter geometras plurimum agitata, quomodo area circuli possit redigi ad aequale quadratum? etsi autem multi hoc artificium explicare sint aggressi, nunquam tamen se penitus expedire potuerunt. Inuentus est nuper iactator quidam insignis, qui ausus est scribere, omnes alios hactenus deceptos fuisse in quadrando circulo, se autem Quadraturam omnino scientifice demonstrasse: quod an verum sit, iudicabunt harum rerum periti. Placet mihi sententia Galeni nostri,

nostri, in libro de curatione errorum animi expressa, hisce verbis: γένει γένει θαυμαστὸν, τοῦτον διδάσκει εὐθέως φράγματα παιδεύειν, τούτος μὲν ὀνόδεις φύσει, πινακὶ δὲ σφριμεῖς μὲν, ἀλλὰ ἀγρυπνάς τοις πρώτοις μαθήμασι. συμφέρει γέροντος οἶμαι διδασκάλοις ἀλαζόσι τοιχύτης εἰχειν μαθητὰς, ωσό, τε συνετὸς φύσει καὶ προγεννασμένος τοῖς μαθήμασιν, εὐθέως αὐτῷ κατέφρονεν.
 hoc est, nihil igitur mirum est, quemlibet in priuatis conuersationibus ad se accedentes persuasione delinire: cum horum aliqui asininam habeant naturam, aliqui vero acuti quidem sint, sed non exercitati in primis disciplinis. Conuenit enim, opinor, doctoribus arrogantibus huiusmodi habere discipulos, ut εἰς οὓς qui intelligens ex natura est, εἰς οὓς qui prius se in disciplinis exercuit, statim ipsos despiciat. In eodem libro hæc subiungit Galenus: Τί ποτ’ οὖν οὔτεσ αὐτῶν ὀξεύερχοις οὔτε οὐ φυχῆς, καταγελασότατοι πάντες εἰσὶν τοῖς τοιχύτοις περιβόλοις μαστιν; οὐ οὐρεσις αὐτὴ μαρτυρεῖ τοῖς εὐρίσκεσσιν ἀληθῶς αὐτά. τάχτη γέροντος γένει γένει ποτ’ αὐτῶν εὐρεῖν οὐδὲν θητόν, οὐτε γέ καὶ τῶν εὐρηκότων λεγόντων καὶ διδασκόντων, οἱ μὲν ἄλλοι μαθάντας τοιχόσιν, οἱ δὲ μόνοι δι’ ἀγρυπνάς τοιχόσιν εἴησιν ταῦτα φυχῆς μὴ μαρτιάντας τοιχόσιν, εἰτα παραχαλώσιν ἐμὲ, καὶ τις εἴς αὐτῶν καὶ τύχην περιβολὴς τοιχόσιν, ἀλλ’ εἰταν γε τὸ εἰρεμένον τούτου ατα. τις γένει μείζων τυφλότις, εἰς τὴν τῶν ιδίων ἀμαρτυράτων γνῶσιν οὔτε τῆς τοιωτῆς τοιχότων; οὐταν αὐτὴν ποιεῖται τοιχογνωστῶν εἴσατος οὐρανῆτες ἀφυετέροις, εἰς τὸ ιοῦσακὸν μημονεῦσαν, καὶ ταῦτα δι’ ἀρθμητικῆς τε καὶ γεωμετρίας, ἀρχηγετούσια τε καὶ απροομίας εὑρίσκομενα, τὰ φυλοσοφίας εὐρηκέναι τομέας τοιχόδιας, ωσδιποτάνεας τολμᾶν αὐτὰδεκτά τὰ τεράγγια, χωρὶς ἀποδείξεως καὶ μεθόδου λογικῆς. οὐτοις

Δέ εκόρτες ἐσαντὸς κολακεύσιν, οὐκ ἀλίθεαι τριτῶσιν, ἐν δὲ γνῶναι
καὶ τῷ καταπνοὶ ἐκάρων αὐτῶν αἰατείνεσθαι τόδε τοῖς φοιτητᾶς,
ἀπαντάς τε Διδασκάλους τὰς ἄλλους ὡς ἐσφαλμάτους. Quia ver-
bacum scopo nostro maxime sint accommodata,
tibi accuratius expendēda relinquere arbitror et-
iam, te clausulam Galenicam in predicto libro
optime notasse, quando sic scribit, ὁ ὑφ' ἐσαντὸς κριόμδυος
τε καὶ τεφαίμδυος, τῶστης ἄλλων κριτήσαι τῶσμείνειε δοκιμά-
ζεσθαι, μιδὲ μᾶς φίφε μεταλαμβάνεται. Ceterum Excel-
lentiæ tuae omnia fausta a Deo Opt. Max. precor,
Et ut quam diutissime saluus & incolmis vi-
uas opto. Heidelbergā Kalendis Martijs, la-
bente anno Christi 1595 die primomensis Nisan
feria septima, currente anno æræ Iudaicæ 5355.
pridie neomeniæ mensis Regab, obrepente anno
Hegiræ millesimo tertio.

SVM.

7

S V M M A C A P I T V M , Q V Æ
I N H A C T R A C T A T I O N E
Geometrica continentur.

Capite 1. proponitur *scopus auctoris.*

Capite 2. adducuntur *opiniones veterum Geometrarum, Antiphontis,
Hippocratis Chij, & Brysonis, quæ etiam ordine refutantur.*

Capite 3. explicatur *modus quadrandi circulum ab Archimede in-
ventus.*

Capite 4. ostenditur, *quibus fundamentis nitatur quadratura circuli,
a Iosepho Scaligero excogitata.*

Capite 5. solvuntur *objectiones & paralogismi Iosephi Scaligeri.*

Capite 6. confirmatur *sententia Aristotelis, quod impossibile sit circu-
lum quadrari.*

Capite 7. declaratur *propositio penultima libri primi elementorum
Euclidis.*

Capite 8. docetur, *quid sentiendum sit de epharmosi geometrica, unde
applicatio curvi ad rectum fluxisse videtur.*

Capite 9. monstratur, *quid de proportione recti ad curuum sentien-
dum sit.*

Capite 10. affertur *Epilogus tractationis de quadratura circuli.*

A 4



Tractatio Geometrica.

DE
QVADRATVRA CIRCVLI,
IN DECEM CAPITA DISTRIBUTA,
Auctore M. Iacobo Christmanno
Ioannisbergensi.

Quis sit scopus auctori propositus?

CAPVT J.



VÆSITVM fuit inter veteres , an area circuli in figuram quadratam conformari possit , ita ut ambo spatia sibi inuicem prorsus sint æqualia ? Occasio huius quæstionis inde nata est : cum omni figuræ rectilineæ constitui queat æquale quadratum , sicut ex libro 1. & 2. elementorum Euclidis demonstratur , haud alienum ab instituto Geometriæ esse videtur , si etiam inuestigetur , an omni circulo æquale quadratum dari possit : ex hoc enim artificio inuento , maximum emolumentum rebus mathematicis accessurum esset . Quod intelligimus ex com-

men-

mentario Procli, in propositionem 45 libri primi Euclidis, vbi sic ait, *Ex hoc problemate, opinor inducti veteres, etiam circuli quadraturam quæsiuerunt: si enim parallelogrammum æquale reperitur omni rectilineo, non ingnum est sciscitari, an quoque rectilinea circularibus æqualia dari possint.* Sane diu multumq; a varijs artificibus laboratum est, vt quadratura circuli inueniretur, hoc est, vt certa ratio monstraretur, qua spatum circulare cum quadrato exæquari posset: sed nunquam votis ipsorum respondit euentus. Cum enim certam rationem se inuenisse arbitrarentur, vtique in multas absurditates paulatim inciderunt, vt principia Geometriæ labefactare, & suis hypothesibus contraria statuere cogerentur. Quod expreſſe testatur Simplicius lib. septimo Physicorum, contextu 21. quando sic scribit,

καὶ τὸ πόδιον τὸ κώνιον πετεγωνισμὸς ἡυρητό πνεγμὸν δὲ καὶ
δοκῆ ἡυρηθεῖ, ἀλλὰ μετά πνευματικῶν αὐτοπλεγμάτων, hoc est,
& propter hoc neque circuli quadratura inuenta est adhuc: etsi enim nunc inuenta esse videatur, inuenta tamen est cum quibusdam hypothesibus contradictibus. Veruntamen non omnium conatus simpliciter damnandus est: constat enim utilissimum inuentum esse Archimedis, quod licet summam præcisiónem minime attingat, proximam tamen æquationem subministrat. Tolerandi igitur sunt huiusmodi artifices, qui circuli quadraturam, ex rationibus mechanicis constructam, sensibus aliquo usq; satisfacere

B

ingenue profitentur: qui autem putant, rationem demonstratiuam ad circulum quadrandum afferri posse, næ illi Logices & Geometræ sunt imperiti: quemadmodum in subsequentibus euidenter ostendemus. Propterea recte sensit Aristoteles, quando negauit circuli quadraturam perfici ex principiis geometricis: et si enim circulus mechanice quadrari possit, vt sensui oculorum satisfactum esse videatur, huiusmodi tamen quadratio sophistica est, cum non fiat secundum rem. Locus hic exstat lib. i. Elenchorum cap. 10. vbi ita scribitur, ἀ καὶ πεπαγωνίζεται κύκλος, ἀλλ' ὅπις καὶ τὸ περγυμα, οὐ τὸ σοφιστικός (πεπαγωνισμός.) Similis locus reperitur apud Porphyrium in quæstionibus prædicamentorū, vbi testatur, tempore Aristotelis nondum inuentam fuisse quadrationem circuli, aut si maxime inuenta fuisset, eam tamen non esse apodicticam. Verba eius ita habent: μή ποτε δινόργανη πις εὔρεσις ἐγένετο τῷ θεωρήματος, ηεὶ καὶ εὕρηται, ἀλλ' οὐδὲ ποδεκτική. Idem sentit Ammonius in prædicamento Relatorum, quando sic scribit, Οἱ δὲ γεωμέτραι ζητῶσι τῷ διδάσκει περγυμάτῳ, πεπαγώνται εἰ τύχοι ὅντι, πῶς δινατὸν ἴσον τετράγωνον συζηταθεῖ. καὶ γάρ μεθόδῳ τῷ τοῦ εδίδαξαι, ὡσαρ δινόργανον τετράγωνον εὑρίσκουσιν, ζητῶσι καὶ οὐτὶ τῷ κύκλῳ, πεπαγώντα τῷ διδάσκει περγυμάτῳ ἴσον τετράγωνον εὑρεῖν. τῷ τοῦ δὲ πολλοὶ γιτάσαντες, δὲ χεῦρον. Μόνος δὲ Αρχιμήδης τὸ σωμα εὗρε: τὸ μὴ ποιάκριτες, δὲ χεῦρε. hoc est, Geometræ igitur querunt dato rectilineo, vt si forte esset pentagonum, quomodo illi æquale quadratum constitui possit: & certe methodo hoc docuerunt. Quemadmodum igitur in re-

Etili-

Et lineis quæsiuerunt, ita etiam in circulo quærunt, quomodo dato circulo æquale quadratum liceat inuenire. hoc autem multi quærentes non inuenerunt. Veruntamen solus Archimedes quod proximum est inuenit, at accurate non inuenit. Cur autem nonnulli Aristotelem suspectum habeant, quasi falsum de omni quadratura circuli assuererit: eo nomine, quod nunc multis seculis post Archimedem sit inuenta certa demonstratio, ex qua circulus perfectissime & absolutissime quadrari possit: in causa est, quod nesciant distinguere inter demonstrationem, quæ aliter habere nequit, & inter syllogismum abductionis. Aristoteles enim lib. 2. Priorum, cap. 25. ostendit, eos qui circulum quadrare cupiunt, abduci a demonstratione, quatenus propositas superficies non possunt dicere esse æquales, sed esse fere æquales, quandoquidem ita sensui oculorum videtur. Proinde ait, huiusmodi probationes minime apodicticas, quin potius syllogismos abductionis, appellandas esse: non enim in demonstrationibus admittimus propositiones, in quibus dicitur, quantitates esse fere æquales, sed tales propositiones assumimus, in quibus dicitur, quantitates esse omnino æquales. At in syllogismis abductionis nihil impedit, quominus ponamus, quantitates esse fere æquales: hic enim non exactam quærimus scientiam, sed eam tantū, quæ verum proxime assequatur. Quod manifeste testatur Aristoteles hisce verbis, cum inquit loco citato,

B. 2

τὸ μετὰ μηνίσκων ἵστον γίνεσθαι εἴθε γάμμισθαι τὸν κύκλον, ἐγρῖς ἀντὶ τοῦ εἰδέναι, hoc est, per meniscos circulum æquare possumus rectilineo, ut propemodū scientiam assequamur. Ex quo conspicitur, hos parum versatos esse in lectio-
ne Philosophi nostri, qui imperitioribus persuadere conantur, quadraturam circuli non abhorre a placi-
tis Aristotelis, & summorum eius interpretum. Insi-
gnem etiam iniuriam faciunt summo artifici Archi-
medi, qui putant ipsum coactas & tyrannicas rationes per impossibile ducentes, ad inuestigationem quadra-
turæ circuli adhibuisse. Nec minus delirant, qui nouū quendam circuli quadrandi modum, plenis buccis de-
cantant, eundemq; sesquipedalibus verbis effuse lau-
datum, ac figuris geometricis vndique stipatum, in
theatrum producunt: sed demonstrationi geometricę
non opus est phaleris, & veritas simplex est. Quam ob-
rem paucis exponere decreui, quid de quadratura cir-
culi ex fundamentis geometrię sentiendum sit, ut ma-
nifestū fiat, in quo hactenus omnes aberrarint, & quæ
causæ impedian, quo minus circulus quadrari possit.

*Adducuntur opiniones veterum Geometrarum, Anti-
phantis, Hippocratis Chij, & Brysonis, quæ
etiam ordine refutantur.*

G A P V T II.

EX scriptis Aristotelis apparet, tres fuisse artifices,
qui quadraturam circuli inuestigare conabantur:
quo-

quorum nomina hæc sunt, Bryso, Antiphon, & Hippocrates Chius. Brysonis meminit Philosophus libro primo posteriorum Analyticorum, contextu 67. & libro primo Elenchorum sophisticorum, cap. 10. Antiphontis mentionem facit libro primo Physicorum, contextu II. & lib. I. Elench. cap. 10. Hippocratis Chii quadraturam attingit eodem in loco Elenchorum, ubi etiam Brysonis & Antiphontis rationes examinat. Quod ad contextum vndecimum primi Physicorum attinet, in eo hæc scribuntur, *Simul vero nec omnia (sophismata) diluere conuenit, sed ea tantum, quæcunque ex principijs quis demonstrans falso concludit: quæcunque vero non (sic concludit,) veluti quadraturam quidem illam, quæ per segmenta fit, Geometræ est diluere: illam vero Antiphontis (diluere,) Geometræ non est.* Hinc manifeste apparet, quadraturam Antiphontis plane rusticam & ineptam fuisse: quod non assumeret principia ex geometria, sed oculari quadam ostensione contenta esset. Ut si quis perimetrum circuli per impositionem fili metiretur, & deinde filo eodem in quatuor partes æquales diducto, quadratam superficiem describeret. Sane huiusmodi ineptias velle dissoluere, non est geometræ: immo nec cum hoc contendendum esset, qui geometriæ principia prorsus euerteret, statuendo æquales ambitus linearum continere æquales areas, quemadmodū imperite credidisse videtur Antiphon. de quo in Elenchis sic Aristoteles, *ἢ ὡς Ἀντιφῶν ἐπειπάγω.*

νιζεν: quasi diceret, aut si quis ita inepte circulum velit quadrare, ut fecit Antiphon. De quo hoc memorabile obseruandum est, quod iudicium aurigarum & carpentiorum secutus, putauerit lineam rectam cū circumferentia mensurari posse: quam sane dimensionis rationem appellauit ἐφάρμοσιν. Testis huius rei est Philoponus, qui in contextum 67 lib. primi posteriorum Analyticorum sicc scribit: ἀλλ' οὐχὶ σὺ τῷ τῆς γεωμετρίας ὀπεῖσθαι ἀρχῶν ὅπερι δὲ πόδες φασιν. Αὕτη φασι τὰ πεποιηκέντα, γεωμετρεῖαι εἰσὶν ἐφαρμόσαται τῇ τῆς κύκλου περιφερείᾳ, ὡς σκέψος ἔλεγον. Οὐδέποτε διδιδώσατο. hoc est, Sed non ex propriis geometriæ principiis est demonstratio. Hoc vero aiunt etiam Antiphōtem fecisse, qui lineam rectam adaptauit circuli circumferentiæ, ut ipse loqui solebat: quod est impossibile. Etsi autem ista ἐφάρμοσις, seu applicatio lineæ rectæ ad curuam, quacunque fiat ratione, accepta referatur Antiphonti, sciendum tamen est, omnes mechanicos eodem artificio olim usos, & hodie quoque vti. Quare non immerito tanquam ἀγνωμένοι rejiciendi sunt atq; explodendi, qui huiusmodi ineptias, cum geometria pugnantes, defendunt. Qui autem conantur circulum quadrare per principia geometrica, cum sic quadrari nequeat, illi omnipino digni sunt, qui a Geometra refutentur. Ex horum numero fuit Bryso & Hippocrates Chius, sicut testatur Aristoteles in Elenchis: quando sic scribit: ἔδειγε, εἴ τι δέ τευδογεάφημα, δέ τι ἀληθὲς: οἷον τὸ Ἰπποκράτες, καὶ οὐ πεπαγωνισμὸς ἀλλὰ τὸ μη-

νίσκω

νίσιων, ἀλλ' ὡς ὁ Βρύστων ἐπειτεχνώντες τὸν κύκλον. id est, neque profecto, si sit aliquod pseudographema, circa veram demonstrationem, statim litigiosum erit, qualis est Hippocratis quadratio, quæ per lunulas (siue per segmenta) conficitur: sed tunc erit litigiosum pseudographema, si fiat ut Bryso quadrauit circulum. Notandum hic est, ad particulam δέλτην subaudiendum, litigiosum erit, quemadmodum recte interpretatur Alexander: id ipsum intelligitur ex verbis Aristotelis post paucas lineas consequentibus: vbi ait: οἶον ὁ πετεχαγωνισμὸς, ὁ μὴ διῆρθρος μηνίσκων, τὸν εὐτυχὸν, ὁ δὲ Βρύστωνος ἐερτυχὸν. Licet igitur ambo artifices, Bryso & Hippocrates Chius, circulum quadrare voluerint ex principiis geometricis, eorum tamen rationes inter se multum discreparunt: nam Brysonis quadratura fuit contentiosa, quia geometricis admiscuit communia principia: Hippocratis autem non fuit litigiosa, quia propria quidem geometricę principia, sed male intellecta adhibuit. Post hæc dicta videndum erit, an possimus indicare trium horum artificum modos, quos in quadrando circulo excogitarunt: sane Aristoteles hoc speciatim non exposuit, quia hi modi fere omnibus satis erāt perspecti: hoc tantum inculcauit, has inuentiones mere sophisticas fuisse, quod non assequerentur summam præcisionem, quæ in geometricis demonstrationibus requiritur. Quare si de modis harum inuentionum aliquid scire cupiamus, consulendi nobis sunt interpretes. In-

ter hos summæ auctoritatis est Simplicius, qui primo Physicorum, ad contextum vndecimum, diligentissime examinat rationes Antiphontis & Hippocratis Chij: cum de his duobus ibi loqui videatur Philosopherus: de Antiphonte nullum est dubium, siquidem hic expresse nominatur: an vero quadratura per segmenta inuestigata, referenda sit ad Hippocratem, satis ambigitur. Quod enim Hippocrates circulum quadrauerit per lunulas, in Elenchis sophisticis non obscure indicat Aristoteles, an vero huic similis sit quadratura per segmenta, non constat. Simplicius existimat quadrationem per lunulas, eandem esse cum ea, quæ fit per segmenta, quando ait: τὸν δὲ κλατθεὶ τμημάτων φοῖ περιγραφόν γεωμετρεῖ κλαλύει ὅτι. λέγοι δὲ αὐτὸν κλατθεὶ τμημάτων, τὸν κλατθεὶ τμημάτων δι' Ἰπποκράτης οἱ Χίος ἐφεῦρε. κύκλῳ γάρ τμημα οἱ μηνίσκος ὅτι. id est, Quadraturam autem per segmenta factam, ait, geometræ est dissoluere: nam per quadrationem, quæ fit per segmenta, potest intelligere quadrationem, quæ fit per lunulas, quam Hippocrates Chius inuenit. circuli enim segmentum lunula est. In fine tamen commētarij refert Simplicius, lunulas improprie dici segmenta: ac proinde quadrationem per segmenta possumus separare ab ea, quæ fit per lunulas. Audiamus etiam, quomodo hunc contextum exponat Themistius, qui sic scribit in paraphasi primi Physicorum: εἰ μὴ δὲ τηρεῖτε τὰς ἀρχὰς τοῖς ἔντες παρελογίζοντο, ἀκόλυθον ἦν διδεικνύει τῷ φυσικῷ πῇ φενάκι.

ζετειν.

ξύσιν. εἰ δὲ δι’ ὄν τοῖς αὐτὸς ἀρχαῖς αὐτῷ πάτερ, οὐκ ὁικεῖον
 τὸ λύειν τὸ λόγον αὐτῷ, τῷ μετόντος τῷ βούτημν. ἐπεὶ καὶ τὰ φευ-
 μογεφήματα, ὅσα μὴ σώζει τὰ γεωμετρικὰ τῶν θεοῖς, λυτέον τῷ
 γεωμέτρῃ: ὅσα δὲ μάχεται τοῖς σκείνας, παραγνητέον. οἶν, δύο τινες
 κύκλοι ἐπεχείρησαν τελεταγνίζειν, Ἐπιποκράτης τε ὁ Χίος καὶ Αἴπι-
 φαν. τὸν μὲν δὲ τὸν ποκράτης λυτέον: τὰς γέρας ἀρχαῖς φυλάπτων, τοῖς
 λογίζεται, τῷ μόνον μὲν σκείνον τὸν μηνίσκον τεβαγνίζει, ὃς γεάφεται
 τοῖς τῷ περιαγών πλευράν, τῷ εἰς τὸν κύκλον ἐγεραφομένῳ: πάν-
 τα δὲ μηνίσκον οἶν τε τεβαγνίζειν, λαβεῖν εἰς ἀπόδειξιν. τοῖς οὐ πι-
 φάντα δέ, οὐκ ἐπὶ ἀνέχοι λέγειν οὐ γεωμέτρης, ὃς ἐγεράφει τείχων οἴσ-
 πλευρον εἰς τὸν κύκλον, καὶ ἐφ’ ἐκάτετρα πλευρῶν ἐπερονίσσοσκελέσσαις
 τοῖς τῷ τελεφερείᾳ τῷ κύκλῳ, καὶ τῷ τοέφεξης πιᾶν, ὡς το ποτὲ Ε-
 φαρμόζειν τῷ τελευταίᾳ τείχων πλευρὰν εὐθεῖαν διατῆν τῷ τελεφερείᾳ.
 τῷ το δέ την ἐπ’ ἀπειρον τομὴν αὐτῷ πάτερ, την ὑπόθεσιν ὁ γεωμέτρης
 λαμβάνει. hoc est, quādo igitur obseruantes principia, in
 subsequentib. errorem aliquē committunt, physici est
 ostendere, vbi fallantur. Si vero etiam principia tollat
 eorum, per quæ decipiuntur, vtique inuestigantis sci-
 entiam proprium officium non est, vt rationes ipsorum
 dissoluat. Quoniam & pseudographemata, quæcunq;
 seruant geometricas hypotheses, dissoluenda sunt a
 geometra, quæcunque vero cum illis pugnant, hęc re-
 linquenda sunt. Ut, duo quidam circulum quadrare
 conati sunt, nimirū Hippocrates Chius & Antiphon.
 Quadratio igitur Hippocratis soluenda est, quia ser-
 uans principia, paralogismum committit, dum eum
 solum meniscum quadrat, qui describitur circulatus
 quadrati, in circulo inscripti: & tamē sumit ad demon-
 strationem, quasi omnis meniscus possit quadrari. Sed

C

aduersus Antiphontem non amplius pugnabit Geometra:is enim circulo inscribebat triangulum isopleurum, & in quo quis latere aliud isosceles constituebat ad circumferentiam circuli: quod cum aliquoties fecisset, existimabat vltimi trianguli latus vtpote lineam rectā congruere ad circumferentiam. Hoc autem erat sectionem in infinitum tollere, quam tamen Geometra pro hypothesi ponit. Hæc Themistius. Dignum etiam obseruatione est, quod de Hippocrate Chius scribit Magentinus in expositione capit. 25. libri secundi priorum Analyticorum: quando inquit, ἐπειράσατο μὴ πολλοὶ τελεγωνίσατο κύκλον, οὐχὶ ιδίωθη Καὶ δέ. οὐδὲ Ιωποκράτης ἔδει μὴ πετεγωνίσατο τύπον, τῷδε ἀληθείᾳ οὐχὶ ἐπειράγωνίσει. Οὐ Ιωποκράτης ναύκληρος ἦν, καὶ ληφθεὶς τῇ ναῷ, συλλαβόμενος τοὺς ληψάς, ἀπήνεγκε τὸ Αἴγαυον, δώσοντας δίκην: κατὰ τύχην δὲ ἐκέντη γεωμέτρη, καὶ ἐρονέχε γεωμετρίαι μαθεῖν, καὶ μαθὼν ταῦτα, καὶ τῷ δόρῳ ἐψηφίσατο γῆτημάτων. hoc est, tentarunt quidem multi quadrare circulum, sed non potuerunt. Hippocrates autem visus est quadrasse hunc, sed in veritate nō quadravit. Hippocrates iste nauclerus erat, qui cum in piratas incidisset, merces nauj impositas amisit: postea comprehēsos piratas, Athenas abduxit, ut ibi pœnam luerent. Sed per fortunā incidit in geometram, & studio discendi geometriam flagravit, quam vbi didicisset, etiam quæstiones inexplicabiles soluere conatus est. Hæc de Hippocrate Chio Magentinus retulit: de Brysone autem & Antiphonte ex historiis nihil certi inuenire potuimus. Etsi autem Antiphontis quadratura

tura omnium fuerit ineptissima, vt nulla refutatione egere videatur ex sententia Aristotelis: quia tamē modum eius Simplicius & Themistius describunt, nos eū quoque considerandum proponemus. Censebat Antiphon, circulum quadrari posse, si illius superficies in triangulos rectilineos searetur, atque ex his omnibus quadrata radix extraheretur, quemadmodum id fieri potest per propositionem vltimam libri secundi Euclidis, monente Campano, his verbis: *Et nota quod per hoc inuenitur latus tetragonicum cuiuslibet alterā parte longioris & simpliciter omnis figuræ, rectis lineis contentæ, quæcunque fuerit. Quoniam omnē figuram talem in triangulos resoluemus, & cuiuslibet illorum triangulorum inueniemus tetragonicum latus, secundum doctrinam istius. Et inueniemus per penultimam primilineam unam, quæ possit in omnia latera tetragonica inuēta.* Sed propositum Antiphontis facile destruitur: non enim superficies tota circularis potest in triāgulos rectilineos dispesci: adhac circumferentię partes ad rectas lineas nō possunt congruere, quia punctum etiam minimum circumferentiæ curuum est, & ad lineam rectam applicari nequit. Simili modo decipiūtur, qui per rotationis epharmoſin volunt lineam rectam cum circumferētia comparare: hi enim ponunt, singula puncta linea curuæ posse applicari singulis punctis linea rectæ, quod absurdū est, & tollit sectionem cōtinui in infinitum, vt suo loco prolixius dicemus. In idem absurdum incidunt, qui

per lineas quadratrices circumferentiam diuidunt: hi enim necessario multas partes in circumferentia circuli præterire coguntur, quod eas non percipiat sensus: & cum quælibet pars circumferètiæ curua exsistat, fieri potest, ut in minimo puncto circumferètiæ, segmentum circuli lateat: si autem aliquod segmētum circuli vel omittatur, vel ad triangulum nequeat reuocari, non potest tota area circuli in quadratum conformari. Atq; haec tenus satis de epharmosi Antiphontis dictum est: nunc videamus reliquorum artificum modos. Hippocrates Chius, ex mercatore naufrago Geometra factus, elegans quidem principium geometriæ usurpabat, per id tamen non poterat circulum quadrare. Ostendebat enim ex propositione secunda libri duodecimi Euclidis: quemadmodum inter se haberēt diametrorum quadrata, ita inter se affectos esse circulos & semicirculos: proinde recte colligebat, si duo circuli haberent duplam proportionem in quadratis diametrorum, circulum minorem æqualem esse semicirculo maiori, & quadrantem circuli maioris æqualem esse semicirculo minori, ablatoque communī segmento, residuum meniscum fieri æqualem residuo triangulo isosceli & orthogonio. Hoc inuento putabat idem Hippocrates circulum quadrari posse: cum enim duæ diuersissimæ figure, nimirum meniscus siue lunula, & triangulum orthogonium isosceles, possint fieri æqualia & quadrato, circulari areæ inscripto, possint

sint assignari quatuor menisci æquales, quid impedit, quo minus totus circulus ad quadrati figuram reduci possit? ita quidem ratiocinabatur Hippocrates, nunquam tamen ostendere poterat, totam superficiem circuli in meniscos certos diuidi posse, qui esset æquales alicui quadrato habenti æqualem aream cum circulo. Deceptus igitur fuit Hippocrates, quod existimaret, si unus meniscus posset triangulo æquari, atq; hac ratione ad quadratam figuram reduci, quod etiā omnis meniscus hanc haberet facultatem: quemadmodum Simplicius indicat hisce verbis: *χρήστη μὲν εὐφυῖς οὐ τοιχέρησις: τὸ δὲ φευδόγράφημα γέγονε, οὕτω τὸ μὴ καθόλη δεδειγμένον ὡς καθόλη λαβεῖν. οὐ γάρ εἰδείχθη πᾶς μηνίσκος τετραγωνίζομενος, ἀλλ' οὐδὲ τὴν τετραγώνην πλευρὴν, τὴν εἰς τὸν κύκλον ἐμεριζομένην.* Ad hæc si maxime concedamus, omni menisco posse æquale triangulum constitui, inde tamen non sequitur, aream circuli cum superficie quadrati accurate exæquari, nisi prius ostendatur, omni circulo posse dari æqualem meniscum: sed hoc nunquā probabitur. Eadem ratio est quadrationis per segmenta: nisi enim ostendi possit, omni segmento circuli dari æquale triangulum, nullo modo monstrabitur, aream circularem per certa segmenta distributam, æqualem fieri alicui quadrato. Quæ fuerit ratio à Brysone obseruata in quadrando circulo, exponunt interpretes ad contextum 67 libri primi posteriorum Analyticorum: Bryso enim quadratum dato circulo partim in-

scripsit, partim circumscripsit, ita ut quatuor spatia angularia quadrati, extra circulum extuberātia, sumarentur æqualia quatuor segmentis eiusdem circuli, extra quadratum prominentibus. Sic autem est argumentatus: cui potest dari maius & minus quadratum, eidē potest dari æquale quadratum, at circulo potest dari maius & minus quadratum, Ergo circulo potest dari æquale quadratum. Maiorem propositionem putabat esse postulatum mechanicum: minorem autem probabat per diuisionem spatiorum extuberantium, quæ inter se æqualia viderentur, sensu nullam differentiam animaduertente. Hic aiūt interpretes, maiorem propositionem non esse vniuersaliter veram: non enim omni, cui potest dari maius & minus, potest assignari æquale: quia æqualitas affectio sit eorum, quæ sunt eiusdem generis & naturæ, vt inter se comparari queant. Hoc probant per angulos rectilineos & contingentia, qui inter se æquari nequeunt: nam angulus contingentiae minor est omni rectilineo, vt ostendit Euclides libro tertio elemētorum propos. 15. Et Campanus ibidem scribit, angulum rectilineum non posse fieri æqualem angulo contingentie, qui à recta & curua linea intercipitur. Et paulò pōst addit hæc: *Ex hoc notandum, quod non valet ista argumentatio, hoc transit à minori ad maius, & per omnia media, Ergo per æquale. Nec ista, contingit reperire maius hoc & minus eodem, Ergo contingit reperire æquale.* Et princeps Geometra-
rum

rum Euclides libro tertio elementorum, propos. 30. demonstrat, angulum segmenti semicirculo maioris, esse angulo recto maiorem: angulum vero segmenti semicirculo minoris, esse angulo recto minorem. Hinc tamē non sequitur, quod angulus semicirculi, qui medius est inter angulum segmentorum, æqualis sit recto: nam per propos. 15. libri 3. Euclidis, demonstratur angulum semicirculi omnium quidem angulorum acutorum esse amplissimum, non tamē rectum. Et Campanus fidelissimus Euclidis interpres, eandem sententiam repetit ad propos. 30. lib. 3. elem. Euclidis, cum sic ait, *Transitur igitur à minori ad maius, non per æquale. Et sicut in rectilineis angulis, est reperire maiorem angulo semicirculi, (qui à diametro & circumferentia efficitur,) est minorem, non tamen æqualem, ut monstratum est in 15. huius. Sic in angulis portionis (id est segmenti,) est reperi-rem maiorem recto & minorem, non tamen æqualem, ut pa-tet ex ista demonstratione.* Idem Campanus ad propositionem primam libri decimi Euclidis, sic scribit, *Sed hi non sunt uniuocè anguli: non enim eiusdem sunt generis simpliciter curuum & rectum: & paulo post addit, Planum ergo est, etiam quemlibet angulum rectilineum infini-tis angulis contingentia esse maiorem.* Hinc liquet, angulum rectum maiorem quidem esse angulo semicirculi, non tamen multo maiorem: quia angulus semicirculi non differt à recto, nisi in punto contingentia, teste Campano. Sed hic obiiciat aliquis, quomodo igi-

tur angulus contingentiae possit diuidi, siquidem per lineam rectam secari nequeat? vt ostendit Euclides in propos. 15. lib. 3. cum tamē necesse sit eum diuidi, quatenus est pars superficiei: superficies enim & omne continuum in infinitū diuidi potest. Respondendum est, angulum contingentiae diuidi perimetris circulorū quantitate differentibus: sic enim diuiditur à quantitate eiusdem generis. Huc spectat, quod refert Simplicius ad cōtextum vndecimum primi Physicorum, se subinde cum præceptore suo Ammonio disputasse de proportione numerorum & magnitudinis, item de proportione curui & recti: sed Ammonium strenue negasse, quod in omnibus eadem sit proportio. Verba Simplicii hæc sunt. ἔλεγε δὲ οὐ μέτρος καθημένῳ Ἀμμιάνῳ, ὃς τὸν αἰγαλόν τοιούτοις, εἰ ἐπ' ἀειθυῖῳ ἐρεθῆ τῷ το, καὶ θέτε μεγεθῶν εἴσκεισθαι. αὐτομοιογενῆ γάρ μεγέθη θέτεν, εὐθεῖα, καὶ περιφέρεια. καὶ δέν φησι θαυματόν, μὴ εὔρεθην κύκλῳ εὐθύγεωμον τοιούτοις, εἴπερ καὶ θέτε τὸν γωνίαν εὔσκοιλην τῷ το. οὐτέ γάρ τῇ τῷ ιμικυκλίγωνίᾳ, οὐτε τῇ λοιπῇ εἰς τὴν ὄρθην, τῇ κερατοειδεῖ λεγομένῃ, γένοιτο αὐτὸν εὐθύγεωμος τοιούτων. καὶ οὐτοιούσως φησὶ καὶ τὸ οὐτε τῷ κλειστῷ αὐθιών ζητηθεώρημα, ἀλλα τῷ οὐχ εὔρεθη, οὐδὲ τοιούτοις Ἀρχιμήδης. hoc est, Dicebat autem noster præceptor Ammonius, quod non necessarium fortassis esset, si in numero inueniatur hoc, etiam in magnitudinibus inueniri. sunt enim diversi generis magnitudines, recta, & circumferētia, & nihil, ait, mirum est, non inueniri circulo rectilineū æquale: siquidem etiam in angulis hoc deprehendimus: neque enim angulo semicirculi, neq; reliquo ad rectam

rectam lineam insidente, qui cornicularis appellatur, dari potest æqualis angulus rectilineus: atq; propterea fortassis, ait, etiam a valde præclaris viris theorema tale quæsitum, vsque ad hoc tempus nondum inuen-tum est, ne quidem ab ipso Archimede. In eandem sen-tētiam descēdit Philoponus libro primo posteriorum Analyticorum, cōtextu 67. vbi ait, verum quidem esse axioma in iis, quæ eiusdem sunt generis, quod id, quod neq; maius, neq; minus aliquo probetur, eidem æqua-le habeatur: sed in illis, quæ sunt diuersi generis, opus esse limitatione: etsi enim per omnia non possint con-ferri, quæ sunt diuersi generis, ea tamē in aliquibus ad-mittere comparationem. Et Themistius scribit libro i: Posteriorum, syllogismum Brysonis niti vago & com-muni principio, quod neque ad circulum, neq; ad ma-gnitudinem sit accommodatum: proinde huiusmodi syllogismum nequaquam dici posse demōstratium. Constat ergo maiorem propositionem, qua vſus fuit Bryso, non esse simpliciter veram: ad minorem autem responderi potest per distinctionem: potest enim cir-culo dari maius & minus quadratum, in quātitatibus diuersi generis: sed inde non sequitur, quod possit dari æquale: æqualitas enim est in vniuocis: sola autem vni-uoca sunt comparabilia, vt Campanus testatur ad ter-tiam definitionem libri quinti Euclidis. Idem loco ci-tato sentit Simplicius, vbi vult angulum rectilineum, & illū, qui ex curua & recta generatur, diuersi esse ge-

D

neris, vt inter vtrumq; comparatio nulla institui possit. Verba eius hæc sunt, οὐ μέν τοι γωνίαν, αἵ τε τῶν μηκών ἵζεις, καὶ αἱ κερατοειδεῖς, ὅτι τὸ φερεῖας καὶ εὐθεῖας, ἀλλὰ συγκείμενα, δὲ μόνον αἱ ομοιογενεῖς εἰσὶ τῇ εὐθυγεάμψι, ἀλλὰ καὶ ἀσύμβολητοι. Veruntamen sciendum est, si argumentum Brysonis ex principiis mechanicis æstimemus, in eo nihil desiderari: etsi enim linea recta ad curuam, & curua ad rectam applicari nequeat ex principiis geometriæ, tamen modo mechanico applicari potest. Quare sic inquit Simplicius libro 1. Physicorum, contextu II. ἀμεινον διεῖται ἀρχὴν λέγειν, τὸ ἀδικώτον εἶται εὐθεῖα ἐφαρμόσα τὸ φερεῖα. hoc est, melius igitur est dicere, principium esse, quod impossibile sit, rectam lineam applicare circumferētię. Hoc scilicet impossibile est ex fundamentis geometriæ, fieri tamen potest mechanice: vt enim lineam rectam per regulam sive circinum & sextantem metimur, sic etiā lineam rectam possumus ad circumferētię applicare, si utamur filo æneo, aut regula flexibili: & contra, circumferentiam per æneum filum comprehensam, possumus iterum diducere, & rectæ lineæ equare. Admittitur igitur a mechanicis hoc postulatū, quod cuiuscunque lineæ possimus maiorem & minorem dare, eidem etiam valeamus æqualem assignare, sive lineæ rectæ, sive curuæ considerentur. Præterea a mechanicis æquales superficies recipiuntur, in quibus sensus nullam notabilem deprehendunt differentiam: adhæc licet mechanicis per certos numeros linearum omniū inter-

interualla comprehendere, etiamsi non omnes lineaæ in longitudine sint commensurabiles. Quod si igitur iuxta hæc mechanica principia circulum quadrare velimus, nulla plane erit difficultas: vt autem certam ex geometria demonstrationem habeamus, qua perfectissimam circuli quadrandi scientiam consequamur, non est cur multum laboremus. Quotquot enim circulum exactissime quadrare conantur, hi omnes parallelogramm Brysonis reuocare coguntur: aduersus quos non erit opus nouis argumentis & rationibus pugnare. Hoc tantum requiritur, vt diligenter videamus, quem modum quadrationis & veteres & recentiores mechanici sint secuti, & quam longe a subtilitate geometrica aberrarint: cuius rei methodum nos in sequentibus luculenter & perspicue ostendemus.

*Explicatur modus quadrandi circulum, ab
Archimede inuentus.*

C A P V T III.

Postquam vidit Archimedes, multos quidē de quadratura circuli laborasse, sed parum commodi ad praxin exercēdam attulisse: operam omnino dare voluit, vt quantum fieri posset, haberetur ratio facilis, & ad opifica mechanica opportuna. Quare duo in dimensione circuli ante omnia inuestigāda esse monuit: quorum primum est, yt mensura aliqua communis

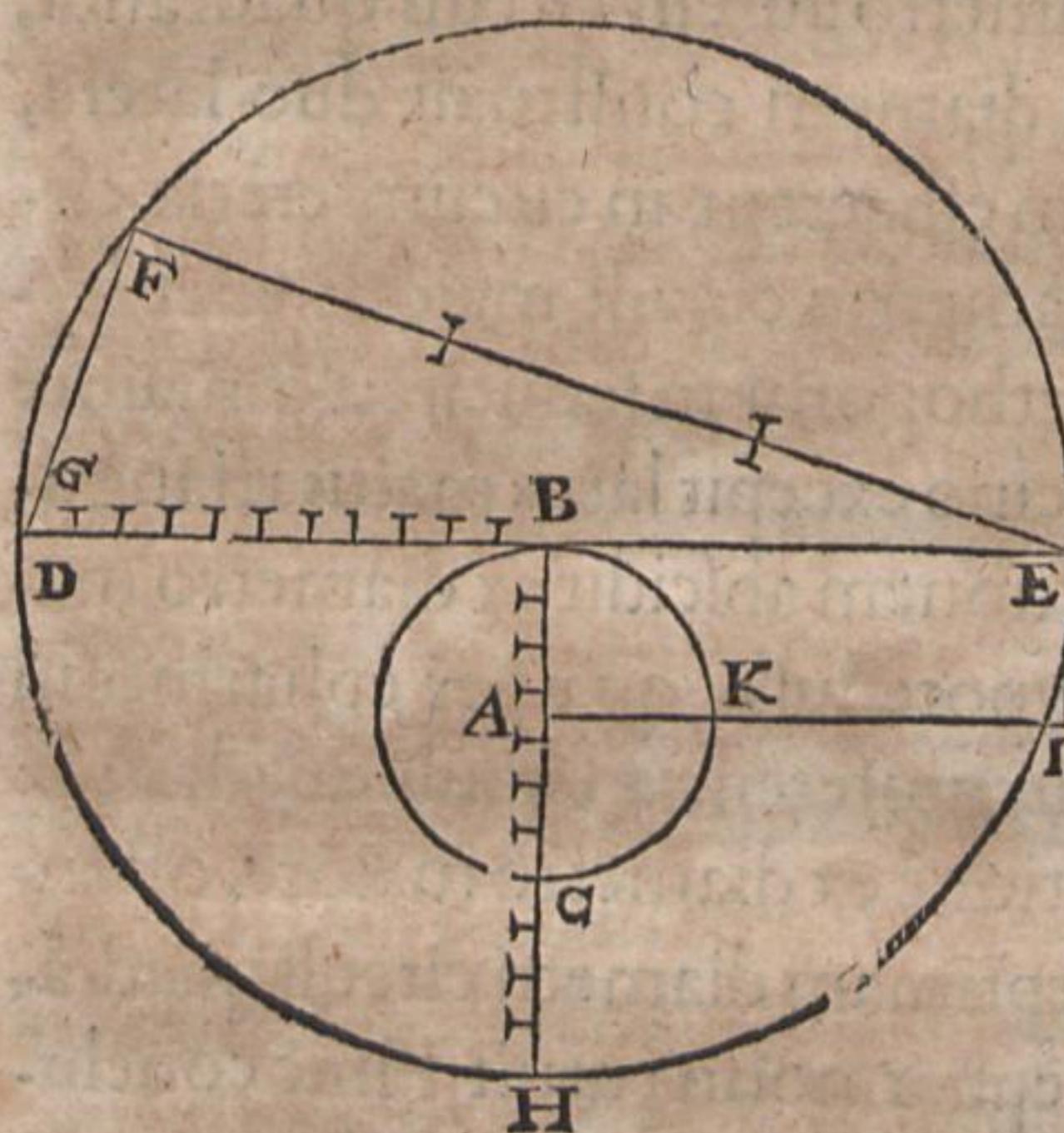
D 2

inter diametrum circuli & eiusdem circumferentiam inueniretur: secundum est, vt capacitas areae circularis cum spatio parallelogrammi rectilinei exæquaretur. Hæc autem eo animo non proposuit, quasi inter rectum & curuum certa proportio, ex principiis geometriæ confirmata, dari posset: hoc enim impossibile esse, solertissimus & diligentissimus artifex probe intellexit: sed hoc indicare voluit, finem contemplationis de quadratura circuli, esse usum, cuius præsidio machinas fabricari, & alia multa opera ad vitam nostram utilia efficere possumus: proinde hunc contemplationis fine consequuti acquiescimus, etiamsi modus quadrationis non sit demonstratiuus, vt per omnia respondeat principiis geometriæ. Restat igitur, vt videamus, quo artificio Archimedes indagauerit proportionem, seu proximam mensuram inter diametrum circuli, & inter eius circumferentiam. Primo quidem etiam ipse Archimedes postulatum Antiphótis secutus est, dum voluit, lineam rectam cum circumferentia per epharmosin æquari posse: si nimirum accipiatur rota aut orbis mobilis, qui a certo punto in rectum circumuoluatur, donec ad idem punctum, unde moueri cœpit, reuertatur. Quod cum factum fuerit, censuit Archimedes, lineam rectam æqualem datæ circumferentia in superficiem planam extensam esse: & vt maxime æqualitas ista ex geometria probari nō possit, hoc tamen putauit sufficere scopo mechanico, quod ex iudicio

dicio oculorum, ob factam diligentem circumreuolutionem, æquales lineæ deprehendantur. Hoc posito, accepit Archimedes circulum quadrādum, cuius diametro ad angulos rectos incumbentem lineam contingentiæ adscripsit, quæ in longitudine æquaret circumferentiam, sicut ex epharmosi rotationis comprehensum erat: deinde ex hac linea contingentiæ, quæ adæquata fuit longitudini perimetri, fecit diametrum maioris circuli: ex diametro autem circuli quadrandi, & ex triplo eiusdem diametri construxit duo latera, quæ angulum rectum efficerent in circumferētia circuli maioris, ita ut diametrus circuli maioris esset hypotenusa trianguli orthogonij in semicirculo maiore constituti. Postea circino exceptit latus maius trianguli, & illi æqualem portionem abscidit ex diametro maioris circuli, siue ex hypotenusa, quæ per epharmosin æqualis ponebatur circumferentiæ circuli quadrandi: residuam autem portionē ex diametro maiore, ostendit esse fere partem septimam diametri circuli quadrādi, quod iterum per epharmosin patuit. Hinc concludit Archimedes, non incommode totam diametrum maiorem, hoc est, circumferentiam circuli quadrandi, in tales partes viginti duas secari posse, qualium septē ponitur diameter circuli quadrandi. Ex quo probauit, proportionem diametri cuiusque circuli ad suam circumferentiam esse triplam cum vna fere septima parte. Hinc est, quod Alfraganus scribat, perimetrum cir-

D 3

culi ter contineri in diametro, cum vna septima diametri parte: quam sententiam omnes fere practici habentus sunt secuti, vt ex sequentibus manifeste apparet. Quia autem hæc sine diagrammate percipi nequeunt, operæ pretium facturi sumus, si delineationē aliquam studiosis geometriæ ob oculos ponamus, & ex ea mentem Archimedis explicemus, quemadmodum practici sentiunt.



Esto circulus quadratus B K C. cuius centrum est A. Si igitur a punto B. dimidia circumferentia reuoluatur in lineam rectam B E. & in linea rectam B D. apparabit totam circumferentiam æqualem esse lateri subtensō D E. Diuidatur semidiametruſ D B maioris circuli in partes vndecim æquales, & totidem partium sit linea B H. Diameter autem circuli quadrandi huiusmodi partes habebit septem, & semidiametruſ eiusdē erit partium $3\frac{1}{2}$. Latus D F æquale ponatur diametro circuli quadrandi:

id autem paulo maius erit, quam sit latus decagonum circu-

circulo maiori inscriptum. Linea F E ponatur triplo maior, quam sit latus D F. continebit igitur hæc linea F E partes viginti vnā. Tandem ex diametro maioris circuli D E, abscindatur per circinum linea E G. quæ equalis sit linea F E. Quare hæc quoque linea E G. erit partium ei. relictum igitur supplementum D G. continebit vnam fere partem, qualium septem est diameter circuli quadrandi. Quare tota diameter maioris circuli continebit partes fere viginti duas. Constitutum igitur est triangulum orthogonium in semicirculo D F E. quare angulus ad circumferentiam rectus est, per propos. 30. lib. 3. Euclidis. Ut autem de inuento Archimedis iudicium ferre possimus, nobis inspicienda erit propositio penultima libri primi elementorum Euclidis: in qua explicatur proprietas trianguli orthogonii, qui magister est matheleos, & acerrimus vindex omnium absurdorum mechanicorum. Hæc est proprietas trianguli orthogonii, quod quadratum subtense, & quale sit duobus quadratis, quæ à reliquis laterib. describuntur. Si igitur ponamus trianguli in semicirculo descripti, latera rectum angulum amplectentia, ita inter se esse comparata, vt minus latus sit septē partium, maius autem contineat triplum, videlicet partes viginti vnam: certe quadratum lateris minoris erit 49. & maioris 441. quæ simul sumta efficiunt 490. quod est quadratum subtensæ, seu maximi lateris. Radix igitur de quadrato 490. est quantitas subtensæ: quia vero

hic numerus non est quadratus, ex eo quoque non nisi proxima radix extrahitur, quam Archimedes sumvit partium 22. ex quadrato scilicet proximo 484. Quid ergo opus est, vt tam indigne in Archimedem nonnulli inuehantur, quasi multum hallucinatus sit in ostendenda proportione diametri ad suam circumferentiā: non enim hoc inuentum iactat Archimedes pro vera demonstratione, siquidem aperte profitetur, hanc esse proximam proportionem, ex principiis mechanicis desumptā. Obiicitur ab Aristarchis, subtensam esse radicem surdam de quadrato 490. itaque conuenientius fore, vt dicamus, longitudinem perimetri æqualem esse Radici quadrati illius, quod decuplū sit quadrati a diametro descripti. Verum Archimedes usui mechanicō consulere voluit, proinde Radicem proximam extrahendam esse iudicauit. Adhæc si maxime demonstrationem aliquam geometricam iactare voluisset, & dixisset, quadratum a diametro descriptum & decuplatum exhibere Radicem, cuius longitudo æqualis sit perimoto: nemo tamē credidisset, hāc esse demonstrationem, cum eius probatio ex sola epharmosi pendeat. Habemus igitur, quid Archimedes princeps mechanicorum sentiat de proportione inter diametrum & eius circumferentiam: si enim diametrus in septem partes æquales diuidatur, & tales viginti duæ partes æquales in lineam rectam extendantur, hanc utique lineam rectam partibus viginti duabus constantem dicit re-

cit respondere circumferentiaē circuli. Quomodo autem area siue capacitas circuli eruenda sit, vt parallelogrammo alicui rectangulo altera parte longiori, aut triangulo alicui rectangulo æqualis videatur, ac per consequens ad æquale quadratum reduci debeat, nūc erit considerandum. Sane Archimedes voluit, parallelogrammon altera parte longius, quod fit ex ductu lineæ viginti duarum partium, in semidiametrum $3\frac{1}{2}$ partiū, duplum esse circuli: seu quod idē est, iudicauit triangulum rectāgulum, cuius latera rectum angulū amplectētia ita se habeant, quemadmodū affecta sunt 22 ad $3\frac{1}{2}$. æquale esse areę circulari: seu quod idem est, censuit, parallelogrammum altera parte longius, quod fit ex ductu lineæ vndecim partium, in semidiametrū $3\frac{1}{2}$ partium, æquale esse areę circulari. Ut si 22 multiplicentur per $3\frac{1}{2}$. producitur area parallelogrammi 77. quod est duplum capacitatis circuli: ergo dimidiū parallelogrammi est $38\frac{1}{2}$. Sed & triangulum rectangulum, cuius latus vnum circa rectum angulum est $3\frac{1}{2}$ partium, & alterum est 22 partium, cōtinet aream, $38\frac{1}{2}$. Præterea si accipiatur parallelogrammum altera parte longius, cuius maius latus sit vndecim partium, & minus latus sit $3\frac{1}{2}$ partium: & hæc duo latera in se multiplicentur, producitur area $38\frac{1}{2}$. quæ æqualis habetur circulo, cuius diameter ponitur septem partiū, & perimetrus æstimatur viginti duarum partium. Idē confirmat Simplicius in commentario postremi con-

E

textus, libri secundi de cœlo, vbi sic ait, δείκνυται τοῦ
 Ἀρχιμήδης τὸ κύκλῳ περίμετρος τετραπλάσιος τῆς Διλαμέτρου, καὶ
 ἐπέβδομα μέρει αὐτῆς περιβάλλονται. & paulo post, δείκνυται
 δ' αὐθιστὸν πότε τῆς Διλαμέτρου καὶ τῷ πετάφτυ μέρει τῆς περιμέτρου ἴσον
 τῷ τῷ κύκλῳ εμβαδῷ. Vbi Simplicius etiam alium modū
 inuestigandæ areę circularis, iuxta inuentum Archi-
 medis, proponit: vult enim diametrum circuli multi-
 plicandam esse in quartam partem perimetri, atq; sic
 produci parallelogrammum, quod sit æquale circulo.
 Hic modus elegans est, & cum superiore omnino cō-
 gruit: sicut examen numerorum ostendit. Quod hæc
 fuerit sententia Archimedis, non tantū ipsius arguunt
 demonstrationes, verum etiam multi præclari viri,
 inuentum Archimedis in summo pretio habentes,
 abunde testati sunt. Scribit enim Proclus in proposi-
 tionem 45 libri primi elementorū Euclidis, hæc verba:
 Καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἔδειξεν, ὅτι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τετράνωρ ὥρογωνίᾳ, δι-
 ἀλλὰ ἐκ τῷ κέντρῳ ἴσον ἐστὶ μᾶκρῳ περιβάλλοντι τὸν ἡρθόν, ἢ δὲ περίμετρος τῆς
 Γάσεω. hoc est, Et Archimedes demonstrauit, quod om-
 nis circulus æqualis sit triāgulo rectangulo, cuius vnū
 latuseorū, quę angulū rectum amplectuntur, sit ēqua-
 le semidiametro, alterum autem latus rationem ba-
 seos habens sit ēquale perimetro. Philoponus quoque
 in contextum 67. libri primi posteriorum Analytico-
 rum hæc scribit. Μόνος δέ ὁ Ἀρχιμήδης δοκεῖ τύπον ἀπιποχεῖν, ὡς δέ
 Θέων ἐν τῷ περίπτερῷ τῷ τῆς σωστάξεως περιμετρῷ φησιν, ἐκ τούτου
 τὸν πέποδον εἰξειν, καὶ τὸν τῷ χίματος καταγραφὸν, τούτῳ δείκνυται τὸ
 ἐκ τῆς περιμέτρου τῷ κύκλῳ, καὶ τῆς ἐκ τῷ κέντρῳ, διπλάσιον εἶναι τῷ
 κύκλῳ.

κύκλῳ. δείκνυται δὲ τῷ πολὺ τῆς εὐστὸν ἀδιάτονον γωνίας. τὸ τέττιν,
 ὅπι τὸ ίμισυ τῷ σκέτης φεύγεται τῷ κύκλῳ, καὶ σκέτης τῷ κέντρῳ, δέ πε
 μεῖζον διώναται εἶναι, δέ πε ἐλασσον. ὡς καὶ σκέτης διώνειται τῷ γοιχείῳ,
 πολλὰ τῷ μεκεῖστεθεωρημάτων δείκνυται, διὰ τῆς τοιωτῆς δύποδείξεως.
 hoc est, Solus vero Archimedes videtur hoc attigisse,
 quemadmodū Theon refert in primo commentario
 supra Syntaxin (Ptolomæi) exponens & demonstratio-
 nem & figure descriptionē, in qua ostēditur, parallelo-
 grammum factum ex perimetro circuli, & ex semidia-
 metro, duplum esse circuli. monstratur autem hoc per
 deductionem ad impossibile, hoc est, quod parallelo-
 grammum ex dimidia perimetro circuli, & ex semi-
 diametro, neque maius possit esse, neque minus circu-
 lo. Ut etiam in duodecimo elementorum (Euclidis)
 multa theoremeta ibi proposita, ostenduntur per hu-
 iusmodi demonstrationem. Locus Theonis, à Philo-
 pono citatus, exstat libro primo commentariorum in
 magnam cōstructionem Ptolomæi, pagina 12. editio-
 nis Græcæ Basiliensis: & nondum habemus commē-
 taria ista Theonis in latinam linguam translata. Sic ait
 Theon: ἵλλα τὸ μὴν τέττης φεύγεται τῷ αριθμῷ τῶν κύκλων καὶ τῆς ηγε-
 (σκέτης,) μηπλάσιον δῆτα τῷ εμβαδῷ τῷ κύκλῳ, ὡς Ἀρχιμήδης εἴ-
 ξει, δέ καὶ τὸν δεῖξιν εἶναι σκέτησομεθα. Et paulo post, τῷ πολὺ φεύγετος, εἶναι αὐτὸν τὸ φεύγειν μὴν δεῖξαι, ὅπι τὸ τέττης φεύγεται τῷ κύκλῳ, καὶ τῆς σκέτης κέντρῳ, μηπλάσιον δῆτα τῷ αὐτῷ τῷ κύκλῳ. hoc
 est. Sed quod a perimetro circuli *a b c.* & semidiametro
e b. describitur parallelogrammum, duplum est areae
 circularis, ut Archimedes ostendit, cuius etiam osten-

sionem deinceps exponemus. Et paulo post, hoc prius assumto, deinceps propositum ostendendū erit, quod parallelogrammum a perimetro circuli & semidiametro productum, duplum sit eiusdem circuli. Haec tenus Theon. Qui autem videre cupit, quomodo per impossibile demōstret Theon, parallelogrammum illud nec maius nec minus esse, ac proinde æquale: videat illa, quæ in cōmentario Theonis sequuntur: hæc enim frustra a nobis adducerentur. Sed aduertēdum est, deductionem illam Theonis ad absurdum, non recte comparari cum geometricis rationibus ad absurdum deducentibus: nam geometrarum demonstrationes sunt certissimæ, quare etiam absurdum contra eas allata vim habent maximam. Sic autem non sunt affectæ omnes demonstrationes mechanicæ: nam pleræque ex incertis pendent principiis, ut si contrarium sentiētes per impossibile deducere coneris, nullum reperias auxilium: talis est probatio, qua Archimedes ostendere conatur, parallelogrammum a dimidia perimetro, & semidiametro comprehensum, æquale esse areæ circulare. Si enim hoc per demonstrationem geometricam euincere cupiamus, oportebit ostendere, in isto parallelogrammo contineri quatuor quadrates circuli propositi: & possumus quidem tres quadrantes circuli in spatio istius parallelogrammi iuxta se collocare, sed tres relinquuntur portiones parallelogrammi, quæ simul sumtæ nulla ratione æquales quarto quadranti demon-

demonstrari possunt. Si epharmosin mechanicam, & iudicium oculorum consulamus, dicemus portiones relietas nec multo maiores, nec multo minores esse quarto quadrante circuli: vt autem exactam dimensionem habeamus, hoc oninino fieri nequit. Quare recte scribit Auerroes supra contextum 67. libri primi Posteriorum, sic inquiens, *Propositio autem, qua usus est Bryso, est propositio dicens, quod ea, quae sunt maiora uno in dispositione ipsius, & minora uno, sunt aequalia.* Sed hæc propositio est amplior, quam ut eam faciant Geometræ, & est etiam non vera, quoniam non est appropriata magnitudinibus. & maius & minus in magnitudinibus sphæricis & rectis, non dicuntur secundum dispositionem unam: hoc est, quoniam non dicitur, quod circulus maior sit superficie: immo non est proportionalitas secundum veritatem inter lineam rectam & circularem. Maxime autem hac propositione utuntur Geometræ, cum monstrant, quod mensura circuli constituitur ex ductu dimidiatae diametri in dimidium circumferentiae: in eo quod monstratur, quod res, quæ est secundum hanc dispositionem, est minor omni superficie, quæ est extra circulum, & maior omni superficie, quæ fit intra circulum: igitur superficies, quæ constituitur ex ductu dimidiatae diametri in dimidium circumferentiae, est aequalis circulo, quoniā ipsa & circulus sunt minores uno eodem in dispositione sua, hoc est omni superficie, quæ efficitur extra circulū: & sunt etiam maiores uno eodem in dispositione sua, hoc est omni superficie, quæ efficitur intra circulum.

E 3

Vult dicere Auerroes, quod mechanici decipientur, qui putant parallelogrammum a dimidia perimetro, & semidiametro comprehensum, æquale esse areæ circulari: non enim sequitur, si circulo possit dari maius & minus parallelogrammum, quod oporteat etiam æquale dari: adhæc si maxime concederetur, posse dari circulo æquale parallelogrammum, nondum tamen probatum esset, id tale esse, quod fiat ex ductu dimidiæ perimetri in semidiametrum: quod si autem certo demonstrari nequeat, hoc parallelogrammū esse circulo æquale, neque etiam quadratum huic parallelogrammo æquale factum, dici potest æquale circulo. Qui igitur circulum quadrare cupiunt, sic ratiocinantur, si datur parallelogrammum altera parte longius, quod sit æquale circulo, datur etiam quadratum æquale circulo: at datur parallelogrammum altera parte lōgius, quod sit æquale circulo, Ergo datur etiam quadratum circulo æquale. Hypothesis est certissima, quia omni figuræ rectilineæ, siue sit triangulum, siue parallelogrammum altera parte longius, potest cōstitui æquale quadratum, per propositionem vltimam, libri secundi elementorum Euclidis. At minor propositio opus habet inductione, hoc est, assumptione particulari: qui autem eam probare conantur, non inducunt, sed abducunt, ponētes scilicet id fere æquale esse, quod omnino æquale esse debuit: vt eleganter ostendit Aristoteles in cap. 25. libri secundi Priorum. Etsi autem nec ipse

Archī-

Archimedes ostendere potuerit parallelogrammū altera parte longius, quod æquale esset circulo: attamen rem maximi momenti inuenisse creditur, quod latera istius parallelogrammi vtcunque circulo æqualis, iisdē partibus definiuerit: hoc enim ad praxin mechanicam perutile est. Quare non immerito reprehendēdi sunt, qui ab Archimedis inuento temere discedūt, finguntque parallelogrammum aliquod altera parte longius, cuius latus vnum sit surdum, & alterum certo numero definiatur. Quorum sane figmenta nihil conferunt ad usum mechanicum: quin etiam horum auctores nunquam probare possunt, quomodo datum parallelogrammum altera parte longius, ex fundamentis geometricis æquale detur circulo proposito: de qua re prolixius dicemus in sequentibus. Hæc igitur est sententia Archimedis de proportione inter diametrum & circumferentiam, & de quadratura circuli, vt vulgus practicorum existimat.

Ostenditur quibus fundamentis nitatur quadratura circuli a Iosepho Scaligero excogitata.

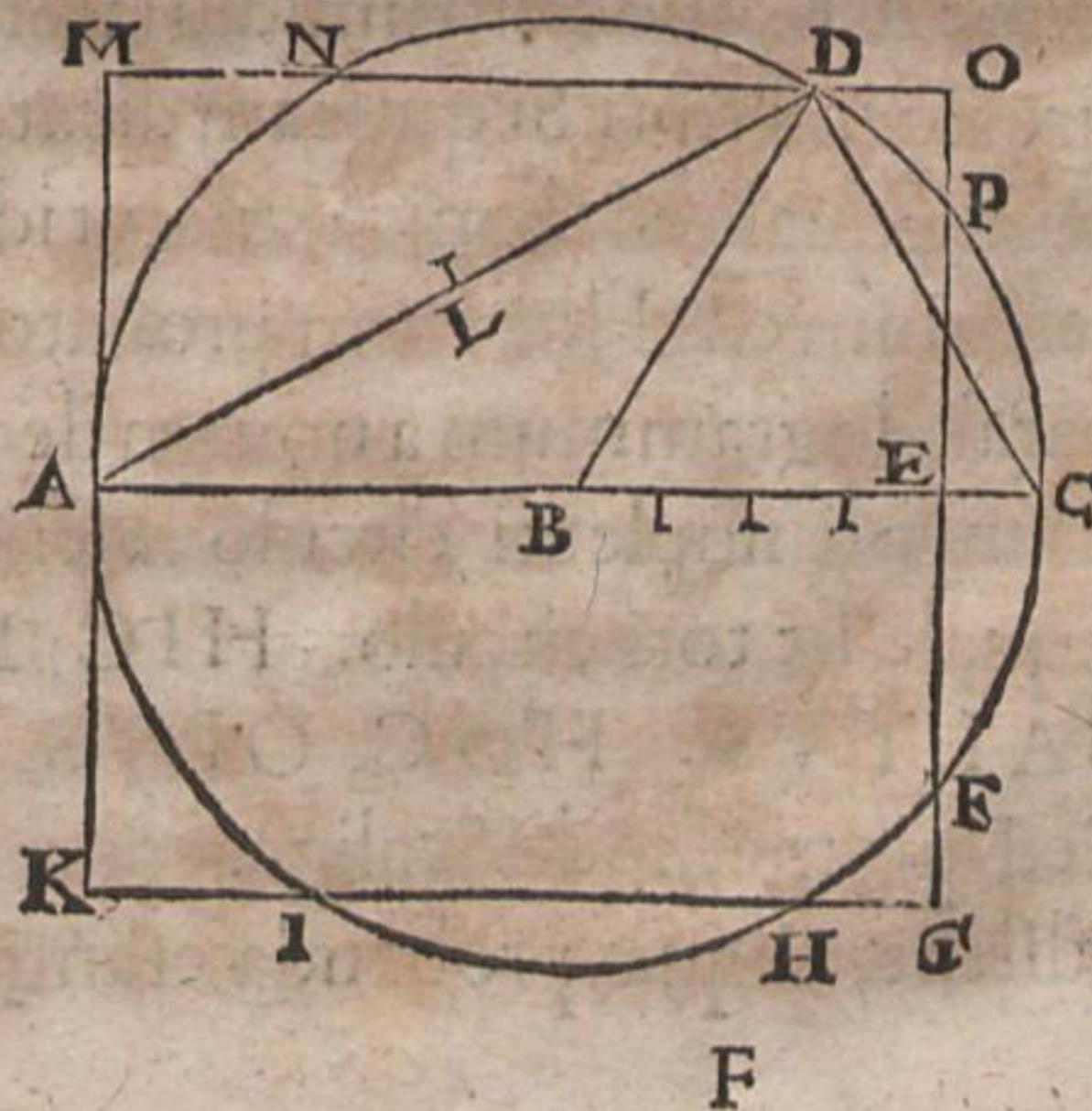
CAPUT IV.

EDitus est liber nomine Cyclometricorum elementorū: cuius auctor in eos mirifice debacchatur, qui putant impossibilem esse quadraturam circuli: & asse-

rit, priscorum quidem omnium rationes sophisticas fuisse, teste Aristotele, se autem $\kappa\tau' \tauὸν ὀπίστημον τὸν λόγον$ nouam quadraturam circuli demonstrasse. Quin etiā tanta est in homine isto audacia, vt non vereatur dicere, nouos esse quadrationis circuli hostes, qui quod ab antiquis fieri non potuit, ab aliis desperandum esse censeant: sed hos, cum ita sentiant, neq; vt Geometras pronuntiare, neque vt Dialecticos colligere. Accedit huc, quod istorum Cyclometricorum auctor tanta animi ægritudine laboret, vt dicat pernitiosum hoc genus hominum, $\chiθὲς καὶ ἀρώνιν εἰς τὸν αὐθρῶπον εἰπεισφθαρῆναι.$ Quare opportunum fuerit, si nouum hūc quadrationis modum diligenter examinemus, & ad lapidem Lydiū reuocemus, quo studiosi animaduertant, nondum penitus extinctam esse omnem geometriā, sed illam Dei beneficio nobis tectam sartamq; remansisse, a qua certissima argumenta petere possimus, quibus falsæ hypotheses non modo veterum, sed etiam recentiorum mechanicorum euertantur. Etsi autem cōfusum sit chaos propositionum, quibus figura noua cyclometrica inuoluūtur, vt vix dignoscere queamus, quam sententiam conceperit Scaliger de quadrando circulo: nos tamen cōsiderato quodam corollario, ad paginam 80 proposito, ex consequentibus antecedentia intelleximus. Idcirco nobis placuit, vt in typo geometrico hunc modum quadrationis exhiberemus, & quid de eo sentiendum esset, perspicue ostenderemus.

Corol-

Corollarium Scaligeri sicut habet: *Ex his patet, circuli areae esse aequali rectangulo sub latere trianguli aequilateri in eo ipso inscripti circulo, & nouem decimis diametri concepto.* Vult igitur Scaliger, circulum propositum hoc modo quadratum esse, ut diametrus circuli quadrandi diuidatur in decem partes aequales, ut eidem circulo inscribatur latus trianguli aequilateri: quo facto dicit, nouem decimas diametri accipiendas pro uno latere, easque cum latere trianguli aequilateri ad angulum rectum copulandas, ut per multiplicationem lateris unius in alterum, parallelogrammum rectangularum & altera parte longius generetur: atque hoc rectangularum altera parte longius vult aequale esse aream circulari: Deinde huic rectangulari altera parte longiori aequale quadratum describit, per propositionem ultimam libri secundi elementorum Euclidis: atque hac ratione ostendit, proposito circulo aequale quadratum assignatum esse. Ut autem appareat, hunc quadrationis modum ad absurditatem Brysonis recidere, & nihil minus quam propositum demonstrare: ecce proponam typum, ex quo omnia fient manifesta.



Sit circulus quadrandus, cuius centrum est B. & diameter est A C. diuisa in decem partes æquales, vt semidiametru contineat partes quinque. Huic circulo inscribatur latus trianguli isopleuri, quod sit A D. id autem inscribitur iuxta propositionem 2.lib. 4. Euclidis. Quo facto, necesse est, vt supra semidiametrū B C constituatur triangulum isopleurum, si puncta D & C. item D & B in rectum coniungantur, vt colligitur ex propositione 8.lib. 13. Euclidis, secundum Campanum. Vnde liquet latus DC esse æquale lateri BC, siue semidiametro circuli quadrandi. Cum autē latus DC sit æquale semidiametro, necesse est, vt sit latus hexagonum circulo inscriptum: per prop. 15.lib. 4. Euclidis. Latus AD diuidatur per æqualia in punto L. & huius lateris dimidium æquale sit lateri E G. siue AK. Comprehendamus igitur parallelogrammum rectagulum a latere AE, constante nouem decimis diametri, & a latere AK, quod est dimidiū lateris trianguli isopleuri circulo inscripti. Si quis iam dicat, parallelogrammum istud æquale esse semicirculo, vt id probet, omnino necessarium est. Hoc enim probato consequetur, quod parallelogrammum a nouem decimis, & toto latere trianguli isopleuri circulo inscripti comprehensum, æquale sit toti circulo. **HIC RHODVS HIC SALTVS. HOC OPVS HIC LABOR.** Sed qua methodo Scaliger conatur propositum suum adstruere? quæ probanda erant, intacta relinquit, & in pro-

in propositionibus nihil ad scopum facientibus prolixè immoratur. Explicat proportionem, quam habeant latera ista circulo inscripta & adscripta : hoc autem nihil facit ad propositum. Addit, quod diameter ad perimetrum siue circumferentiā, hanc habeat proportionem, si perimetrus in planū extēdatur, & ex ea fiat subtensa trianguli rectanguli, cuius vnum latus circa angulum rectum se habeat in tripla proportione, ad alterum latus, tunc quadratum lateris minoris fore decuplum quadrati, quod ex subtensa procreatur, & nonuplum quadrati, quod ex latere maiore describitur: neque hoc quicquam facit ad propositum. Omitto reliquam farraginem hinc inde consutā, qua fundamenta quadraturæ circuli nouus iste Archimedis censore explicare nititur. Quis enim ita imperitus geometriæ est, vt ignoret, istis parergis nunquam propositum obtineri? si typus noster inspiciatur, facile deprehendetur, vbi fucus & causa erroris lateat: nisi enim demonstrari possit, parallelogrammum A E G K. æquale esse semicirculo A J H C. nihil vñquam efficetur. Immo si parallelogrammum istud duplicitur, vt eius dimidiū vergat in alterum semicirculū A N D C. & non possit ostendi, quod totum parallelogrammū comprehensum ex latere constante nouem decimis diametri, & ex latere trianguli isopleuri circulo inscripti, manifeste principium petetur. Quomodo autem demonstrabitur, parallelogrammum A E G K, æqualc

esse semicirculo A J H C. aut parallelogrammum A M O E, æquale esse semicirculo A N D C. nisi ratio mechanica Brysonis obseruetur? vnumquodq; enim parallelogrammum in duabus partibus excedit semicirculum, & semicirculus in duabus partibus excedit parallelogrammum: quare si mōstrari posset, excessus vtrinque esse æquales, facile probaretur æqualitas parallelogrammi & semicirculi: quod autē excessus sint æquales, hoc per solam applicationem mechanicam deprehendi potest. Eadem ratio erit, si concipiatur parallelogrammum ex nouem decimis diametri, & ex latere trianguli isopleuri circulo inscripti: tunc enim integrum parallelogrammū K M O G. a toto circulo in tribus partibus excedetur, & vicissim ipsum totum parallelogrammum in quatuor partibus circulum excedet: ac proinde nihil de æqualitate excessuum statui potest, nisi in auxiliū adhibeatur epharmosis mechanica, qua etiam Bryso monstrabat quadratum fieri æquale circulo. Ex quibus manifestum est, modū quadrandi circuli, a Scaligero excogitatum, nec esse, nec dici posse demonstratiuum: quia pēdet ab epharmosi mechanica, quæ nihil certi probare potest. Ut autem rectius intelligatur, quomodo dimidium totius parallelogrammi sit affectum erga semicirculū, quomodo etiam totum parallelogrammum se habeat ad totum circulum: typus propositus penitus est inspiciendus. Parallelogrammum A E G K. excedit semicirculum A I H C.

A I H C . in duabus partibus, nimirum in figura A K I , & H G F . semicirculus autem excedit parallelogrammum, per superficiem J H . & per superficiem F C E : quod si igitur probari posset, figuras A K J . & H G F . simul sumtas, esse duabus superficiebus J H . & F C E . simul sumtis æquales: certe probatum esset, quod area parallelogrammi æquaret aream semicirculi. Horum autem excessuum mutua æqualitas nō potest probari rationibus geometricis, sed per epharmosin & minutalem diuisionem, excessus vtcunq; non autem prorsus æquales demonstrantur. Item totum parallelogrammum G K M O . ita implicatum est circulo quadrando, vt eum excedat in quatuor partibus, nimirum in figura M A N . & D O P . & F G H . & I K A . totus autem circulus excedit integrum parallelogrammum in tribus duntaxat partibus, nimirum in tribus segmentis N D . & P F . & H J . Si igitur ostendi posset, quatuor superficies totius parallelogrammi extra circulū prominentes, æquales esse tribus segmentis circuli, quæ extra totum parallelogrammum extenduntur: omnino sequeretur, quod area totius parallelogrammi esset æqualis toti circulo. Sed & horum excessuum mutua æqualitas nō potest probari per demonstrationes geometricas, etiam si fortassis per diligentem epharmosin excessus isti æquales esse videantur. Ne hoc facit quicquam ad propositum, quod segmentū N D . sit æquale segmento J H . quia utriusque chorda subtensa est latus

hexagonum. & quod segmentum P F. sit diuisum in duas superficies æquales, nimirum E P C. & E C F. itē quod figura M A N. sit æqualis figuræ A K J. & figura D O P. æqualis habeatur figuræ H G F. ista omnia nihil ad Rhombum: nisi probetur, dimidii parallelogrammi superficiem æqualem esse semicirculo. Quomodo autem istæ superficies æquales esse credētur? nisi prius persuasum fuerit, excessus vtrinque esse æquales: quod nulla ratione geometrica probari potest. Hinc perspicuum est, quod omnes, qui circulo vel æquale quadratum, vel æquale parallelogrammum altera parte longius assignare conātur, necessario cogantur superficiē rectilineā cum superficie circulari implicare, nec possint hoc incommode effugere, quo minus probare teneantur, vtriusque superficie mutuos excessus inter se æquales esse: nisi autem hoc per demonstrationem geometricam doceant, nunquam animus noster acquiescat, sed perpetuo in dubio hærebit. Præterea si admittamus parallelogrammum altera parte longius, idque ad quadratum redigamus, per propositionem ultimam libri secūdi Euclidis: nonne opus erit, vt quadratum istud circulo quadrando partim inscribamus, partim etiam circumscribamus, quemadmodum fecit Bryso? & nisi tunc ostendere possimus, quatuor superficies angulares quadrati extra circulum prominētes, æquales esse quatuor segmentis circuli extra quadratū extuberantibus, nunquam credemus, quadratum esse æquale

æquale circulo. Si quis obiciat, non esse necessarium,
vt excessus vtrinque demonstrentur æquales, quando-
quidem totæ figuræ possunt demonstrari æquales: hinc
enim sequitur, etiam partes extuberantes inter se æqua-
les esse. Respondendum est, falso assumi, quod figuræ
integræ inter se æquales habeantur. Hic nunc locus
postulare videtur, vt videamus, an verum sit, quod a
quibusdam dicitur, superficiem circuli irrationalē esse
magnitudinem, idcirco artifices multos frustra labora-
re, quod aream circuli certo numero definiant. Ut hāc
quæstionem dissoluamus, ante omnia expendendum
erit, quæ sit proportio laterum trianguli rectanguli
A D C. in semicirculo inscripti. Latus angulo recto
subtensum A C. est diameter circuli quadrandi, latus
autem minus circa angulum rectum D C. est latus
hexagonum circulo inscriptum, quod æquale est se-
midiametro. Hisce duobus lateribus notis etiam ter-
tium inuenietur, præsidio propositionis penultimæ
libri primi elementorum Euclidis: latus enim A C, vt
pote diameter circuli, ponitur decem partium æqua-
lium, ergo quadratum illius est centum: & latus D C
æquale est semidiametro, continens partes quinque
æquales, ergo quadratum illius est vigintiquinque. Si
iam minus quadratum dematur de maiore, relinqu-
tur quadratum lateris maioris circa angulum rectum
75. cuius Radix est latus A D. Atqui hoc ipsum latus
A D: est latus trianguli isopleuri circulo inscripti, sicut

manifestum est ex constructione, per secundam propositionem lib. 4. Euclidis: quæ cum ita habeant, dicimus totum parallelogrammum G K M O. constare ex vno latere, habente nouem partes diametri, & ex altero latere, quod Radix est de quadrato 75. Sane si hæc Radix rationalis esset, facile aream totius parallelogrammi metiremur: quia autem Radix illa surda est & irrationalis, nec potest numero certo explicari, cum illius quadratum nō se habeat ut numerus quadratus, per propositionem 7. libri 10. Euclidis, secundū Campanum: hinc fit, vt cogamur latus surdum in rationale multiplicare, atque ita producimus aream totius parallelogrammi irrationalem & surdam, quæ nō potest numeris veris declarari, sed artificio Algebræ, & per numeros surdos inuestiganda est, iuxta methodum libri secundi & decimi Euclidis. Sic etiam triangulus A C D. superficiem habet irrationalem, quia latus vnū circa rectum angulum est rationale, nimirum partiū quinque, alterum autem est irrationale, nimirum Radix de 75. Quod autem latus A D. sit Radix surda de 75. confirmatur etiam per propositionem octauam, libri 13. Euclidis, apud Campanum: vbi demonstratur, quod quadratum lateris trianguli æquilateri circulo inscripti, triplum sit quadrati semidiametri, siue lateris hexagoni. Quod hac ratione possumus explorare: quadratum semidiametri & lateris hexagoni est 25. & quadratum lateris trianguli isopleuri circulo inscripti, est 75.

est 75. iam autem certum est, quod minus quadratum
in maiore ter contineatur. Idem patet ex propos. 12:
libri 13. Euclidis, apud Theonem, vbi sic scribitur: ἐάν εἰς
κύκλον τείχωνον ισόπλευρον ἐμβαφῇ, ὅταν τείχώς πλευρὰ, διάμετρος πλάσιον ἔστι τῆς σήκης τῆς κέντρος τοῦ κύκλου. Hæc ideo recen-
sentur, ut videamus, omnium propositionū geom-
etricarum summum consensum esse: & superficiē trian-
guli rectanguli, aut parallelogrammi rectanguli, irra-
tionalem esse, si latus vnum circa rectum angulū certo
numero exprimatur, alterum autem sit Radix surda,
quę nullo numero explicari potest. Ut enim area inue-
niatur parallelogrammi rectāguli, oportet latus vnum
in alterum multiplicare: iam autem certum est, quod
numeri rationales & irrationales siue surdi, secundum
communem logisticam non possint inter se multipli-
cari: & quando opus est huiusmodi multiplicatione,
oportet numeros rationales ad surdos reuocare, vt ea-
dem vtrinque sit denominatio: quo autem artificio id
sit peragendum, ex geometrica praxi, quam Algebrai-
cam appellamus, cognoscendum est iam videamus,
quid illis respondendum sit, qui existimant, parallelo-
grammum altera parte longius, quod latus vnum ha-
bet rationale, & alterum irrationale, esse æquale circu-
lo, & cum illud parallelogrammum habeat superficiē
irrationalem, putant etiam circulum esse magnitudi-
nem irrationalem. Non est dubium, quin hæc opinio
locum haberet, si demōstrari posset per viam geome-

G

tricam, prædictum parallelogrammū prorsus æquale esse circulo: at hoc scientifice demōstrari nequit, quin potius ex mechanicis principiis, & per epharmosin, *επιθέσιν*, ostenditur æqualitas utriusque superficiei. Adhæc alii præclari artifices (inter quos Archimedes locū principem obtinet) circulo quadrando æquale assignant parallelogrammum altera parte longius, quod ambo latera circa angulum rectum habet rationalia, & horum ratio ad institutum mechanicum maxime est accommodata: quia area huiusmodi parallelogrammi facilime indagatur. Iuxta horū igitur placita sequeretur, quod area circularis esset magnitudo rationalis, quatenus certo numero explicari potest: manet tamen illud incommodeum, quod etiam hi demonstrare nequeāt, parallelogrammum propositum exactissime esse æquale circulo. Quare in nullam absurditatem incidemus, si dicamus, aream circuli nec simpliciter esse rationalem, nec simpliciter irrationalē, sed rationale & irrationalē ex hypothesi: quē admodum diametrus circuli, perse non est rationalis, neque irrationalis, sed ex hypothesi tantum: si enim quadratum circulo inscribamus, cuius latus vnum sit rationale, etiā diametrus quadrati, quæ simul est diameter circuli, irrationalis est & incommensurabilis. Si autē in semicirculo inscribamus triangulum rectāgulum, cuius latus vnum circa angulum rectum sit 3 partium, & alterum 4 partium, tūc diameter circuli,

quæ

quæ simul est subtensa trianguli, est commensurabilis & rationalis, constas 5 partibus: id quod liquet ex propositione penultima libri primi elementorum Euclidis. Summa hæc est, quocunq; modo ponamus latera affecta esse in parallelogrammo rectangulo, nūquam tamen per viam geometricam ostendemus, istud parallelogrammū prorsus æquale esse circulo. Siue enim ambo latera circa angulum rectum constent numero rationali, & superficiem complectantur rationalem, siue vnum eorum sit rationale, & alterum irrationale, ut necessario ex his confletur superficies irrationalis, semper probandum fuerit, istud parallelogrammum circulo implicatum, tanto spatio excedere circulum, quanto etiā spatio circulus excedit parallelogrammū: hoc est, demōstrandum fuerit, excessus utriusq; figure, tam rectilineæ, quam circularis, inter se prorsus æquales esse. Patet igitur, qua ratione Scaliger aream circuli ad parallelogrammum altera parte longius reuocandam esse censuerit: quomodo autem proportionem inter perimetrum & diametrum circuli explicet, videbimus capite 7. in corollario tertio, & quarto.

*Soluuntur obiectiones & paralogismi
Iosephi Scaligeri.*

CAPVT V.

Elementorum cyclometricorū auctoſæpe ac mul-

G 2

tum gloriatur, se nunc tandem summi Dei beneficio quadraturam circuli ex tenebris in lucem protulisse, atque ineptorum quorūdam Geometrarum friuolas opiniones refutasse. Ut autem fidem aliquam imperitoribus faciat, & quadraturam circuli omnino possibilem esse persuadeat, partim auctoritate clarissimorū Philosophorum, partim etiam rationibus propriis vtitur. Quod ad auctoritatem attinet, citat Aristotelem, eiusque interpres: & vult eos in hac fuisse sententia, quod quadratura circuli ex fundamentis geometricis demonstrari possit, etiamsi nondum huiusmodi demonstratio sit inuenta. Nouimus locum existare apud Aristotelem, in prēdicamento Relatorum, ex quo nō nulli hanc suspicionē conceperunt, quasi Philosophus minime neget, quadrationem circuli scibilem esse, sed affirmet illā in profundo adhuc latere, neq; a quoquā dextre fuisse explicatam. Verba Aristotelis hæc sunt, sicut a Simplicio citantur lib. i. Phys. contextu II. οὐνότατος κύκλος πετρεγωνισμὸς, εἴ τιν' ὅπερι τὸς. ὅπερι μηδὲ αὐτῷ οὐχέτι πω, τὸ δὲ ὅπερι τὸν δῆ. hoc est, sicut se habet quadratura circuli, siquidem est scibilis: scientia quidem eius nondum est inuenta, scibile autem est. **Quid de hoc loco Ammonius & Porphyrius sentiat**, iam a me capite primo satis est ostensum. Simplicius sic in prædicamentis interpretatur, **Quod scibile sublatum tollat scientiam**, scientia autem sublata nō destruat scibile, manifestum esse videtur: nam si demandur scibilia, nullius rei erit scientia

scientia, & prorsus nulla erit scientia: si autem tollatur scientia, manet tamen scibile. Etenim fieri aliquando solet, ut propter desidiam abiiciamus rerum quarundā notitiam, quae nihilominus manent & sunt scibiles. Nam & in Musica prius discernebamus dies in, nunc autem hoc interuallum non animaduertimus, quod etiam ostendit Aristoteles exemplo quadraturę circuli: cum enim ipsa suo tempore nondum inuenta esset, per dubitationem dixit, siquidem est scibile: scientia quidem ipsius nondum est inuenta, scibile autem est. Hæc Simplicius. Apparet igitur, Aristotelem ex hypothesi argumentari. si enim quadratura circuli ponatur scibilis esse, etiam si nondum existet illius scientia: certū tamen est, quod absente hac & sublata scientia, nō tollatur scibile, quādoquidem ex hypothesi ponimus scibile esse. Quod autem quadratura circuli, nec actu nec potestate dari possit, & prorsus sit impossibilis, ex professo docet Aristoteles in Elenchis sophisticis: vbi ait, si maxime circulus quadretur, hanc tamen quadrationem esse sophisticam, quia non fiat secūdum rem, hoc est, secundum principia geometrica. Sed obiici potest, Aristotelem loqui de falsis descriptionibus Antiphontis, Hippocratis Chii, & Brysonis, quæ omnes erant sophisticæ: si autem inuentum Archimedis, aut aliorum artificum examinare potuisset Aristoteles, forte ipsum nihil in huiusmodi demonstrationibus desideraturum fuisse. Ad ista respondendum est, Aristotelem nouisse

causam vniuersalem, ob quā circulus quadrari nequit, sicut ostendemus in capite sequenti. Si quærat aliquis, cur ergo veteres tam fuerint solliciti, vt circuli quadraturam inuestigarent, quandoquidem illa per demonstrationem haberri nequeat? dicendum est, aliquos ex veteribus non ita penitus cognouisse naturam trianguli orthogonii, vt putarēt etiam quasuis lineas rectas inter se comparari posse: propterea principium epharmoseos vbiique sunt secuti, & non tantum lineas rationales cū irrationalibus, verum etiam rectas cū curuis, & per consequens superficiem rectilineam cum circulare aequare conati sunt. Hic certe id, quod impossibile erat, possibile esse putarunt: atque sic ex uno errore in plures alios fuerūt præcipitati. De his verum est, quod scripsit Philoponus libro secundo Priorum, cap. 25.

Ἐξηγούντις, εἰ δυνάμεθα κύκλον περεπαγωσαι, καὶ οὐκ οὐδείθενται.
hoc est, quæsiuerunt aliqui, an possimus circulū quadrare, sed ipsi non potuerunt. Quidam vero optime norunt, quadraturam circuli per fundamenta geometriæ non posse indagari, nihil autē obstat, quo minus per rationem mechanicam, sensibus vtcunque satisfacientem, quadratura circuli haberi possit: cum ergo isti talem quadraturam quæsiuerint, nullo modo sunt reprehendendi: satius enim est, vt in operibus mechanicis aliquam habeamus rationem quadrandi circulum, quam vt nullam prorsus admittamus. Porro aduertendum est, quosdam veteres distinxisse quæsita propositionum

tionū geometricarum in πόειμα & ἀπορᾳ, hoc est, in ea
 quę inuestigari, & nō inuestigari possent. Quā distin-
 ctionem tāti fecit Scaliger, vt eā suis prolegomenis cy-
 clometricis statim in vestibulo inserere voluerit: ea aut
 sumta est ex scholio cuiusdā auctoris anonymi, quod
 habetur ad finem commentariorū Procli in primū li-
 brū Euclidis editorū. Verba quę ibi leguntur, sunt hæc:
 πόειμον δέ οὗτον διωκτοί εσμεν ήδη ποιησακή κατάσκευάσμα, τύπουν εἰς
 ὅπερι οικάγειν. ἄλλως δὲ πάλιν οὐκέται τὸ πόειμον, οὐτοι τὸ δὲ ἀπο-
 δείξεως ποειζόμενον, οὐτοι πιθανόμενον οὐ, καὶ χωρὶς ἀποδείξεως, οἷον
 δέ τὸ κέντρον καὶ Διατίμαπικήλον γεράθαι, καὶ τὸ τείχων συστήσανται,
 καὶ μόνον ισόπλευρον, ἀλλὰ καὶ σκαληνόν. & cætera. & paulo post,
 ἀπορού δέ οὗτοι, τὸ αὐτοκείμενον ἔχον, ὡς δὲ τῷ κύκλῳ πετρεγωνισμὸς, καὶ πώ
 γερέσι πόρω. εἰ καὶ οἷον τε αὐτὸν πειραθῆναι, καὶ εἴτιν οὐτιστός, οὐτιστός
 δὲ αὐτῷ φέπω κατείληπται, γαῖα δὲ τοῦ ήδη οὖντος ποείμον, ὁ λόγος
 ἀποδίδοται, ὁ τοῦ καὶ κυρίως πόειμον ἐπονομάζεται. τὸ γερέσι μή πω διέγει-
 πόρω, εἰδέχομεν δὲ πειραθῆναι, ποειστὸν ιδίως περισσαγορεύεται. ἀπο-
 ρού δέ οὗτον, ας εἴρηται, τὸ τῷ ποείμω αὐτοκείμενον, τῷ τούτῳ οὐκέτησις
 ἀπογέκειται οὗτοι. hoc est, parabile vero est, quod possumus
 nunc facere & construere, id est, ad mentem reuocare.
 Sed aliter iterum definiunt parabile, quod vel per de-
 monstrationem acquiratur, aut quod sine demonstra-
 tione, tanquam satis eidens, constituatur, vt est, cen-
 tro aliquo & interuallo dato circulum describere, &
 triangulum constituere non solum isopleurum, sed
 etiam scalenum. & cætera. & paulo post, imparabile
 vero est, quod oppositum habet, vt est circuli quadra-
 tura, cuius efficiendæ nondum excogitata est ratio.
 Quod si etiam ad inuestigandum quadratura possibi-

lis, & scibilis est, scientia tamen eius nondum comprehenditur. Nunc autem sermo habetur de eo, quod iā est parabile, atque hoc principaliter πόευων appellant: cuius enim efficiendi ratio nōdum excogitata est, potest autem inueniri, id proprie περὶ nominant." Απόπον autem & imparabile est, ut diximus, quod opponitur πείμων & parabili, id autem tale est, cuius inuentio nōdum diiudicata est. Ex his verbis colligit Scaliger, auctorem illum anonymum sensisse, quadrationem circuli esse quidem περὶ, nō autem ἐπὶ πόρῳ: hoc est, quadraturam circuli posse quidem indagari, sed eius indagandæ rationem nondum excogitatā esse. Ac proinde ait Scaliger, mirum nō esse, si tantum studium posuerint veteres in quadratura circuli inuestiganda, quandoquidem eam ex principiis geometricis & certissimis rationibus inueniri posse, minime dubitarint. Veruntamen auctor iste anonymous ex hypothesi loquitur, si quadratura circuli possit inuestigari, & sit scibilis, nondum tamen eius exstat sciētia: eodem modo Aristoteles loquitur in prædicamento Relationis. Sic autem modestiæ causa, veteribus loqui placuit: cū enim multi essent curiosi quadrationis circuli indagatores, hos quidem a proposito suo deterrere noluerunt, quando dixerunt, fortassis circulum quadrari posse, nec inutile esse, si omnes viæ ac rationes quadraturam efficiendi tententur, sed illud adiecerunt, nondum scientiam demonstratiuam, pro circulo quadrando, ab ullo morta-

mortalium prolatam esse, & fortassis nūquam talem scientiam inueniendam. Quod etiam indicat prædictus auctor anonymous, dum ait, ἀπόρον δέ τι, οὐκ ζητοῦσας ἀλγήσεις δέ. hoc est, imparabile est, cuius inuētio nondum diiudicata est. Quasi velit dicere, omnem inventionem ad principia geometrica examinandam esse: si enim comperiatur, quod istius inventionis modus cōgruat cum principiis & demonstrationibus geometricis, tunc illam magni faciendum esse. Si autem deprehendatur, inventionis modum pugnare cum principiis & demonstrationibus geometricis, hunc certe modum ut absurdum reiicere debemus, addita hac præfatione, quod nōdum exstet scientia rei quæsitæ. Sic etiam hodie respondere possumus quibusdam circuli quadratoribus: si scibilis sit quadratura circuli, ut quidam existimant, nondum tamen exstat eius scientia: quam enim nonnulli scientiam quadrationis circuli iactant, ea duntaxat est mechanica opinio, principiis & demonstrationibus geometricis repugnans, & propterea sophistica censenda. Quod si nobis mechanici isti etiam sua auctoritate molesti sint, & quosuis cuniculos euadendi quærant, dicemus nouum modū quadrationis ab ipsis allatum, nondum in senatu critico geometrarum comprobatum esse, ac proinde quæstionem in controuersia versari: οὐκ ζητοῦσας ἀλγήσεις δέ. Idē sensisse videtur Porphyrius, qui vanidicis quadratoribus circuli hoc respondendum esse existimat: etiam si

H

vos ingeniosi alioquin & industrii artifices, admodū insolenter & superbe gloriemini, quasi certam demōstrationem circuli quadrandi attuleritis; examen tamē geometricum satis ostendit, vos plurimum decipi, in eo, quod mechanicam duntaxat, non autem apodicticam, & principiis ac demonstrationibus geometricis conuenientem probationem adducatis. Videatur locus Porphyrii, in cap. i. a nobis citatus. Simplicius quoq; iudicat, obiiciendum esse omnibus circuli quadratoribus, quod inuentiones ipsorum varias contradictiones implicit: sicut deprehensum est in quadratura Scaligeri, quam primum in lucem prodiit. Obiicitur nobis auctoritas Philoponi, ex commentario in librum primum posteriorum Analyticorum, vbi de duplatione cubi & quadratura circuli differit, occasione ex contextu Aristotelis accepta. Si Philoponus affirmaret, quadraturam circuli ideo a veteribus indagatam fuisse, quod ipsis certo persuasum esset, eam per demōstrationem geometricam haberi posse, fortassis aliquid contra nos ex verbis illius exciperetur: sed nihil tale legitimus apud Philoponum. Quin potius Philoponus ad stipulatur Archimedii, eumq; affirmat inuenisse modum quadrationis, qui proxime ad verum accedere videatur: reprehēdit etiam epharmosin mechanicam Antiphontis, qua lineam rectam cum curua æquare volebat. Quid de cæteris interpretib. Græcis sentiendum est: an putarunt omnes, circulum ex principiis

principiis geometriæ quadrandum? certum est, quod fuerint alii homines ab istis nouis circuli quadratorib. non enim ita leues sunt existimandi, quasi in gratiam quadraturæ circuli, voluerint euertere proprietatem trianguli rectanguli, aut quasi studuerint confundere, & in unū chaos miscere lineā rectam cū curua. Ipsa geometria hostis est quadrationis circuli, nō Aristoteles, non interpretes: de istis tamē hominib. dicere possumus, quod fuerint rerum geometricarū studiosissimi. Nūc videamus rationes, quib. auctor cyclometricorū mechanematum probare conatur, quadraturā circuli ex principiis geometriæ posse constabili. Sic argumentatur: omni spatio spatiū rectilineum æquale dari potest: at circulus est spatiū, Ergo circulo spatiū rectilineū æquale dari potest. Videantur cyclometrica Iosephi Scaligeri, pagina 2. & 3. Maiores propositio- nem auctoritate veterum confirmare studet: ait enim veteres omnes magna contentione quæsiuisse, vt omni spatio spatiū rectilineū æquale constituerent: nunquam autem eos hoc quæsituros fuisse, nisi persuasum habuissent, id ex principiis geometriæ inuestigari posse. Quid de hac auctoritate sentiēdum sit, nos paulo ante explicauimus: nō enim sequitur, si veteres sollicite quæsiuerint, vt omni spatio spatiū rectilineū exæquarent, quod propterea exæquationem hanc inuenerint: nec etiam sequitur, si exæquationem aliquā inuenerint, quod oporteat illam esse demōstratiuam,

quę sealiter habere nequeat. Videmus enim omnes, tam veteres quam recentiores, viam mechanicam tātum ingressos esse, vt aream circuli cū spatio rectilineo exæquarent. Ut non dicam, auctoritatem sine ratione nullius momenti esse: si enim occurrat problema geometricum, ex propriis principiis, non autē testimoniis clarorum virorum demonstrandum est. Minorē propositionem ait Scaliger notissimā esse: quia superficies circularis & rectilinea dicitur χωρίον, & ἔμβαθυ, id est capacitas & area. Ut hunc paralogismum dissoluamus, scīendum est, maiorem propositionem falsam esse, quæ dicit, omnis spacio spatiū rectilineū equale dari posse, quia contra eam potest afferri instantia, siquidem omnis angulus spatiū est, nec tamē omni angulo equale rectilineū spatiū dari potest. Angulus enim contingentiæ, qui etiam κερτοειδής dicitur, non potest per angulum rectilineum comprehendī, vt probat Euclides, libr. 3. elementorum, propos. 15. Si autem sermo sit de spatio per figuram aliquam comprehenso, iterum negamus huiusmodi omne spatiū ad quadratum reuocari posse. Ut enim totarum figurarum areæ inter se conferantur & exæquentur, necesse est dari certum laterum & angulorum positum, quemadmodum ostendit Euclides libro primo & secundo elementorum: at in circulo nec sunt latera, nec sunt anguli. Vnde liquet, circuli spatiū natura sua differre a spatio parallelogrammi rectilinei: quod etiā Euclides significauit
in

in definitionibus libri primi. Primo enim definiuit superficiem, quæ longitudinem & latitudinem tantum habeat, cuius termini sint lineaæ: a qua definitione excluditur superficies circularis, quæ vñica linea concluditur. Deinde seorsum definiuit circulum, siue superficiem & figurā circularem: hæc enim differt a superficie rectilinea: quia circulus non clauditur terminis, quæ sint plures lineaæ, sed terminatur vna linea circumferētiæ, vt recte monet Lucas Paciolas in castigationibus ad Euclidem Campani adiectis. Adhęc vocabulū χωρίον vſitate accipitur pro superficie rectilinea, quæ ut minimum tribus rectis lineis concluditur: quando autem tribus lineis rectis superficies terminatur, fit figura triangularis, quæ omnium rectilinearum simplicissima est. Quare inter principia geometrica vulgo numeratur hoc pronuntiatum, τρίγωνον εὐθεῖας, χωρίον δὲ τριγώνου. hoc est, & duæ lineaæ rectæ superficiem non comprehendunt. Licet igitur spatium circulare & rectilineū sub eodem genere prædicamētali contineantur: ex diuersissimis tamen constant principiis, vt in se mutuo transire nequeant. Sane ex definitione anguli plani, tam rectilinei quam curuilinei appareat, omnem angulum esse spatium, etiamsi per certam figuram nōdum comprehendatur: quamobrem spatium cum figura non reciprocatur. Quare stolidissimum est, si quis vocabulū spatii perinde vt figure, usurpare voluerit: aut si quis ex eo, quod circulus superficies est, velit colligere,

circulum esse superficiem rectilineam. Produnt igitur inscitiam suam , qui sic argumentantur , omni spatio spatium rectilineum æquale dari potest, at circulus est spatium , Ergo circulo spatium rectilineū æquale dari potest. Hoc enim perinde est, ac si ex dato genere, velint inferre certā speciē, hac ratione: circulus est spatiū, ergo est spatiū rectilineū, ac proinde ad figurā quadratā reuocari potest. Sic argumentandū erat, omni spatio rectilineo quadratū æquale dari potest: at circulus potest fieri spatium rectilineum , Ergo circulo æquale quadratum dari potest. Sic etiam Aristoteles libro secundo Priorum, cap. 25. quadratores circuli argumentari ostendit, quando talem format syllogismum, omnis figura rectilinea redigi potest ad æquale quadratū, at circulus redigi potest ad figuram rectilineam, Ergo circulus redigi potest ad æquale quadratū. Maior propositio certissima est: nam per propositionem vltimā libri secundi elementorum Euclidis , cuilibet figuræ rectilineæ potest dari æquale triangulū, & huic æquale quadratum: sed minor probatione eget: quomodo enim circulus redigi possit ad figuram rectilineam, exēpli gratia ad triangulum , aut ad parallelogrammum altera partelongius , quod exactissime æquale sit areæ circulari, id non potest explicare geometria. Fuerunt quidem multi mechanici, & ante & post Aristotelem, qui ostendere conati sunt, circulum ad æquale quadratum redigi , hoc est, circuli quadraturam ex principiis geometriis.

geometriæ certissime demonstrari: id tamen nunquā animo scientiæ cupidō persuadere potuerunt. Quotiescunq; enim horum rationes fuerunt examinatae, toties deprehēsum est, eas ad incertum iudicium sensus prouocare. Quare recte dixit Aristoteles, huiusmodi syllogismum abductionis appellandum esse, quod a vera demonstratione animum abducat: etsi enim minorem propositionem epharmosis aliqua confirmare videatur, ea tamen non gignit certam scientiam, quæ nulla ratione labefactari possit: si autem scientia non sit ἀμετάπτωτος καὶ ἀμετάπειρος, hoc est, a qua animus scientis nullis rationibus dimoueri possit, profecto nulla erit demonstratio. Non igitur sufficit, ut ex epharmosi & iudicio oculorum, statuamus parallelogrammum aliquod æquale esse circulo, nisi idem per rationes geometricas circulo æquale esse demonstremus: sola enim epharmosis nihil probat, sed rudioribus tantum geometriæ discipulis viam ad maiora cognoscenda patefacit. Adde quod epharmosis non possit summā æquilitatem indicare: ex ea enim duntaxat cognoscitur, figuræ propositæ fere æquales, non autē prorsus æquales esse. Alterum argumentū est, quo Scaliger probare nititur, quadraturam circuli rationibus geometricis maxime consentaneam esse: id tale est, Omnis potentia potest quadrari, at omnis circulus est potentia, Ergo omnis circulus potest quadrari. Maior propositio opus habet limitatione: hoc enim sensu vera est, quate-

nus omnis linea recta, habet potentiam, ut possit quadrari: minor autem falsa est: non enim circulus, hoc est, area circularis, est potentia, sed est superficies & figura, vna linea contenta, quæ circumferentia dicitur. Quod autem solæ lineæ rectæ dicantur potentiae, quatenus ex illis quadrata construi possunt, patet ex secundo lib. Euclidis, propos. 12. vbi sic ait Campanus, *Potētia enim lineæ rectæ, respectu quadrati sui est: unde tantum dicitur posse linea quælibet, quantum in se ducta producitur.* Idē euincitur ex libro 10. Euclidis, vbi latus tetragonum potētia nominatur, quod ex eo per multiplicationem quadratum produci queat. Concedamus circuli circumferentiam, per epharmosin æquari posse lineæ rectæ: quid tum postea? sequetur, quod circumferentia possit quadrari, nulla autē ratione hinc efficietur, quod area circularis ad superficiem quadratam redigi possit: ut enim circulus quadretur, necesse est ipsius aream prius cqualem fieri superficie alicui rectilineæ: at quomodo area circularis transeat in figuram rectilineam, ut inter se ambæ superficies prorsus æquales habeātur, explicare non potest geometria: sola epharmosis ostēdit, tales figuras vtcunque æquales esse. Ex quo manifestum est, Scaligerum abuti vocabulo potentiae: per hoc enim indicat quodvis spatiū, siue sit rectilineū siue circulare: ac proinde etiam vocabulum Græcum *πλεῖδη*, quod aream denotat, multis in locis per vocabulum potentiae interpretandum esse censet. Recidit igitur

igitur hic paralogismus in idem absurdum, de quo ante a diximus: perinde enim est, ac si ita argumētaremur, Omnis superficies potest quadrari, at circulus est superficies, Ergo circulus potest quadrari. Quis non videt, hic esse manifestam petitionem principii? sumitur enim, quod probandum erat. Probandum esset, omnē superficiem posse quadrari: hinc enim sequeretur, etiā circulum, qui superficies est, posse quadrari. Certe geometria haud affirmat, omnem superficiem posse quadrari, sed vult omnem superficiem rectilineam cuiuscunque parallelogrammi, ad æquale quadratum reuocari posse: qui autem circulum, hoc est, superficiem curuilineam quadrare cupiunt, principiis geometriæ contradicunt, dum ex sola epharmosi argumenta æqualitatis petēda esse iudicāt. Sed bene res habet, quod non diffiteantur, quadrationis circuli fundamentum positum esse in applicatione lineæ curvæ ad rectam, & in multiplici areæ circularis per spatia rectilinea diuisione. Primo enim acriter contendunt, ex rotunda linea commodissime rectam effici posse, quod ex mechanica epharmosi, & iudicio cisiariorum vel aurigorum confirmant. Quis vero hos ita insanire docuit, ut ex recto curuum, & ex curvo rectum sine mutua quantitatum corruptione efficere conentur? angulus certe rectus, semper rectus est, & nunquam potest fieri obliquus, nisi per accidēs, & ratione materiae, quæ vi aliqua externa contorquetur. Sic etiam linea curua, ut pote

I

circularis, non potest in rectum extendi, quin naturā eius tota destruatur: nam in minima quavis particula circumferentiæ, etiam sensum fugiente, curuitas inest, quæ cū recto comparari nequit. Quod si autem imaginemur, per inflexionem lineam curuam rectificari, & æqualem fieri rectæ lineæ, putauimus rem vnam & eandem manere sibi similem, siue proprietates suas essentiales retineat, siue amittat: sed hoc ab omni ratione maxime est alienum. Deinde iidem circuli quadratores superficiem & aream circularem, in multas figuræ rectilineas resoluere cogūtur: ex quibus simul collectis efficiunt parallelogrammum aliquod altera parte longius, cui æquale quadratum constituunt: atque hac ratione existimant, se totam aream circularem, ad æqualem quadratam superficiem redegisse. At nemo est ita hebes, qui non animaduertat, superficiem totā circularem non posse diuidi in figuræ rectilineas: etsi enim maxima ex parte superficies circularis distribuantur in figuræ rectilineas, multæ tamē particulæ in circumferentia relinquuntur, quæ sensum effugiūt. Quare cōcludimus, fculneum esse præsidium, quo persolam epharmosin nonnulli probare conantur, lineas duas, aut superficies duas, æquales esse. Ut enim epharmosis nos fallere potest, quando lineam rectam rationalem cum irrationali æquiparare volumus: sic etiam eadem epharmosis nos in errorem dicit, quando per eam volumus lineam rectam cum curua comparare, aut contra:

tra: item quando volumus ostendere, superficiem retilineam æqualem esse circulari, quod vna ab altera comprehendi videatur.

Confirmatur sententia Aristotelis, quod impossibile sit circulum quadrari.

CAPUT VI.

SI diligenter expendamus, quæ ab Aristotele scripta sunt in tractatione Elenchorum sophisticorum, inueniemus causam vniuersalem & scientificam, ob quā circulus a nemine mortalium quadrari potest. Scribit Aristoteles, si maxime circulus quadretur, scilicet per rationem aliquam mechanicam, hanc tamen quadrationem esse sophisticam, quia non petat argumenta ab intima rerum natura. Verba illius, cum brevia sint & neruosa, hoc loco repetam: inquit, εἰ τοις περιεγωνίζεται ὁ κύκλος, ἀλλ' ὅπλη κατὰ τὸ ἀράγμα, οὐχὶ τῷ τοσοφιστικῷ. hoc est, etiam si quadretur circulus, manifestū tamen est, quod non secūdum rem: propterea quadratio sophistica est. Sciendum autem est, Aristotelem passim in suis operibus, & præcipue in Organo logico, rationes sophisticas opponere demōstrationi, quę certissimam parit scientiam. Huius rei habemus manifestum exemplum in definitione scientiæ, quam affert lib. i. post. Analyticoru, contextu 7. inquiens, Επίγενθα δὲ οἱ μεθαίκετοι ἀπλόις (ἀλλὰ μὴ τὸις σοφιστικὸις τρόποις, τὸις κατὰ συμβεβηκός) ὅταν τὴν τ' αἴ-

πάσαις οιώμενα γνωσκειν, δι' ἣν τὸ πρᾶγμα ὅτι, ὅτι σκέψεις αὐτία ὅτι, καὶ
 μὴν δέ χρεῖ τῆς τοῦ λόγου εἶχεν. hoc est, Scire autem nos arbitramur vnumquodque simpliciter (sed non secūdum
 sophisticum modum, qui est ex accidente) quando &
 causam nos arbitramur cognoscere, propter quam res
 est, quod illius causa sit, neque hoc possit aliter habere.
 Vult dicere Aristoteles, scientiam esse cognitionē cu-
 iusq; rei per suam causam proximam & immediatam,
 vt in ea cognitione animus certissime acquiescere pos-
 sit, & res ipsa aliter habere nequeat : si autem non per
 causam propriam, sed per accidētia aliquid cognoscamus, hūc cognitionis modum sophisticū esse, & leuem
 quandam in animo opinionem gignere pronuntiat.
 Cum igitur Philosophus expresse dicat, circulum non
 posse quadrari secundum rem, hoc est simpliciter, &
 iuxta propria rei subiectæ principia : omnino necesse
 est, vt quadratio circuli ab artificibus mechanicis alla-
 ta, tanquam sophistica habeatur, quod per accidentia,
 more sophistarum, & per externam figurarum appli-
 cationem, proposito suo fidem facere conetur : cum
 tamen certum sit, in hac quadratione animum sciētiæ
 cupidum non acquiescere, & quadrationem illam ita
 affectā esse, vt possit aliter habere. Hinc apparet, quare
 Aristoteles quadrationem circuli sophisticam esse di-
 xerit. Ut autem nos intelligamus, id nō tantum verū
 esse de quadratione Antiphontis, Hippocratis Chii, &
 Brysonis, verum etiā in vniuersum de quauis quadra-
 tura

tura circuli, quæ post Aristotelem vel excogitata est, vel deinceps excogitari potest: operæ pretium fuerit, si examinemus rationes vniuersales, a quibus Aristoteles persuasus, putauerit impossibilem esse omnem circuli quadraturam, quibus etiam rationibus nos locū relinquere oportet, nisi principia geometriæ funditus euertere velimus. Primum fundamentum Aristotelis est, quod diametrus quadrati cum suo latere sit incommensurabilis: id autem demonstrabimus capite sequenti, ex propositione penultima libri primi elemētorum Euclidis. Si diametrus quadrati cum suo latere sit incommensurabilis, hoc est, nullo numero exprimi, nullis etiam partibus definiri possit, sequitur vanam & inutilem esse epharmosin, per quam artifices mechanici lineam rectam rationalem cum recta irrationali mentionuntur: certum enim est, in hisce quantitatibus toto genere physico differentibus, nō reperiri communem mensuram, vel numero, vel certis partibus explicabilem. Idem intelligendum est de latere irrationali cuiuscunque trianguli rectanguli: si enim in triangulo rectangulo detur latus aliquod rationale atque incommensurabile, ceteris duobus lateribus existētibus rationalibus & commensurabilibus, certum est, quod latus irrationale cum rationalibus lateribus nullam habeat communem mensuram, quæ certo numero, vel certis partibus exprimi possit. Quare mechanicum est, & repugnans principiis geometriæ, si quis per epharmosin

I 3

logon

latus irrationale cum rationalibus lateribus conferre,
& iisdem partibus exprimere conetur. In hoc absurdū
incidit Archimedes, celeberrimus mechanicorum ar-
tifex, qui in semicirculo descripsit triangulum ortho-
gonium, cuius latus vnum circa angulum rectum po-
nitur septem partium, & alterum statuitur viginti &
vnius partium: dixit enim hypotenusa esse fere 22.
partium, cum tamen hypotenusa sit Radix surda de
quadrato 490. vt monstrauimus capite tertio. Si quæ-
rat aliquis, quid hoc faciat ad propositum, quod linea
irrationalis non possit comparari cū rationali? respon-
dendum est, voluisse Archimedem ostendere paralle-
logrammum, quod æquale esset circulo quadrando: id
autem parallelogrammum dixit fieri ex latere vno,
quod æquaret dimidiam subtensam p̄dicti trianguli
orthogonii, & contineret partes vndecim, & ex latere
altero, quod æquale esset semidiametro circuli qua-
drandi, ac haberet partes $3\frac{1}{2}$. Atqui huiusmodi paral-
lelogrammum non potuit Archimedes ostendere per
viam geometricam: quia falsam sumsit hypothesin,
quod hypotenusa illius trianguli orthogonii, in par-
tes æquales viginti duas sit diuisa, cū sic diuidi nequeat:
quandoquidem est Radix surda de quadrato 490. Er-
go latus vnum parallelogrammi non potuit esse vn-
decimi partium, quibus dimidia subtensa constare di-
cebatur ab Archimedē. Alterum fundamentum Ari-
stotelis est, quod linea recta cum circulari nulla ratio-
ne pos-

ne possit comparari. Quāmōbrē libro septimo auscultationis Physicæ colligit, neque motum circularem cum motu recto conferendum esse. Sic autem argumentatur, si motus circularis cum recto comparabilis esset, sequeretur quod circumferentia cum linea recta comparari posset: at qui consequēs absurdum est, Ergo etiam antecedens. Quod autem absurdum sit, si circumferentia cum recta linea comparetur, ex Geometria intelligere possumus: quæ enim ex diuersæ naturæ principiis constant, in se inuicem permisceri nequeūt: quin immo si circumferentiam cum recta conciliare velimus, semper in manifestas contradictiones incidemus. Exemplum euidens habemus in angulo semicirculi: is enim licet ad rectum maxime accedere videatur, tamen propter solum punctum contingentia, angulus rectus non est. Cæterum Aristoteles in septimo Physicorum duas præscribit conditiones, quæ requiruntur ad omnia comparabilia: quarum prima est, ut illa, quæ comparari debent, sint genere vniuoca, non autem æquiuoca. Sic velox & tardum prædicatur de motu recto & orbiculari, sed æquiuoce: sic etiam linea recta & circularis, quanquam habeant aliquod genus commune, id tamen de illis æquiuoce dicitur. Secūda conditio est, ut illa, quæ comparari debet, non tantum genere sint vniuoca, sed etiam vnam habeant speciem individuam, quæ nullam aliam admittat differētiam: huius conditionis defectu, latio recta & orbicularis in-

ter se non possunt comparari, quia non continentur sub vltima aliqua specie: est enim latio genus quoddā diuisum in plures species, nimirum in lationem rectā & orbicularem. Sic etiam inter se non possunt comparari linea recta & orbicularis, item linea recta rationalis, & linea recta irrationalis: nam linea non est species vltima, siquidem diuiditur in rectam & circumferentiam. item linea recta non est species vltima, quia diuiditur in rationalem & irrationalem, quæ tota natura inter se differunt. Animaduertēdūm igitur est, vt monet Aristoteles, multa quidem videri, quasi non sint æquiuoca, re ipsa tamen esse æquiuoca: nisi enim duo aliqua eiusdem sint naturæ, inter se minime comparari possunt: eiusdem autem naturæ sunt illa, quæ in specie aliqua indiuidua conueniūt: sic color albus cum albo, & linea recta rationalis cum rationali comparatur: color autem albus cum nigro, & linea recta rationalis cū irrationali conferri nequit: quia hæc genere duntaxat, non autem specie indiuidua conueniunt. Insuper notandum est, ea quæ inter se sunt comparabilia, necessario habere communem aliquam mēsuram, iuxta quā æquari possunt: quod si autē inter se æqualia fieri possint, poterunt etiam maiora & minora dici: si non possint fieri æqualia, neque maiora, neque minora dicentur. Eadem ratio est superficierum, quæ est linearum: quæ enim superficies habent speciem vltimā, vt vnius sint naturæ, illæ inter se comparari possunt: sic circulus cum

cum circulo, & superficies rectilinea cum superficie rectilinea, & quadratum cum quadrato, item triāgulum cum triangulo cōfertur. Quæ autem superficies in genere duntaxat conueniūt, neque eandem habent naturam in specie vltima, illæ comparari nequeunt: talis est superficies circularis & rectilinea. Loquimur autē de tota superficie circulari, & de tota superficie rectilinea: in partibus enim harum superficierum nonnunquam potest certa proportio inueniri. Sumit igitur Aristoteles, circumferentiam cum linea recta nequaquam comparari posse: quod in epharmosi Antiphontis maxime est perspicuum: nam quantulacunque sit portio circumferentiæ, ea vtique non potest congruere ad latum rectum trianguli: nec minus euidentis hoc est in epharmosi rotationis, cum & ibi minimum punctum circumferentiæ nō possit applicari ad minimum punctum lineæ rectæ. Concedent mihi libēter sagacissimi mechanici, quod epharmosis rotationis incipiat a certo punto: atqui hoc affirmare nequeunt, quod punctum circumferentiæ applicatum ad punctum lineæ rectæ, sit punctum indiuisibile: certum enim est, quod istiusmodi punctum in sensus incurrat, & instar continuo in infinitum diuidi possit. Quod si ita est, necessario sequitur, etiam minimum punctum in circumferentia curuum esse, & minimum punctum in linea recta, rectum esse, vt epharmosis locū habere nequeat: quare decipiūtur mechanici, qui putant hæc duo pun-

K

Et a eiusdem esse naturæ, & propter exilitatem negligi posse. Profecto si isti Mechanici diligenter contemplarentur angulos contingentia, longe aliter iudicarent: quando enim rota mobilis in linea recta reuoluitur, semper fiunt anguli contingentia, ex linea scilicet recta, & gibba parte circumferentia procreati: qui anguli licet sint omnium acutorum minimi, non tamen flocci faciendi sunt: ex eo enim ipso, quod hi anguli inter se distincti sint, constat minimam portionem rectæ lineæ & circumferentia suas proprietates naturales seruare. Idem manifestius apparet, si anguli contingentia extra circulum facti, conferantur cum angulis semicirculi proxime adiacentibus: quantum enim spatium desideratur in angulis semicirculi, quo minus resti sint, tantum est spatium angulorum contingentia: istud autem spatium tantillum est, ut vix oculis discerni queat. Sed contra hoc axioma, quod rectum non possit ad curuum applicari, adduci potest quadratura circuli, ut monet Simplicius: fuerunt enim olim quidā artifices, atque etiamnum nonnulli reperiuntur, qui existimant circulum hac ratione quadrari posse, quod circumferentia detur linea recta æqualis: id si verū est, facilime describitur parallelogrammum altera parte longius, quod æquales sit circulo. Quid ad hoc respondendum sit, perspicue docet Simplicius, libro septimo Physicorum, contextu 21. quando sic scribit, Ἀπορίας δὲ τῷ, δείκνυσθαι τὸ κέντητον πάσα κίγησις πάσῃ συμβάλλεται. Καὶ γὰρ οὗτοι

πειστῶν

πασῶν κοινόν πι μέτεον: ἀλλ' αὐτὸς οὐδεὶς μόνον ἀλλίλους. Δεῖν γάρ σοι δὲ αὐτὸς ἀδικάτος, ὅτι μνεῖν φορῶν, τῷ περὶ τῆς περίπολος εὐθείας καὶ τῆς κύκλῳ περιελαβὼν τὸ ἕδη μετεγμένον αὐτῷ, πόσο μολέχῃ εἶναι, τὰς ἐνίσων γεόντων κυρίεινα: καὶ ὅτι φέρων ἀδικάτον τῷ συμβλητάς εἶναι, τὸ ἕστιν ἔστεφαν εὐθεῖαν γεγονότιν τοιοφερεῖ. εἰ γάρ εἴπεις ἔστιν ταχὺ πινα, τὸ μήδηπερ εὐθεῖας πινός κυρίεινον, τὸ δὲ ὅτι τοιοφερεῖς: ἔστιν ταχὺ μὲν δὲ τὰς ἐνίσων γεόντων κυρίεινα, ἔστιν ταχὺ εὐθεῖα τῇ τοιοφερεῖ. τῷτο δὲ εἴπειτο μὴν εἴπει, εἰ δικατὸν εὐθεῖαν ἔστιν εἶναι τοιοφερεῖ: ἀπέγνωστο δὲ μᾶλλον. καὶ διὰ τῷτο γένεστρος τῷ κύκλῳ περιγωνισμὸς ἡριτόπω: καὶ τοῦ δὲ καὶ δοκῆτος ἡρηθαί, ἀλλὰ μετάπινων τοσθέσεων αἰτητεομένων. αἴποι δὲ τῷ μήπω ἡρηθαὶ τὸν τῷ κύκλῳ περιγωνισμὸν, ζητεῖται εἴπει καὶ τὸ, εἰ ἔτιν εὐθεῖα τοιοφερεῖτο: τῷ μὴ δέ, ὅπι ἀδικάτα ταῦτα ὅτιν ἡρηθαὶ πω. Ὅμως τὸ τὴν Διάμετρον ἀσύμμετρον εἶναι τῇ πλευρᾷ: δι' ὃ τῷτο γένεται ζητεῖται εἴπει. hoc est. Cum de hoc dubitasset, ostendit nō omnem motum omni motui comparabilem esse. Nō enim est omnium communis aliqua mensura, sed qui sunt eiusdem speciei, inter se tantum comparantur. Id autem ostendit per impossibile, in duabus lationibus, primum in recta & circulari, assumens id, quod iam ab ipso demonstratum est, nimirum æque velocia esse, quæ in æquali tempore æqualiter moueantur: & infert impossible, ex eo, si motus isti comparabiles sint, fore ut linea recta æqualis sit circulari. Si enim aliqua æque velocia sint, quorum unum in recta, alterum autem in circulari mouetur: æque velocia autem sunt illa, quæ in æquali tempore, æqualiter mouentur, recta erit æqualis circulari. Hoc autem amplius quærebatur, an linea recta possit æqualis esse circulari? sed id magis ignoratur. Et propterea neque circuli quadratura inuenta

est adhuc: licet autem nunc inuenta esse videatur, inuenta tamen est cum quibusdam hypothesibus cōtradicentibus. Causa autem, cur circuli quadratio nondū sit inuenta, hæc est, quod adhuc quæratur, an recta sit æqualis circumferentiæ? cur autem hoc queri non debat, causa est, quod hæc aliquando inueniri sit impossibile, quemadmodum nouimus diametrum esse incommensurabile lateri, idcirco hoc non quæritur amplius. Hactenus Simplicius. In hisce verbis significat Simplicius, eos plurimum falli, qui existiment, lineam rectam ideo posse æquari circumferentiæ, quod quadratura circuli inuenta præsupponat hæc hypothesis, scilicet circumferentiam circuli per epharmosin fieri æqualem lineæ rectæ. Sed falsa est hæc hypothesis: siue enim spectemus epharmosin Antiphontis, siue etiam epharmosin rotationis cōsideremus, manifestum est, quod per utramque tollatur sectio continui in infinitum. Vult igitur Simplicius, per epharmosin mechanicam postulari, quod in geometria nullum locū habeat. Quamobrem ait Simplicius, hoc certum esse in quauis quadratura circuli falsitatis indicium, quod ad eam semper sequātur manifestæ contradictiones. Neque hic est prætereundus locus Themistii, qui libro septimo Physicorum expresse fatetur, lineam circularē cum recta non posse comparari, sic autem inquit, οὐχ ἔτι δὲ τὰς αὐτὰς κύριοις πάσι συμβέληται. οὐδὲ κοινὸν μέτρον ἀπασῶν. πί γε δέ ὅμοιοις τρόποις φοργῆσι, ἀλλ' οὐδὲ φοργῆσι, τῆς κύκλῳ δέ τι καὶ εὐθεῖας. οὐτέ

228

γάρ τὰ άγαπήματα συμβληταὶ, ἵνα τε περιφερίσ γε χώματα εὐθεῖα.
 δέ περ γάρ μείζων ἐπέρχεται τὸς ἐπέργας, δέ περ ἐλάττων. hoc est, non est
 autem omnis motus omnibus comparabilis. neque est
 communis mensura omnium. quid enim simile habet
 passio cum latione? sed neque lationi (communis est
 mensura) cum circulari & recta. neque enim interualla
 sunt comparabilia, scilicet circularis linea & recta. neque
 enim una maior dicitur quam altera, neque minor. Ex
 his omnibus manifeste apparet, Aristotelem causas iu-
 stissimas habuisse, ob quas voluerit impossibilem esse
 quadraturam circuli: nec quisquam interpretum ita
 ineptus & imperitus geometriæ fuit, qui contrariam
 sententiam defendere niteretur. Iam querat aliquis,
 quomodo ex his duobus positis fundamentis Aristo-
 telis, sequatur impossibilem esse quadrationem circu-
 li? respondendum est, vidisse Aristotelem, circulum re-
 digendum esse ad figuram rectilineam, si quadrari de-
 beat: quemadmodum ostendit in capite 25. libri secūdi
 Priorum. Negat autem Aristoteles, circulum posse re-
 digi ad figuram rectilineam, ita scilicet ut tota area cir-
 cularis exactissime sit æqualis figuræ rectilineæ. Quā-
 uis enim multi hoc sint aggressi, ut ostenderent figurā
 rectilineam, nimirum triangularem aut parallelogrā-
 mam altera parte longiore, æqualem esse circulo:
 tamen nunquam sine contradictionibus manifestis
 propositum obtinere potuerunt. Certe totus circulus
 nūquam potest redigi ad figuram rectilineam, ex qua

ad quadratum transeat: potest quidem circulus diuidi in multa spatia rectilinea, sed plurimę ad circumferentiam portiones relinquuntur, quę non sunt rectilineę, nec ad figuras rectilineas reuocari possunt. Deinde si maxime aliqua pars circuli, vt est lunula Hippocratis, possit redigi ad figuram rectilineā, non tamen omnes partes circuli tales sunt lunulę, vt ad figuras rectilineas reducantur. Præterea si concederemus, perimetru circuli cum diametro per certam mensuram comparari posse: nondum tamē sequeretur, quod tota superficies circularis posset conformari in figuram rectilineam. Etsi enim mechanici putent, circumferentiam in linéam rectam explicatam, posse coniungi cum diametro circuli ad angulos rectos, ita vt inde triāgulum orthogonium, aut parallelogrammum altera parte longius, æquale circulo constitui videatur: non tamen animaduertunt, circumferentiam cum diametro in ipso circulo non efficere angulos rectos, ac proinde neque extra circulum circumferentiam in rectum extensam cum diametro debere efficere angulos rectos. Quare plus sumunt Mechanici, quam ipsis ex principiis geometriæ concedi possit: nam per propositionem 15. & 30. libri tertii elementorum Euclidis, euidenter demonstratur, angulos semicirculi, qui siūt a diametro & circumferentia, non esse rectos, sed minores rectis: nam in solo puncto contingentia deficiunt, quo minus recti sint: hoc autem punctum certa quantitate definire

non

non possumus. Quod si igitur non possimus demonstrare, quæ sit mensura angulorum semicirculi, cum tamen ad rectos maxime accedere videantur, multo minus aliorum angulorum in reliquis segmentis eiusdem circuli certam mensuram comprehendere poterimus, cum hi segmentorum anguli multo magis a natura rectorum deflestant. Et quid fiet de angulis minimorum ad circumferentiam segmentorum, etiam sensum omnem penitus effugientium? certe nulla in his vel angulorum, vel superficie erit mensura. Haud igitur immerito exclamare possumus, Tantæ molis erat circum quadrare rotundum!

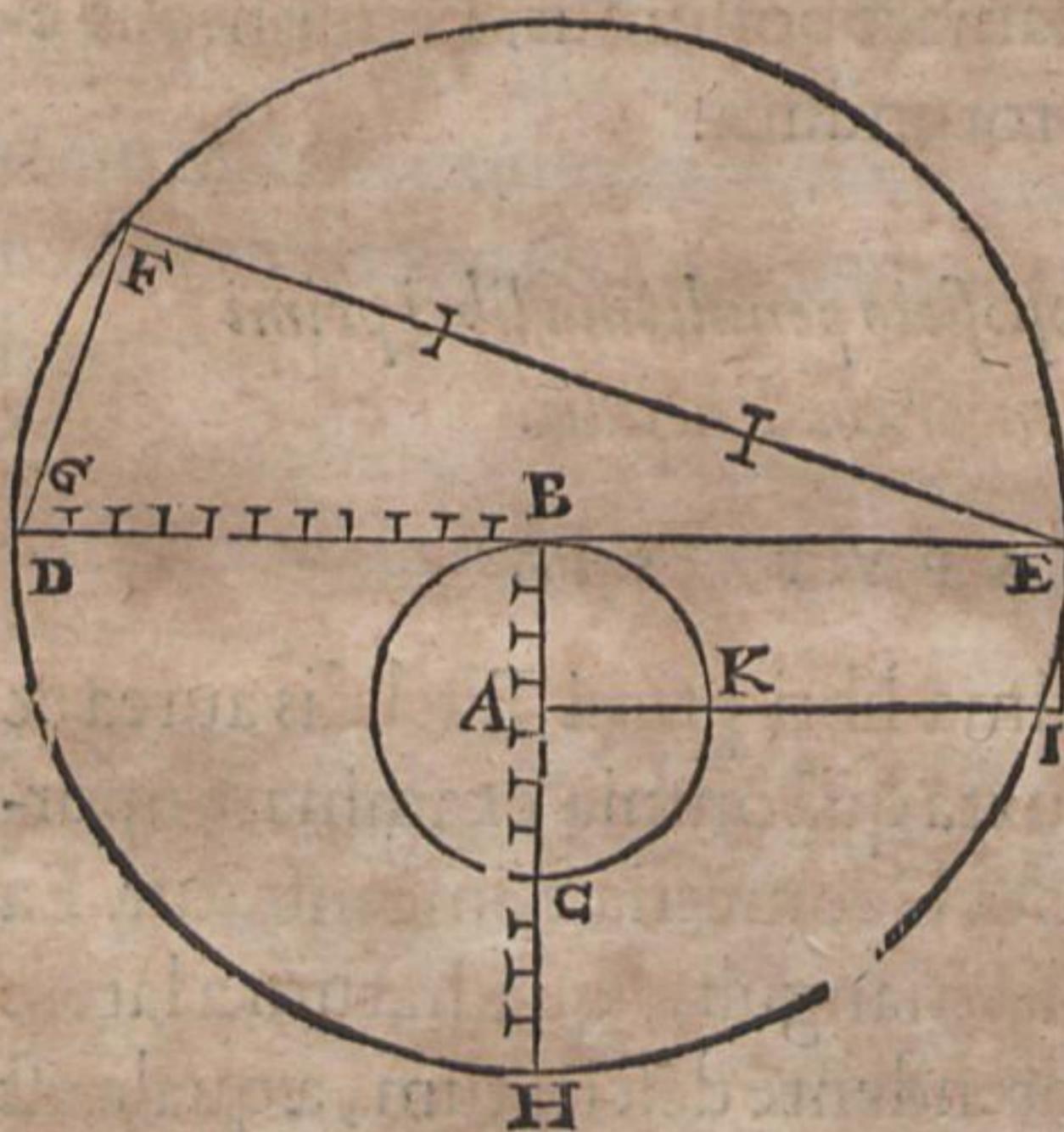
Declaratur propositio penultima libri primi elementorum Euclidis.

C A P V T VII.

PROPOSITIO penultima libri primi Euclidis aurea & nobilissima est, iuxta quā omnia examinare oportet, quæcunque in tota Geometria demonstrātur. Ea talis est, In rectangulis triangulis, quadratum a latere rectum angulum subtendente descriptum, æquale est duobus quadratis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Demonstrationem huius theorematis, cuius inuentio Pythagoræ tribuitur, repetere nolo: est enim notissima, & a pluribus commentatoribus fideliter exposita: id tantum hoc loco agam,

vt corollaria quædam ex hac propositione exstruam,
quæ immensum vsum eius patefaciant: & vt ostendam
friuolas esse rationes mechanicorum, quibus demon-
strare conantur, inter perimetrum & diametrum cir-
culi exactissimam ex principiis geometriæ proportio-
nem dari.

- I. Primum corollariū est, quod cognitis duo-
bus lateribus quibuscunq; trianguli rectanguli, possi-
mus peruenire in cognitionem reliqui lateris. Repeta-
mus figuram, per quam supra capite tertio inuentum
Archimedis declarauimus. Ecce datur triangulus re-



ctangulus in semicir-
culo, cuius latus
DF est septem par-
tiū, latus autem FE
est 21 partium, da-
bitur igitur reliquū
latus, quod angu-
lo recto opponitur.
Notandū est, quod
hic dentur duo la-
tera rectū angulum
cōplete tentia: opor-
tet igitur horū duo-

rū laterum quadrata simul addere, & ex aggregato ex-
trahere Radicē, hæc enim Radix erit quātitas hypote-
nusæ. Verbi gratia, quadratū ex septem est 49. & qua-
dratum ex 21 est 441. quæ si simul addantur, efficiunt
quadra-

quadratū lateris subtensi, scilicet 490. cuius Radix est quantitas lateris indagandi. Si autē detur hypotenusa cū proxime adiacēte latere, oportet quadratū minoris lateris auferre a quadrato maioris lateris, & tūc remanebit quadratū tertii lateris. Verbi gratia, hypotenusa sit partium 10. quadratum igitur erit 100. & latus proxime adiacens sit quinque partium, ergo quadratum erit 25. si iam minus quadratum subtrahatur a maiore, relinquuntur 75. quod est quadratum tertii lateris. Radix igitur de quadrato 75. erit quantitas tertii lateris. Sumamus alia exempla: in triangulo aliquo rectangulo dantur duo latera, quæ complectūtur angulum rectum: vnum latus habet 6. partes, alterum est 8 partiū: quadratum de 6 est 36. quadratum vero de 8 est 64. quæ duo quadrata simul addita, efficiunt 100. scilicet quadratum lateris subtensi angulo recto. Radix igitur de quadrato 100. quæ est decem partium, suppeditat quantitatē subtensiæ. Si autem subtensa detur cum latere proxime adiacente, inuestigatur tertium latus, hoc modo: subtensa sit decem partium, ergo quadratū erit 100. latus alterum sit octo partium, ergo quadratum erit 64: subtrahito igitur quadrato minore de maiore, relinquetur quadratum tertii lateris, nimirū 36. cuius Radix, quæ est sex partium, suppeditat quantitatem lateris tertii. Ex quo colligere licet, in triāgulo rectangulo sic inter se omnia affecta esse latera, vt cognitis duobus lateribus tertium inuestigetur per ~~ad~~ L

φάγεσιν, hoc est, vel per additionem, vel per subtractionem: si enim dentur duo latera rectum angulum amplectentia, ex additione duorum quadratorum, colligitur tertii lateris quadratum: si autem detur hypotenusa cum proxime adiacente latere, ex subtractione unius quadrati ab altero, inuestigatur quadratum tertii lateris. Colligitur præterea, non omne quadratum habere Radicem rationalem: nisi enim quadratū numero vere quadrato exprimatur, non potest habere Radicem rationalem, quæ certo numero definiri possit: huiusmodi autem Radix, quæ nullo numero explicari potest, dicitur irrationalis, siue surda: talis est Radix de quadrato 490. & de quadrato 75. hi enim numeri non sunt quadrati, vt ex iis certa & rationalis Radix extrahi queat. Quamobrem in geometriam peccat, qui ex numeris non quadratis extrahunt Radicem aliquam proximam, vel integris, vel fractis numeris explicata: huiusmodi enim numeri non quadrati, Radices rationales admittere nequeunt. E contrario si dentur numeri vere quadrati, facilime ex iis Radix rationalis, & certo numero explicabilis, extrahi potest: sic ex quadrato 100. Radix quadrata est decem, & ex quadrato 64. Radix quadrata est octo. Observandum autem est, quod hic per rationale & irrationalis, intelligamus illud, quod secundum longitudinem tale est. Nam Euclides in libro decimo, gradus quosdam constituit rationalium & irrationalium: quosdam enim sola potentia,

tia, quædam longitudine & potētia sunt rationalia & irrationalia: nos autem de posteriorib. hic loquimur. Secundum corollarium est, quod diametruſ quadrati 2. cum latere eiusdem quadrati sit incommensurabilis, sicut Euclides demōstrat ad propositionem vltimam libri decimi elementorum geometricorum: & Campanus id ostēdit per propositionem septimam libri 10. quidam etiā putant hoc demōstrarī posse per propos. 8. libri octauī elem. Euclidis. Ego vero existimo, hoc corollarium sine magno labore etiam probari posse per propositionem penultimam libri primi Euclidis: cum enim diametruſ ſecet totum quadratum in duos triangulos orthogonios, & æquales, necesse eſt ut diametruſ quadrati ponatur irrationalis, quando duo latera angulum rectum amplectentia ſunt rationalia: ſi autem quātitas diametri rationalis statuatur, oportet reliqua duo latera, eſſe irrationalia. Vtrumuis igitur ex hypothesi statuatur, ſemper diametruſ erit incomēſurabilis cum latere quadrati: vt ſi diametruſ ſit Radix irrationalis, necesse eſt latus quadrati eſſe rationale, ſi autem diametruſ ponatur rationalis, neceſſario latus quadrati erit irrationale. Quod vt rectius intelligamus, ſciendum eſt, quadratum diametri duplum eſſe quadrati, quod ex latere vno describitur: & cōtra, quadratum lateris vnius, dimidium eſt quadrati diametri: ſicut idem a Luca Paciolo demonstratur ad propos. penultimam libri primi Euclidis. Ut ſi quadratū dia-

L 2

metri sit 200. quadratum lateris vnius erit 100: ac proinde Radix quadrata de 100, videlicet denarius numerus, definiet quantitatem lateris. Contra, si quadratum lateris sit 100. quadratum diametri erit 200: cum autem ex hoc numero Radix quadrata extrahi nequeat, diameter non poterit certo numero definiri, ideoque diameter dicetur esse Radix surda de 200, numero minime quadrato. Iam videamus, an verum sit quod diximus, diameter quadrati esse irrationalem, si latera quadrati statuantur rationalia: aut contra, diameter quadrati esse rationalem, si latera quadrati ponantur irrationalia. Ponamus quadratum aliquod esse centum pedum, ut latus unum longitudinem habeat decem pedum: si hoc quadratum per diameter secemus in duos triangulos orthogonios, sibi in vicem aequales, diameter erit irrationalis: cum enim latus unum ponatur rationale, scilicet pedum decem, quadratum illius erit centum, & diametri longitudo erit Radix de ducatis: at Radix illa surda est & irrationalis. Item si statuamus quadratum aliquod continere pedes quinquaginta: latus erit rationale, scilicet Radix surda de 50, numero non quadrato: iam diuidamus quadratum hoc bifariam per diameter, & erit diameter rationalis, constans decem pedibus. Diximus enim quadratum lateris esse 50. hoc autem dimidium est quadrati, quod a diameter describitur: ergo quadratum diametri est 100. cuius Radix quadrata, nimis decem, constituit quantitatem

tatem diametri rationalis. Liquet igitur ,diametrum
ἀσύμμετρον & incommensurabilem esse cum latere qua-
drati: quod non incommode demonstrari potest per
propos. penultimam libri primi Euclidis : ipse tamen
Euclides hoc demonstrare voluit ad finem libri decimi,
quod ista proprietas sine comparatione linearum ra-
tionalium & irrationalium, de quibus egerat libro de-
cimo , & quod sine tractatione numerorū, de quibus
dictum fuit libro 7.8. & 9. plene cognosci non posset.
Hisce duobus corollariis ex propositione penultima
libri primi Euclidis confirmatis, restat ut ostendamus,
in linea recta rationali & irrationali non dari aliquam
mensuram communem , qua vtriusque quantitatem
definire possimus. Quæ enim mēsuram communem
admittunt, dicuntur commensurabilia: talia sunt, quæ
constant partibus, certo numero definitis: quæ igitur
non habent partes, certo numero explicabiles,incom-
mēsurabilia nominātur. Verbi gratia, si duo latera tri-
anguli rectāguli explicitentur Radice quadrata,dicūtur
habere eandē mensurā, quę vnitate definitur: est enim
vnitas communis mensura omnium numerorum cō-
municantium , vt Campanus scribit ad definitionem
tertiam libri quinti Euclidis. Si autem in triangulo re-
ctangulo latus vnum sit commensurabile, quod certis
partibus & vnitatibus definiatur, alterum autem sit
incommensurabile, quod certis partibus & vnitatibus
definiri nequeat, hoc est, sit Radix surda de numero

L 3

non quadrato: tunc hæc latera inter se comparari nequeunt, quia nec habent partes easdem, nec eadem vnitate diuidi possunt. Hinc est, quod Michael Stifelius lib. 2. Arithmeticæ, cap. 1. Radices surdas, siue numeros surdos, dicat tota natura differre a numeris veris & rationalibus: veri enim numeri, siue integri sint siue fracti, certis constant partibus, Radices autem surdæ in infinitum diuiduntur, neque possunt appellari numeri integri aut fracti. Satis opinor intelligimus, quare in triangulo orthogonio aliquando latus vnum irrationale statuatur, & nullis partibus comprehendendi possit: vnde colligitur vanum esse studium Mechanicorum, qui lineam irrationalem cum rationali comparare audent. Si enim latus aliquod in triangulo rectangulo ex sua natura sit incommensurabile, Mechanici nihilo minus illud dicunt esse commensurabile, quatenus id per epharmosin in iisdem partibus metiuntur. Nec difficilis est huiusmodi mechanica applicatio lineaæ rectæ irrationalis ad rectam rationalem: extēditur enim linea rationalis secūdum suas partes in directum, quo usque libet, deinde circino excipitur interuallum lineaæ irrationalis, & applicatur ad lineam rectam rationalem: partes autem interceptæ, siue sint integræ, siue fractæ, accipiūtur pro mēsura lineaæ irrationalis. Vt si in triangulo rectangulo hypotenusæ sit 10. partiū, & proximū latus sit quinq; partium, tertium latus minus erit hypotenusæ: si igitur circino comprehendatur interuallū tertii

tertii lateris, & ad hypotenusam diligentissime applicetur, apparebit interuallum illud intercipere partes integras octo cum semisle vnius partis & paulo amplius. Sed hęc applicatio, etiamsi diligentissima & exactissima habeatur, nūquam satisfacit subtilitati geometricæ: quæ per certam demonstrationem euincit, tertium latus esse Radicem surdam de 75, numero non quadrato, ac proinde Radicem illam surdā nullis partibus explicari posse. Eodem modo absurdum erit, si quis diametrum quadrati cum latere per eandem mensuram comprehendere conetur: quin immo si quadratū aliquod proxime ad numerum quadratum accedere videatur, non tamē Radix illius quadrati numero definiti potest. Sit enim triangulus orthogonius, cuius maius latus ad angulum rectum sit octo partiū, minus autem sit quatuor: erit igitur quadratum hypotenusæ 80. quod sola vnitate differt a numero quadrato: si autem quadratum hypotenusæ esset 81. tunc vtiq; Radix illius quadrata esset nouem, atq; sic hypotenusa constaret nouem partibus. Si quis igitur per epharmosin prædictæ hypotenusæ, cuius quadratū est 80. assignaret partes nouē, quæ assignandæ erant Radici de quadrato 81. in geometriā grauissime peccaret. Quacunq; igitur mensura latus irrationale definiant Mechanici, necesse est eos in infinitas contradictiones incidere. Tertium corollarium est, si triangulum orthogonium proponatur, cuius duo latera rectum angulum am-

pleteſtentia, habeāt proportionem triplam, quadratum
 ſubtenſæ decuplum eſt quadrati, quod a minore latere
 circa angulum rectum deſcribitur: & quadratum ma-
 ioris lateris circa angulum rectum, nonuplum eſt qua-
 drati, a minore latere circa angulum rectum deſcripti.
 Inspiciamus figuram ſuperiorem: dātur duo latera re-
 ctum angulum ampleſtentia, D F. & F E. minus latus
 ter cōtinetur in maiore: nam D F eſt ſeptem partium,
 cuius quadratum eſt 49. ſed F E habet partes 21, cuius
 quadratum eſt 441. eſt ergo inter hæc latera rectū an-
 gulum ambientia tripla proportio. Quadratum ſub-
 tensi lateris, ſcilicet D E, eſt 490. dico, quod huius ſub-
 tensæ quadratum, ſit decuplum illius quadrati, quod a
 latere D F deſcribitur. id quod ex diuisione liquet: ſi e-
 nim quadratum 49. diuidatur per quadratum 490. re-
 periemus decem in quotiente. Sic etiam conſtat, qua-
 dratū lateris F E, eſſe nonuplum quadrati lateris D F:
 illius enim quadratum eſt 441. huius vero 49. minus i-
 gitur quadratum, in maiore nouies continetur. Hoc
 corollarium male detorsit Scaliger ad perimetrum &
 diametrum circuli: nam contēdit per girationē quan-
 dam & reuolutionem orbis mobilis, hypotenuse posse
 dari æqualem circumferētiam: ac proinde quadratum
 perimetri circularis in rectam lineam extenſæ, decies
 contineri in quadrato lateris minoris circa angulum
 rectum, hoc eſt, in quadrato diametri. Id significauit
 verbis iſtis, ad paginam 31. *Quadratum ab ambitu circuli*
decu-

decuplum est quadrati a diametro. hoc est, si ambitus circuli fiat æqualis subtensæ, & diametrum eiusdem circuli fiat latus minus circa angulum rectum, ita ut tertium latus cōtineat triplum diametri, tunc quadratum subtensæ, siue perimetri, fore decuplum quadrati diametri, siue lateris minoris circa angulum rectum. Vetus hæc est & admirabilis phantasia, geometrica cum mechanicis in vnum chaos permiscens. Quid enim aliud olim sibi voluerunt Indi, qui dixerūt, si diameter fuerit vnitas, circumferentiam fore radicem de quadrato deceim? Sed de hac Indorum opinione plura dicemus sub finem capit. Ut nihil dissimulem, apparet Scaligerum præceptionum apodicticarum parum memorem esse: demonstratio enim constat ex iis, quæ eiusdē sunt generis & naturæ, neq; licet demonstratori ab uno genere in aliud transire, sicut prolixè docet Aristoteles in posterioribus Analyticis. Quid commercii habet perimetrus circuli cum hypotenusa trianguli orthogonii? nō equidem video, quomodo per epharmosin rotationis fieri possint æqualia, quæ ex sua natura nullam obtinent æqualitatis mēsuram. Notum enim est, lineam orbicularē cum recta non posse comparari: quia hæ lineæ non continentur sub vna aliqua specie indiuidua, seu non admittunt proportionem, quæ in vna specie indiuidua consistit, vt patet ex definitione proportionis, quam Euclides affert libro quinto elementorum: quemadmodum neque motus circularis,

M

neq; motus rectus comprehenditur sub aliqua specie
individua, vt euidēter declarat Aristoteles lib. septimo
Physicæ auscultationis. Quare dici nō potest, circum-
ferentiam esse æqualem rectæ lineæ, aut ea minorem,
aut maiorem: neq; etiam dici potest, motum circularē
esse æqualem motui recto, aut eo minorem, aut maio-
rem. Quod si autē nobis sic placeret loqui, nemo pro-
fecto esset, qui non intelligeret, hanc impropriam esse
locutionem: & lineā de circumferentia & recta æqui-
uoce prædicari: item motū de circulari & recta latione
non nisi æquiuoce enuntiari: quę autē sunt æquiuoca,
illa inter se comparari nequeunt, teste Aristotele, libro
7. Physicorum, contextu 24. vbi sic inquit, ἀλλ' ὅσα μὴ δ-
μάνυμα, ἀπαρτα συμβλητά: quæ Simplicius in commenta-
rio periphrasi quadam explanat, dicens, καὶ οὐδὲ τον λέγει,
ὅπι τὰ μὴ δμανύμως ἔχοντα τὸ αὐτὸ ὄνομα, τὸ ταχὺ γέραδν, ἀλλὰ
διλονόπι σμανύμως, τῶν τε συμβλητά δέ, τὰ δὲ δμανύμως λεγόμνα,
ἢ συμβλητά. Mechanici igitur animaduertere debebant,
perimetrum cum hypotenusa trianguli orthogonii
non simpliciter, sed ex hypothesi conferri: si enim sta-
tuatur, perimetrum in rectum extendi posse, vt æque-
tur subtensa triāguli orthogonii, cuius duo latera an-
gulum rectum amplectentia habent proportionem
triplam, tūc quadratum perimetri decuplum est qua-
drati diametri, quæ minori lateri circa angulum rectū
consistenti, æqualis est. Sed hanc hypothesisin nos ne-
gamus, quę dicit, perimetruim posse fieri æqualem sub-
tensæ

tensæ: etsi enim epharmosis rotationis testetur de æqualitate aliqua, hæc tamen epharmosis Geometris non satisfacit. Et licet ipse quoque Archimedes talem epharmosin comprobasse videatur: eam tamen pro principio geometrico nunquam habuit. In eodem cōtextu 24.lib.7. Physicorum argumentatur Aristoteles a maiore ad minus: si linea recta & circumferētia, quæ maiorem habent affinitatem, non tamē possunt comparari, multo minus comparabitur tardum & velox cum alteratione & latione: nam recta linea & circumferentia sunt in eodem prædicamento quantitatis, & sunt ambo quanta continua, & sunt ambo lineæ, alteratio autem & latio etiam prædicamentis differunt: nam alteratio pertinet ad Qualitatem, latio autē refertur ad Vbi. Simili comparatione nos possumus vti, si linea recta rationalis, & linea recta irrationalis, quæ maiorem habent cognationem, non tamen possunt inter se comparari, multo minus linea curua circumferentiæ, potest comparari cum linea recta, cum hæc inter se minus sint cognatæ: nam rationalis & irrationalis continetur sub genere proximo, scilicet sub recta, sed curuum seu orbiculare, & rectum, continetur sub genere remotiore, scilicet sub linea. Quod autē de linea dictum est, hoc etiam de superficie intelligendum est: ut enim non omnes lineæ inter se sunt comparabiles, ita neq; omnes superficies: nam rectilinea superficies cum rectilinea superficie, & circularis superficies cum

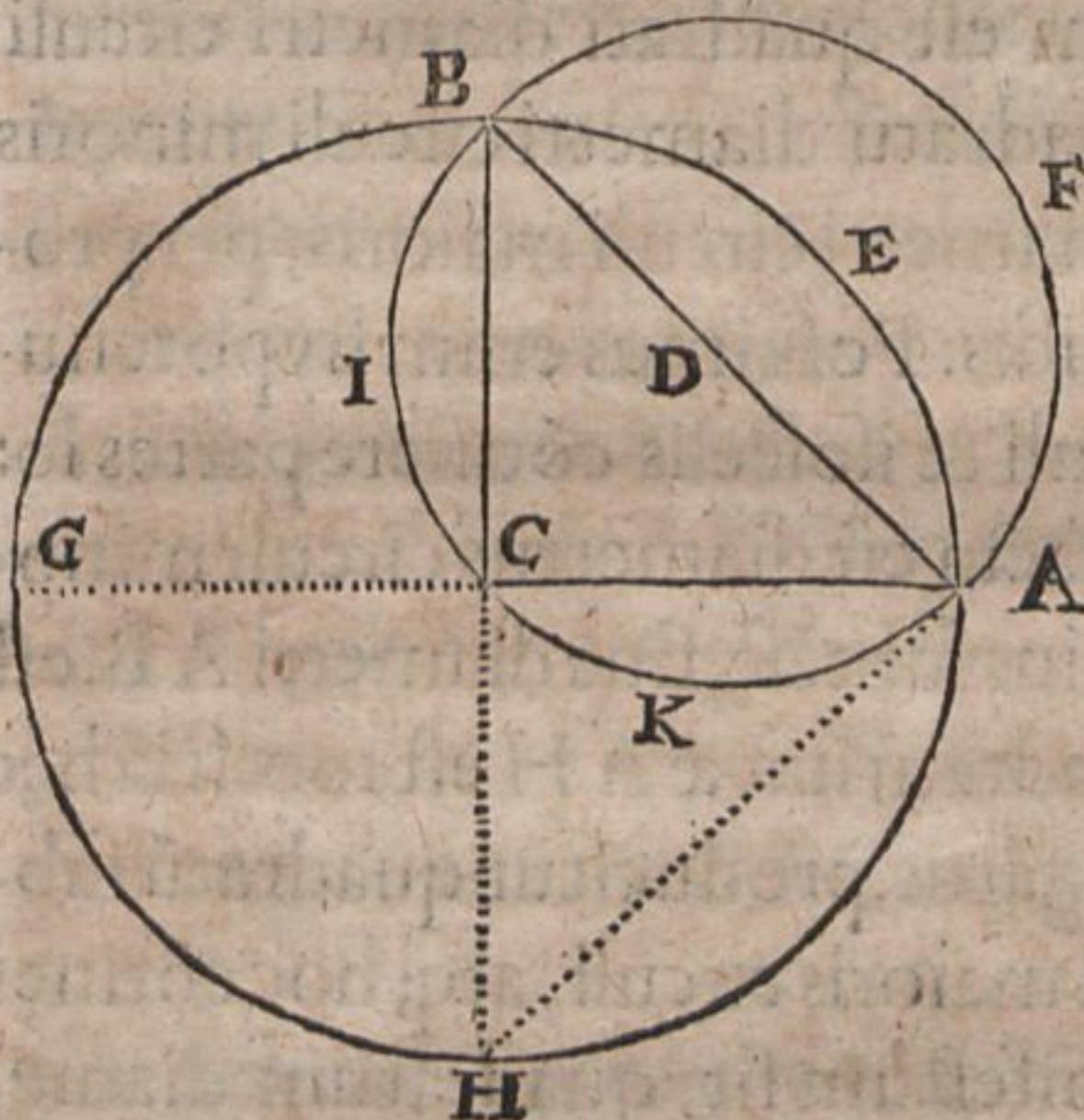
circulari superficie conferenda est: nisi fortassis pars aliquia superficie circulineæ, possit comparari cum figura rectilinea, sicut ostendi potest per meniscū Hippocratis, qui pars est circuli, & talis meniscus necessario æqualis habetur triangulo cuius orthogonio: tota autem superficies circuli non potest comparari cum tota superficie rectilinea. Præterea notandum est, quod cōparatio ista a maiore ad minus, valde efficax sit aduersus epharmosin mechanicam, qua nonnulli perimetrum cum diametro eiusdem circuli comparādam esse existimant: si enim epharmosis nō potest definire quantitatem omnium linearum rectarum, quæ inter se magis vidētur comparabiles, multo minus definiet quantitatem lineæ circularis & rectæ, quæ minus videntur comparabiles. Quod autem nulla epharmosis possit exprimere quantitatem lineæ rectæ irrationalis, id ex proprietate trianguli orthogonii satis constat: causa in eo cōsistit, quod vt numeri non quadrati Radix certis partibus definita assignari nequeat, ita etiam in linea irrationali non possint vltimæ partes inuestigari: nam diuisio lineæ irrationalis, perinde & diuisio Radicis non quadratae, in infinitum procedit: quod illi probe nouerūt, qui tractationē numerorum Algebræ didicerunt. Huic corollario simile est illud, si triāgulus rectangulus constituatur, cuius latera rectum angulū amplectentia habeant proportionē duplam: tunc substantia quadratum erit quintuplum quadrati, a minore latere

latere descripti: & quadratum maioris lateris erit quadruplū quadrati, a minore latere descripti. Verbi gratia, maius latus circa angulum rectum sit octo partiū, & minus sit quatuor partium: subtensæ igitur quadratū erit 80. quod quintuplum est quadrati 16. a minore latere descripti: & quadratum maioris lateris erit quadruplū quadrati 16. quod a minore latere describitur. Quartum corollarium est , in triangulo rectangulo 4. isoscele, quæcunq; figura ad hypotenusam describitur, dupla est figuræ similis, & similiter descriptæ, ad latus alterutrum circa angulum rectum consistēs. Hoc corollarium hic inferimus, vt ostendamus, quomodo lunula Hippocratis , æqualis sit triangulo rectangulo isosceli, cuius hypotenusā est latus quadrati circulo majori inscriptū: etsi enim Simplicius & Philoponus existiment, Hippocratē Chium ex propositione secunda libri duodecimi elementorum Euclidis inuenisse, lunulam aliquā æquari posse triāgulo alicui rectangulo, ego tamen censeo occasiōē huius inuenti dimanasse ex propositione penultima libri primi, & ex propositione 31. libri sexti elementorum Euclidis. Nam propoſitio penultima libri primi explicat, in omni triangulo rectangulo figuram quadratam ad latus subtensæ descriptam, æqualem esse duabus figuris quadratis, quæ ad reliqua duo latera describuntur: vnde etiam sequitur, figuram quadratam subtensæ trianguli rectanguli isoscelis, duplam esse figuræ quadratæ, quæ ad alteru-

trum latus describitur. Propositio autē trigesima prima libri sexti dicit, hoc in genere verum esse de quacunque specie figurarum, & rectilinearum & curuilinearum, si modo similes sint & similiter describantur, quemadmodum bene obseruauit Campanus: vult enim propositio ista, in triangulis omnibus rectangulis figuram quamcunq; ad latus subtensum angulo recto descriptam, æqualem esse duabus reliquis figuris similibus, & similiter descriptis ad reliqua latera. Vnde etiā sequitur, figuram quamcunq; super hypotenusa trianguli rectanguli isoscelis descriptam, duplam esse figure similis, & similiter descriptę super latere alterutro. Verba propositionis hęc sunt, Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τετράνοις, τὸ δύποτῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν τὸ πλευράς εἶδος, οὐδὲ τοῖς δύποταν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τὸ πλευράν εἴδεσι, τοῖς ὄμοιοις, καὶ ὄμοιοις αὐταγεφορδύοις. Quæ autem figuræ rectilineæ sint similes, & quæ similiter describantur, ostendit Euclides in 1. definitione libri sexti elementorum: quando inquit, ὄμοια χήματα εὐθύγενηματά εἰν, οὐτανάς τε γωνίας ἵσας εἴχει καὶ μίαν, καὶ ταῖς αὐτοῖς ἵσας γωνίας πλευράς, αὐταλογον. hoc est, similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam in latera circa æquales angulos, proportionalia. Idem etiā dici potest de figuris curuilineis: nam harum quoq; aliquę & angulos similes, & latera habent similiter atq; proportionaliter descripta: quemadmodum cernere licet in partibus duorum circulorum, duplam proportionem habentibus.

Venia-

Veniamus igitur ad propositum: sit triāgulus rectangulus & isosceles A B C cuius subtensa sit decem partium. & describatur circulus ex centro C, vt circumferētia eius attingat punctum A & B. Deinde diuidatur



latus subtensum A B bifariā in punto D. & ex D centro circulus describatur, cuius circumferētia attingat extremitates trianguli isoscelis ABC. coniungatur etiam punctum A & H in vnam rectam. & latera trianguli isoscelis extendantur ad circumferētiam circuli, vt duæ diametri conspiciantur, quę diuidunt totum circulum in quatuor æquales quadrantes. Iam dico, maiorem circulum duplum esse minoris, & semicirculum maiore duplum esse semicirculi minoris: quod sic ostenditur: figura A E B ad hypotenusam descripta, dupla est figura B I C. similis & similiter descriptę, ad latus alterū, per propositionem trigesimam primam lib. 6. elem. Euclidis. Atqui figura A E B. est segmentum circuli maioris, & figura B I C. est segmentum circuli minoris: quare segmentum maius duplum est minoris: patet etiam, si ambo segmenta minora, videlicet B I C.

ebdijm

& A K C. coniungātur, ea fore æqualia maiori segmēto A E B. Ut autem se habent quadrata diametrorum, ita se habent ipsi circuli, per propositionem secundam libri duodecimi Euclidis: atqui quadratum diametri circuli maioris duplum est quadrati diametri circuli minoris, & contra, quadratū diametri circuli minoris dimidiū est quadrati diametri circuli maioris, per propos. penult. libri i. Euclidis. Posuimus enim hypotenuſam trianguli rectanguli & isoscelis cōtinere partes 10: hæc aut̄ hypotenusa facta est diametruſ circuli minoris: quare quadratū huius subtēſe, siue diametri A B. est 100: & eodē modo quadratū lineæ A H est 100: si īā hęc duo quadrata coniungātur, producitur quadratū subtēſe B H, siue diametri maioris circuli, atq; hoc cōtinet 200. Cum igitur manifestum sit, quadratum diametri in minore circulo esse 100, & quadratum diametri in maiore circulo esse ducenta: sequitur quod circulus maior sit duplus minoris: & sic quęlibet alia partes bifariam diuisae in maiore circulo, duplę sunt partiū bifariam diuisarum in minore circulo: quod de semicirculis & quadrantibus in primis intelligendum est. Ex hoc constat, quadrantem circuli maioris duplum esse quadratis semicirculi minoris, ac proinde totum semicirculum minorem æqualē esse quadrati circuli maioris. Habemus igitur proximū medium, per quod demonstrandum erit, lunulam A F B E. æqualem esse triāgu- lo rectāgulo & isosceli ab initio proposito. Quod hac methodo

methodo ostendendum est: ambo semicirculi in minore circulo sunt sibi inuicem æquales: si autem æqualia ab æqualibus vtrinque auferantur, remanentia sunt æqualia, per communē animi conceptionem. Segmētum A E B. in semicirculo dextro, æquale est duobus segmentis in semicirculo sinistro descriptis, vt antea fuit demonstratum: auferamus igitur vtrinq; æqualia, nimirum a semicirculo dextro demamus segmentum A E B. & a semicirculo sinistro subtrahamus duo segmenta B I C. & A K C. quæ æqualia sunt segmento A E B. vtiq; figuræ quæ relinquuntur, inter se erunt æquales: videlicet lunula A F B E. æqualis erit triangulo rectangulo isosceli A B C. quod ad demonstrandum erat propositum. Hæc demonstratio a veteribus accepta refertur Hippocrati Chio, quē Aristoteles scribit circulum quadrare voluisse per meniscos: eandem demonstrationem inuenimus apud Simplicium libro i. Physicorum, ad contextum ii. & apud Philoponum libro primo Posteriorum, contextu 67. Etsi autē Hippocrates inuenerit artificium maximum, non tamen per illud potuit circulum quadrare: hac enim ratione solum quadratū circulo inscriptum, ostenditur æquale esse quatuor meniscis, qui fiunt ex semicirculis in lateribus quadrati descriptis: reliqua autem quatuor segmenta circuli nō possunt ad huiusmodi meniscos reduci, qui æquales sint triangulis. Immo si hexagonum æquilaterum circulo inscribatur, ostendi quidē potest,

N

semicirculos descriptos ex lateribus hexagoni, dimidiis esse semicirculorum, qui a lateribus quadrati describuntur. Cuius rei indicium est ex superiore schemate: nam semicirculus B F A. dimidiis est semicirculi B G H. quia ille describitur a latere A B trianguli rectanguli isoscelis A B H. hic vero describitur ab eius hypotenusa B H. Sic etiam semicirculus, qui describi potest a latere A C. vel B C. trianguli rectanguli isoscelis A B C. dimidiis est illius semicirculi, qui a subtensa A B. describitur. Atqui constat linea A C. vel B C. esse semidiameter, siue latus hexagonicum: certum etiam est, quod subtensa A B. sit latus quadrati circulo inscripti: vnde manifestum est, semicirculum a latere hexagonico descriptum, dimidiis esse eius semicirculi, qui a latere quadrati describitur. Hoc enim universaliter verum est: quaecunq; figuræ similes sunt & similiter describuntur ab hypotenusa & ab altero latere in triangulo rectangulo isosceli, duplam inter se habent proportionem. Videlicet haec tenus, quomodo superficies curuilinea menisci quadrati possit triangulo rectilineo: sed id quadratoribus circuli nihil patrocinatur. Reuertamur igitur ad recentiores mechanicos, qui existimant, quadratum perimetrum decuplum esse quadrati a diametro descripti: & videamus: qualem proportionem inter diametrum & circumferentiam circuli explicit. Volunt noui mechanici, accipiendam esse diametrum cuiuscunq; circuli, & ex ea quadratum describendum: deinde hoc quadratum

decu-

decuplandum, eiusq; Radicem siue latus esse æquale perimetro eiusdem circuli. Verbi gratia, si detur circulus, habens diametrum quatuor partium, quadratum illius erit 16. quod si decupletur, suggestit quadratū 160. cuius latus putant æquale esse perimetro. Item si circulus proponatur, qui habet diametrum 16. partium, quadratum illius erit 256. sicut ex tabula tetragonica Ioānis Antonii Magini sine ullo labore eruitur: id autem quadratum si decupletur, per Nullam, ut vocant, in fine adiectam, exhibet quadratum 2560. cuius Radicem dicūt æqualem esse perimetro. Quia vero operosum est, quadratum diametri decuplatum in figura geometrica ostendere, excogitarunt Mechanici compendium, quod obseruari volunt. Dicunt autem diametrum circuli diuidendam esse in partes 16. æquales, & triangulum orthogoniū constituendū, cuius maius latus ad angulum rectum cōtineat partes 12. diametri, latus autem minus ad angulum rectum complectatur partes quatuor diametri: ex his enim duobus lateribus subtēsam fore Radicem de quadrato 160. atque huius subtensa longitudinem quater contineri in longitudine perimetri. Cur autem huiusmodi triāguli orthogonii subtensa quadrupla accipi debeat pro longitudine perimetri, causa hæc est: quia quadratum diametri, in sedecim partes æquales diuisæ, est 256. quod si decupletur, est 2560. at in hoc quadrato a diametro producāto & decuplato continetur sedecies quadratum sub-

N 2

tensæ 160. cum igitur Radix de 16 sint quatuor, oportebit subtensam quadruplam accipere, pro longitudine perimetri. Idem compendium in minimis terminis sic potest explicari: diuidatur diametruſ circuli in quatuor partes æquales, & fiat triangulum orthogonium in circulo vel extra circulum, cuius maius latus ad angulum rectum cōtineat tres partes diametri, & minus latus circa angulum rectum cōpleteatur partem vnā: ex his igitur datis duobus lateribus subtensa erit Radix de quadrato i.e. huius autem subtensæ longitudo quadrupla erit accipiēda pro longitudine perimetri. Nam quadratū diametri, in quatuor æquales partes diuisæ, est 16. quod si decupletur, fit 160. atque quadratū subtensæ, scilicet 10. sedecies continetur in quadrato diametri decuplato: quare subtensæ quantitas quadrupla accipienda erit pro longitudine perimetri. Vide Scaligerum in cyclometricis, pagina 38. & 39. In hisce compendiis nihil aliud, quam vanum nouitatis studiū conspicio. Itane doctissimi Geometræ, delitiæ humani generis, antiquitate & splendore familiæ nobilitati, sentendum esse existimatis? quocūque vos vertitis, semper aliquid nouum sciscitis, vnde captus vester in geometricis cognosci possit. Non est opus ullis ambagib. si communem practicorum sententiam, quam Archimedi adscribunt, sequi velimus. Archimedes itaq; tradidit nobis facilimū modum, in quo acquiescere possumus: si enim habeamus diametrum circuli, ex ea facimus

cimus latus minus circa angulum rectum, ex triplo autem diametri componimus maius latus circa angulum rectum in triángulo orthogonio: & quæ hinc producitur subtensa, eam dicimus proxime respondere perimetro circulari. Etsi autem fere omnes practici inter Arabes, Latinos, & Græcos, modum Archimedis sic declarare voluerint, quemadmodum testatur Georgius Purbachius in principio compositionis tabularum sinuum, & nos hoc ipsum auctoritate Auerrois, Alfragani, Procli, Philoponi, & Theonis confirmauimus: sciendum tamen est, quod practicorum sententia castigationem aliquam admittat. Non enim Archimedes voluit, circumferentiam in rectum extensam esse præcise triplam vna septima diametri, sed dixit, veram perimetri quantitatem esse minorem quam $3\frac{10}{7}$. maiorem vero quam $3\frac{12}{7}$. respectu diametri vnius partis, idque demonstrauit Archimedes per duas figuras 96. angulorum, quarum circumscripta minor est quam $3\frac{10}{7}$. inscripta vero maior quam $3\frac{12}{7}$. sicut mihi coram exposuit Clarissimus vir, D. Adrianus Romanus, quando huc secòtulit, vt Professores Academiæ nostræ salutaret, id quod factum est inter festa natalitia noui & veteris calendarii, labente anno Domini 1594. Purbachius idem testatur hisce verbis, *Magistri geometriæ non potuerunt perfecta ratione comprehendere, quanta esset diameter circuli respectu suæ circumferentiæ, eo quod recti ad curuum non est proportio. Practici tamen posuerunt circumferentiam triplam*

N 3

CKI

sesquiseptimam diametro. Archimedes autem probat circumferentiam continere ter diametrum, & minus quam decem septuagesimas, & plus quam decem septuagesimas primas. Hæc Archimedis demonstratio non est tyranica, nec ita inepta, vt a quoquā eludi debeat. Ex prædictis igitur colligimus, hanc esse communem practicorū rationem, vt subtensa trianguli orthogonii (cuius latus minus ad rectum angulum sit diametruſ, alterū vero latus sit tripluſ diametri) habeatur æqualis perimetro: hæc enim hypothesis occasioñē præbuit, vt per datam subtensam, quæ æqualis videretur perimetro, & per diametrum, area circularis indagaretur, vt patet ex testimoniiis præstantissimorum auctorum, quæ supra attulimus. Quod ad longitudinem perimetri attinet, eam Indi paulo accuratius, quā practici vulgares definire voluerunt: proinde dixerunt, quadratū perimetri decuplū esse quadrati a diametro producti. Cū enim triangulum orthogonium ex communi practicorum sententia constituissent, cuius minus latus ad angulum rectum esset diametruſ, maius autem latus circa angulum rectum cōtineret tripluſ diametri, ex his duobus positis lateribus viderunt hypotenusam procreari, cuius quadratum decuplū esset respectu quadrati a diametro producti. Quia vero animaduerterunt, Radicem istius hypotenusaſ surdam esse, nec certo numero posse explicari, idcirco putarunt Indi consultius esse, si sola quātitas hypotenusaſ acciperetur
pro

pro longitudine perimetri, quam si ex proximo quadrato Radix rationalis extraheretur, prout communiter practici facere solent. Hoc perspicue colligimus ex verbis Purbachii in loco citato exstantibus, vbi sic scribitur: *Indi vero dicunt, si quis sciret Radices numerorum rectaradice carentium inuenire, ille faciliter inueniret, quanta esset diameter respectu circumferentiae. Et secundum eos, si diameter fuerit unitas, erit circumferentia Radix de decem: si duo, erit Radix de quadraginta: si tria, erit Radix de nonaginta, & sic de aliis. Et est differentia inter Indos & praticos geometriæ unum minutum, & plus quam septima pars unius minuti.* Vult Purbachius dicere, quod Indi existiment, perimetrum circuli esse æqualem hypotenuse trianguli orthogonii, cuius minus latus ad angulum rectum ponatur diameter, maius autem latus circa eundem angulum rectum sit triplum diametri: quia autem hypotenusa est Radix numeri recta radice carentis, hoc est, quia hypotenusa est Radix surda de numero non quadrato, hæc vtique certo numero definiti nequit: si quis igitur sciret extrahere Radicem surdam, hic certo quantitatem perimetri exprimeret. Sed impossibile est, vt Radix surda definito numero exprimatur: quare si perimetrus æqualis est Radici surda ipsius hypotenuse recte illi facere videntur, qui pro longitudine perimetri capiunt solius subtensæ quantitatem. Deinde affirimat Purbachius, Indos existimare, quod quadratum perimetri sit decūplum quadrati a

diametro producti: ac proinde dicunt, si diametruſ ſit
vnitas, perimetruſ fore Radicem ſurdam de numero
nō quadrato, videlicet de denario: si autem diametruſ
cótineat duo, tunc quantitatē perimetri fore Radi-
cem ſurdam de quadraginta, &c. quemadmodum ex
ſententia Archimedis & practicorum dicimus, si dia-
metruſ fuerit partium ſeptem, tunc perimetruſ eſſe
Radicem ſurdam de numero non quadrato 490. Tan-
dem indicat Purbachius, Indos videri accuratius ex-
ponere perimetruſ, quam vulgo faciant practici geo-
metriæ: volunt enim Jndi perimetruſ præcife æqualē
eſſe subtensæ, & cum hec subtensa ſit Radix ſurda, eam
non eſſe numero inuestigandam, ſed ſimpliciter quā-
titatem subtensæ capiēdam eſſe pro longitudine peri-
metri: practici autem ſatis eſſe existimant, ſi Radix ex-
trahatur ex numero proxime quadrato, eaq; pro quā-
titate perimetri capiatur. Sic quidem olim ſenſerunt
Jndi, quorum opinionem nuper reuocauit Scaliger:
ſed error maximus eſt in hypothefi: non enim conce-
dendum eſt, per rationis epharmoſin perimetruſ equa-
lem fieri hypotenuſe dati trianguli orthogonii. Notā-
dum igitur eſt, demonstrationem hanc ſcientificā eſſe,
quæ dicit, quadratum subtensæ in triangulo orthogo-
nio (cuius latus minus circa rectum angulum ſit partiū
ſeptem, maius autem ſit partium viginti & vnius) de-
cuplū eſſe quadrati, quod a minore latere deſcribitur:
ac proinde ſi diametruſ circuli æqualis ſit lateri minori

circa angulum rectum consistēti, sequetur quod quadratum hypotenusa etiam decuplū sit quadrati a diametro descripti. Quod autē a Mechanicis assumitur, perimetrum circuli sic in rectum posse extēdi, vt prorsus æqualis sit hypotenusa, id falso est: licet enim per extensionem mechanicam perimetru aliquo modo fiat æqualis ipsi hypotenuse, non tamē omnino æqualis fieri potest. Agnoscant ergo recētiores Mechanici, quod in ratiocinando plurimū fallantur: sic enim colligunt, Omnis hypotenus a duobus lateribus rectum angulum amplectentibus, & triplam habentibus proportionē genita, habet quadratum decuplū, respectu illius quadrati, quod a minore latere circa angulū rectum describitur: at omnis perimetru circuli potest fieri talis hypotenus, Ergo omnis perimetru quoque habet quadratum decuplū respectu illius quadrati, quod a minore latere circa angulum rectum describitur, hoc est, respectu quadrati, quod a diametro describitur, quādoquidem minus latus circa angulum rectū ponitur æquale diametro. In hoc syllogismo maior est certissima. sed minor probatione eget: confugiunt autem Mechanici ad epharmosin rotationis, vt fidem aliquam faciant dubiæ propositioni: at ne sic quidem ad scopum optatum perueniunt, vt nos in præcedentibus abunde declarauimus.

Quid sentiendum fit de epharmosi geometrica, unde applicatio curui ad rectum fluxisse videtur.

O

CAPVT VIII.

QVi circulum quadrare cupiūt, postulatum quod-
dam mechanicum statuūt, ex quo persuadere co-
natur, lineam curuam posse applicari rectæ, ita vt vna
alteri æqualis habeatur. Postulatum istud in hanc sen-
tentiam concipiunt. *Circumferentia potest æquari lineæ
rectæ, si præparetur rota mobilis, circulo æqualis, quæ ab u-
no puncto circumferentia in planum iuxta lineam rectam
extēdatur, donec ad idem punctum redeat: hoc enim inter-
uallum a rota mobili in superficiem planam extēsum, æquale
est circumferentia circuli.* Vide Scaligerum in cyclome-
tricis, pagina 20. Quod epharmosis ista nō abhorreat
a principiis geometriæ, Mechanici hinc probare vidē-
tur: quia Euclides inter principia geometriæ hoc re-
fert, quod quæ sibi mutuo applicentur, inter se æqualia
habeātur: verba eius hæc sunt, *καὶ πάλιν φαμόζοντα εἰσ’ ἄλλη-
λα, οὐαὶ ἀλλήλοις ἔστι.* Verbi gratia, si quis lineam vnam al-
teri superponat, ita vt nec excessus nec defectus in lon-
gitudine conspiciatur, tunc ambæ lineæ dicuntur æ-
quales, per applicationem siue per epharmosin. Item si
quis angulum angulo superponat, vt eadē inclinatio
appareat, tunc etiam ambo hi anguli inter se æquales
erunt, per applicationem quandam externam. Idem
dici potest de mutua applicatione superficerū: si enim
triangulus triangulo superponatur, vt nec latera, nec
anguli se inuicem excedant, tunc triangulus triangulo
æqualis censemur per epharmosin. Et si circulus circulo
super-

superponatur, vt circumferentia vnius non excedat circumferentiam alterius, tunc etiam circuli æquales æstimantur propter applicationē. Obseruandum autē est, Mechanicos putare, eādem esse rationem applicationis, siue lineæ rectæ beneficio regulæ aut circini inter se applicentur, siue etiam curvæ lineæ per girationē & reuolutionem in planum extendātur: qua in re eos plurimum falli, ostendemus. Non est dubium, quin epharmosis locum habeat in praxi geometrica: pleriq; enim veterum propositionem quartam & octauam libri primi elementorum Euclidis, per applicationem mutuam linearum, angulorum & figurarum, probare studuerunt. Hoc autem nulla cogente necessitate fecerunt: si enim oninem intermisserint applicationem, nihilominus demonstrare potuissent linearum, angularum, & figurarum equalitatem, vt appareat ex recentiorum demonstrationib. in quibus nulla epharmosis adhibetur. In tyronum igitur rudiorum gratiam, veteres geometræ voluerunt quartam & octauam propositionem libri primi Euclidis, demonstrare per epharmosin, siue inductionem quandam sensilem: vt scirēt discipuli quasi sensibus edocti, duos triangulos omnino æquales esse, qui & latera æqualia & angulos in unicem haberent æquales. Jdcirco Proclus lib. 3. commentatorum in primum Euclidis scribit, epharmosin esse sensilem probationem. Verba eius hęc sunt, καὶ γάρ οἱ ἐφαρμογὴ, καὶ τὸ ταῦτης ἴσος δεικνυμένη, των τόπων ἔχεται τῆς

O 2

αγαθῆς καὶ ἀναργύρους τῶολήντως, hoc est, applicatio enim, & quæ per eam ostenditur æqualitas, omnino pendet a sensili & euidente opinione. Si autem naturā demon- strationis respiciamus, certum est, quod debeamus ad- hibere medium vniuersale: sic dicimus, lineas duas re- Etas æquales esse, quia iisdē terminis finiuntur, & duos angulos rectilineos æquales esse, quia eandem habent linearum inclinationem: item dicimus duos triangu- los æquales esse, quod habeat latera lateribus æqualia, & angulos angulis inuicem æquales. Sed vt recte per- cipiamus, quatenus epharmosis probet æqualitatem, & quo usque se extendat: ante omnia sciendum est, in epharmosi plurimos errores contingere posse, si lineæ ad lineas, anguli ad angulos, & superficies ad superfi- cies negligenter accommodentur. Quod si autem di- ligens & accurata applicatio fiat, probabitur quidem lineas, angulos, & superficies sibi inuicem superpositas æquales esse, sed mens nostra non acquiescat in illa ex- terna applicatione, nisi causam vniuersalem æqualita- tis intellexerit. Proinde dicimus, lineas æquales esse, quod æqualibus terminis comprehendantur, & angu- los æquales esse, quod fiant ab æquali linearum incli- natione: item superficies æquales esse, quod æqualibus lineis & angulis contineantur. Linearū quidem equa- litatem metimur per applicationē circini aut regulæ, sed æqualitatem angulorum æstimamus a subtensiōnē lateribus, sicut totam superficiem cum tota superficie per

per applicationem æqualium laterum & angulorum comparamus. Quare recte scribit Proclus libro tertio commentariorum in primum elementum Euclidis, quod omnis linea recta ad rectam cōgruat, quatenus utriusq; extremitates communi mensura comprehēdi possunt, quodque angulus rectilineus cum angulo rectilineo, & superficies rectilinea cum superficie rectilinea sit applicāda: si enim quantitates diuersæ ad se in uicem applicarentur, nulla posset inuestigari ratio æqualitatis. Verba eius hæc sunt. Πᾶσα γὰρ εὐθεῖα ἔπειτα
 στοιχεῖα, ἐφαρμόζει: τὸν δὲ ἰστον κατὰ τὰ πέρατα γίγνεται οὐκ
 φαρμαγή. γωνία δὲ ἰστογωνία λέγεται οὐ εὐθύγενης τῇ εὐθυγενίᾳ,
 &c. τὴν ισότητα τὸν γωνιῶν λυθόμενα καὶ τὴν ἐφάρμοσιν τὸν πλευ-
 ρῶν ἔπειτα τὸν εὐθυγενίᾳν, καὶ ἔπειτα τὸν ἄλλων τὸν μονοειδῶν, οἷον τὸν μη-
 ιοειδῶν, τὸν ξυτροειδῶν, τὸν ἀμφικύρπων: ἐπεὶ διατὸν καὶ οὐσιας εἶναι
 γωνίας, καὶ μὴ ἐφαρμόζειν ἀλλίλας τὰς πλευράς. Ἰση γάρ δέ τιν οὐρθὶ^ν
 μονοειδεῖ πνι γωνία, καὶ ἀδιατον ἐφαρμόσα τὰς πλευράς τὰς τοιε-
 φερεῖας. hoc est, omnis enim recta omni rectæ congruit:
 quæ autem sunt æqualia, eorum etiam secundum ter-
 minos fit applicatio. Sed angulus angulo æqualis dici-
 tur, scilicet rectilineus rectilineo. &c. Æqualitatem au-
 tem angulorum capiemus secundum applicationem
 laterum, in rectilineis, & in aliis eiusdem speciei figuris,
 vt in lunaribus, Xystricis & vtrinque gibbosis: quoniam
 fieri potest, vt æquales sint anguli, nec tamē latera sibi
 in uicem congruant: etenim rectus angulus æqualis est
 alicui lunari angulo: & fieri non potest, vt circumferē-
 tiæ congruant ad lineas rectas. Ex quibus verbis Procli

animaduertere licet, illa tantum admittere epharmosin geometricam, quæ eiusdem sint speciei: sic linea recta cum recta, & curua cum curua, & superficies rectilinea cum rectilinea applicatur: recta autem cum curua congruere nequit. Et paulo post idem Proclus loquens de demōstratione per epharmosin quartæ propositionis libri primi Euclidis, sic scribit: "Αρετήσοτις ὁ μοιειδέσιν ὁ φθῆσα τῆς ὅλης ἀποδεῖξες αὐτία αὐτεφάνη. δύο γάρ δέ τοι
 οὐταῦθα ἀξιώματα συνεκπική τῆς συμπάσους μεθόδου τῷ πλευράματι
 Θεοφρήσιαν, εἰ μὴ ὅπι τὰ ἐφαρμόζοντα, οἵσα ἀλλήλοις: τόποις ἀπλῶς
 ἀλιθὲς, καὶ διένεσος πλευράς δέομνον, ως γενῆταις τοιχειωτῆς, οἵτινες
 πετῆς Κάστες, καὶ τῷ ἐμβαδῷ, καὶ τῷ λοιπῷ γωνιῶν, ταῦτα γάρ φησι,
 μόπι ἐφαρμόζει, οἵσα ἀλλήλοις. τόποι δὲ οὐκ θέτε πάντων ἀλιθὲς, ἀλλ
 οὐπὶ τῷ μοιειδῶν. ὁ μοιειδῆς δὲ τῶντα λέγω, οἷον εὐθεῖα εὐθεῖα, περιφέ
 ρα περιφερεῖα τῷ αὐτῷ κύκλῳ, καὶ γωνίαν πεποστόμοισι κειμένων
 πεπεχόμενα, δεύτερον δὲ, ὅπι τὰ διέδομά οἵσα, ἐφαρμόζει ἀλλήλοις.
 hoc est, Æqualitas igitur, quæ in quātitatibus eiusdem
 speciei cōspicitur, totius demōstrationis causa exsistit.
 Duo enim hic sunt axiomata continentia totam me
 thodū propositi theorematis: Vnum quidē est, quod
 quæ sibi inuicem congruunt, æqualia habeantur: idq;
 simpliciter verum est, neq; opus habet vlla declaratio
 ne, quo vtitur auctor elementorum, in basi, & area, &
 reliquis angulis: hæc enim inquit, quia sibi inuicē con
 gruunt, equalia sunt. Hoc autem non de omnibus ve
 rum est, sed de quantitatibus eiusdem speciei: eiusd em
 autem speciei hęc voco, vt est recta cum recta, circum
 ferentia cum circumferentia eiusdem circuli, & anguli
 com-

comprehensi a lateribus similibus similiter positis. Alterum est, quod data æqualia, sibi inuicem congruāt. Haec tenus Proclus, qui expresse fatetur, epharmosin geometricam tantum pertinere ad quantitates eiusdem speciei: sed obseruandum est, non semper in quantitatibus eiusdem speciei, per epharmosin probari æquallatatem, nisi quantitates illæ etiam contineantur sub aliqua specie indiuidua, quæ in plures species secari nequeat: quemadmodum colligitur ex libro 7. Physicæ auscultationis, & ex propos. penultima libri i. elemen. Euclidis. Quamobrem licet diametruS quadrati & latus quadrati, sint lineæ rectæ, non tamē per epharmosin vllam poslunt exæquari: idem dicendum est de reliquis lateribus rectis, quæ sunt rationalia & irrationalia in triangulo rectangulo. Huc vſq; ergo se extendit epharmosis geometrica in applicandis quātitatibus eiusdem speciei: sed Mechanici plures modos applicandi excogitarunt: quantitates enim diuersarum specierum, & naturis inter se maxime pugnantes, per epharmosin conciliare voluerūt. Hinc factum est, vt minores portiones circumferentiæ pro rectis lineis putarent accipiendas: qui modus ἀγεωμέτρητος est, & ab omnibus Philosophis damnatus. Propterea scribit Simplicius, ἀδυόπτωτον εἶναι, εὐθεῖαν οὐ φαμόσαν τὸ δέ περία. hoc est, impossibile esse, vt linea recta congruat ad circumferētiam. Cuius rei hæc est ratio, quia quælibet portio circumferentiæ, etiam minima, recta fieri nequit: & hac ratione ve-

primis dicitur, ex rotunda linea nunquam effici recta.
Alii epharmosin rotationis multo absurdiores introduxerunt, quia non tantum rectam lineam cum circumferentia ratione longitudinis compararunt, verum etiam lineam rectam in plano iacecentem & quiescentem, cum circumferentia in orbem volutata exæquarunt: atq; sic ex motu physico quantitatem continuam metiendam esse censuerunt. Notandum autem est, epharmosin rotationis duobus modis fieri: vel enim linea recta ponitur, a cuius medio per filum aliquod vtrinq; reflectitur circumferentia, donec extremitates lineæ rectæ attingat: potest etiam filum æneum ad circumferentiam tota applicari, vt deinde fili una extremitas accommodetur ad unam extremitatem lineæ rectæ, idemq; filum reflectatur, donec eius altera extremitas perueniat ad alteram extremitatem lineæ rectæ: quod ubi factum fucrit, putatur linea recta congruere ad circumferentiā. Hic modus perinde se habet, ac si regula aliqua flexibilis primo in rectum extenderetur, & deinde in circumferentiam curuaretur, aut contra. Alter modus rotationis est, quando accipitur orbis mobilis, qui in certo punto applicatur ad extremitatem lineæ rectæ, & tam diu reuoluitur, donec ad idem punctum redeat. Sane uterq; rotationis modus alienus est a geometria: cum presupponat, singula puncta circumferentiae æquari singulis punctis lineæ rectæ. Hoc autem profus falsum est: quia minimum punctum circumferentie in

in oculos incurrens, sua natura curuum est, vt ad punctum lineæ rectæ applicari nequeat. Ex his omnibus apparet, Mechanicos plurimū abuti epharmosi geometrica, quando lineam rectam rationalem cum irrationali per applicationem vnam & eandem comprehendendi posse existimant. Nec minus decipiuntur mechanici, quando lineam rectam cum curua comparare volunt: quocunq; enim modo applicationis vtatur, in manifestas contradictiones incidunt. Similiter aberrat mechanici, quando superficiem circularem cum rectilinea, per multiplicem spatiorum diuisionem æquare conantur: hi enim terminum diuisionis statuunt in aliquo punto sensili, quod in infinitum diuidi potest. Porro monēdum est, haud parū decipi curiosos quosdam verborum magistros, qui existimāt solam epharmosin Antiphōtis appellandam esse πμαχισθν, hoc est, dissectionem: cū in vniuersum omnis epharmosis per dissectionem & linearum & superficierum proposito suo fidem facere velit. Ex Themistio lucidissimo philosopho discimus, πμαχισθν idem esse, quod in frusta secare: nā libro i. Post. Analyticorum cap. 5 sic loquitur.
 Συδέρετε ονομακονὸν, τη φύσις πιστιώτερος αριθμός καὶ μεγέθυνος
 γεόντων, εφ' οὐδὲν διαίτης τόποκαθόλου τοποδειχναῖς. καθόλου
 μὴν γάρ ἀλιθὲς, εἴ τινα αἰάλογον ἔη, καὶ ταλαξάναλογονέσται. οὐκ
 ἔχοντες δὲ τοθεῖνα τῷ πνεῖ, ονομακονὸν ὀεισιδίον, πμαχίζοι τὸν
 τοπόδειξιν, καὶ οἴονται καθόλου δεικνύσσαι εφ' ἐκάτετρον εἰρημένων, δεικνύτες τῶς. τη γάρ οὐδὲν μέγθος, τη μέγθος, τη γεόντων, τοποδεικνύταις τοπόδειξιν. hoc est, non enim est nomen com-

mune, neq; natura aliqua superior numero & magnitudine & tempore, de qua possit hoc vniuersale existēs demōstrari. Vniuersaliter quidem verum est, si aliqua proportionalia sint, etiā permutatim proportionalia erunt. Cum autē non habeant nomen commune definitū, quod voci Aliqua substituant, dissecant demōstrationem, & existimant se vniuersaliter demonstrare de vnoquoq; prædictorum, cum sic non demonstrēt. nō enim qua numerus, neq; magnitudo, neq; tempus est, vtuntur ad demonstrationem. Vult dicere Themistius, non esse integrum demonstrationem, si quis per partes demonstret, quod de toto genere reciproce, vt per causam vniuersalē demōstrandum erat: qui igitur hac ratione se putant aliquid demonstrare, plurimum falluntur. Nam dissectionem quandam sensilem, & πεμαχισμὸν introducunt, & perinde faciunt, ac si per minutissimas diuisiones superficiē circularem quadrare velint: cum omnibus sit notissimum, demonstrationē esse generis alicuius definiti & reciproci. Obseruādum igitur est, omnem epharmosin rectissime appellari πεμαχισμὸν, hoc est, cōcisionem & in frusta diuisionem: quotiescunq; enim quantitates per epharmosin equare volumus, diuisione certarum partium utimur, & ostendimus ideo quantitates inter se æquales esse, quod singulæ illarum partes ad se inuicem applicari possint. Sed huiusmodi πεμαχισμὸς, siue ἐφάρμοσις πεμαχισμὸς nihil demonstrat: cum non suppeditet causam vniuersalem & pro-

& proximam, per quam omnem demonstrationē fieri necesse. Liquet igitur ex dictis, quid sit epharmosis, quādo & vbi in geometria locū habeat, & quomodo ad Mechanicos sit translata.

Monstratur, quid de proportione recti ad curuum sentiendum.

C A P V T I X .

V T quæstionem hāc decidere possimus, an curui ad rectum sit aliqua proportio? primū in genere quēdā de proportione ex lib. 5. Euclidis repetemus, deinde ostendemus, quomodo per distinctionem ad quæstionem propositam sit respondēdum. Definitionē tertia libri 5. Euclidis sic explicat Campanus: Proportio est duarum, quantæcunq; sint, eiusdem generis quantitatum, certa alterius ad alteram habitudo. Proportio est habitudo duarum rerum eiusdem generis ad inuicem, in eo quod earum altera maior aut minor est reliqua, vel sibi æqualis. Non enim solum in quantitatibus reperitur proportio, sed in ponderibus, potētiis & sonis. In ponderibus quidem & potentiis vult Plato in Timxo esse proportionem, vbi elementorum numerum ostendit: in sonis autem esse proportionem liquet ex musica. Nam vt vult Boetius in quarto, si quilibet nervus in duas inæquales partes diuidatur, erit ipsorū partium suorumq; sonorū eadem cōuerso modo propor-

portio. Sed in quibuscumq; proportio reperitur, ea par-
ticipant naturā proprietatemq; quantitatis: non enim
reperitur in aliquibus rebus duabus, nisi in eo, quod
earum vna est reliqua maior aut minor, aut sibi æqua-
lis. Quantitatis autem proprium est, secundum ipsam
æquale vel inæquale dici, vt vult Aristoteles in prædi-
camentis: vnde liquet, proportionem primo in quan-
titate reperi, & per ipsam in omnibus aliis: nec esse in
aliquibus rebus proportionem, cui similis non sit in a-
liquibus quantitatibus: propter quod bene dixit Eu-
clides, proportionem simpliciter esse in quantitate, cū
eam diffiniuit per habitudinem duarum quantitatum
eiusdem generis ad inuicem. Cuius diffinitionis intel-
lectus est: quod proportio est habitudo duarum quan-
titatum ad inuicem, quæ attēditur in eo, quod vna ea-
rum est maior aut minor alia, vel sibi equalis: per quod
patet, quod oportet eas esse eiusdem generis, vt duos
numeros, aut duas lineas, aut duas superficies, aut duo
corpora, aut duo loca, aut duo tempora. Nō enim po-
test dici linea maior aut minor superficie, aut corpore,
nec tempus loco, sed linea, linea, & superficies, superfi-
cie: sola enim vniuoca comparabilia sunt. Quod autē
dicit certa habitudo, non sic intelligas, quali nota vel
scita, sed quasi determinata, vt sit sensus, proportio est
determinata habitudo duarum quātitatum, ita inquā
determinata, quod hæc & non alia. Non enim est ne-
cessarium, vt omnis habitudo duarum quantitatū sit
scita

scita a nobis, nec etiam a natura. Nam proportio quædam est discretorum, ut numerorum, quædam autem continuorum. In numeris autem minor est pars aut partes maioris, ut demonstratur in septimo: quare & in eis omnibus est habitudo certa & nota. At vero in cōtinuis est proportio magis larga: est enim in eis, vbi minor quantitas est pars aut partes maioris, & talium omnium mediantibus numeris est proportio nota, quæ & rationalis dicitur. Dicunturq; omnes tales quantitates communicantes, quia eas vna & eadem vnitas necessario metitur: vnde & omnes numeri sunt communicantes, omnes enim ipsos metitur vnitas. Est etiā vbi minor non est pars aut partes maioris, & in talibus nō est nota proportio, nec nobis, nec natura. Diciturque hæc proportio irrationalis, & hæc quantitates sunt incomunicantes: vnde fit, ut quæcunque proportio reperitur in numeris, reperiatur in omni genere continuorum, ut in lineis, superficiebus, corporib. & temporibus: nō autem econuerso, infinitæ enim sunt proportiones in continuis repertæ, quas numerorum natura non sustinet. Sed quæcunque proportio reperitur in uno genere cōtinuorum, eadem reperitur in omnibus aliis. Nam qualitercunq; se habet aliqua linea ad quamlibet aliam, sic se habet qualibet superficies ad aliquam aliam, & quodlibet corpus ad aliquod aliud, similiter & tempus: sed non sic quilibet numerus ad aliquem alium; vnde magis est larga proportio in con-

tinuis, quam in discretis. Ex quo manifestum est, proportionem geometricam esse maioris abstractionis, quam proportionem arithmeticam: omnis enim proportio, circa quam arithmeticā versatur, rationalis est, geometria vero rationales & irrationales æqualiter considerat. Hactenus Campanus: nunc etiam placet adiicere, quæ Lucas Paciolus annotat ad quintam definitionem quinti elementi Euclidis, iuxta Campanū. Sic enim ait: Maxime geometræ interest, de proportionibus, & natura ipsarum totaliter differere: nam arithmeticus nō inuenit in omnibus numeris proportionis modos, quoniam infinitæ sunt proportiones, quas natura numerorū nō patitur, vt in isto per Campanum dicitur. Quoniam autē ipsa proportionis consideratio extēsa est & lata, & applicatur fere omnibus ad inuicem comparabilibus, secūdum magis & minus, ideo secundum hunc conceptum communem potest sic diffiniri. Proportio est aliquorū ad inuicem comparabiliū vnius ad alterū certa habitudo. verbi gratia, vt numeri ad numerum, magnitudinis ad magnitudinem, soni ad sonum, temporis ad tempus, motus ad motum, humoris ad humorem, saporis ad saporem, coloris ad colorem, &c. Geometer autem trahit intentionem proportionis ad magnitudinem, & habet eam sic diffinire: proportio est duarum quantitatum eiusdem generis vnius ad alteram certa habitudo. Dico autem eiusdem generis, quia sola talia comparabilia sunt. Duiditur

uiditur autem proportio in duas species, quæ accipiuntur in comparatione ad quantitates. Nam quantitatū quædam sunt communicātes siue commensurabiles: quædam dicuntur incomunicantes siue incommensurabiles. Communicantes dicuntur illæ, quibus est una quantitas communis eas numerans. Dicitur autem una quantitas numerare aliam, quæ secundum aliquē numerum accepta, producit ipsam, ut linea pedalis bipedalem vel tripedalem lineam. Sunt igitur quantitates communicantes, sicut linea bipedalis & tripedalis, quas pedalis linea secundum binarium & ternarium numerat. Quantitates vero, quibus non est una communis quantitas, eas numerans, dicuntur incommensurabiles, cuiusmodi sunt diameter quadrati, & eius latus. Sunt igitur secundum hoc duæ proportionū species, scilicet rationalis & irrationalis: proportio rationalis debetur quātitatibus cōmunicantibus, ipsa quoque est, quæ numeris sola debetur. Irrationalis autem proportio quātitatibus incommensurabilibus debetur, numeris vero nequaquam competit. Vnde manifestū est, quod ad geo metram pertinet proportionis consideratio: quia omnis proportio est magnitudinis, sed non omnis proportio est numeralis. Proportio igitur rationalis denominatur immediate ab aliquo numero: omnium enim quantitatum communicantium oportet quod secundum aliquem numerum minor vel aliqua pars minoris maiorem numeret: propter quod

P 4

dixit Euclides infra in quinta decimi , omnium duarū quantitatū communicātū est proportio alterius ad alteram,tanquam proportio numeri ad numerum. Et paulo post, Proportio autem irrationalis non nominatur sic immediate ab aliquo numero,ab alia proportione numerali , quoniam non est possibile , vt secundum aliquem numerum pars aliqua minoris maiorem numeret. Contingit tamen mediate denominari irrationalē a numero,vt quod proportio diametri ad costā est medietas proportionis duplæ: & ita capiūt aliæ species proportionis huius denominationē a numero. Hactenus Paciolus. Ex quibus omnibus perspicuum est,proportionē esse mutuum respectum duarū quantitatū eiusdem generis, propter quem respectū vel ambæ quantitates sunt æquales,vel vna earum minor est aut maior altera. Comparātur aut illa proprie, quæ eiusdem sunt generis & naturæ specificæ:vt linea recta rationalis confertur cum linea recta rationali: sed attendēdum est, si linea recta rationalis conferatur cū linea recta irrationali,hanc comparationem equiuocā esse, & dici proportionē irrationalem. exempli gratia, inter diametrū & latus quadrati, est determinata proportio,quæ explicari potest per lineā medio loco proportionalē,vt docet propositio nona libri 6. Euclidis. Si igitur latius usurpemus vocabulum proportionis,vt vult Campanus, & Paciolus, etiā linea recta rationalis poterit comparari cū linea recta irrationali , non tamē immediate

immediate per certum numerum, sed per quantitatem
medio loco proportionalē, aut per quadrata linearū,
quæ certam inter se habent proportionem: sic dicimus
quadratum diametri in figura quadrata duplum esse
respectu quadrati, quod a latere uno describitur. Quo-
modocunq; autem consideretur proportio tam ratio-
nalis quam irrationalis, primo locū habet in lineis re-
ctis & figuris rectilineis: deinde propter comparationē
linearū rectarum accommodari potest ad figuras cur-
uilineas: sic dicimus duos circulos habere duplam pro-
portionem, quia quadrata diametrorum in his circulis
descripta, inter se duplam habēt proportionem, vt do-
cet propositio secunda libri 12. Euclidis. Præterea locū
habet proportio æqualitatis inter figurās dissimiles re-
ctilineas & curuilineas: nam triangulum potest equari
parallelogrammo altera parte lōgiori, & lunula Hip-
pocratis æqualis est alicui triangulo rectangulo: huius-
modi autem proportio æqualitatis per certam demō-
strationē colligitur. Quādo igitur quæritur, an curvā
ad rectū sit aliqua proportio? respondendū est, lineam
curuā cū recta nullā habere proportionē, nec rationalē
nec irrationalem: nam linea recta est breuissima exte-
sio inter duo puncta extrema, ita vt minima portio li-
neæ rectæ naturā habeat totius, & non immerito por-
tio recta appellari possit: curva autem linea, & potissi-
mū circularis, non extenditur breuissime & æqualiter
inter duo puncta extrema, ac proinde etiam minimū

punctum a rectitudine declinans, curuum censendum est. Quod autem ad superficies curuilineas & rectilineas attinet, non est dubium, quin sapienti numero in illis possit certa proportio declarari: sic meniscus Hippocratis proportionem habet aequalitatis cum triangulo orthogonio isosceli, cuius hypotenusa est latus quadrati circulo inscripti.

Epilogus tractationis de quadratura circuli.

C A P V T X.

HAec tenus in genere omnia exposuimus, ex quibus Quadraturam circuli aestimare licet: non enim fieri potest, ut spatium circulare exactissime aequetur figuræ rectilineæ, sed nihil impedit, quo minus proxima aequatio inueniatur. Quam sententia confirmat Ioannes Regiomontanus, de quadratura circuli aduersus Nicolaum Cusanum disputans, ubi pagina 53 sic scribit: Prope igitur ad metam accessit vir ille, quamuis medio frueretur facilimo. non tamen idcirco satisfecit intellectui, veritatem magis quam propinquitatem inuestiganti. Nam si ad metam ipsam propinquius etiam quam Archimedes veniendi fuerit libido, viam in promptu habemus, ab Archimedea sumtam, qui quemadmodum proportionem circumferentiæ ad diametrū concluſit inter duas, scilicet triplam sesquiseptimā, & triplam superpartiem decem septuagesimas primas: ita inter duas proportiones multo inter se viciniores eandem constituerem poserimus circumferentiæ ad diametrū proportionem. Sed in hoc non quiescit animus, cum recta aequalis circumferentiæ circuli non sit data: atque idcirco spes omnis circulum quadrandi ademta. Si qui ergo siue modernorū siue posteriorū huius rei gloriam venari velint, curuæ lineæ rectifi-

etificandæ vel circuli quadrandi problema sibi nouiter obiectum habent, quamuis plurimi quidem vetustissimi Philosophi id aggressi sint, nemo autem Archimedem in hoc philosophandi genere vsque ad hodiernū diem superauerit. admirādus profecto esset, qui tantum tamque inexplicabile curui & recti discrimē rumperet: alterumque inalterum commutandi facultatem traderet: is enim maiores nostros vniuersos ingenio suo, præsertim in Geometricis exercitiis, longe anteuenire crederetur. Hactenus Regio montanus. Addā hic testimoniū Clarissimi viri, D. Adriani Romani, in Academia Wurtzeburgensi Professoris medicinæ primarij: qui in Methodo polygonorū a se edita fatetur, se diligenter omnium, qui de quadratura circuli scripsérunt, doctrinā examinasse, erroresque deprehensos annotasse, ac tandem nō nisi proximam perimetri ad diametrū proportionē inuenisse, ex eaque aream circuli, figuræ rectilineæ proxime congruentem, explicasse. Quin immo nobis affirmauit, se hanc sentētiam concepisse, quod a nemine mortaliū exactissima quadratura inuestigari possit, & propterea nugas & imposturas sophisticas esse, quibus nōnulli rudioribus persuadere conētur, inter perimetrum & diametrum circuli dari perfectissimā & absolutissimam proportionē, ex qua circulus omnino scientifice quadrari possit. Hæc ideo commemoro, vt intelligamus, non deesse etiam hoc tempore viros cordatos & prudentes, qui temerariam audaciam sciolorū retundere, & veritatē ab omnibus iniuriis vindicare queant. Non ita pridem ab amico litteras accepi, vbi inter alia hæc scribūtur: *Scaliger tuus de quadratura edidit librum suum, de quo meum exspectes iudicium, nolo: sed Geometriæ tyrones consule. Si in Chronographia ita se gescit, non miror fuisse, qui cum oppugnare sint ausi. Quis nescit palmam in medio positam esse? si æquum esse cēsemus, vt illa publici iuris faciamus, quæ a nobis intra priuatos parietes sunt exarata,*

haud profecto iniquum erit, vt vicissim aliorum iudiciæ de scriptis nostris audiamus. Sed conqueruntur auctoritatis & honoris amantes, se nimis acerbe ab aliis tractari, in sententia dicenda de rerum abstrusarū & subtilissimarum inuentione: opinor equidem, acerbitatem ab ipsis vocari, si quis libere & candide dissentiat, & errorum causas sine vilo personarum respectu manifestet: eo enim quadrat vulgare dictū, OBSEQVIVM AMICOS, VERITAS ODIVM PARIT. Sin vero existiment, se verbis durioribus, quam par erat, compellari: agnoscāt & alios esse, quibus displiceant mordaces sermonis aculei. Quare si alios modeste de nobis sentire volumus, necesse est, vt nos quoque de ipsis modeste loquamur: nam vim vi repellere licet. Ad me quod attinet, maluissem hisce laboribus supersedere, nisi fastu quodam intolerabili Archimedem ab aliis reprehēdi animaduertissem: nec etiā decuit me silere, quando Aristoteli eiusque interpretibus falsas sententias ab hominibus imperitis affingi, & principia demonstrationis temere labefactari, nec non geometrica cū mechanicis confundi, satis euidenter probare possem. Spero autem plures deinceps fore, qui maiore ingenij felicitate, & rerū sublimiorū copia instructi, de quadratura circuli sint disputaturi: quibus omnibus me gratias immortales aucturum profiteor, quod præclaris suis laboribus Rempub. iuuare, & veritatem ab insidiis maleuolorum calumniatorum fortiter tueri haud sint dignati. Ego interea, Deo dante, secundas curas de emendatione temporum ab aliis diu promissas exspectabo, & si quid in iis castigatione dignū reperiatur, omnibus impertiar. Faxit Deus Optimus Maximus, vt otio tranquillo fruamur, & saluti tam priuatæ quam publice optime consulamus.

FINIS.

Math. 560

