ÜBER DAS

POTENTIAL VON KREIS UND SPIRALE

SOWIE SEINE VERWENDUNG

IN DER

THEORIE INDUCIRTER ELEKTRISCHER STRÖME.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

IN DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

VERFASST VON

MAX L. WEBER.

ÜBER DAS

POTENTIAL VON KREIS UND SPIRALE

SOWIE SEINE VERWENDUNG

IN DER

THEORIE INDUCIRTER ELEKTRISCHER STRÖME.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

IN DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

VERFASST VON

MAX L. WEBER.

Vorbemerkung.

Man kennt das Potential zweier geschlossenen unverzweigten linearen Ströme s und s', beide durchflossen von der Einheit des Stromes, unter der Form

$$P = -\tfrac{1}{2}\iint \frac{\cos(ds, ds')}{r}\, ds\, ds' = -\tfrac{1}{2}\iint \frac{\cos(ds, r)\cos(ds', r)}{r}\, ds\, ds' \ldots\ldots (1),$$

wenn die Entfernung der Elemente ds und ds' von bezüglich s und s' gleich r gesetzt, und die Integrationen über die Stromcurven s, s' genommen werden.

Aendert sich in dem einen Stromleiter etwa in s die Stromstärke allmählich um j, so hat der dadurch im andern Leiter inducirte Strom den Ausdruck

$$J = a\varepsilon' j\,.\,P \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

zum Maasse seiner Stärke, wenn ε' den reciproken Leitungswiderstand von s' und a eine von der Beschaffenheit beider Stromleiter unabhängige Inductionsconstante bedeutet. Findet die allmähliche und nicht sprungweise Aenderung j in der unendlich kleinen Zeit dt statt, so ist J ein Differentialstrom, erfolgt sie in der endlichen Zeit t, so ist J ein Integralstrom. Aendert sich nicht nur die Stromstärke in s, sondern auch die gegenseitige Lage der beiden Strombahnen, so wird der in s inducirte Strom durch die Differenz zweier solcher Ausdrücke wie (2) gemessen

$$J = a\varepsilon'(i_2 P_2 - i_1 P_1),$$

wobei i_2, P_2; i_1, P_1 Potential von s und s', sowie Stromstärke in s für die End- und Anfangslage des Systemes (s, s') vorstellen sollen.

I. Abschnitt.

Das Potential von zwei Kreisen in parallelen Ebenen.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit dem einfachen Falle, wo s und s' zwei Kreise mit den Radien R und R' sind und in verschiedenen, aber parallelen Ebenen so liegen, dass die Verbindungslinie ihrer Centra senkrecht zur Richtung der parallelen Ebenen steht.

Nimmt man alsdann die Ebene von s zur Ebene der x,y und das Centrum von s zum Anfangspunkt der Coordinaten, so liegt das Centrum von s' in der Z-Axe; gilt ferner als positive Drehungsrichtung in s und s' die Richtung von der positiven X-Axe zur positiven Y-Axe, und als positive Richtung von r die Richtung von ds nach ds', so sind die Coordinaten eines Punktes

$$\text{in } ds : z = o,\ y = R \sin\varphi,\ x = R\cos\varphi,\ ds = R\,d\varphi$$

$$\text{in } ds' : z' = c,\ y' = R'\sin\varphi',\ x' = R'\cos\varphi',\ ds' = R'\,d\varphi';$$

ferner ist: $r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + c^2 = c^2 + R^2 + R'^2 - 2RR'\cos(\varphi'-\varphi)$

$$\cos(ds, ds') = \cos(\varphi'-\varphi),\ \cos(ds, r).\cos(ds', r) = \frac{RR'\sin^2(\varphi'-\varphi)}{r^2}.$$

Wir erhalten sonach das Potential P in den beiden Formen, welche durch partielle Integration in einander übergehen

$$(3)\ \ldots\ P = -\frac{RR'}{2}\int_o^{2\pi} d\varphi \int_{\varphi'=\varphi}^{\varphi'=2\pi+\varphi} \frac{\cos(\varphi'-\varphi)\,d\varphi'}{r} = -\frac{R^2R'^2}{2}\int_o^{2\pi} d\varphi \int_{\varphi'=\varphi}^{\varphi'=2\pi+\varphi} \frac{\sin^2(\varphi'-\varphi)\,d\varphi'}{r^3}.$$

Setzen wir, um die erste Integration nach φ' auszuführen,

$$\varphi' - \varphi = \psi,\quad c^2 + R^2 + R'^2 + 2RR' = \lambda$$

$$\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{2} = \chi \qquad \frac{4RR'}{\lambda} = k^2,\ \text{stets} < 1,\ \text{wenn nicht } c = o\ R = R',$$

so wird $r^2 = \lambda\,(1 - k^2\cos^2\frac{\psi}{2}) = \lambda\,(1 - k^2\sin^2\chi)$.

$$\text{Dann ist } P = -\frac{RR'}{2}\int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^{2\pi} \frac{d\psi\cos\psi}{r} = +\frac{RR'}{2}\int_o^{2\pi} d\varphi\,\frac{4}{\sqrt{\lambda}}\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi\cos 2\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}.$$

Setzen wir $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\chi\, d\chi}{\varDelta\chi} = U$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\chi\, d\chi}{\varDelta\chi} = V$, $\varDelta\chi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi}$,

so wird
$$P = -\frac{4\,RR'\pi}{\sqrt{\lambda}}(U - V).$$

Da aber $U + V = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\varDelta\chi} = K$ und $K - k^2 U = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\chi\, \varDelta\chi = E$

also $U = \frac{K - E}{k^2}$

so erhalten wir endlich für $P = -\frac{4\,RR'}{\sqrt{\lambda}}\pi . (2U - [U+V])$

$$\left.\begin{aligned} P &= -\pi\sqrt{\lambda}\,[K(1 + k'^2) - 2E] \\ \text{wobei} \quad \lambda &= c^2 + (R + R')^2 \\ k^2 &= \frac{4\,RR'}{\lambda};\; k^2 + k'^2 = 1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4).$$

Obwohl nun die Formel (4) einfach genug ist, so ist es doch, zumal wenn keine Integral-Tafeln zu Gebote stehen, für die numerische Berechnung vortheilhafter, Θfunctionen einzuführen. Wir wollen daher die Formel (4) in Θfunctionen ausgedrückt nochmals schreiben, die einfachen Zwischenrechnungen aber übergehen. Es ist

$$\left.\begin{aligned} &P = -\pi^2 . \sqrt{RR'} . \frac{\Theta''(o, 2\nu)}{\Theta'_1(o, 2\nu)}, \\ \text{wobei}\quad &\Theta(x,\nu) = \Theta(x,q) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x \pm \ldots \\ &\Theta_1(x,\nu) = \qquad 2q^{\frac{1}{4}} \sin x - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5x \mp \ldots. \\ &\Theta_2(x,\nu) = \qquad 2q^{\frac{1}{4}} \cos x + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + \ldots. \\ &\Theta_3(x,\nu) = 1 + 2q^1 \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \ldots. \\ &\Theta'(o,\nu) = \frac{d\,\Theta(x,\nu)}{dx} \quad \text{für } x = o \\ &x . \frac{2K}{\pi} = u = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi};\quad \nu = \pi\frac{K'}{K};\; q = e^{-\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Berechnet man jetzt q direct aus k^2, wenn R, R', c gegeben sind, so ist es ein Leichtes, P oder noch besser log P aus den bekannten nach q steigenden Reihen für $\Theta(o)$, $\Theta_1(o)$ . . . zu finden.

Entwickelt man endlich r^{-1} oder r^{-3} unter dem Integralzeichen in einer der beiden Formeln (3) für P, nach Potenzen von $\cos \psi$, und integrirt die entstandene Binomialreihe Glied für Glied nach ψ und φ, so erhält man noch einen Reihenausdruck für P, welcher, wenn c sehr gross gegen R und R' oder $R(R')$ sehr klein gegen $R'(R)$ ist, besonders gute Dienste leistet

$$(6) \ldots . P = -\frac{\pi.^2 R^2 R'^2}{M^{\frac{3}{2}}}\left[1 + \frac{15}{8}\left(\frac{RR'}{M}\right)^2 + \frac{315}{64}\left(\frac{RR'}{M}\right)^4\right.$$

$$\left. + \ldots\ldots \frac{1.3.5 \ldots\ldots (4n-1).(4n+1).1.3 \ldots (2n+1)}{2.4.6 \ldots\ldots 4n.(4n+2).2.4 \ldots (2n+2)} 2^{2n+2} . \left(\frac{RR'}{M}\right)^{2n} + \ldots\ldots\right]$$

$$M = c^2 + R^2 + R'^2.$$

Diese Reihe convergirt stets mit Ausnahme des Falles $k^2 = 1$, d. h. wenn $c = o$ und $R = R'$; alsdann divergirt die Reihe nach dem Gesetz der harmonischen Reihe, wovon man sich durch eine Entwickelung des Quotienten aus dem $\overline{n+2}$ten und $\overline{n+1}$sten Gliede nach fallenden Potenzen von n leicht überzeugt. Das Potential eines Kreisstromes auf sich selbst ist sonach unendlich, und nicht allein die Reihe, sondern auch die Formel (4) und (5) werden unendlich wie log nat $\frac{4}{k'}$ für $k' = 0$, der von Legendre gefundene Grenzwerth von K für $k = 1$. Aus den Werthen (4), (5), (6) erhält man jetzt ein Maass für den Inductionsstrom, inducirt im Kreise s' durch eine Aenderung der Stromstärke im Kreise s um j, wenn ε' den reciproken Widerstand von s' bezeichnet, oder genauer den Widerstand im Kreise s' und den übrigen Theilen der Stromkette

$$(2) \ldots\ldots J = aj.\varepsilon' P.$$

Die Differenz zweier solchen Ausdrücke wie (2) misst den Strom, welcher durch Aenderung der Stromstärke in s und Aenderung der gegenseitigen Lage von s und s' inducirt wird, wenn in der Anfangs- und Endlage die beiden Kreise parallel und ihre Centra auf derselben Axe liegen, da wir nur für diesen Fall das Potential berechnet haben.

Unterwerfen wir am Schlusse dieses Abschnittes die Variation des Potentiales P, wenn R, R', c beliebige Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen, einer kurzen Betrachtung. Was von P, also der elektromotorischen Kraft des Inductionsstromes, gilt auch von der Intensität J, wenn der Widerstand von s′ gegen den des übrigen Schliessungsdrahtes und des Galvanometers verschwindet.

Ist zunächst R und R′ constant, wenn c variirt, so erreicht P ein Minimum Null, wenn der Kreis s′ auf der positiven oder negativen Seite der Z-Axe im Unendlichen liegt, ein Maximum, wenn der Kreis s′ in die Ebene von s fällt. Im Uebrigen ändert sich P stetig und es gehört zu gleichen aber entgegengesetzten Werthen von $c = \pm c'$ das nämliche P. Der Maximalwerth von P lautet

$$P = -\frac{2\pi}{(R'+R)}\left[K.(R'^2+R^2) - E(R'+R)^2\right].$$

$$k^2 = \frac{4RR'}{(R'+R)^2}.$$

Ist ferner c = o und R′(R) variabel, so wird P Null für $R'(R) = \infty$ und für $R'(R) = o$; dagegen wird P unendlich, wenn $R' = R$ ist. Die Unstetigkeit von P für $R' = R$ und $c = o$ hat ihren Grund im Auftreten von unendlichen Elementen $\left(\frac{1}{r}\right)_{r=o}$ unter dem Integralzeichen in Formel (3) und folgt schon aus den allgemeinen Eigenschaften des Potentiales.

Ist zuletzt c endlich constant und $R' \gtrless R$ variabel, so erlangt P ein endliches Maximum und zwar, wenn R′ unveränderlich ist, für ein R, welches die Bedingung $\frac{dP}{dR} = o$ erfüllt, oder

$$(E(2-k^2) - 2Kk'^2)R' - Ek^2R = o$$

oder

$$\frac{c^2 + R'^2 - R^2}{c^2 + (R'-R)^2} = \frac{K}{E}.$$

Ist R gegeben und unveränderlich, so muss dasjenige R′, für welches P ein Maximum wird, einer analogen Bedingungsgleichung genügen, welche man durch Vertauschung von R′ und R aus der vorigen erhält. Da $K > E$, so muss das betreffende R′ oder R, für welches P zum Maximum wird, stets grösser als das gegebene R oder R′ sein. Man findet als erste Annäherung,

wenn R gegeben: $R' = \sqrt{2(c^2+R^2)}$

„ R′ „ $R = \sqrt{2(c^2+R'^2)}$.

Sind dagegen bei constantem c, R und R′ gleich geworden und lässt man $R = R'$ variiren, so besitzt P kein eigentliches im Endlichen gelegnes Maximum mehr, weil es jetzt vom Werthe Null für $R = R' = o$ bis zum Werthe unendlich für $R = R' = \infty$ anschwillt.

Am wichtigsten für den Versuch sind die beiden Fälle, wo c sehr gross gegen R und R' und wo R'(R) sehr klein gegen R(R') geworden sind. Für ein sehr grosses c gegen R und R' erhält man sowohl aus der Reihe (6) als aus der zweiten Form des Integrales (3), den bekannten Werth von P, wenn f und f' die Flächen der Kreise s und s' bedeuten:

$$-P = \frac{ff'}{c^3} \qquad \text{daraus die Kraft } \frac{dP}{dc} = \frac{3ff'}{c^4}.$$

Wenn R sehr klein gegen R' ist, wird P

$$P = -f\frac{R'^2\pi}{(c^2+R'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}f\frac{dC}{dc} \quad \text{wenn } C = 2\pi - \frac{2\pi c}{\sqrt{c^2+R'^2}}.$$

Hier ist C die Kegelöffnung von s' in Bezug auf den kleinen Kreis s, nach Neumann's Bezeichnung (cfr. Neumann: Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme I, 1845, § 12).

II. Abschnitt.

Potential von Spirale und Kreis.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter, und ersetzen den Stromkreis s des ersten Abschnittes durch eine Spirale S, welche aus sehr vielen, dicht aneinander liegenden gleichweiten Kreiswindungen besteht. Wir lassen die Axe der Spirale mit der Z-Axe concidiren, legen die Ebene der YX durch die Mitte der Spirale, senkrecht zur Axe der letzteren, und nennen Windungszahl, Länge und Radius der Spirale bezüglich N, L, R. Der isolirte Kreis s' mit dem Radius R' liege abermals parallel zu den Kreiswindungen der Spirale und sein Centrum sei um z' vom Coordinatenanfang entfernt und in der Z-(Spiral) Axe befindlich. Sind die Windungen der Spirale dicht genug aneinander liegend, so können wir dieselbe als einen sogenannten elektrodynamischen Cylinder betrachten und behandeln. Bezeichnet man nun die Anzahl der Windungen auf der ganzen Längsaxe L der Spirale mit N, so wird die Anzahl der Windungen, welche auf dem Stücke dz derselben liegen, $\frac{N}{L}dz$ sein, und wir können demnach mit Anwendung der

Formel (3) im Abschnitte I, das Potential einer Spirale und eines Kreises in der erwähnten Lage schreiben

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{NR^2R'^2}{2L}\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\psi \sin^2\psi \int\limits_{z=-\frac{L}{2}}^{z=+\frac{L}{2}} dz\,.\left(R_0+(z'-z)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{NR^2R'^2}{L}\pi\int\limits_0^{2\pi} d\psi\sin^2\psi \int\limits_{z=-\frac{L}{2}}^{z=+\frac{L}{2}} \frac{dz}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7),$$

wobei $r^2 = R_0 + (z'-z)^2$, $R_0 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\psi$ und ψ, φ die Bedeutung vom Abschnitt I haben.

Um die Integration nach z ausführen zu können, setzen wir $z' - z = y$. Alsdann wird

$$P = -\frac{NR^2R'^2\pi}{L}\Bigg|_{y=z'-\frac{L}{2}}^{y=z'+\frac{L}{2}} y\,.\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\psi\sin^2\psi}{R_0(y^2+R_0)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (7^a),$$

wenn durch den vorgesetzten Strich mit dem Grenzbuchstaben die Differenz der Werthe, welche der Ausdruck hinter dem Striche für $y = z' + \frac{L}{2}$ und $y = z' - \frac{L}{2}$ annimmt, angedeutet wird.

Stellen wir jetzt noch das Integral (7^a) durch die kanonischen Formen der elliptischen Integrale dar und führen hierbei die Bezeichnungen ein

$$\lambda = y^2 + (R'+R)^2; \quad m = \frac{(R'+R)^2}{\lambda} > k^2 \text{ so lange } R \gtrless R' \quad \psi = 2\chi + \pi$$

$$k^2 = \frac{4RR'}{\lambda}; \qquad \frac{k^2}{m} = 1 - k'^2\sin^2\alpha = \varDelta^2(\alpha,k') \qquad n = m - k^2\sin^2\chi$$
$$= m\left(1 - \varDelta^2(\alpha,k')\sin^2\chi\right).$$

Alsdann wird $y^2 + R_0 = \lambda(1 - k^2\sin^2\chi)$; $R_0 = \lambda n$

und
$$P = -\frac{4NR^2R'^2.\pi}{L}\Bigg|_{y=z'-\frac{L}{2}}^{y=z'+\frac{L}{2}} y.\lambda^{-\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi\sin^2 2\chi}{n.\,\varDelta\chi}.$$

Da nun $\sin^2 2\chi = 4\sin^2\chi - 4\sin^4\chi$

und
$$\frac{4}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi \sin^2\chi}{(1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\chi)\,\Delta\chi} = \frac{4}{m}\,\frac{\left(\frac{\pi}{2}+(K-E)\,F(\alpha,k')-K\,E(\alpha,k')\right)}{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha,k')} = U$$

sowie
$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{(1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\chi)\,\Delta\chi} = m\,K + m\,\frac{k^2}{4}\,U = V\,,$$

so wird nach einigen leichten Reductionen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi \sin^2 2\chi}{n.\Delta\chi} = U + \frac{4}{k^4}\,(m\,K + K - E - V)$$

$$= U\,(1-\frac{m}{k^2}) + \frac{4}{k^4}\,(K-E)$$

$$(8)\left\{\begin{aligned} &P = -\frac{N\pi}{L}\left[\,y\cdot\sqrt{\lambda}\left[K-E-\left(\frac{\pi}{2}+(K-E)\,F(\alpha,k')-K\,E(\alpha,k')\right)\sqrt{\frac{m.m-k^2}{1-m}}\,\right]\right]_{y=z'-\frac{L}{2}}^{y=z'+\frac{L}{2}} \\ &\lambda = y^2+(R'+R)^2 \\ &k^2 = \frac{4RR'}{\lambda}\,;\; m = \frac{(R'+R)^2}{\lambda} \\ &\frac{k^2}{m} = \Delta^2(\alpha,k')\,;\left(\frac{m\,(m-k^2)}{1-m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{k^2\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\Delta(\alpha,k')} = +\sqrt{\frac{(R'+R)^2(R'-R)^2}{y^2\lambda}} = \frac{R'^2-R^2}{y\cdot\sqrt{\lambda}}\,. \end{aligned}\right.$$

Durch Multiplication des Potentiales P mit a, j und ε', erhält man einen Werth für den Inductionsstrom, welcher im Kreise s' durch Aenderung der Stromstärke in der Spirale um j erregt wird; ersetzt man ε' durch ε, das ist den Widerstand in der Spirale S und ihrer Schliessung, so stellt $a\,j\,.\,\varepsilon P$ ein Maass des in der Spirale inducirten Stromes vor, wenn sich im Stromeskreise s' die Intensität um j geändert hat. Lassen wir die Stromstärke wegen des störenden Factors ε' einstweilen unberücksichtigt, so können wir vom Potentiale Formel (8), d. h. von der elektromotorischen Kraft, welche im Systeme (S, s') erzeugt wird, die Stromstärke mag sich in S oder s' ändern, im Hinblick auf die Form von No. 8 die Sätze aussprechen:

1. Die elektromotorische Kraft im Systeme (S, s') ist proportional der Windungszahl von der Spirale S. — Dieser Satz gilt ganz allgemein bei einer beliebigen gegenseitigen Lage von S und s'.

2. Die elektromotorische Kraft im Systeme (S, s') ist nur abhängig von der Entfernung des Kreises s' von der Mitte der Spirale S, nicht von der Lage des Kreises s' auf der positiven oder negativen Z-(Spiral) Axe.

3. Die elektromotorische Kraft im Systeme (S, s'), dessen Spirale den Radius R, die Windungszahl N, die Länge L, und dessen Kreis s' den Radius R' hat, ist gleich der elektromotorischen Kraft in einem zweiten Systeme (S', s), dessen Spirale der Radius R', die Windungszahl N, die Länge L und dessen einzeln liegendem Kreise s der Radius R zukommt, vorausgesetzt, dass die Entfernung des einzeln liegenden Kreises von der Mitte der Spirale in beiden Systemen dieselbe ist.

Der dritte Satz beruht auch auf einer wiederholten Anwendung der Fundamentaleigenschaft des Potentiales, dass das Potential von s auf s' gleich ist dem Potential von s' auf s. Vertauscht man nämlich jede Windung s_k von S mit s', so erhält man:

$$\begin{aligned} P(S,s') &= P(s_1,s') + P(s_2,s') + P(s_3,s') + \ldots\ldots P(s_N,s') \\ &= P(s'_1,s) + P(s'_2,s) + P(s'_3,s) + \ldots\ldots P(s'_N,s) = P(S',s) \end{aligned}$$

Man kann diesen Satz auch verallgemeinern für eine beliebige gegenseitige Lage der Spirale S und des Kreises s', wenn nur in beiden Systemen (S, s') und (S', s) die Neigung zwischen der Ebene des Kreises s (oder s') und eines Kreises der Spirale S' (oder S) und ausserdem die Länge der Verbindungslinie des Centrums vom einzeln liegenden Kreise und des Mittelpunkts der Spirale, sowie die Neigung dieser Verbindungslinie gegen die nur erwähnten zwei Ebenen dieselben bleiben. Dieser Verallgemeinerung ist auch der sub 2 angeführte Satz fähig. —

Bei der Discussion des Potentiales P in No. 8, zu der wir uns jetzt wenden, können wir uns auf die Fälle eines positiven z' und eines $R' > R$ beschränken, da wir mit Hülfe der Sätze sub 2 und 3 die anderen Fälle eines negativen z' und eines grösseren Radius R als R' auf die ersten reduciren können. Setzen wir noch fest, dass der von uns durch die Gleichung $\Delta^2(a, k') = \frac{k^2}{m}$ eingeführte Hülfswinkel stets positiv und zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ genommen werden soll, so muss auch die Wurzelgrösse $\sqrt{\frac{m.(m-k^2)}{(1-m)}} = \frac{k^2 \operatorname{tang} a}{\Delta(a,k')}$ stets positiv sein, und das Aggregat

$$(9^a) \ldots\ldots K.E(a,k') - (K-E)F(a\,k') = B$$

stellt einen Theil des Octanten einer Kugeloberfläche vom Radius 1 dar, welcher vom Bogen einer sphärischen Ellipse und zwei Seitenlinien des Octanten ausgeschnitten wird und von o — für $\sin a = o$ — bis $\frac{\pi}{2}$ — für $\sin a = 1$ — wächst. Durch diese Bestimmung vereinfacht sich die Formel (8) etwas. Man kann jetzt schreiben:

$$P = -\frac{N\pi}{L}\left[y\sqrt{\lambda}(K-E) \mp \left(\frac{\pi}{2}-B\right)(R'^2-R^2)\right]_{y=z'-\frac{L}{2}}^{y=z'+\frac{L}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

wobei das negative oder positive Zeichen vor $\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$ gilt, je nachdem y und $(R'-R)$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen besitzen.

Untersucht man jetzt das Verhalten der beiden Glieder von P in Formel (9) für ein variables z' oder y und stellt ein System von Werthen P auf für die auf einander folgenden Werthe des Argumentes z'

$$+\infty \ldots\ldots n\frac{L}{2}, \overline{n-1}\frac{L}{2}, \ldots\ldots 3\frac{L}{2}, 2\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, 0, -\frac{L}{2}, -2\frac{L}{2}, -3\frac{L}{L} \ldots\ldots$$
$$-(n-1)\frac{L}{2}, -n\frac{L}{2} \ldots\ldots -\infty$$

so ergiebt sich, dass der numerische Werth des an und für sich stets negativen Potentiales von Spirale und Kreis für $z' = o$, d. h. wenn der Kreis s' durch die Mitte der Spirale geht, ein Maximum, für $z' = \pm\infty$ aber ein Minimum Null erreicht, und im Uebrigen dem Potentiale von Kreis auf Kreis analog verläuft. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich auch leicht auf folgende Weise. Verzeichnet man den Verlauf des Potentiales von s' auf irgend einen Kreis s_k der Spirale, so gibt die graphische Darstellung eine Wellenbergähnliche Curve, deren Gipfel die Abscisse $z = c_k$ hat, wenn das Centrum des zur Z-Axe senkrechten und seinen Ort nicht verlassenden Kreises s_k sich im Abstande c_k von der Mitte der Spirale befindet. Die Curve liegt symmetrisch zu beiden Seiten der in $z = c_k$ errichteten Ordinate. Dasselbe Verfahren auf alle Kreise $s_1, s_2, \ldots\ldots s_N$ der Spirale angewendet, liefert eine Reihe gegen einander verschobener, sonst aber gleicher Wellenberge, deren Fusspunkte sämmtlich einerseits bei $z = +\infty$, andrerseits bei $z = -\infty$, und deren gleichhohe Gipfel über der Strecke $z = -\frac{L}{2}$ bis $z = +\frac{L}{2}$ sich befinden. Die Summation dieser Curven führt auf eine neue analoge Curve, deren Gipfel bei $z = o$ liegen muss und die Höhe hat

$$-P = \frac{2\pi N}{L}\left[\frac{L}{4}\cdot\sqrt{\frac{L^2}{4}+(R'+R)^2}\,(K-E)-\left(\frac{\pi}{2}-B\right)(R'^2-R^2)\right] \ldots\ldots (10)$$

$$k^2 = \frac{4RR'}{\frac{L^2}{4}+(R'+R)^2}$$

Um den Verlauf des Potentiales P bei constantem z' und variablem R' (oder R) kennen zu lernen, wenden wir ein ähnliches Verfahren an. Betrachtet man den Abstand c der beiden Kreise des ersten Abschnittes als einen variabeln Parameter und verzeichnet den Verlauf des Potentiales P (s, s'), wenn der Radius R' des einen Kreises von o bis ∞ variirt, für jedes c durch eine Curve, so erhält man ein System von Curven, deren Grenze einerseits die positive R'-Axe von o bis ∞ für $c = \infty$, andrerseits für den Parameter $c = o$ eine Curve ist, welche sich der im Abstande $R' = R$ errichteten Ordinate von beiden Seiten asymptotisch nähert. Die Grenzcurve mit dem Parameter $c = o$ und dem Maximum ∞ für $R' = R$, hüllt alle folgenden Curven mit einem grösseren Parameter c ein, deren Maximum um so kleiner wird und um so mehr über $R' = R$ hinausrückt, je mehr c wächst. Die Abscisse des Maximums muss die im ersten Abschnitte angegebene Bedingung erfüllen. Sämmtliche Curven des Systems berühren in den beiden Punkten $R' = o$ und $R' = \infty$ die R'-Axe, schneiden sich aber sonst nirgends, weil das Potential zweier Kreise s und s' für numerisch verschiedene c nothwendig auch verschiedene Werthe annehmen muss. Eine Discussion der leicht zugänglichen Ausdrücke für P (s, s'), $\frac{dP}{dR'}$, $\frac{dP}{dc}$ im ersten Abschnitte, bestätigt diese Behauptungen.

Durch Summation aller derjenigen Curven dieses Systemes, welche man erhält, wenn der Parameter c alle Werthe von $z' - \frac{L}{2}$ bis $z' + \frac{L}{2}$ durchläuft, entsteht eine neue Curve derselben Art, und diese Curve stellt den Verlauf des Potentiales P (S, s') von Kreis und Spirale dar, wenn für ein bestimmtes z' und ein constantes R, der Radius R' alle Werthe von o bis ∞ durchläuft. Die Abscisse R'_m ihres Maximums muss demnach zwischen den Grenzen R'_1 und R'_N liegen, wenn das Potential von s' auf die am nächsten und am entferntesten gelegene Endwindung von S bezüglich für R'_1 und R'_N ein Maximum wird.

Je kleiner der Abstand z' von der Mitte der Spirale, um so näher liegt R'_m der einen Grenze R'_1 und um so grösser wird der zugehörige Maximalwerth P. Ist endlich val. num. $z' \leqq \frac{L}{2}$, so tritt unter den Curven $P(s, s', R')$, aus deren Summe $P(S, s', R')$ gebildet wird, die Grenzcurve $P(s, s')$ mit dem Parameter $c = o$ und dem Maximum ∞ auf, überwiegt alle übrigen Curven $P(s, s')$ und hat für $P(S, s')$ ein Maximum und, wie wir sogleich sehen werden, einen sogenannten *point saillant* bei der Abscisse $R' = R$ zur Folge. Für $z' = \frac{1}{2} L$ und $z' = o$ notiren wir diese Maximalwerthe von $P(S, s')$, von denen der letzte der grösste endliche Werth ist, welchen $P(S, s')$ überhaupt erlangen kann.

$$(11) \ldots\ldots \quad P = -N\pi . \sqrt{L^2 + 4R^2} . (K - E) \quad \text{für } z' = \frac{L}{2}, R' = R, k^2 = \frac{4R^2}{L^2 + 4R^2}$$

$$(12) \ldots\ldots \quad P = -N\pi . \sqrt{\frac{L^2}{4} + 4R^2} . (K - E) \quad \text{für } z' = 0, R' = R, k^2 = \frac{4R^2}{\frac{L^2}{4} + 4R^2}$$

Ist der Radius der Spirale S gleich dem des Kreises s' geworden, und lässt man $R = R'$ von 0 bis ∞ variiren, so existirt kein endliches Maximum für $P(S, s')$; das Potential wächst von 0 für $R = R' = 0$ bis ∞ für $R = R' = \infty$. Um das Verhalten des Potentiales für $R = R'$ und $z' \leqq \frac{L}{2}$ zu prüfen, bilden wir $\frac{dP}{dR'}$. Setzt man $\Pi = -\frac{LP}{\Pi N} = RR' \iint \frac{d\psi \, dz \cos \psi}{r} = R^2 R'^2 \iint \frac{d\psi \, dz \sin^2 \psi}{r^3}$, so ist

$$\frac{d\Pi}{dR'} = \frac{\Pi}{R'} - RR'^2 \iint \frac{dz \, d\psi \cos \psi}{r^3} + R^2 R' \iint \frac{dz \, d\psi}{r^3} - \frac{\Pi}{R'}$$

$$= 4RR' \left[\frac{yK}{\sqrt{\lambda}(R' + R)} \mp \left(\frac{\pi}{2} - B \right) \frac{1}{2R} \right]_{y = z' - \frac{L}{2}}^{y = z' + \frac{L}{2}} = 4RR' \left[\frac{My}{R' + R} \mp \frac{Ny}{2R} \right]_{y = z' - \frac{L}{2}}^{y = z' + \frac{L}{2}}$$

wenn $\frac{yK}{\sqrt{\lambda}} = My$ und $\left(\frac{\pi}{2} - B \right) = Ny$ gesetzt wird.

Nimmt man wie in No. (9^a) B stets positiv und zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so gilt auch hier das negative oder positive Zeichen vor Ny, je nachdem y und $(R' - R)$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben.

Da nun für $R' = R$ und $y \gtrless 0$; $k^2 = \frac{4R^2}{y^2 + 4R^2}$, $\sin^2 \alpha = 0$; $My = Kk'$; $Ny = \frac{\pi}{2}$

„ $y = 0$; $= 1$; $= 1$; $= 0$; $= 0$

und Kk' von 0 für $y = o\ (k^2 = 1)$ bis $\frac{\pi}{2}$ für $y = \infty\ (k^2 = o)$ wächst, so ergibt sich, je nachdem man von einem R' grösser als R oder einem R' kleiner als R zur Grenze $R' = R$ übergeht

	$R' = R + \varepsilon$	$R' = R - \varepsilon$
$y > 0$	$2R(My - Ny) = 2R\left(Kk' - \frac{\pi}{2}\right)$	$2R(My - Ny) = 2R\left(Kk' + \frac{\pi}{2}\right)$
$y = 0$	$= 0$	$= 0$
$y < 0$	$= 2R\left(Kk' + \frac{\pi}{2}\right)$	$= 2R\left(Kk' - \frac{\pi}{2}\right)$

und weiter, indem man $\frac{L}{2} = l$ setzt

	$R' = R + \varepsilon$	$R' = R - \varepsilon$	Differenz
$z' = 2l;$	$\frac{1}{2R}\frac{d\Pi}{dR'} = M(3l) - M(l)$ positiv;	$\frac{1}{2R}\frac{d\Pi}{dR'} = M(3l) - M(l)$ positiv	0
$= l$	$= M(2l) - \frac{\pi}{2}$ negativ	$= M(2l) + \frac{\pi}{2}$ positiv	$2\pi R$
$= 0$	$= 2\left(M(l) - \frac{\pi}{2}\right)$ negativ	$= 2\left(M(l) + \frac{\pi}{2}\right)$ positiv	$4\pi R$
$= -l$	$= M(2l) - \frac{\pi}{2}$ negativ	$= M(2l) + \frac{\pi}{2}$ positiv	$2\pi R$
$= -2l$	$= M(3l) - M(l)$ positiv	$= M(3l) - M(l)$ positiv	0

Aus dieser Tabelle folgt aber: Wenn der Parameter $z' \leqq \frac{L}{2}$, so springt die trigonometrische Tangente an die zugehörigen Curven $P(S, s', R')$ im Punkte $R' = R$ von einem positiven Werthe zu einem numerisch kleineren negativen Werthe über. $P(S, s')$ hat aber dann für $R' = R$ einen *point saillant* und ein Maximum. —

Wir wenden zum Schlusse dieses Abschnittes das erhaltene Material auf mehrere specielle Fälle an. Um zunächst das Potential und die Induction einer Spirale S auf eine ihrer eigenen Windungen s_k, welche um $z' = \delta . \frac{L}{2}$, wo δ ein ächter Bruch ist, von der Mitte der Spirale absteht, zu behandeln, haben wir in der allgemeineren Formel (8) oder (9) $R = R'$ zu setzen. Alsdann verschwindet das zweite Glied des Potentiales, welches den Sector der Kugeloberfläche enthält und man erhält für P

$$(13)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{lll} P = -\frac{\pi N}{2}\Big\{(1+\delta)\sqrt{\lambda_2}\Big(K(k_2)-E(k_2)\Big)+(1-\delta)\sqrt{\lambda_1}\Big(K(k_1)-E(k_1)\Big)\Big\} & & \\ \text{wo} \quad \lambda_2 = \frac{L^2}{4}(1+\delta)^2+4R^2 & & \lambda_1 = \frac{L^2}{4}(1-\delta)^2+4R^2 \\ \quad\quad k_2 = \frac{4R^2}{\lambda_2} & & k_1 = \frac{4R^2}{\lambda_1} \end{array}\right.$$

Für das Potential von S auf eine der beiden Endwindungen oder auf die mittelste Windung geht die Formel (13) in bezüglich (11) und (12) über.

$$11^{\text{bis}}\ldots\ldots\; P = -\pi . N\sqrt{L^2+4R^2}.(K-E)$$

$$k^2 = \frac{4R^2}{L^2+4R^2}$$

$$12^{\text{bis}}\ldots\ldots\; P = -\pi N . \sqrt{\frac{L^2}{4}+4R^2}.(K-E)$$

$$k^2 = \frac{4R^2}{\frac{L^2}{4}+4R^2}$$

Das Potential und somit auch die inducirte elektromotorische Kraft der Spirale S auf die mittelste Windung ist, wie oben nachgewiesen wurde, stärker als Potential und elektromotorische Kraft der Spirale auf irgend eine andere Windung. Ist die Länge der Spirale sehr bedeutend gegen den Radius R, so kann man (K — E) durch $\frac{\pi}{4}k^2$, $\lambda = L^2 + 4R^2$ durch $L^2\lambda = \frac{L^2}{4} + 4R^2$ durch $\frac{L^2}{4}$ ersetzen, und die Formeln (11), (12) gehen über in:

$$P = -\frac{\pi^2 N R^2}{L} = -\frac{N\pi f}{L}\ \ldots\ldots\ (11)$$

$$P = -\frac{2\pi^2 . N . R^2}{L} = -2.\frac{N\pi f}{L}\ \ldots\ldots\ (12)$$

wenn $f = R^2\pi$ die Fläche des Kreises s bezeichnet; das heisst:

„Bei hinlänglich grossem L gegen R sind Potential, elektromotorische Kraft und inducirte Stromstärke der Spirale S auf ihre mittelste Windung doppelt so gross als auf eine der beiden Endwindungen.“

Die Formeln (11), (12), (13) lassen sich auch sehr einfach in Θfunctionen wiedergeben. Wenn zwischen k, ν; k_1, ν_1; k_2, ν_2 die bereits im I. Abschnitte notirten Beziehungen obwalten und $\left(\frac{d^2 \log \Theta(x,\nu)}{d x^2}\right)_{x=o} = l'' \Theta(o,\nu)$ gesetzt wird, so gelten die Formeln:

$$P = -\frac{\pi^2 N}{2}\sqrt{L^2+4R^2}\;.\;\frac{l''\Theta(o,\nu)}{\Theta_3(o,\nu)^2} = -\pi^2 . N R \frac{l''\Theta(o,\nu)}{\Theta_2(o,\nu)^2} \;\ldots\ldots\; (11)$$

$$P = -\frac{\pi^2 N}{2}\sqrt{\frac{L^2}{4}+4R^2}\;.\;\frac{l''\Theta(o,\nu)}{\Theta_3(o,\nu)^2} = -\pi^2 . N R \frac{l''\Theta(o,\nu)}{\Theta_2(o,\nu)^2} \;\ldots\ldots\; (12)$$

$$P = -\pi^2 N R \left\{\frac{(1+\delta)}{2}\frac{l''\Theta(o,\nu_2)}{\Theta_2(o,\nu_2)^2} - \left(\frac{1-\delta}{2}\right).\frac{l''\Theta(o,\nu_1)}{\Theta_2(o,\nu_1)^2}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (13)$$

Gehen wir jetzt zur Betrachtung des Falles über, in welchem der Radius R' des Kreises sehr gross wird gegen den Radius R einer Spiralwindung. Es folgt dann sowohl aus dem Integrale 7^a als aus (9)

$$(14) \;\ldots\ldots\; P = -\frac{N}{L}\pi R^2 \pi . \left[\frac{z'+\frac{L}{2}}{\sqrt{\left(z'+\frac{L}{2}\right)^2+R'^2}} - \frac{\left(z'-\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{\left(z'-\frac{L}{2}\right)^2+R'^2}}\right]$$

Bezeichnen wir noch den Abstand des Kreises s' vom nächstgelegenen Ende der Spirale mit x, setzen die Anzahl der Windungen $\frac{N}{L}$, welche auf die Längeneinheit der Spirale kommen, gleich α und die Fläche einer Spiralwindung $R^2\pi = f$, so können wir den Strom, welcher im Kreise s' vom Radius R' und dem reciproken Leitungswiderstande ε' durch eine Aenderung der Stromstärke in der Spirale S um j inducirt wird, messen durch den Werth J

$$(14^a) \;\ldots\ldots\; J = -a . \pi . \varepsilon'(j f \alpha) . \left[\frac{x+L}{\sqrt{(x+L)^2+R'^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R'^2}}\right]$$

Vorstehender Werth ist derselbe, welchen Neumann (Abhandlung vom Jahre 1845. Beisp. II) für den durch einen linearen Magneten in einem kreisförmigen Leiter inducirten Strom bei übrigens gleicher Anordnung wie in unserm Falle, angibt, wenn man noch den erregten Magnetismus $\varkappa f$ an den beiden Polen des prismatischen Eisenkörpers nach Ampère's Bezeichnung durch $\frac{1}{2} f j \alpha$ ersetzt.

Die Formeln (14) und (14^a) gelten aber gleichzeitig, wie wir oben gesehen haben, für eine Spirale S' mit dem Radius R', dem Leitungswiderstande ε' und einem einzeln liegenden Kreis s vom Radius R und der Fläche $\pi R^2 = f$, wenn R' sehr gross gegen R und die übrige Anordnung unverändert bleibt. Es lässt sich demnach immer ein System, welches aus einem linearen zu magnetisirenden Stabe und einem kreisförmigen Leiter von endlichen Dimensionen besteht, ersetzen durch ein zweites System, bestehend aus einem sehr kleinen Magnete und einer endlichen Spirale, und umgekehrt. Das Potential, also auch die inducirte elektromotorische Kraft sind in beiden Systemen dieselben, wenn sich der Magnetismus der Nadel und des Stabes um dieselbe Grösse ändert: die inducirten Stromstärken verhalten sich aber wie 1:N, da der Radius der Spirale im zweiten System, dem des Kreises im ersten gleich vorausgesetzt wird. Setzen wir in Formel (14) $z' = o$, oder was dasselbe, lassen wir den Kreis s' in die Ebene der mittelsten Spiralwindung rücken, so nehmen P und J ihre Maximalwerthe an, es wird

$$J = \frac{-\pi . a . \varepsilon' (j . f \alpha) L}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + R'^2}} \quad \ldots\ldots (15)$$

Am Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch eine Anwendung der erhaltenen Formel auf diejenigen Erscheinungen machen, welche bisher mit dem freilich unpassenden Namen der unipolaren Induction belegt wurden, und zu diesem Zwecke die folgende Anordnung treffen. Die Spirale S rotire um ihre metallne Axe in der von der positiven X-Axe zur positiven Y-Axe genommenen Drehungsrichtung. Auf derselben Axe befinden sich zwei leitende kreisförmige Metallscheiben mit den Radien R_2 und R_1, deren Centra in der Axe liegen und bezüglich um z_2 und z_1 von der Mitte der Spirale, also der yx-Ebene abstehen. Während die Spirale S mit den beiden Scheiben in der angegebenen Weise um die Z-Axe rotiren, schleifen zwei Metallfedern auf den Rändern der zwei Scheiben. Die Feder der oberen Scheibe ist mit derjenigen der unteren durch einen Schliessungsdraht, in welchen das Galvanometer eingeschalten ist, verbunden. Diese schleifenden Federn sammt ihrem Verbindungsdrahte, können als ungeschlossene Leiter betrachtet werden, welchen wir der Kürze halber s und dessen Leitungswiderstand wir ε nennen wollen; in diesem Leiter s wird nun ein Strom J inducirt, wenn die rotirende Spirale vom constanten Strome i durchlaufen wird. Derselbe Strom J, seiner Grösse und seinem Vorzeichen nach wird in s erregt, wenn S vom constanten Strome i durchflossen ruhet und der Leiter s sich in der entgegengesetzten Richtung bewegt, als zuvor die Spirale. Die Intensität des erregten Stromes kann aber nach Neumann's und Weber's Untersuchungen, da der Fall einer eigentlichen Gleitung nicht vorliegt, gemessen werden durch den Ausdruck

$$J = a \varepsilon i (P_2 - P_1) - \quad \ldots\ldots (16)$$

wobei a die von der Rotationsgeschwindigkeit abhängige Inductionsconstante, P_2, P_1 die Potentiale von S auf die Peripherien s_2 und s_1 der beiden im Abstande

z_2 und z_1 befindlichen kreisförmigen Scheiben bezeichnen. Um einstweilen von dem Vorzeichen des J und der Richtung des Inductionsstromes abzusehen, können wir von der Grösse desselben auf Grund der erhaltenen Formeln für P_2 und P_1 Folgendes aussagen. Der Strom J erreicht ein Minimum 0, wenn $P_2 = P_1$, das ist in den folgenden Fällen:

1) $R_1 = 0$ oder ∞
   $R_2 = 0$ oder ∞
2) $z_2 = z_1 = \infty$
3) $R_1 = R_2$; $z_2 = \pm z_1$
4) $P(R_1 z_1) = P(R_2, z_2)$ bei endlichen verschiedenen R_1 und R_2 und endlichen $z_1\, z_2$.

Ueber die drei ersten Fälle ist nichts zu bemerken, als dass im ersten Falle, wenn R_1 oder $R_2 = 0$ ist, dasjenige Leiterende, für welches R gleich 0 ist, die Axe der Spirale berühren muss, ohne dabei eine Spiralwindung zu treffen. Der vierte Fall muss jedoch etwas näher betrachtet werden. Ist zunächst $z_2 = z_1$, so wird P_2 sowohl als P_1 bei variablem R durch dieselbe unsymmetrische Welle, welche bei einem oben näher bezeichneten R^m ihren Gipfel hat, abgebildet. Es entspricht sonach jedem R_1 ein grösseres oder kleineres R_2, je nachdem $R_1 < $ oder $> R^m$ ist, für welches $P_2 = P(R_2, z) = P(R_1, z) = P_1$, also $J = 0$ ist. Bei verschiedenen z_2 und z_1 und zwar bei einem $z_2 > z_1$, werden die Potentiale P_2 und P_1 in ihrem Verlaufe, wenn R variirt, durch zwei verschiedene Curven dargestellt; die Curve P_2 hat ein kleineres Maximum bei $R_2 = R_2^m$, als die Curve P_1 bei $R_1 = R_1^m$, wobei $R_2^m > R_1^m$. Da sich für $z_1 > z_2$ diese Grössenverhältnisse rein umkehren, hat man nur nöthig den einen Fall $z_2 > z_1$ zu betrachten. Eine mit der R-Axe parallel gelegte Niveaulinie schneidet nun sowohl die P_2- als die P_1-Curve im Allgemeinen in je zwei Punkten. Bezeichnen wir die Abscissen des vorderen (d. i. des der P-Axe näheren) und hinteren Durchschnittspunktes mit der P_1-Curve bezüglich durch R_1', R_1'' und mit der P_2-Curve bezüglich durch R_2', R_2'', so liefern die vier Zusammenstellungen

$$(R_1' < R_2'); \quad (R_1' < R_2''); \quad (R_1'' > R_2'); \quad (R_1'' > R_2'')$$

vier zusammengehörige Systeme R_2, R_1, für welche $P(R_2, z_2) = P(R_1, z_1)$ und $J = 0$ ist.

Geht die Niveaulinie durch den Gipfelpunkt von P_2, so wird $R_1'' = R_2' = R_2^m$ und man hat die Systeme $(R_1' \angle R_2^m)$; $(R_1'' \gt R_2^m)$ für welche $J = 0$ wird; die Anzahl der annullirenden Systeme hat sich in diesem besonderen Falle auf zwei reducirt. Erhebt sich endlich die Niveaulinie über das Maximum der P_2-Curve, so kann P_2 nicht mehr $= P_1$, also auch J nicht 0 werden. Es giebt daher in dem betrachteten Falle $z_2 \gt z_1$ für jeden Werth R_2 zwei zugehörige Werthe R_1 derart, dass $P(R_2, z_2) = P(R_1, z_1)$ ist, dagegen für jeden (endlichen) Werth R_1 entweder zwei, oder ein, oder gar kein zugehöriges R_2, für welche $P_2 = P_1$ und $J = 0$ ist, je nachdem

$$P(R_1 z_1) \lesseqgtr P(R_2^m, z_2).$$

Einfacher als die Minima 0 von J findet man seine Maxima. Offenbar kann bei gleichen Halbmessern R_1 und R_2 der beiden Scheiben s_1 und s_2 das absolute Maximum nur dann eintreten, wenn

$R_1 = R_2 = R$ dem Radius der Spirale

und z_2 (oder z_1) $= 0$, während z_1 (oder z_2) so gross als möglich (genau ∞) ist.

Können R_1 und R_2 verschieden sein, so tritt das absolute Maximum ein, wenn 1) $R_1 = R$; $z_1 = 0$

$R_2 = 0$; z_2 beliebig (oder R_2 beliebig; z_2 sehr gross)

oder 2) $R_2 = R$; $z_2 = 0$

$R_1 = 0$; z_1 beliebig (z_1 sehr gross; R_1 beliebig) ist.

Das absolute Maximum ist in allen diesen Fällen dasselbe, da das eine Potential $P_1 (P_2)$ Null ist, während das andere $P_2 (P_1)$ seinen grösstmöglichen Werth, den wir in der Formel (12) gefunden haben, erreicht. Es wird dann der Ausdruck für J:

$$\left.\begin{aligned} J &= \pm a \varepsilon i \pi N \sqrt{\frac{L^2}{4} + R^2} \cdot (K - E) \\ k^2 &= \frac{4 R^2}{\frac{L^2}{4} + 4 R^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (17)$$

Lassen wir jetzt, um den in der Erfahrung am häufigsten eintretenden Fall zu erörtern, R_1 und R_2 sehr gross gegen den Radius R der Spirale werden, oder was dasselbe, ersetzen wir die Spirale S durch einen linearen Magneten, so liefert uns die Formel (14):

$$\left.\begin{aligned}J = a\varepsilon\pi(\mathrm{if}\alpha)\Bigg[&\frac{z_2+\frac{L}{2}}{\left(\left(z_2+\frac{L}{2}\right)^2+R_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{z_2-\frac{L}{2}}{\left(\left(z_2-\frac{L}{2}\right)^2+R_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{z_1+\frac{L}{2}}{\left(\left(z_1+\frac{L}{2}\right)^2+R_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}\\ &+\frac{z_1-\frac{L}{2}}{\left(\left(z_1-\frac{L}{2}\right)^2+R_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}\Bigg]\\ = a\varepsilon\pi(\mathrm{if}\alpha)\Big[&\cos\Theta_2''-\cos\Theta_1''-\cos\Theta_2'+\cos\Theta_1'\Big]\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

wobei Θ_2'', Θ_2'; Θ_1'', Θ_1' die Winkel bedeuten, welche die vom negativen und positiven Ende der dünnen Spirale nach dem Rande der Scheiben s_2 und s_1 gezogenen Strahlen mit der positiven Z-Axe bilden. Formel (18) ist bis auf die Constanten identisch mit dem bekannten Ausdrucke, welchen Ampère in seinen *Mémoires sur la théorie mathèmatique des phénomènes électrodyn.* für das Moment eines Conductors auf ein endliches Solenoid, welches sich nur um eine durch seine beiden Enden gehende Axe drehen kann, gefunden hat. Lässt man endlich z_2 (oder z_1) Null und R_1 (oder R_2) ebenfalls Null werden, so nimmt der Inductionsstrom J (18) seinen Maximalwerth an, er wird

$$J = (\mathrm{if}\alpha)\frac{a\varepsilon\pi\,.\,L}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+R_2^2}} = 2(\mathrm{if}\alpha)\,a\,.\,\varepsilon\pi\cos\Theta \;\ldots\ldots\; (19)$$

wenn Θ den Winkel bezeichnet, welchen der von einem Spiralende nach dem Rande der Scheibe s_2 gezogne Strahl mit der Z-Axe bildet, und s_2 durch die Mitte der Spirale geht, während das andere Ende des Conductors s an der Axe hinschleift.

Nachdem wir uns einen Ueberblick über das Wachsthum der Intensität dieser Inductionsströme, welche durch Rotation der Spirale S im Leiter s inducirt werden, verschafft haben, wenden wir uns zur Bestimmung der Richtung derselben Ströme. Die Aenderung der Stromrichtung hat eine dreifache Quelle, sie erfolgt:

1) wenn die Spirale S in der entgegengesetzten Weise gedreht wird, als angegeben wurde;

2) wenn die Richtung des Stromes i in der Spirale sich ändert;

3) wenn die von den Enden des Conductors s beschriebenen Bahnen ihrer Grösse und ihrer gegenseitigen Lage nach sich ändern.

Der von uns zur Messung der Stromstärke benutzte Ausdruck

$$(16) \; \ldots\ldots \; J = \pm a \varepsilon i (P_1 - P_2)$$

vermag dieser dreifachen Aenderung sich anzupassen. Im ersten Falle ändert sich das Vorzeichen der Constanten a, welche der Rotationsgeschwindigkeit proportional ist, im zweiten Falle das Vorzeichen von i und im dritten Falle kann das Vorzeichen von $(P_1 - P_2)$ die empirisch festgestellte Aenderung der Stromrichtung zum Ausdruck bringen. In welcher Weise nun das Letztere möglich ist und welches Vorzeichen man in der zuletzt geschriebenen Formel allgemein beibehalten kann, soll am Schlusse dieses Abschnittes noch erörtert werden.

Wir verbinden zu diesem Zwecke die Feder der Scheibe s_2 mit dem Ende A_2 der Multiplicatorrolle, in welcher sich die stromanzeigende Magnetnadel befindet; die Feder der Scheibe s_1 mit dem anderen Ende A_1 der Rolle und lassen nun s_2 alle möglichen Lagen auf der Spiral-Axe (unsere Z-Axe) annehmen, während s_1 ihre Lage nicht ändert und der Gesammtwiderstand ε des Conductors s, was man leicht durch Einschaltung eines Rheostaten erreichen kann, derselbe bleibt. Die Richtung des inducirenden Stromes i, sowie die Rotationsrichtung der Spirale S sollen ferner, wie schon oben festgesetzt wurde, identisch sein mit der positiven Drehungsrichtung in der xy-Ebene, d. i. der Richtung von der positiven X-Axe zur positiven Y-Axe; alsdann muss in demjenigen Ende des Conductors s, auf welches die inducirende Spirale S am stärksten einwirkt, der Inductionsstrom von der Scheibe ab in den Conductor hineinfliessen. Betrachten wir vorläufig die Aenderung in der Richtung des Inductionsstromes, wenn $R_2 = R_1$ und z_1 einen beliebigen positiven Werth constant behält, und erinnern uns noch daran, dass P_1, P_2 stets negativ sind.

1) z_2 positiv und grösser als z_1.

Das an s_1 anliegende Ende von s überwiegt val. num. $P_1 > P_2$;	der Inductionsstrom in der Z-Axe fliesst von z_2 nach z_1;	der Inductionsstrom in der Rolle fliesst von A_1 nach A_2;	$J = a \varepsilon i (P_1 - P_2)$ negativ.

2) $z_2 = z_1$

s geschlossen.	Inductionsstrom 0		$J = 0$

3) val. num. $z_2 < z_1$; z_2 positiv oder negativ.

Das an s_2 anliegende Ende von s überwiegt val. num. $P_2 > P_1$;	der Inductionsstrom in der Z-Axe fliesst von z_1 nach z_2;	der Inductionsstrom in der Rolle fliesst von A_2 nach A_1	$J = a\varepsilon i(P_1 - P_2)$ positiv.

4) z_2 negativ; val. num. $z_2 = z_1$.

s geschlossen.	Inductionsstrom 0	$J = 0$

5) z_2 negativ; val. num. $z_2 > z_1$.

Das an s_1 anliegende Ende von s überwiegt val. num. $P_1 > P_2$;	der Inductionsstrom in der Z-Axe fliesst von z_2 nach z_1;	der Inductionsstrom in der Rolle fliesst von A_1 nach A_2;	$J = a\varepsilon i(P_1 - P_2)$ negativ.

Aus diesen fünf Anordnungen folgt nun, dass die Formel für den Inductionsstrom in der Form

$$J = a\varepsilon i(P_1 - P_2)$$

zwar nicht ihr Zeichen ändert, wenn der inducirte Strom, welcher stets vom überwognen Ende nach dem überwiegenden in der Z-Axe fliesst, seine Richtung in der Z-Axe geändert hat, wohl aber dann, wenn der Inductionsstrom in der Multiplicatorrolle, wo er überhaupt gemessen wird, seine Richtung umkehrt. Sind die Scheiben s_1, s_2, zu welchen bezüglich die Potentiale P_1, P_2 gehören, verbunden mit den resp. Multiplicatorenden A_1, A_2, so läuft der Inductionsstrom in der Rolle von A_1 nach A_2 oder von A_2 nach A_1, je nachdem sein Ausdruck, bei variablem Abstande der beiden Scheiben

$$(16^a) \; \ldots\ldots \; J = a\varepsilon i \, . \, (P_1 - P_2) = - a\varepsilon i \, . \, (P_2 - P_1)$$

negativ oder positiv wird.

Dies gilt auch dann noch, wenn $R_2 \gtrless R_1$ ist; nur muss in diesem allgemeinern Falle das Wachsthum von R_1 gegen R_2 mit in Betracht gezogen werden. Von den drei überhaupt möglichen Fällen: val. num. $z_2 > z_1$, $z_2 = z_1$, $z_2 < z_1$ braucht man nur die beiden ersten zu betrachten, da der letzte durch Vertauschung der Indices aus dem ersten hervorgeht. Ist val. num. $z_2 > z_1$, so haben wir schon oben gesehen, dass zu jedem R_2 zwei Werthe $R_1 : R_1''$, R_1' gehören, für welche $P(R_2, z_2) = P(R_1', z_1)$

$P(R_2, z_2) = P(R_1'', z_1)$ wird, also J verschwindet.

In dem Falle eines constanten R_2 muss demnach J zweimal das Vorzeichen wechseln. Lässt man dagegen R_1 constant bleiben, so gab es nur dann zwei zugehörige Werthe R_2'', R_2', für welche J verschwindet, wenn R_1 innerhalb der Grenzen P_1', P_1'' lag, wo P_1' P_1'' die Abscissen derjenigen zwei Punkte bedeuten, in welchen die durch den Gipfelpunkt — dessen Abscisse R_2^m ist — der Curve P_2 gehende Niveaulinie die Curve P_1 trifft. Im Falle val. num. $z_2 = z_1$ gab es zu jedem R_1 (oder R_2) nur einen Werth $R_2 = R_1'$ (oder $R_1 = R_2'$), für welchen J verschwinden musste, weil die beiden Curven $P_1(R_1)$ und $P_2(R_2)$ coincidirten. Da jedoch für $z_2 = z_1$ ausserdem J verschwinden muss, wenn $R_2 = R_1$ wird, so giebt es hier, mag R_2 oder R_1 variiren, stets zwei Zeichenwechsel.

Stellen wir diese Stromwechsel noch schematisch zusammen:

I. val. num. $z_2 > z_1$.

1) R_2 constant, R_1 variabel, zwei Stromwechsel.

R_1 von 0 bis R_1'	v. n. $P_2 > P_1$	Inductionsstrom fliesst von A_2 nach A_1; $J = a\varepsilon i(P_1 - P_2)$	+
R_1 von R_1' bis R_1''	v. n. $P_1 > P_2$	„ „ A_1 nach A_2 „	—
R_1 von R_1'' bis ∞	v. n. $P_2 > P_1$	„ „ A_2 nach A_1 „	+

2) R_1 constant, R_2 variabel, zwei oder kein Stromwechsel.

$0 < R_1 < P_1'$ oder $P_1'' < R_1 < \infty$ zwei Stromwechsel	R_2 von 0 bis R_2'	v. n. $P_1 > P_2$	Inductionsstrom fliesst von A_1 nach A_2; $J = a\varepsilon i(P_1 - P_2)$	—
	R_2 von R_2' bis R_2''	v. n. $P_2 > P_1$	„ „ A_2 nach A_1 „	+
	R_2 von R_2'' bis ∞	v. n. $P_1 > P_2$	„ „ A_1 nach A_2 „	—
$R_1 = P_1'$ oder $R_1 = P_1''$ kein Stromwechsel	R_2 von 0 bis R_2^m	v. n. $P_1 > P_2$	Inductionsstrom fliesst von A_1 nach A_2; $J = a\varepsilon i(P_1 - P_2)$	—
	$R_2 = R_2^m$	v. n. $P_1 = P_2$	„ 0 „	0
	R_2 von R_2^m bis ∞	v. n. $P_1 > P_2$	fliesst von A_1 nach A_2 „	—
$P_1' < R_1 < P_1''$ kein Stromwechsel	R_2 beliebig	v. n. $P_1 > P_2$	„ „ „ „ „	—

II. val. num. $z_2 = z_1$.

$R_1(R_2)$ constant, $R_2(R_1)$ variabel, zwei Stromwechsel.

$R_2(R_1)$ von 0 bis $R_1(R_2)$	v. n. $P_1(P_2) > P_2(P_1)$	Inductionsstrom fliesst von $A_1(A_2)$ nach $A_2(A_1)$	$J = a\varepsilon i(P_1 - P_2)$	$-(+)$
$R_2(R_1)$ von $R_1(R_2)$ bis $R_1'(R_2')$	v. n. $P_2(P_1) > P_1(P_2)$	$A_2(A_1)$ nach $A_1(A_2)$	„	$+(-)$
$R_2(R_1)$ von $R_1'(R_2')$ bis ∞	v. n. $P_1(P_2) > P_2(P_1)$	$A_1(A_2)$ nach $A_2(A_1)$	„	$-(+)$

III. Abschnitt.

Das Potential von Spirale auf Spirale.

Vertauscht man den Kreis s' im zweiten Abschnitte mit einer Spirale S', deren Axe mit derjenigen von S zusammenfällt und deren mittelste Windung um c von der Mitte der alten Spirale S absteht, so erhält man für das Potential von S' auf S, wenn N', R', L' bezüglich Windungszahl, Radius, Länge der neuen Spirale S' bezeichnen:

$$(20) \;.\;.\;.\;.\;.\; P = -\frac{NN'RR'\pi}{LL'}\int_0^{2\pi} d\psi \cos\psi \int_{z=-\frac{L}{2}}^{z=+\frac{L}{2}} dz \int_{z'=c-\frac{L'}{2}}^{z'=c+\frac{L'}{2}} \frac{dz'}{r}$$

$$= -\frac{NN'.R^2.R'^2\pi}{LL'}\int_0^{2\pi} d\psi \sin^2\psi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_{c-\frac{L'}{2}}^{c+\frac{L'}{2}} \frac{dz'}{r^3}$$

wo $r^2 = (z'-z)^2 + R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\psi$.

Führt man zunächst die Integration nach z und z' aus, so erhält man direct aus der zweiten Form in (20)

$$(21) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; P = -\frac{NN'R^2.R'^2\pi}{LL'}\Bigg|_{z=+\frac{L}{2}}^{z=-\frac{L}{2}}\Bigg|_{y=c-\frac{L'}{2}-z}^{y=c+\frac{L'}{2}-z}\int_0^{2\pi}\frac{d\psi\sin^2\psi\sqrt{(y^2+R_0)}}{R_0}$$

wenn $y = z' - z \quad R_0 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\psi$ gesetzt wird.

Um noch Integral (21) durch elliptische Integrale in der gebräuchlichen Form auszudrücken, benutzen wir die Substitutionen:

$$\lambda = (R' + R)^2 + y^2 \qquad m = \frac{(R'+R)^2}{\lambda} \qquad \frac{k^2}{m} = \Delta^2(\alpha, k')$$

$$k^2 = \frac{4RR'}{\lambda} \qquad n = m - k^2 \sin^2\chi \qquad \psi = 2\chi + \pi.$$

Alsdann nimmt Formel (21) die Form an

$$P = -\frac{4NN'R^2R'^2\pi}{LL'}\Bigg|\Bigg|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi \sin^2 2\chi\, \Delta\chi}{n} \quad \ldots\ldots \quad (21^a)$$

Es ist aber $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi \sin^2 2\chi\, \Delta\chi}{n} = \frac{4}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi \sin^2\chi\left(n - (m - k^2)\right)\Delta\chi}{n}$

$$= \frac{4}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\chi \sin^2\chi\, \Delta\chi - \frac{4(m-k^2)}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi \sin^2\chi\, \Delta\chi}{n}$$

$$= \frac{4}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\chi \sin^2\chi\, \Delta\chi + \frac{4(m-k^2)}{k^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\Delta\chi - \frac{m\,\Delta^2\chi}{n\,\Delta\chi}\right)d\chi$$

Das Integral (21^a) ist somit auf die drei Integrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\chi \sin^2\chi\, \Delta\chi$; $\displaystyle m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi \sin^2\chi}{n\,\Delta\chi}$; $\displaystyle m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi}{n\,.\,\Delta\chi}$ zurückgeführt, von denen das erste leicht auf vollständige Integrale erster und zweiter Gattung reducirt werden kann, die beiden letzteren aber bereits in Abschnitt II. angegeben wurden. Es ist

$$U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\chi \sin^2\chi\, \Delta\chi = \frac{(K-E)(1-2k^2)}{3k^2} + \frac{1}{3}K = \frac{1}{3k^2}\Big[K k'^2 + E(k^2 - k'^2)\Big]$$

$$V = m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi \sin^2\chi}{n\,\Delta\chi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi \sin^2\chi}{(1-\Delta^2(\alpha,k')\sin^2\chi)\,\Delta\chi}$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} + (K-E)\,F(\alpha,k') - K\,E(\alpha,k')\right] \frac{2}{k'^2 \sin 2\alpha\,\Delta(\alpha,k')} \quad \text{und} \quad m\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{n\,.\,\Delta d\chi} = K + \frac{k^2}{m}\,V$$

dann wird
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\chi\,\Delta\chi}{n} = \frac{4}{k^2}\,U + \frac{4(m-k^2)}{k^4}\left(E - K - \frac{k^2}{m}(1-m)\,V\right)$$

$$= \frac{4}{k^4}\left[K\left(\frac{1-3m+2k^2}{3}\right) - E\left(\frac{1-3m+k^2}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\sqrt{m\,.\,1-m\,.\,m-k^2}\right]$$

wenn
$$B = K\,.\,E(\alpha,k') - (K-E)\,F(\alpha,k')$$
wie im vorigen Abschnitt gesetzt wird. Wird der Hilfswinkel α und somit auch B stets zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen, so ergibt sich endlich für das Potential P

$$(22) \;\ldots\ldots\; P = -\frac{NN'\pi}{L.L'} \Bigg|_{z=+\frac{L}{2}}^{z=-\frac{L}{2}} \Bigg|_{y=c-\frac{L'}{2}-z}^{y=c+\frac{L'}{2}-z} \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{3}\left(K\left(y^2 - 2(R'-R^2)\right) - E\left(y^2 - 2(R'^2+R^2)\right)\right) \mp \left(\frac{\pi}{2} - B\right) y\,.\,(R'^2 - R^2)\right]$$

wobei $\lambda = y^2 + (R'+R)^2$; $m = \frac{(R'+R)^2}{\lambda}$ und das negative Zeichen vor $\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$ gilt,

$k^2 = \frac{4RR'}{\lambda}$ $\quad \Delta^2(\alpha,k') = \frac{k^2}{m}$

wenn y und $(R'-R)$ gleiches Zeichen haben das positive Zeichen aber, wenn y und $(R'-R)$ verschiedenes Zeichen haben.

Eine besondere Discussion des vorstehenden Ausdruckes für das Potential von Spirale auf Spirale ist nach dem, was bereits im zweiten Abschnitte über die Variabilität des Potentiales von Kreis auf Spirale bemerkt wurde, überflüssig. Die an jenem Orte angestellten Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf unsern Fall übertragen. Das Potential von Spirale auf Spirale erreicht ein Maximum, wenn die mittelsten Windungen beider Spiralen zusammenfallen, also $c = 0$ ist, ein Minimum Null aber, wenn die Entfernung von S und S' unendlich gross wird. Lässt man ausser c noch den Radius R' der einen Spirale variiren, so tritt das absolute Maximum für $c = 0$ und $R' = R$ ein, sein Werth ist:

$$(23) \ldots\ldots P = -\frac{2NN'\pi}{3LL'}\left|\sqrt{\lambda}\left((4R^2-y^2)E+y^2K\right)\right|_{y=\frac{L-L'}{2}}^{y=\frac{L'+L}{2}} \qquad k^2 = \frac{4R^2}{y^2+4R^2}.$$

Wenden wir die erhaltenen Formeln zunächst auf den Fall an, wo die zweite Spirale S' mit der ersten Spirale S vollständig zusammenfällt, oder doch wenigstens der sehr dünne Draht von S' unmittelbar um die erste Spirale S gewunden ist. In diesem Falle ist $c = 0$, $R' = R$, $N = N'$, $L = L'$ und es wird für die obere Grenze des Integrales (23) $y = \frac{L'+L}{2} = L$, $k^2 = \frac{4R^2}{L^2+4R^2}$, während für die untere Grenze $y = \frac{L-L'}{2} = 0$, $k = 1$, $E = 1$, $y^2K = 0$ wird. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{2N^2\pi}{3L^2}\left[\sqrt{L^2+4R^2}\left(KL^2+E(4R^2-L^2)\right)-8R^3\right] \\ &= -\frac{2N^2\pi}{3L^2}\lambda^{\frac{3}{2}}\left[(K-E)k'^2+Ek^2+k^3\right] \\ &= -2\left(\frac{N}{L}.R^2\pi\right)\pi N\left[1-\frac{8}{3\pi}.\frac{R}{L}+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}\right)^4+\frac{5}{16}\left(\frac{R}{L}\right)^6-\frac{35}{64}\left(\frac{R}{L}\right)^8\pm\ldots\right] \end{aligned}\right\} (24)$$

$$k^2 = \frac{4R^2}{L^2+4R^2};\ \lambda = L^2+4R^2.$$

Lässt man noch den Radius R der Spirale gegen ihre Länge L sehr klein werden, so erhält man für P, indem man entweder in dem geschlossenen Ausdruck (24) für P einen Grenzübergang vornimmt, oder in dem Reihenausdrucke gegen das erste Glied alle folgenden vernachlässigt, den Werth

$$P = -2\pi.N.\left(\frac{N}{L}.R^2\pi\right)$$

und für die elektromotorische Kraft, welche die Spirale S durch Aenderung ihrer Stromstärke um j, in einer zweiten gleichen um sie gewundenen Spirale, oder welche ein die Spirale S ersetzender Linearmagnet durch Aenderung seines freien an den Polen befindlichen Magnetismus um ϱ, in einer den ganzen Magneten umwindenden Spirale erregt, demnach F

$$\left.\begin{aligned} F &= -2\pi a.(j.\alpha f)N \\ &= -4\pi a.\varrho N \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (25)$$

wobei a die Inductionsconstante, f die Fläche einer Spiralwindung (den Querschnitt des Linearmagneten) und ϱ nach Ampère's Bezeichnung das Product $\frac{1}{2}j\alpha f$, wenn noch α für $\frac{N}{L}$ gesetzt wird, bedeutet.

Die Vergleichung dieser Formeln (25) mit denen auf Seite 17 init. ergiebt, dass Potential und elektromotorische Kraft einer solenoidartigen Spirale S auf eine gleiche ihr überall eng anliegende Spirale oder auf sich selbst, N mal so gross als Potential und elektromotorische Kraft der Spirale S auf ihre mittelste Windung, wenn N die Windungsanzahl von S bedeutet.

Untersuchen wir zuletzt noch den Fall, in welchem die Radien der Spiralen sehr klein gegen die Längen derselben werden, die Entfernung beider Spiralen jedoch eine beliebige ist.

Lässt man zuvörderst die Spirale S zu einem Solenoide werden, während die Spirale S′ endliche Dimensionen beibehält, so erhält man für R sehr klein gegen L, L′, R′ direct aus dem Integrale (21)

$$(26) \ldots\ldots P = -(f\alpha)\frac{N'\pi}{L'}\left[\sqrt{\left(c+\frac{L'}{2}+\frac{L}{2}\right)^2+R'^2}-\sqrt{\left(c-\frac{L'}{2}+\frac{L}{2}\right)^2+R'^2}\right.$$
$$\left.-\sqrt{\left(c+\frac{L'}{2}-\frac{L}{2}\right)^2+R'^2}+\sqrt{\left(c-\frac{L'}{2}-\frac{L}{2}\right)^2+R'^2}\right]$$

wobei $\alpha = \frac{N}{L} = \frac{N'}{L'}$; $f = R^2\pi$.

Lässt man in dieser Formel noch den Radius R′ der zweiten Spirale S′ sehr klein gegen die Länge L′ werden, so folgt für P

$$(27) \ldots\ldots P = -(f\alpha)\frac{N'\pi}{L'}\left[\sqrt{\left(c+\frac{L'}{2}+\frac{L}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(c-\frac{L'}{2}+\frac{L}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(c+\frac{L'}{2}-\frac{L}{2}\right)^2}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\left(c-\frac{L'}{2}-\frac{L}{2}\right)}\right]$$

Das Potential und somit auch die elektromotorische Kraft einer Solenoidspirale oder eines linearen Magneten S auf eine zweite ähnliche Spirale S′, deren

Radius ebenfalls sehr klein gegen ihre Länge L', ist demnach unabhängig von der Weite der Windungen in S' und proportional der Windungszahl geworden. Dagegen ist das Potential auch noch in diesem Falle abhängig von der Lage der Spirale S' gegen S. Da die vier Quadratwurzeln in der Formel (27) die absoluten gegenseitigen Entfernungen der Enden von S' und S bedeuten, so sind sie stets positiv zu nehmen und man kann darnach drei Hauptfälle unterscheiden:

I. **$L' < L, N' < N$**; $P = -\pi \alpha f \frac{N'}{L'}\left(L' + \sqrt{\left(c - \frac{L'}{2} - \frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(c + \frac{L'}{2} - \frac{L}{2}\right)^2}\right)$

von $c = 0$ bis $c = \frac{L - L'}{2}$ ....; P constant $= -2\pi\alpha f N'$

„ $c = \frac{L - L'}{2}$ bis $c = \frac{L + L'}{2}$; $P = -2\pi\alpha f N' \left(\frac{\frac{L + L'}{2} - c}{L'}\right)$

$c \geqq \frac{L + L'}{2}$ .... $P = 0$

II. **$L' > L, N' > N$**; $P = -\pi \alpha f \frac{N'}{L'}\left(L + \sqrt{\left(c - \frac{L'}{2} - \frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(c - \frac{L'}{2} + \frac{L}{2}\right)^2}\right)$

von $c = 0$ bis $c = \frac{L' - L}{2}$ .... P constant $= -2\pi\alpha f N$

„ $c = \frac{L' - L}{2}$ bis $c = \frac{L' + L}{2}$; $P = -2\pi\alpha f N \left(\frac{\frac{L' + L}{2} - c}{L}\right)$

$c \geqq \frac{L' + L}{2}$ .... $P = 0$

III. **$L' = L, N = N'$**; $P = -\pi \alpha f \frac{N}{L}\left(L - c + \sqrt{(c - L)^2}\right)$

von $c = 0$ bis $c = L$ .... $P = -2\pi\alpha f \frac{N(L - c)}{L}$

$c \geqq L$ .... $P = 0$

Diese drei Fälle lassen sich in folgender Weise zusammenfassen.

Betrachtet man die solenoidartige Spirale S, deren Windungszahl N und deren Länge L ist, oder einen sie ersetzenden linearen Magneten von derselben Länge als Inductor, in welchem sich die Stromstärke um j oder der Magnetismus um ϱ, wenn $\varrho = \frac{1}{2} j \frac{N}{L} f$ ist, ändern soll, und verschiebt eine andere solenoidartige

Spirale S' von der Länge L' und der Windungszahl N', wo $\frac{N'}{L'} = \frac{N}{L} = \alpha$, auf der Längsaxe von S, so behalten Potential P und elektromotorische Kraft F ihre Maximalwerthe

$$\text{für } L' \angle L \qquad P = -2\pi\alpha f N' \qquad F = -2\pi a(j\alpha f)N' = -4\pi a\varrho N'$$

$$\text{für } L' > L \qquad P = -2\pi\alpha f N \qquad F = -2\pi a(j\alpha f)N = -4\pi a\varrho N' \frac{L}{L'}$$

so lange alle Windungen der kürzeren Spirale von Windungen der längeren Spirale bedeckt sind. In demselben Maasse als die Windungen der kürzeren Spirale durch gegenseitige Verschiebung von den Windungen der längeren entblösst werden, nehmen auch P und F stetig ab, sie erreichen, wenn nur noch die Hälfte der kürzeren Spirale bedeckt ist, die Hälfte ihrer Maximalwerthe, sie werden Null, sobald beide Spiralen frei neben einander liegen. Sind beide Spiralen gleichlang, so behalten P und F ihre Maximalwerthe nur einen Moment für $c = o$ und nehmen bei einer Verschiebung ununterbrochen ab.

Druck von A. Th. Engelhardt in Leipzig.