ABHANDLUNGEN

ACHTZEHNTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

ACHTZEHNTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

EILFTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

INHALT.

UEBER DEN

AUSGANGSWERTH

DER

KLEINSTEN ABWEICHUNGSSUMME,

DESSEN

BESTIMMUNG, VERWENDUNG UND VERALLGEMEINERUNG

VON

G. TH. FECHNER

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1874.

Vom Verfasser übergeben den 2. Mai 1874.
Der Abdruck vollendet den 23. Mai 1874.

UEBER DEN

AUSGANGSWERTH DER KLEINSTEN ABWEICHUNGSSUMME,

DESSEN

BESTIMMUNG, VERWENDUNG UND VERALLGEMEINERUNG

VON

G. TH. FECHNER.

I. Eingang.

Die folgende Untersuchung hat sich von einer allgemeineren Untersuchung über die gesetzlichen Massverhältnisse von Collectivgegenständen, mit der ich seit längerer Zeit beschäftigt bin, abgezweigt; da sie jedoch über die Beziehung dazu weit hinausgreift, biete ich sie hier, nur unter Mitberücksichtigung dieser Beziehung, besonders dar.

Unter einem Collectivgegenstande verstehe ich einen Gegenstand, der in einer unbestimmten Mehrzahl zufällig variirender Exemplare, welche sich unter einem gemeinsamen Begriffe vereinigen, vorkommt; eine Erklärung, die sich durch später folgende Beispiele näher erläutern wird.

Das seither nur sehr oberflächlich und aus allgemeinem Gesichtspuncte fast gar nicht in Angriff genommene quantitative Untersuchungsfeld solcher Gegenstände tritt zum Theil unter andere Gesichtspuncte als das physikalische und astronomische Beobachtungsfeld, und führt daher überhaupt zu manchen Bemerkungen, Sätzen und Aufgaben, worauf zu kommen im letzteren Gebiete kein Anlass ist. Hiezu wird das Folgende manche Belege bieten.

Da sich der Inhalt dieser Abhandlung von ihrem Ausgangspuncte aus nach mehrern Richtungen verzweigt, gebe ich vorweg eine Uebersicht darüber, indem ich dabei an etwas Allbekanntes anknüpfe.

Das arithmetische Mittel, seinem Begriffe nach als Quotient einer Summe gegebener Werthe durch die Zahl derselben bestimmt, lässt sich bekanntlich gleichgeltend damit durch die Eigenschaft als bestimmt ansehen, eine gleiche Summe positiver und negativer Abweichungen von sich abhängig zu haben. Hiemit solidarisch aber ist die Eigenschaft desselben, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen bezüglich desselben kleiner als bezüglich irgend eines andern Werthes ist, den man dafür als Ausgangspunct der Abweichungen substituiren möchte, gleichgültig, welcher Art die betreffenden Grössen sind, und welches Gesetz die Abweichungen befolgen, ja ob sie überhaupt ein solches befolgen. Es ist eine leicht erweisliche mathematische Nothwendigkeit, welche die angegebenen Bestimmungen des arithmetischen Mittels an einander knüpft.

Unstreitig kann man nun auch fragen: wenn das arithmetische Mittel der Werth ist, welcher die kleinste Summe der Quadrate der Abweichungen von sich abhängig hat, ob es nicht einen Werth von entsprechender Bestimmtheit giebt, der die kleinstmögliche Summe der unquadrirten Abweichungen von sich abhängig hat; wobei ich hier, wie folgends immer, unter Summe der Abweichungen die positiven und negativen Abweichungen nach absolutem Werthe oder als ob alle positiv wären, zusammengerechnet verstehe. Es ist mir nicht bekannt, dass man diese Frage schon aufgeworfen hätte, weil sich unstreitig seither kein Interesse daran geknüpft hat; doch wird sich zeigen, dass dem Werthe, mit dem sich die Frage beantwortet, in der That ein gewisses mathematisches und empirisches Interesse nicht abgeht, erstres in Betracht der Analogie seiner Bestimmtheit mit der des arithmetischen Mittels und der sich daran knüpfenden Verallgemeinerungen, letzteres insofern, als dieser Werth im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände eine Rolle spielt, indem er bezüglich der Bestimmung dieser Gegenstände mit dem arithmetischen Mittel in Concurrenz tritt.

Es wird nämlich im Folgenden bewiesen werden, dass der in Frage stehende Werth der ist, welcher unter den, ihrer Grösse nach geordneten, Werthen, aus denen er zu bestimmen ist, die mittelste Stelle einnimmt, mithin die gleiche Zahl positiver und negativer Abweichungen, statt wie der arithmetische Mittelwerth, die gleiche Summe derselben, von sich abhängig hat. Wegen dieser Eigenschaft werde ich ihn den Centralwerth nennen und mit C bezeichnen, indess ich den arithmetischen Mittelwerth mit A bezeichne.

Dem C kommt seine Eigenschaft, die kleinste Summe der einfachen Abweichungen von sich abhängig zu haben, eben so unabhängig von einer besondern Beschaffenheit der Grössen und einem besondern Gesetze der Abweichungen zu, als dem A die entsprechende Eigenschaft, die kleinste Summe der Abweichungsquadrate von sich abhängig zu haben, und lässt sich daher eben so an beliebigen selbstgemachten Beispielen bewähren. Ich nenne diese einander entsprechenden Eigenschaften des C und A die potenziellen Eigenschaften derselben.

Von dem Interesse, was es hat, auf das C neben dem A im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände Rücksicht zu nehmen, und den Verhältnissen dieser Gegenstände, in welche das C eingreift, wird im 2. Abschnitte, von der Bestimmungsweise des C und verschiedenen Verhältnissen desselben gegenüber dem A im 3. Abschnitte die Rede sein.

Die potenzielle Eigenschaft des C bot sich mir zuerst so zu sagen zufällig als Folgerung aus Formeln dar, die ich im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände zur Beurtheilung der Abänderung der Abweichungssumme je nach Verlegung ihres Ausgangspunctes zu entwickeln hatte, da es sich in diesem Gebiete nicht so wie im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete blos um Verfolgung der Abweichungen von A, sondern auch von C und selbst noch von einem dritten Hauptwerthe, wovon später (unter II), handelt, und überhaupt eine grössere Wahl zwischen verschiedenen Ausgangspuncten der Abweichungen stattfindet, als im letzteren Gebiete. In Voraussetzung, dass diese Formeln auch Andern, welche sich mit ersterem Gebiete beschäftigen wollen, dienlich sein können, theile ich sie mit ihrer Herleitung, und den Folgerungen daraus, die ein Interesse haben können, im 4. Abschnitte mit.

Nachdem wir im Centralwerthe einen Werth gefunden haben, welcher die kleinste Summe der einfachen Abweichungen von sich abhängig hat, dazu im arithmetischen Mittel einen Werth haben, welcher die kleinste Summe der Quadrate der Abweichungen von sich abhängig hat, verallgemeinert sich alsbald die Frage dahin, ob sich nicht auch Werthe bezeichnen lassen, welche die kleinste Summe der Cuben, der Biquadrate u. s. w. der Abweichungen von sich abhängig haben. In der That wird sich diess zeigen, und sogar eine sehr einfache, von einer einfachen Differenzial-Minimum-Gleichung abhängige, Regel für die Bestimmung solcher Werthe von beliebiger Ordnung aufstellen lassen, worunter die des Centralwerthes und arithmetischen Mittelwerthes nur als besondere Fälle niederster Ordnung begriffen sind. Allgemein nenne ich solche Werthe Potenz-Mittelwerthe und handle näher davon im 5. Abschnitte.

Da hienach der arithmetische Mittelwerth nur ein besonderer Fall der Potenzmittelwerthe, einer unter andern solchen Werthen, und zwar weder von niederster noch höchster Ordnung ist, und da die zwar schon oft behandelte Frage nach dem Vorzuge des Principes des arithmetischen Mittels im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete meines Wissens doch noch nicht mit Rücksicht auf jene Unterordnung behandelt worden ist, so hat es mir nützlich geschienen, aus dem Gesichtspuncte derselben in einem besonderen Abschnitte, dem 6., einen Blick auf diese Frage zu werfen. Hiedurch hat sich, wie vorauszusehen, der Vorzug des Principes des arithmetischen Mittels vor jedem andern Princip in jenem Gebiete nur bestätigt; doch hat die Rücksicht auf jene Unterordnung zu einigen Abweichungen von bisher aufgestellten Gesichtspuncten geführt, welche zwar nicht das Resultat, aber den Weg dazu betreffen.

Der 7. und 8. Abschnitt sind Anhangs-Abschnitte zum 6. Der 7. insbesondere giebt zu dem bekannten (Gauss'schen) Fehlergesetze, welches in Bezug zur Gültigkeit des Principes des arithmetischen Mittels steht, eine Verallgemeinerung dieses Gesetzes für den Fall, dass irgend ein anderes Potenzmittel grössere Gültigkeit in Anspruch nehmen sollte, mit dem Nachweise, dass die Gesetze für das *C* so wie für die höheren Potenzmittel zu weit von dem bezüglich des *A* gültigen abweichen, um nicht nach der erfahrungsmässigen Bewährung des letzteren bezüglich der Beobachtungsfehler an das Princip des *A* gebunden zu bleiben. Der 8. Abschnitt fügt zu den schon bekannten Bewährungen des Gauss'schen Fehlergesetzes im Gebiete der Beobachtungsfehler eine solche im Gebiete der thermischen Monatsabweichungen und weist direct daran nach, dass der Ausgang der Abweichungen vom arithmetischen Mittel zu grösserer Sicherheit führt, als von den nächsten Potenzmitteln unter und über dem *A*.

Im 9. Abschnitte endlich gedenke ich in Kürze noch zweier Weisen der Mittelbestimmung, welche mit der Potenzmittelbestimmung, das arithmetische Mittel und ein Aufsteigen von da zu höhern Ordnungen, aber in anderm Sinne, gemein haben.

Wenn ich die im Grunde sehr einfachen Sätze, die ich werde aufzustellen haben, zumeist noch durch Zahlenbeispiele erläutere und belege, so wird diess zwar für Fachmathematiker, welche keine Schwierigkeit finden, abstracte Sätze ins Concrete zu übersetzen und an der aprioristischen Bewährung derselben genug haben, sehr überflüssig sein, aber doch vielleicht manchen Andern erwünscht sein, welche durch das empirische Interesse, worauf diese Abhandlung mit eingeht, veranlasst sein könnten, nähere Kenntniss vom Inhalt derselben zu nehmen.

II. Verwendung des Centralwerthes im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände. Allgemeinere Verhältnisse derselben, in die er eingreift.

Von einem empirischen Interesse der Potenzmittel über das C und A hinaus lässt sich bisher überhaupt nichts sagen, und im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete kann selbst das C auf ein solches nicht Anspruch machen, sondern nur das A. Denn da man immer berechtigt bleiben wird, das A der Beobachtungswerthe als den Werth anzusehen, welcher dem wahren Werthe, den man sucht, mit grösster Wahrscheinlichkeit am nächsten kommt, hat man keinen Anlass, sich neben dem A noch um das C zu kümmern, zumal dessen Berücksichtigung in der des A gewissermassen mit eingeschlossen ist.

Die Abwesenheit constanter Fehler vorausgesetzt nämlich ist kein Grund, an einer symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Abweichungen oder sog. Fehler bezüglich der wahren Grösse, um deren Ermittelung es bei physikalischen oder astronomischen Beobachtungen zu thun ist, zu zweifeln. Unter Voraussetzung solcher Symmetrie aber fallen C und A wesentlich zusammen, das heisst — und in diesem Sinne verstehe ich hier und entsprechend künftig bei analoger Verwendung den Ausdruck »wesentlich« — beide würden zusammenfallen, wenn man statt der unendlichen Zahl von Beobachtungswerthen, welche die Fehler geben, die eigentlich zu fordernde unendliche Zahl derselben zur Ableitung benutzen könnte, und man nähert sich diesem Erfolge um so mehr, je mehr man die Zahl der zur Ableitung dienenden Werthe vervielfältigt. Also weicht zwar das C vom A bei einer endlichen Zahl von Beobachtungsfehlern wegen unausgeglichener Zufälligkeiten der Vertheilung der Fehler bald in diesem bald in jenem Sinne ab, aber diese Abweichung mindert sich allgemein gesprochen mit der Zahl der Fehler, und man zieht vor, sich an das A als das C zu halten, weil jenes sichrer bestimmbar als dieses ist.

Auch bei Massbestimmungen im Felde von Collectivgegenständen nun hat man sich bisher ausschliesslich an den arithmetischen Mittelwerth der einzelnen Exemplare als denjenigen Werth gehalten, welcher am charakteristischsten für den Gegenstand sei, nach welchem verschiedene Collectivgegenstände zu vergleichen und von welchem an die Abweichungen der einzelnen Exemplare gleichsam als Fehler zu rechnen. Gelte es z. B. die Körperlänge, das Körpergewicht oder die Schädeldimensionen von Menschen verschiedener Nation, verschiedenen Geschlechts oder Alters, die Wachsthumshöhe verschiedener Pflanzenarten oder Länge der verschiedenen Internodien bei derselben Pflanzenart, oder die Dimensionen verschiedenartiger artistischer Gegenstände*) zu vergleichen, so hält man sich an das A der Exemplare als einen Werth, um den die einzelnen Exemplare als wie um einen Normalwerth schwanken. Im weiteren Sinne kann man auch Objecte der Meteorologie, als wie die monatlichen oder jährlichen mittleren Thermometerstände, Barometerstände, Regenmengen an einem gegebenen Orte unter den Begriff von Collectivgegenständen bringen, insofern als z. B. der mittlere Thermometerstand eines gegebenen Monates an einem

*) Ich habe u. a. die Dimensionen von Galleriegemälden (Genrebildern, Landschaftsbildern, Stillleben in gesonderterBehandlung) so wie von Druckformaten nach Breite und Höhe, von Visitenkarten, Adresskarten, Glückwünschungskarten nach Länge und Breite u. s. w. in Untersuchung gezogen, theils in Bezug auf gewisse elementare ästhetische Fragen, hauptsächlich aber, um die Abweichungsverhältnisse der Exemplare solcher der Willkühr des Menschen ihren Ursprung verdankenden Collectivgegenstände bezüglich ihrer (oben zu betrachtenden) Hauptwerthe und die Verhältnisse dieser Hauptwerthe selbst vergleichungsweise mit denen der natürlichen Gegenstände zu studiren.

gegebenen Orte in jedem Jahre ein etwas anderer ist, und man, durch so viele Jahre als man ihn beobachtet hat, so viele Exemplare eines zeitlich variirenden Collectivgegenstandes daran hat, dessen quantitative Bestimmungen sich in der That, wie künftig zu zeigen, gemeinsamen Regeln mit denen der örtlich variirenden Gegenstände unterordnen lassen. Auch bei solchen zeitlich variirenden Collectivgegenständen aber hat man bisher nur auf den arithmetischen Mittelwerth als Anhalt zum Vergleiche Rücksicht genommen.

Nun ist aber zu bemerken, dass im Gebiete der örtlich wie zeitlich variirenden Collectivgegenstände, der organischen, artistischen, wie meteorologischen, keineswegs allgemein dieselbe symmetrische Wahrscheinlichkeit der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels besteht, als man Grund hat, im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete bei Ausschluss constanter Fehler vorauszusetzen, und dass demgemäss die beiden Werthe A und C in jenem Gebiete keineswegs eben so wesentlich zusammenfallen, als in diesem. In der That hat schon Quetelet in s. Lettres sur la probabilité darauf hingewiesen, dass für nicht wenige Collectivgegenstände eine wesentliche, also nicht mit wachsender Zahl der Werthe sich mindernde, Asymmetrie der Abweichungen bezüglich A in so fern besteht, als je nach der Natur des Gegenstandes entweder die Zahl der positiven oder negativen Abweichungen bezüglich desselben wesentlich die grössere ist, wonach positive und negative Asymmetrie zu unterscheiden; und ich selbst habe mittels einer, gegen die seinige sehr erweiterten, Untersuchung die Fälle dieser Art so verbreitet gefunden, dass ich glauben möchte, der Fall der Symmetrie im Felde der Collectivgegenstände sei nur ein ganz specieller, vielleicht streng genommen nicht vorhandener, des allgemeinen Falles der Asymmetrie; wenn schon solche in sehr vielen Fällen klein genug ist, um bei nicht hinreichender Zahl der Exemplare unter den zufälligen Abweichungen nicht sicher erkannt werden zu können, und überhaupt zufällige Asymmetrie nicht mit wesentlicher verwechselt werden darf.

Wie dem auch sei, so leuchtet jedenfalls ein, dass in Fällen, wo eine Asymmetrie der Zahl der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels wesentlich besteht, der Centralwerth mit dem arithmetischen Mittel nicht wesentlich im obigen Sinne zusammenfallen kann. Nun gehört aber zur vergleichenden Charakteristik verschiedener Collectivgegenstände ganz wesentlich die, freilich seither vernachlässigte, Bestimmung über das Vorhandensein oder Fehlen, die Richtung und den Grad der Asymmetrie der Abweichungen, eine Charakteristik, die einerseits dadurch geschehen kann, dass man die Zahlendifferenz der beiderseitigen Abweichungen im Verhältniss zur Totalzahl und die Richtung dieser Differenz angiebt, von anderer Seite aber auch dadurch, dass man die Differenz zwischen C und A ihrer Grösse und Richtung nach im Verhältniss zum mittleren Werthe der gesammten Abweichungen angiebt. Auch weiss man, wenn man das C eines Collectivgegenstandes kennt, sofort, ob ein gegebenes Exemplar des Gegenstandes der unteren oder oberen Grössenabtheilung desselben angehört, d. h. von mehr Werthen der Grösse nach überschritten oder unterschritten wird, was man bei Kenntniss des A noch nicht weiss. In dieser Beziehung hat der Centralwerth eine analoge Bedeutung für die Exemplare eines Collectivgegenstandes, als der wahrscheinliche Fehler für die Beobachtungsfehler, deren Abweichungen von ihrem arithmetischen Mittel (die man Fehler 2. Ordnung nennen kann) nicht minder unsymmetrisch dazu sind. Und so gewinnt überhaupt die Berücksichtigung des Centralwerthes und seiner Eigenschaften im Felde der Collectivgegenstände eine Bedeutung, die ihr im physikalischen und astronomischen Beobachtungsfelde nicht eben so zukommt.

Schon desshalb aber kann die einseitige Berücksichtigung des A im Untersuchungsfelde von Collectivgegenständen nicht das gleiche Interesse in Anspruch nehmen, als im physikalischen und astronomischen Beobachtungsfelde, weil das A in jenem Felde nicht eben so wie in diesem den Werth bedeuten kann, der mit grösster Wahrscheinlichkeit dem wahren am nächsten kommt; denn alle Exemplare des Collectivgegenstandes sind gleich wahr und wirklich, und der arithmetische Mittelwerth, als nur zufällig mit einem derselben zusammenfallend, in der Regel sogar unwirklich. Wenn es aber doch zur Charakteristik eines Collectivgegenstandes wesentlich gehört, den Werth zu kennen, der bezüglich desselben die Eigenschaften des A vereinigt, so wird es nicht minder wesentlich dazu sein, den Werth zu kennen, der bezüglich desselben die Eigenschaften des C vereinigt, wofern beide überhaupt auseinanderfallen. Denn unstreitig ist die Eigenschaft des C, die gleiche Zahl und kleinste Summe der einfachen

Abweichungen von sich abhängig zu haben, nicht minder beachtenswerth und charakteristisch, als die Eigenschaft des A, die gleiche Summe der einfachen Abweichungen und die kleinste Summe ihrer Quadrate von sich abhängig zu haben. Im arithmetischen Mittelwerthe eines Collectivgegenstandes hat man so zu sagen nur den Schwerpunct desselben; indem man auch die anderen Hauptwerthe, die sich darin auffinden lassen, die Verhältnisse derselben unter einander und der Abweichungen zu jedem insbesondere berücksichtigt, gewinnt man so zu sagen erst Kenntniss von der ganzen quantitativen Structur oder Organisation des Gegenstandes.

In dieser Beziehung aber mag vorgreiflich aus den künftig mitzutheilenden eingehenderen Untersuchungen noch eines dritten Hauptwerthes gedacht werden, welcher bei vorhandener Asymmetrie, die ich bemerktermassen als den allgemeineren Fall betrachte, zur Ergänzung der beiden vorigen Hauptwerthe wesentlich gehört, und sogar als Ausgangspunct der Abweichungen in einem gewissen unten zu bezeichnenden Sinne eine bevorzugte Bedeutung vor beiden hat. Es ist der Werth, um den sich die Einzelwerthe und mithin Abweichungen am dichtesten schaaren, so dass in gleichen Intervallen um so mehr davon liegen, je näher die Intervalle diesem Werthe liegen, mag man sie von ihm aus nach positiver oder negativer Seite in Betracht nehmen; wonach ich diesen Werth den dichtesten Werth nenne und mit D bezeichne.*)

Wo nun C mit A im obigen Sinne wesentlich zusammenfällt, fällt allerdings auch D mit beiden wesentlich zusammen, hingegen hat sich ausnahmslos gefunden, dass, wo C von A wesentlich abweicht, auch D mit keinem von beiden zusammenfällt, sondern noch über C hinaus von A abliegt, so dass eine positive Asymmetrie bezüglich A zu einer negativen bezüglich D wird.

Quetelet freilich hat eine für den ersten Anblick sehr ansprechende Theorie der Asymmetrie aufgestellt, aus welcher folgen würde, dass das wesentliche Zusammenfallen des D mit A auch im Falle wesentlicher Asymmetrie bezüglich A, wo also C mit A nicht wesentlich zusammenfällt, noch fortbesteht; aber er hat diess nicht

---

*) Die nicht ganz einfache Bestimmungsweise dieses Werthes aus dem Gange der geordneten Werthreihe auseinanderzusetzen, würde hier zu weit führen.

empirisch constatirt, und selbst das einzige, in einiger Ausführung von ihm mitgetheilte, (meteorologische) Beispiel der Asymmetrie widerspricht bei näherem Zusehen dieser Folgerung. Aber nicht blos diess eine Beispiel widerspricht ihr, sondern in allen bisher von mir untersuchten zahlreichen Fällen der Asymmetrie aus anthropologischem, botanischem, artistischem und meteorologischem Gebiete, wo die Vertheilung der Werthe regelmässig genug war, um die Lage des D mit einiger Genauigkeit bestimmen zu können, was freilich nicht überall der Fall ist, habe ich alle drei Werthe ausnahmslos im Sinne obiger Regel auseinanderfallend gefunden, wonach die Quetelet'sche Theorie nicht richtig sein kann. Auch lässt sich eine andere, wie mich dünkt noch rationalere, Theorie der Asymmetrie aufstellen, welche das Auseinanderfallen von A, C, D im obigen Sinne unter sich fasst, und worunter die Symmetrie nur als der besondere Fall einer verschwindenden Distanz zwischen diesen drei Hauptwerthen tritt. Die mühseligen empirischen Untersuchungen zur Prüfung dieser Theorie sind aber noch nicht so weit von mir geführt, um den Grad der Zulänglichkeit derselben vollständig beurtheilen zu können; daher ich für jetzt um so weniger davon spreche, als ein eingehender Verfolg dieses Gegenstandes überhaupt nicht in der Absicht dieser Abhandlung liegt. Doch mag noch folgenden Bemerkungen zur Vervollständigung des Vorigen Raum gegeben werden.

Der Werth D steht als Ausgangswerth der Abweichungen zwar gegen die andern beiden Hauptwerthe insofern im Nachtheil, als weder die Summe der einfachen noch quadrirten Abweichungen bezüglich desselben ein Minimum oder nach beiden Seiten gleich ist, hat, aber abgesehen von dem bedeutungsvollen Umstande, dass seine Wahrscheinlichkeit als Einzelwerth genommen am grössten ist, folgenden wichtigen Umstand vor jenen voraus, den ich mit dem Namen relativer Symmetrie bezeichne.

Sei eine Abweichung bezüglich D auf einer Seite mit Δ', auf der andern mit $\Delta_,$ bezeichnet, die Zahl der Abweichungen beiderseits m' und $m_,$, die Summe $\Sigma\Delta'$ und $\Sigma\Delta_,$ die einfache Durchschnittsabweichung jeder Seite insbesondere $\frac{\Sigma\Delta'}{m'}$ und $\frac{\Sigma\Delta_,}{m_,}$ oder kurz ε' und $\varepsilon_,$, die Zahl der Abweichungen, welche von D an bis zu einem bestimmten Δ' oder $\Delta_,$ auf einer oder der andern Seite reicht, respectiv μ' und $\mu_{,}$, so ist der Fall der relativen Symmetrie der Abweichungen bezüglich D der, dass zu gleichen Verhältnissen $\frac{\Delta'}{\varepsilon_{,}}$, $\frac{\Delta'}{\varepsilon_{,}}$ beiderseits auch gleiche Verhältnisse $\frac{\mu'}{m'}$, $\frac{\mu_{,}}{m_{,}}$ wesentlich gehören, was nur der allgemeinere Fall der absoluten Symmetrie ist, wo $\varepsilon' = \varepsilon_{,}$ und $m' = m_{,}$.

Leicht sieht man, dass relative wie absolute Symmetrie überhaupt nur bezüglich des dichtesten Werthes möglich ist, da man bezüglich jedes andern Werthes eine einseitige Erhöhung der Abweichungscurve bei D erhält, der keine solche auf der andern Seite entspricht; daher auch der arithmetische Mittelwerth nur insofern als Centrum absoluter Symmetrie auftreten kann, als er zugleich den dichtesten Werth vorstellt.

Die Bewährung der relativen Symmetrie bezüglich D kann natürlich wie überhaupt Bewährungen in diesem Gebiete nur an Collectionen aus einer grossen Anzahl von Exemplaren desselben Gegenstandes mit hinreichend regelmässiger Werthvertheilung geschehen. An solchen Werthreihen, die allerdings nicht häufig zu Gebote stehen, habe ich das Gesetz der beiderseitigen Abweichungen bezüglich D wesentlich mit dem Gauss'schen Gesetze zufälliger Abweichungen übereinstimmend gefunden, nur so, dass für jede Seite der, ihr besonders zukommende, Mittelfehler zur Berechnung der $\mu_{,}$ und μ' zu Grunde zu legen war. Hiemit scheint freilich eine Discontinuität des Gesetzes beim dichtesten Werth eingeführt, wofür sich aber meines Erachtens ein plausibler Gesichtspunct aufstellen lässt. Jedenfalls habe ich nach meinen bisherigen Erfahrungen auf nichts Anderes kommen können.

Wo die Asymmetrie der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels nicht sehr bedeutend war, erhielt ich doch auch nach der gewöhnlichen Rechnung, unter Zugrundelegung eines aus den beiderseitigen Abweichungen bezüglich A gemeinsam berechneten Mittelfehlers, bei Zusammenrechnung der Abweichungen beider Seiten bezüglich A, Resultate, die mit dem Gauss'schen Gesetze gut genug stimmten.

Schliesslich noch folgende fundamentale Bemerkung.

Im Allgemeinen findet man, dass die (nach dem Durchschnittswerthe der Abweichungen von einem der Hauptwerthe zu beurtheilende) Variation eines Gegenstandes mit der Grösse des Gegenstandes selbst in einem gewissen Verhältnisse steht, so dass sie zwar nicht allein, aber wesentlich mit davon abhängt; wonach z. B. die Höhe eines Grashalmes zwar absolut genommen weniger variirt als die einer Tanne, ohne dass man aber behaupten kann, sie variire verhältnissmässig weniger. Hienach ist die Variation jedes Gegenstandes unstreitig zwar einerseits durch einen ihm eigenthümlichen, nicht von seiner Grösse, sondern von seiner Qualität oder innern Beschaffenheit abhängigen, constanten Factor als bestimmt anzusehen, anderseits aber zu fragen, ob sie nicht vielmehr nach Verhältnissabweichungen als nach arithmetischen Abweichungen zu beurtheilen sei.*) Für die Fälle nun, wo die arithmetischen Abweichungen der Einzelwerthe nur klein in Verhältniss zu dem Hauptwerthe sind, zu dem sie in Beziehung stehen, wie es meistens der Fall ist, macht es keinen erheblichen Unterschied, ob man die Rechnung auf arithmetische Abweichungen oder auf Verhältnissabweichungen (unter Uebersetzung derselben und ihres Ausgangswerthes in Logarithmen) stellt, und lässt sich über den principiellen Vorzug der einen oder andern Rechnungsweise empirisch nichts entscheiden; hingegen kann der Unterschied in den Resultaten bei verhältnissmässig grossen Abweichungen beträchtlich werden, und es wird meines Erachtens principiell die Rechnungsweise vorzuziehen sein, welche der relativen Symmetrie der Abweichungen bezüglich des dichtesten Werthes (als welcher allein eine solche Symmetrie zulässt) am besten entspricht. Das war aber in den Fällen, die sich mir in dieser Beziehung als massgebend darboten, und denen allerdings noch eine grössere Ausdehnung zu wünschen, entschieden mit der auf Verhältnissabweichungen gestellten (logarithmisch geführten) Rechnung der Fall, wonach ich geneigt bin, dieser Rechnung überhaupt für Collectivgegenstände den principiellen Vorzug zu geben; indess man sich doch in Fällen, wo man

*) Seien a die Einzelwerthe, zwischen denen ein Hauptwerth M liegt, a' die Werthe a, welche grösser als M sind, $a_{,}$ die, welche kleiner als M sind, so hat man in $(a'-M)$, $(a_{,}-M)$, positive und negative arithmetische Abweichungen, in $\frac{a'}{M}$, $\frac{a_{,}}{M}$ obere und untere Verhältnissabweichungen, und in $\log a' - \log M$, $\log a_{,} - \log M$ die zur Berechnung der Verhältnissabweichungen nöthigen positiven und negativen logarithmischen Abweichungen bezüglich $\log M$.

mit verhältnissmässig kleinen Abweichungen zu thun hat, immer lieber an die einfachere Rechnung mit arithmetischen Abweichungen halten wird und auch halten kann. Jene Rechnung aber ist so zu führen.

Den Einzelwerthen a, aus denen die Hauptwerthe zu bestimmen, werden ihre Logarithmen substituirt, das arithmetische Mittel, der Centralwerth und dichteste Werth dieser Logarithmen eben so wie sonst diese Hauptwerthe aus den direct gegebenen Grössen bestimmt, und die Abweichungen der einzelnen log a. vom dichtesten Werthe dieser Logarithmen, den ich mit $D_{\log}$ bezeichne,*) als sog. logarithmische Abweichungen bezüglich desselben genommen. Geht man dann von den Logarithmen zu den, in den Tafeln zugehörigen, Zahlwerthen über, so tritt an die Stelle des arithmetischen Mittels A das, stets etwas kleinere, geometrische G; an die Stelle des arithmetisch dichtesten Werthes D der etwas davon verschiedene, aus $D_{\log}$ abgeleitete, geometrisch dichteste Werth D', indess C wesentlich denselben Werth als bei der auf arithmetische Abweichungen gestellten Rechnung behält. Der Uebergang von den logarithmischen Abweichungen zu den zugehörigen Zahlwerthen liefert die Verhältnissabweichungen, und das arithmetische Mittel der logarithmischen Abweichungen als zugehörigen Zahlwerth die mittlere Verhältnissabweichung.

In Betreff des eben bemerkten Umstandes, dass C constant bleibt, während die beiden andern Hauptwerthe sich je nach der Berechnungsweise ändern, ist zu erinnern, dass ihm allerdings nur eine bedingte Gültigkeit zukommt, indem Folgendes in Rücksicht kommt. Bei gerader Zahl der Werthe ist man überhaupt darauf angewiesen, irgend einen Werth zwischen den zwei, inmitten der geordneten Werthreihe stehenden, Werthen, die ich die Seitenwerthe des C nenne, als definitives C gelten zu lassen, worüber Bemerkungen im nächsten Abschnitte folgen; und man wird natürlich der Consequenz halber das arithmetische oder Verhältnissmittel (geometrische Mittel) der zwei Seitenwerthe dabei zu bevorzugen haben, je nachdem man überhaupt die Rechnung auf arithmetische oder Verhältnissabweichungen stellt. Inzwischen weichen diese beiden Mittel, obwohl princi-

*) Principiell zu unterscheiden, obwohl im Allgemeinen wenig abweichend, von log D, welches der Logarithmus des aus den arithmetischen Abweichungen bestimmten dichtesten Werthes D ist.

piell nur in dem Falle ganz zusammenfallend, wo die Werthe, aus denen sie zu ziehen, einander gleich sind, um so weniger von einander ab, je mehr sich beide Seitenwerthe mit wachsender Zahl der Werthe einander nähern, das ist im Allgemeinen unmerklich, insoweit man die praktisch zur Untersuchung verwendbaren Reihen und zu berücksichtigenden Differenzen im Auge hat. Ausserdem unterliegt die Wahl eines bestimmten C zwischen seinen beiden Seitenwerthen an sich einer gewissen, im folgenden Abschnitte zu betrachtenden, Unsicherheit, in welche die Wahl zwischen dem arithmetischen und Verhältniss-Mittel beider Seitenwerthe nur mit hineintritt.

Insoweit man nun nach Vorigem Anlass hat, die Rechnung vielmehr auf logarithmische oder Verhältniss-Abweichungen als auf arithmetische Abweichungen zu stellen, ist auch die Bewährung der relativen Symmetrie und des Gauss'schen Gesetzes im angegebenen Sinne vielmehr an jenen als an diesen zu suchen, und die Hauptfälle der Bewährung in dieser Hinsicht, die ich werde darzubieten haben, beziehen sich in der That auf die Vertheilung logarithmischer Abweichungen bezüglich des logarithmisch dichtesten Werthes $D_{\log}$ zu dessen beiden Seiten.

Dass das Gauss'sche Fehlergesetz in Beziehung auf arithmetische Abweichungen, wozu die Beobachtungsfehler gehören, überhaupt keine Geltung ins Unbestimmte haben kann — wie denn Gauss selbst nur eine approximative Gültigkeit in endlichen Grenzen dafür in Anspruch nimmt — leuchtet a priori ein, sofern ein Gegenstand sich nicht um mehr als seine eigene Grösse verkleinern kann, das Gesetz aber für die Abweichungen, auf die es bezogen wird, eine Gränze eben so wenig nach unten als oben kennt. Diese principielle Beschränkung der Gültigkeit des Gesetzes auf die arithmetischen Abweichungen fällt bei Beziehung auf die logarithmischen und daraus folgenden Verhältnissabweichungen weg, da jeder Gegenstand sich ebenso in unbestimmt weit getriebenem Verhältnisse verkleinern als vergrössern kann. Diess erscheint von vorn herein für die Beziehung des Gesetzes auf Abweichungen letzter Art bei Collectivgegenständen günstig, kann aber natürlich eine empirische Bewährung nicht entbehrlich machen, da man von vorn herein eben so in Zweifel sein könnte, ob nicht das Gesetz seiner Natur nach nur auf arithmetische Abweichungen bezogen werden könne; und obwohl ich keine aprioristische Begründung für diesen Zweifel finde, gestehe ich doch, dass er mir nur durch entscheidende Erfahrungen benommen worden ist. Von anderer Seite aber lässt sich nicht daran denken, auch im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete mit Verhältnissabweichungen rechnen zu wollen, sofern die Fehler, die man bei Messung von Grössen, als Längen, Winkel, in diesem Gebiete begeht, von der zu messenden Grösse wesentlich unabhängig sind. Es gehört das nun eben zu den Puncten, in denen sich das eine Untersuchungsfeld vom andern scheidet.

Der Nachweis und die eingehende Erörterung von all' dem wird nicht ohne Umständlichkeit geschehen können. Und da ich nicht weiss, ob ich überhaupt noch werde im Stande sein, die weitschichtige Untersuchung dieses Feldes und die Redaction des Untersuchungs-Materials bis zu einem genügenden Abschluss durchzuführen, wünschte ich wenigstens diese vorläufige Notiz darüber in Anknüpfung an die mit hineinspielenden Verhältnisse des C zu geben.

III. Bestimmungsweise und verschiedene Verhältnisse des Centralwerthes gegenüber dem arithmetischen Mittel.

Um den Centralwerth aus einer gegebenen Anzahl von Werthen zu bestimmen, sind sie vor Allem ihrer Grösse nach zu ordnen, wonach die Bestimmung durch Abzählen von einem Ende der Reihe herein bis zu ihm, als der Ordnungszahl nach dem mittelsten, unter Rücksichtsnahme auf folgende Regeln, leicht geschehen kann.

Als Hauptregel hat zu gelten, dass man durch Abzählen vom einen und vom andern Ende der Reihe herein auf denselben Werth als C komme. Dieser Foderung würde nicht entsprochen werden, wenn man, bei Bezeichnung der Totalzahl der Werthe mit m, den $\frac{m}{2}$. Werth der Reihe, von einem Ende desselben herein, als C nehmen wollte. Denn sei z. B. die Reihe der 4 Werthe a, b, c, d gegeben, so würde man als 2. Werth, von a hereingezählt, b, hingegen von d herein c als C erhalten, indess C seiner gefoderten Mittelstellung nach zwischen b und c zu suchen ist. Und hätte man die 5 Werthe a, b, c, d, e, so würde man als $2\frac{1}{2}$. Werth von a herein einen Werth zwischen b und c, von e herein aber zwischen d und c erhalten, indess c seiner Mittelstellung nach selbst als C zu betrachten. Hingegen genügt man der Foderung sowohl bei geradem als ungeradem m, wenn man den $\frac{m+1}{2}$. Werth sei es vom einen oder andern Ende her als C nimmt, indem man dabei, unter der folgends überall festgehaltenen Voraussetzung der Rechnung mit arithmetischen Abweichungen, im Falle eines geraden m, das arithmetische Mittel zwischen dem $\frac{m}{2}$. und $\left(\frac{m}{2}+1\right)$. Werth als $\frac{m+1}{2}$. Werth annimmt; wovon bekanntlich das Entsprechende bei Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch Abzählen aus einer geordneten Fehlerreihe gilt.

Bei Messung der Exemplare eines Collectivgegenstandes können natürlich nicht unendlich kleine Massdifferenzen unterschieden werden, sondern man geht mit den Abtheilungen des Massstabes und Schätzung der Unterabtheilungen nur bis zu einer gewissen Gränze herab, was macht, dass bei grosser Zahl der Exemplare eine Mehrzahl von Exemplaren auf dasselbe Mass fallen kann. Dabei hat man sich vorzustellen, dass alle Exemplare, die sich auf dasselbe Mass häufen, eigentlich durch ein Intervall von der Grösse der unterschiedenen Intervalle, wovon das betreffende Mass die Mitte bildet, kurz durch dessen Umkreis-Intervall, vertheilt sind; und da man keinen Grund hat, eine Vertheilungsweise vor der andern in diesem Intervalle zu bevorzugen, so hat man die Vertheilung der Exemplare darin, behufs folgender Bestimmung des C, als gleichförmig zu denken. Zählt man nun von einem Ende der geordneten Werthreihe herein die Werthe nach obiger Regel ab, um zum C zu gelangen, und trifft damit auf einen Werth, in dem sich eine Mehrzahl von Exemplaren vereinigt, so hat man diesen Werth nicht ohne Weiteres genau für das C zu nehmen, sondern dessen Lage im Umkreis-Intervalle des getroffenen Werthes durch eine Interpolation unter Festhaltung der obigen Hauptregel zu bestimmen, dass man auf denselben

Werth komme, mag man mit Zählung und Interpolation vom einen oder andern Ende der Reihe ausgehen. Diess fodert aber, dass man im jetzigen Falle den Werth C nicht auf den $\frac{m+1}{2}$. sondern genau auf den $\frac{m}{2}$. Werth fallen lässt, da die obige Regel bezüglich $\frac{m+1}{2}$ nur für den Fall anwendbar ist, dass C irgend einen von vereinzelten, um endliche Intervalle auseinander liegenden, Werthen trifft oder zwischen zwei solche fällt, nicht aber für den Fall, dass C innerhalb des gleichförmigen Flusses der Werthe eines Umkreis-Intervalles aufzusuchen ist.

Zur empirischen Bewährung davon, dass man in diesem Falle mit dem $\frac{m}{2}$. Werthe der gegebenen Hauptregel entspricht, und zugleich zur Erläuterung des Verfahrens mag folgendes willkührlich gewählte Beispiel dienen, in welchem auf jedes Mass (von beliebig gedachter Einheit) eine Mehrzahl von Exemplaren fällt.

Mass	1	2	3	4	5
Zahl	2	5	16	10	7

Die Totalzahl m ist hier 40, und der $\frac{m+1}{2}$. d. i. $20\frac{1}{2}$. Werth sei es vom linken oder rechten Ende der Reihe her abgezählt, schneidet in die Zahl 16 ein, also ist das C durch Interpolation im Umkreis-Intervall des zu 16 zugehörigen Masses 3, aber nicht als $20\frac{1}{2}$. sondern als 20. Werth zu suchen. Die Gränzen des Umkreis-Intervalles von 3 sind $2\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$. Zählen wir nun von der linken Seite her, so haben wir bis zur Gränze $2\frac{1}{2}$ des Umkreis-Intervalles 7 Werthe und fehlen somit an 20 noch 13, welche in das Umkreis-Intervall von 3 fallen; also haben wir nach einfachstem Interpolationsprincip von der Gränze des Umkreis-Intervalles 2,5 an noch $\frac{13}{16}=0{,}8125$ dieses Intervalles zu nehmen, um zu C zu gelangen, was $C=2{,}5+0{,}8125=3{,}3125$ giebt. Gehen wir statt dessen vom rechten Ende der Reihe aus, so haben wir bis zur Gränze 3,5 des Umkreis-Intervalles 17 Werthe, und fehlen mithin noch 3 an 20, die in das Umkreis-Intervall mit 16 Werthen fallen. Also haben wir von dieser Gränze an $\frac{3}{16}=0{,}8175$ des Intervalles rückwärts zu nehmen, um zu C zu gelangen, was $3{,}5-8{,}1875=2{,}3125$ wie oben giebt.

Um den im 4. und 5. Abschnitt zu gebenden allgemeinen Beweisen der potenziellen Eigenschaft des C eine empirische Bewährung derselben an einem willkührlichen Zahlenbeispiele vorauszuschicken, und einige Bemerkungen über verschiedene Verhältnisse des C daran zu knüpfen, nehme ich nach zufälligem Aufschlagen eines Bandes von 7stelligen Logarithmen die Ziffern der Charakteristik des, mir zuerst in die Augen fallenden, Logarithmus von 6700, d. i. 8260748 als eben so viel besondere Werthe, und ordne sie nach ihrer Grösse, womit die Reihe der sieben Werthe 0, 2, 4, 6, 7, 8, 8 entsteht. Der arithm. Mittelwerth A ist 5, der Centralwerth C ist 6. Die Summe der Abweichungen bezüglich C beträgt 17, bezüglich jedes andern Werthes aber mehr, sei es, dass er aus der Grössenreihe selbst genommen oder zwischen irgendwelchen Werthen derselben angenommen wird, z. B. 17,5 bezüglich 5,5; 18 bezüglich $A=5$; 18 gegen 4; 23 gegen 2 u. s. f. Hiegegen ist die Summe der Quadrate der Abweichungen bezüglich A kleiner als bezüglich C oder irgend einem andern Werthe, nämlich 58 bezüglich $A=5$; 65 bezüglich $C=6$ u. s. f.

Ungeachtet man nach den oben angegebenen Regeln aus jeder Werthreihe einen bestimmten Werth für C finden kann, lässt sich doch bei geradem m von einer principiellen Unsicherheit seiner Bestimmung in folgendem Sinne sprechen, die bei ungeradem m nicht eben so besteht, und der das A überhaupt nicht unterliegt. Eigentlich bilden in einer geordneten Werthreihe bei geradem m statt eines Werthes zwei Werthe, die ich die Seitenwerthe des C genannt habe, die Werthmitte, und welchen Werth zwischen diesen Seitenwerthen man als C annehmen mag, so entspricht er gleich gut nicht nur der Begriffsbestimmung des C, die gleiche Zahl positiver und negativer Abweichungen von sich abhängig zu haben, sondern auch seiner potenziellen Eigenschaft, die kleinste Summe der Abweichungen von sich abhängig zu haben, indem diese Summe bei Ausgang von irgend welchem Zwischenwerthe zwischen den Seitenwerthen, ja selbst noch bei Ausgang von einem oder dem andern der beiden Seitenwerthe selbst, denselben Minimumwerth behält, was sich schon ohne Beweis durch Formeln leicht übersehen lässt. Wenn nämlich die Lage des C von seiner Mittellage zwischen beiden Seitenwerthen nach einer oder der andern Seite verschoben, d. h. statt der arithmetischen Mittelgrösse zwischen beiden ein sich dem einen oder andern mehr nähernder Werth dafür angenommen wird, vermindert man jede der Abweichungen dadurch nach einer Seite um eben so viel, als man jede nach der andern Seite vergrössert, und da die Zahl der Werthe nach beiden Seiten so lange gleich gross bleibt, als man mit der Verschiebung nicht über einen der Seitenwerthe hinausgeht, und damit die Begriffsgränze des C überschreitet, so compensiren sich Zunahme und Abnahme der Abweichungen im Ganzen. So wie aber die Verschiebung diese Gränze überschreitet, wächst auch die Abweichungssumme. Füge man z. B. zur Erlangung einer geraden Zahl von Werthen den Ziffern des vorigen Beispiels noch die Mantissenziffer 3 hinzu, womit man geordnet erhält

$$0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 8,$$

so bilden 4 und 6 die Seitenwerthe von C und kann man daran wie an beliebigen andern Beispielen die vorigen Bemerkungen bewähren.

Nach der obigen Regel, bei Abzählung von einem Ende der geordneten Reihe herein den $\frac{m+1}{2}$. Werth für C zu nehmen, hebt man allerdings die hier bemerkte Unbestimmtheit dadurch, dass man, wie angegeben worden, bei geradem m das arithmetische Mittel zwischen dem $\frac{m}{2}$. und $\left(\frac{m}{2}+1\right)$. Werthe, welches die beiden Seitenwerthe sind, als $\frac{m+1}{2}$. Werth nimmt. Doch ist diess eigentlich Willkühr, da jeder andere Werth zwischen beiden Seitenwerthen eben so gut den $\frac{m+1}{2}$. Werth der Ordnungszahl nach vorstellen kann; und man wird zwar in praxi immer bei der angegebenen Bestimmungsweise als der einfachst möglichen und bequemsten stehen bleiben; nur tritt diese Mitzuziehung des Principes des arithmetischen Mittels zur Bestimmung des C eigentlich aus dem Princip des C selbst heraus, welches an sich dieser Unbestimmtheit nicht zu wehren vermag.

Vielleicht könnte man diese Unsicherheit durch das Princip des zureichenden Grundes ausgeschlossen halten, sofern kein Grund sei, von der Symmetrie der Seitenwerthe bezüglich ihres arithmetischen Mittels vielmehr nach einer als der andern Seite abzuweichen. Aber ausser den Seitenwerthen könnten eben so gut die demselben nächsten und überhaupt je zwei Werthe zu beiden Seiten des C auf Symmetrie dazu Anspruch machen, ohne dass sie für alle zugleich bestehen kann, so dass in der That nur der äussere Vortheil der einfachsten und bequemsten Bestimmung für das Mittel beider Seitenwerthe als *C* entscheiden kann.

Von anderer Seite lässt sich bemerken, dass, wenn bei ungerader Zahl der Werthe für das gegebene *C* irgend ein anderer Werth gesetzt wird, der noch zwischen den beiden Nachbarwerthen des vorigen seiner Grösse nach enthalten bleibt, der neue Werth die Function als *C* noch so gut als der frühere vertritt, so dass nicht nur die Zahl der beiderseitigen Abweichungen noch gleich sondern auch die Gesammtsumme der Abweichungen bezüglich desselben noch ein Minimum bleibt, wenn schon die absolute Grösse der Abweichungssumme sich ändert; wogegen man das *A* mit keinem andern Werthe vertauschen kann, ohne dass es seine Eigenschaft, für die gegebenen Werthe noch der arithmetische Mittelwerth zu sein, verliert. Diese Ersetzbarkeit des gegebenen *C* durch irgend andere Werthe zwischen seinen Nachbarwerthen bei ungerader Zahl der Werthe darf zwar nicht mit der Unbestimmtheit in der Feststellung des *C* zwischen seinen Seitenwerthen bei gerader Zahl der Werthe verwechselt werden, doch hängen wie leicht ersichtlich beide Umstände durch denselben Grund zusammen und dasselbe gilt von folgendem dritten Umstande:

Ist *C* in einer nach der Grösse der Werthe geordneten ungeraden Grössenreihe gegeben, oder sind seine Seitenwerthe in einer geraden Grössenreihe gegeben, so kann man die Grössen auf der einen und der andern Seite davon ganz beliebig abändern, ohne dass der Werth des *C* sich ändert oder seine Eigenschaft, das Minimum der Abweichungssumme von sich abhängig zu haben, verliert, so lange das *C* nur seine Mittelstellung in der Grössenordnung nicht verliert und damit aufhört, seiner Definition zu entsprechen, wogegen sich der Werth *A* durch jede Aenderung eines der Einzelwerthe, aus denen er gezogen ist, seinem Werthe nach ändert, und damit seine Eigenschaft, die kleinste Summe von Abweichungsquadraten von sich abhängig zu haben, auf das neue *A* übergehen lässt, es sei denn, dass die Aenderung des einen Einzelwerthes durch die gleich grosse Aenderung eines andern auf der andern Seite gerade compensirt wird.

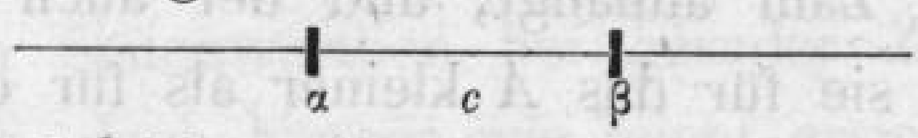
Nach der Gesammtheit dieser unter sich zusammenhängenden Puncte ist der Centralwerth weniger abhängig von der Grösse jedes Einzelwerthes, minder sicher aus denselben bestimmbar, als der arithmetische Mittelwerth und eben damit weniger geeignet, einen Werth darzustellen, auf dessen Bestimmung alle Einzelwerthe einen nach ihrer Grösse bemessenen Einfluss haben sollen, wie diess im Sinne der Bestimmung eines wahrscheinlichsten Beobachtungswerthes ist, daher schon aus diesem Grunde der arithmetische Mittelwerth einen Vortheil vor dem Centralwerthe vorausbehält.

Insoweit jedoch eine Unsicherheit in Feststellung des C aus angegebenen Gründen anzuerkennen ist, fällt dieselbe in Fällen, wo man mit einer unbestimmbar grossen Menge von Werthen zu thun hat, wie es im Allgemeinen bei Collectivgegenständen der Fall ist, wesentlich weg, d. h. mindert sich um so mehr, je mehr man Exemplare zuzieht, und würde, wenn man unendlich viele, sich ihrer Grösse nach an einander schliessende, zuziehen könnte, ganz wegfallen. Kann man aber doch nur eine endliche Zahl zuziehen, so tritt die betreffende Unsicherheit mit in die hinein, die überhaupt jeder Bestimmung einer Function unendlich vieler zufälliger Grössen aus einer endlichen Zahl anhängt, und der auch das A nicht entzogen ist, nur dass sie für das A kleiner als für das C ist.

Indess man überhaupt nicht umhin kann, bei gerader Zahl der Werthe das Princip des arithmetischen Mittels zur Bestimmung des C nebensächlich zuzuziehen, lässt sich auch bei ungerader Zahl der Werthe eine solche Zuziehung mitunter wenigstens vortheilhaft finden, indem man bei grosser Zahl von Einzelwerthen eines Collectivgegenstandes, die sich um C herum unregelmässig vertheilen, statt des seiner Stelle nach wirklich mittelsten Einzelwerthes das arithmetische Mittel der drei mittelsten Werthe als C nimmt, indem man im Allgemeinen sicher sein kann, dem wahren C, was aus unendlich vielen Exemplaren zu erhalten, damit näher zu kommen, als mit dem, durch Zufälligkeiten mehr influirten, Einzelwerthe.

IV. Formeln für die Abänderung der Abweichungssumme je nach Verlegung ihres Ausgangspunctes und daraus fliessender Beweis für die potenzielle Eigenschaft des Centralwerths.

Der leichtern Anschaulichkeit halber repräsentire ich die Abweichungen gegebener Werthe a von einem gegebenen Ausgangswerthe durch Längen die auf einer geraden Linie rechts und links von einem gegebenen Puncte α genommen werden, und untersuche, wie sich die Summen und Zahlen dieser immer nach ihrem absoluten Werthe zu rechnenden Abweichungen ändern, wenn man vom ersten Ausgangspunct α zu einem andern Ausgangspunct β übergeht, der um c nach einer oder der andern Seite von α abweicht. Statt Summen oder Zahlen von Abweichungen sage ich meist kurz Summen oder Zahlen. Hiezu folgendes Linearschema.



Die mit c gleichseitigen Abweichungen bezüglich α, d. h. welche nach derselben Seite gerechnet sind, nach welcher β von α abweicht, nenne ich diesseitige bezüglich α, die nach der entgegengesetzten Seite davon gerechneten, jenseitige bezüglich α; ebenso nenne ich diesseitige bezüglich β die, welche von β in derselben Richtung abweichen, als β von α abweicht, die entgegengesetzt von β abweichenden jenseitige bezüglich β, welche Bezeichnungen sich respective auf die Summen und Zahlen dieser Abweichungen übertragen. In obigem Linearschema wird c durch den Abstand des Punctes β von α vorgestellt, und fallen alle diesseitigen Abweichungen bezüglich α wie bezüglich β nach Rechts, alle jenseitigen nach Links von ihren respectiven Ausgangspuncten.

Von Abweichungen, die, im Ausgange von α nach β zu oder im Ausgange von β nach α zu, ihrer absoluten Grösse nach zwischen 0 und c liegen, so wie von den Grössenwerthen, durch welche diese Abweichungen geliefert werden, sage ich kurz, dass sie in das Intervall c fallen.

Seien nun S' und $S_,$ als diesseitige und jenseitige Summen, m' und $m_,$ als diesseitige und jenseitige Zahlen bezüglich des ersten

Ausgangspunctes α gegeben, und sollen danach $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_,$, $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}_,$ als diesseitige und jenseitige Summen und Zahlen bezüglich des zweiten Ausgangspunctes β gesucht werden, so ist dazu allgemein gesprochen ausser dem Werthe c, um welchen β von α abliegt, noch die Kenntniss der Zahl z und Summe Z der Abweichungen bezüglich α nöthig, welche im Intervall c zwischen α und β enthalten sind. Die Totalzahlen und Totalsummen bezüglich α wie β ergeben sich dann durch Addition der diesseitigen und jenseitigen Partialsummen, so dass

$$S = S' + S_,,\ m = m' + m_,$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}_,,\ \mathfrak{m} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}_,$$

Die Werthe S' $S_,$, $\mathfrak{S}'$ $\mathfrak{S}_,$, Z, c sind alle nach ihrem absoluten Werthe oder als positiv zu verrechnen. Dass diess auch von c gilt, selbst wenn es nach Seite der negativen Abweichungen bezüglich α genommen ist, hängt natürlicherweise damit zusammen, dass die negativen Abweichungen auch selbst als positive gerechnet werden, und die Abweichungen überhaupt hier nicht als positive und negative nach einem Gegensatz des Vorzeichens, sondern als diesseitige und jenseitige bezüglich c unterschieden werden.

Allgemein hat man in Obacht zu nehmen, dass alle, für den ersten Ausgangspunct als gegeben angesehenen, Werthe mit lateinischen, alle für den zweiten Ausgangspunct gesuchten mit deutschen Buchstaben, alle diesseitigen bezüglich des ersten Ausgangspunctes mit einem Strich oben, alle jenseitigen mit einem Strich unten bezeichnet sind, indess abgesehen von z, Z und c, welche stets diesseits α fallen, die Werthe ohne Strich die Summe diesseitiger und jenseitiger Werthe geben.

Man findet nun zuvörderst ohne Schwierigkeit aus nachfolgender Betrachtung des räumlichen Schema folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{S}' = S' + (z - m')c - Z \qquad \ldots (1)$$
$$\mathfrak{S}_, = S_, + (z + m_,)c - Z \qquad \ldots (2)$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}_, = S + (m_, - m')c + 2\ (zc - Z) \qquad \ldots (3)$$
$$\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}_, = S' - S_, - mc \qquad \ldots (4)$$

Erstens nämlich vermindern sich im Uebergange von S' zu $\mathfrak{S}'$ alle diesseitigen Abweichungen bezüglich α, welche grösser als c sind und deren Zahl $m' - z$ ist, um die Grösse c, also ist $(m' - z)c$ von S' abzuziehen, um von S' zu $\mathfrak{S}'$ zu gelangen. Zweitens vermindert sich S' dazu noch um die Summe der Abweichungen, welche bezüglich α in das Intervall c fallen, also kleiner als c sind, d. i. um Z, was zusammen die Gleichung (1) giebt.

Weiter vergrössern sich im Uebergange von $S_,$ zu $\mathfrak{S}_,$ alle jenseitigen Abweichungen bezüglich α, deren Zahl $m_,$ ist, um den Werth c, wonach $m_,c$ zu $S_,$ zu fügen ist, dazu aber kommt noch die, mit $\mathfrak{Z}$ zu bezeichnende, Summe der z jenseitigen Abweichungen bezüglich β, welche im Intervall c liegen, eine Summe, die nicht mit Z zusammenfällt, sofern sie von β statt wie Z von α aus gerechnet sein soll, daher mit einem deutschen Buchstaben bezeichnet ist, aber sich wie folgt aus den bezüglich α gegebenen Grössen z, Z, c gleich $z\,c - Z$ findet. Sei $\varDelta'$ die diesseitige Abweichung eines Werthes bezüglich α im Intervall c, so ist die Abweichung desselben Werthes bezüglich β gleich $c - \varDelta'$, mithin die Summe der z Abweichungen bezüglich β im Intervall c, d. i. $\mathfrak{Z}$, gleich $zc - \Sigma\varDelta'$, worin $\Sigma\varDelta'$ als Summe der z Abweichungen $\varDelta'$ bezüglich α im Intervall c, kurz durch Z ausgedrückt ist. Fügt man diesen Werth von $\mathfrak{Z}$ noch zu $S_, + m_,c$, so kommt man damit auf Formel (2).

Die Gleichungen (3) und (4) folgen dann unmittelbar aus (1) und (2).

Die vorigen Gleichungen beziehen sich auf die Summen der Abweichungen. Hiezu kann man noch folgende bezüglich der Zahlen derselben fügen, welche sich ohne complicirten Beweis aus der einfachen Anschauung des räumlichen Schema ergeben.

$$\mathfrak{m}' = m' - z;\ \mathfrak{m}_, = m_, + z \ldots (5)$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}_, = m' + m_, = \mathfrak{m} = m;\ \text{und}\ \mathfrak{m}' - \mathfrak{m}_, = m' - m_, - 2z \ldots (6).$$

In etwas anderer Weise und Form erhält man wesentlich dieselben Gleichungen so: Sei $\mathfrak{A}$ der erste, $\mathfrak{B}$ der zweite Ausgangswerth, welcher um c von $\mathfrak{A}$ abweicht, so dass $\mathfrak{A} + c = \mathfrak{B}$. Seien a die Werthe, deren Abweichungen bezüglich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu nehmen, hierunter die Werthe $a' > \mathfrak{A}$, die Werthe $a_, < \mathfrak{A}$, so ist die Summe der Abweichungen bez. $\mathfrak{A}$ einerseits $S' = \Sigma'\,(a' - \mathfrak{A})$, anderseits $S_, = \Sigma_,\,(\mathfrak{A} - a_,)$. Werden jetzt die Abweichungen bez. $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + c$ genommen, so gehen diese Summen unmittelbar über in

einerseits $\Sigma'\ [a' - (\mathfrak{A} + c)]$

anderseits $\Sigma_,\ [(\mathfrak{A} + c) - a_,]$

Indem aber wegen Wachsthums von $\mathfrak{A}$ um c nicht mehr alle $a' > \mathfrak{A} + c$ sind, mischen sich in erster Summe positive und negative Abweichungen, und ist der Theil der Abweichungen $a' - (\mathfrak{A} + c)$, in welchem $\mathfrak{A} + c > a'$, mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite zu bringen, da wir positive und negative Abweichungen nicht minder bezüglich $\mathfrak{B}$ als bez. $\mathfrak{A}$ gesondert haben wollen, und beiderseits nach absolutem Werthe oder als positive rechnen. Theilen wir also $\Sigma'[a'-(\mathfrak{A}+c)]$ in zwei Summen, eine Summe, in welcher $a'<\mathfrak{A}+c$, und eine Summe, in welcher $a'>\mathfrak{A}+c$, und unterscheiden hienach die Werthe a' in a'' und a''', so wie Σ' in Σ'' und Σ''', so haben wir jetzt:

bez. $\mathfrak{A}$.

$$S' = \Sigma''(a''-\mathfrak{A}) + \Sigma'''(a'''-\mathfrak{A})$$
$$S_, = \Sigma_,(\mathfrak{A}-a_,)$$

bez. $\mathfrak{B}$.

$$\mathfrak{S}' = \Sigma'''(a'''-\mathfrak{B}) = \Sigma'''(a'''-\mathfrak{A})-\Sigma'''c$$
$$\mathfrak{S}_, = \Sigma_,(\mathfrak{B}-a_,) + \Sigma''(\mathfrak{B}-a'')$$
$$= \Sigma_,(\mathfrak{A}-a_,) + \Sigma''(\mathfrak{A}-a'')+(\Sigma_,+\Sigma'')c$$

Substituiren wir nun in den Ausdruck von $\mathfrak{S}'$ für $\Sigma'''(a'''-\mathfrak{A})$ den, aus dem Ausdrucke von S' sich ergebenden, Werth $S'-\Sigma''(a''-\mathfrak{A})$, und in den Ausdruck von $\mathfrak{S}_,$ für $\Sigma_,(\mathfrak{A}-a_,)$ den oben gegebenen Ausdruck $S_,$, so erhalten wir:

$$\mathfrak{S}' = S'-\Sigma''(a''-\mathfrak{A})-\Sigma'''c$$
$$\mathfrak{S}_, = S_,-\Sigma''(a''-\mathfrak{A})+(\Sigma_,+\Sigma'')c$$
$$\mathfrak{S} = S-2\Sigma''(a''-\mathfrak{A})+(\Sigma_,+\Sigma''-\Sigma''')c$$

Diese Werthe von $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_,$, $\mathfrak{S}$ müssen mit den S. 25 in den Formeln (1), (2), (3) gegebenen stimmen; und in der That ist in Zahlwerthen $\Sigma_, = m_,$, $\Sigma''+\Sigma''' = m'$, $\Sigma'' = z$, mithin $\Sigma''' = m'-z$; in Summenwerthen aber $\Sigma''(a''-\mathfrak{A}) = Z$, sofern Z die Summe der diesseitigen Abweichungen bezüglich $\mathfrak{A}$ ist, welche von Werthen a herrühren, die $>\mathfrak{A}$, aber $<\mathfrak{A}+c$ sind.

Alle diese Formeln kann man an beliebigen Zahlenbeispielen bewähren, nur bedarf es dazu noch einer besonderen Erörterung, wie man die Werthe m', $m_,$, z, Z zu bestimmen hat, wenn der erste oder zweite Ausgangswerth oder beide mit bestimmten Werthen der Grössenreihe zusammenfallen. Falle z. B. der erste Ausgangswerth auf einen bestimmten Werth der Reihe, so kann die Frage entstehen, ob man ihn bei m' oder $m_,$ mitzählen, bei z mitzählen oder nicht mitzählen soll. Fällt der zweite Ausgangswerth mit einem bestimmten Werthe der Grössenreihe zusammen, so hat das zwar auf die Bestimmung von m' und $m_,$ keinen Einfluss, aber es fragt sich nicht nur wieder, ob man den zweiten Ausgangswerth bei z mitzählen oder nicht mitzählen, sondern auch ob man ihn in Z als eine Abweichung gleich c mit einrechnen oder nicht einrechnen soll.

Zur allgemeinen Beantwortung der Frage lassen sich folgende zwei, auf dasselbe führende, Regeln aufstellen:

Erste Regel. Man nehme aus den Bestimmungen, zwischen denen die Wahl ist, das Mittel.

Sei z. B. in obigem Beispiele von 7 Werthen

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 8$$

der erste Ausgangswerth 2, der zweite 6, also beide mit bestimmten Werthen der Grössenreihe zusammenfallend, so findet man direct, ohne Rückgang auf die Formeln:

$$S',\ S_{,},\ S \text{ respectiv} = 23,\ 2,\ 25 \text{ vom 1. Ausg.}$$
$$\mathfrak{S}',\ \mathfrak{S}_{,},\ \mathfrak{S} \quad ,, \quad = 5,\ 12,\ 17 \ ,,\ 2. \ ,,$$

Dieselben Werthe von $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_{,}$, $\mathfrak{S}$ wird man nach den Formeln (1) (2) (3) mittelst folgender Bestimmungsweise der darein eingehenden Werthe von m', $m_{,}$, z, Z erhalten, wobei c stets 4 bleibt.

Bei m' kann man zwischen 5 und 6, bei $m_{,}$ zwischen 1 und 2 schwanken; man wird also $m' = 5{,}5$, $m_{,} = 1{,}5$ setzen. — Bei z kann man in Betreff des doppelten Zusammenfallens schwanken, ob man beide Ausgangspuncte, oder keinen, oder blos diesen oder blos jenen Ausgangspunct dem übrigens durch 1 gebildeten z zuzufügen habe, was im Mittel 1 als Zusatz dazu giebt, wonach $z = 2$. In Betreff von Z wird man zwischen 2 und $2 + c$ schwanken, also das Mittel $2 + \frac{c}{2} = 4$ als Z zu nehmen haben. Also $m' = 5{,}5$; $m_{,} = 1{,}5$; $z = 2$; $Z = 4$; $c = 4$, was zu den angegebenen, direct erhaltenen, Werthen zurückführt.

Zweite Regel. Denken wir uns den Ausgangspunct, sei es ersten oder zweiten, der mit einem Werthe der Grössenreihe zusammenfällt, von diesem Werthe unendlich wenig, sei es nach diesseits oder jenseits verrückt, so dass der betreffende Werth der Grössenreihe eine unendlich kleine, aber eben desshalb die Summe nicht ändernde, Abweichung i vom fictiven Ausgangspuncte hat, so sind hiemit m', $m_{,}$, z, Z für diese Lage des fictiven Ausgangspunctes diesseits oder jenseits des wahren unzweideutig bestimmt, und muss eine, mit der direct bestimmbaren wahren Summe übereinstimmende, Summe nach Aufnahme jener Bestimmungen in die Formeln erhalten werden, gleichgültig, ob man die Verrückung nach diesseits oder jenseits vornehme.

Benutzen wir zur Erläuterung wieder das obige Beispiel, wo beide Ausgangspuncte auf bestimmte Werthe der Grössenreihe fallen, so können die Verrückungen beider um die unendlich kleine Grösse i auf folgende 4 Weisen eintreten, und hienach folgende Werthe von m', $m_{\prime}$, z, Z statt finden, indess c immer denselben Werth 4 behält.

	1. Ausg.	2. Ausg.	m'	$m_{\prime}$	z	Z
1)	$2+i$	$6+i$	5	2	2	6
2)	$2-i$	$6-i$	6	1	2	2
3)	$2+i$	$6-i$	5	2	1	2
4)	$2-i$	$6+i$	6	1	3	6
		Mittel	5,5	1,5	2	4

Nun giebt schon jede einzelne der 4 Combinationen durch Substitution der Werthe m', $m_{\prime}$, z, Z in die Formeln ein mit der directen Bestimmung zutreffendes Resultat, aber auch das untenstehende Mittel, dasselbe, auf das sich schon nach der vorigen Regel kommen liess.

Zur Ableitung der potenziellen Eigenschaft des C, die kleinste Abweichungssumme von sich abhängig zu haben, genügt Formel (3). Nehmen wir nämlich C als ersten Ausgangswerth, so folgt aus der Formel, dass bei Uebergang von da zu irgend einem andern Ausgangswerth, welcher dem Begriffe des Centralwerthes nicht entspricht, die Abweichungssumme wächst. Sofern aber nach den früher gemachten Bemerkungen bei gerader Zahl der Werthe die Lage des Centralwerthes innerhalb seiner Seitenwerthe sogar bis zum Zusammentreffen mit dem einen oder andern Seitenwerthe selbst verrückt werden kann, ohne dass der Begriff des Centralwerthes dadurch verlassen wird, folgt zugleich aus der Formel, dass bis zu solchen Gränzen auch kein Wachsthum der Abweichungssumme stattfindet.

In der That nach dem Begriffe des Centralwerthes ist $m'=m_{\prime}$. Wird er als erster Ausgangspunct genommen, so gehört zu ihm in Formel (3) die Summe S und geht vermöge jener Gleichheit die Summe $\mathfrak{S}$ bezüglich irgend eines andern, um c von C abweichenden, Ausgangswerthes über in

$$\mathfrak{S}=S+2\ (zc-Z)\ .\ .\ .\ (7).$$

Der Werth $2\ (zc-Z)$ ist aber entweder eine positive Grösse oder null, also $\mathfrak{S}$ grösser als S oder höchstens gleich S. Denn zc ist der, in den Formeln stets als positiv angenommene, volle Abstand zwischen beiden Ausgangspuncten $z$mal genommen, Z aber die Summe der z Abweichungen, welche in das Intervall C fallen, also kleiner als c oder höchstens gleich c sind.

Den Werth null erhält der obige Ausdruck, wenn $z = c$ und $Z = c$, was stets zusammenfällt, oder allgemeiner, den vorigen Fall mit unter sich begreifend, wenn $zc = Z$, worunter sich alle Fälle zusammenfassen, wo c klein genug bleibt, um den zweiten Ausgangspunct die Begriffsgränze des C nicht überschreiten zu lassen. $z = o$ und $Z = 0$ sagt nämlich, dass zwischen dem 1. und 2. Ausgangspunct kein Werth, mithin keine Abweichung liegt, was dem Falle entspricht, dass bei geradem m beide Ausgangswerthe zwischen Seitenwerthen desselben C liegen, worauf aber auch die Fälle reducirbar sind, dass ein Zusammentreffen des ersten oder zweiten Ausgangswerthes oder beider respectiv mit einem oder dem andern oder beiden Seitenwerthen des C stattfindet. Denn da der Begriff des C die Gleichheit von m' mit m, voraussetzt, so dürfen wir die für solche Fälle angegebenen Regeln hier auch nur so anwenden, dass dieser Bedingung entsprochen wird, was im Sinne der zweiten Regel fodert, dass der erste Ausgangspunct C zwischen die Seitenwerthe hinein um i verrückt gedacht werde, indess zugleich gestattet ist, auch den zweiten zwischen dieselben hinein verrückt zu denken, was zu $z = 0$ und $Z = 0$ zurückführt. Nun kann zwar der zweite Ausgangspunct auch nach Aussen um i verrückt gedacht werden, ohne dass der Gleichheit von m' mit m, Abbruch geschieht; dann wird aber, wenn ein Werth oder auch z Werthe auf den zweiten Ausgangspunct fallen, Z gleich dem vollen z-mal genommenen c, und wird hiemit der Gleichung $zc = Z$ immer noch genügt.

Um die Fälle besonders zu berücksichtigen, wo C als der erste Ausgangspunct, oder wo der zweite Ausgangspunct, oder wo beide auf bestimmte Werthe der Grössenreihe fallen, so lassen sich nach den aufgestellten Principien folgende Regeln geben.

Seien z_0 und Z_0 die Zahl und Summe der Abweichungen bezüglich des 1. Ausgangspunctes, welche von Werthen herrühren, die wirklich zwischen beide Ausgangspuncte fallen, ohne mit einem derselben zusammenzufallen, und werde als „Ausg. best." oder „Ausg. unbest." bezeichnet, dass der betreffende Ausgangswerth mit einem bestimmten Grössenwerth der Reihe zusammenfällt oder nicht zusammenfällt, so wird C als Ausgangspunct bei ungeradem m stets bestimmt sein, bei geradem m nur im Falle des Zusammenfallens mit einem Seitenwerthe, und wird man überhaupt für z und Z zu setzen haben:

1. Ausg. C	2. Ausg.	z	Z
	bei ungeradem m		
best.	unbest.	$z_0 + \frac{1}{2}$	Z_0
best.	best.	$z_0 + 1$	$Z_0 + \frac{c}{2}$
	bei geradem m		
best.	unbest.	$z_0 + \frac{1}{2}$	$Z_0 + \frac{c}{2}$
unbest.	best.	$z_0 + \frac{1}{2}$	$Z_0 + \frac{c}{2}$
best.	best.	$z_0 + 1$	$Z_0 + c$
unbest.	unbest.	z_0	Z_0

Da $zc - Z$ nach oben gegebener Bestimmung gleich $\mathfrak{Z}$, d. i. gleich der Summe der Abweichungen im Intervall c bezüglich des zweiten Ausgangspunctes ist, so kann man Formel (7) auch durch

$$\mathfrak{S} = S + 2\mathfrak{Z} \ldots (8)$$

ersetzen; und lässt sich danach sagen: wenn man den Ausgangspunct der Abweichungen von C auf irgend einen andern Werth verlegt, so vergrössert sich die Abweichungssumme, die bezüglich C genommen ist, um die doppelte Summe aller in das Intervall c fallenden Abweichungen, welche bezüglich des zweiten Ausgangspunctes genommen sind.

So wie die allgemeine Formel (3) für den speciellen Fall des Ueberganges von C zu einem andern Ausgangswerthe in die einfachere Formel (7) oder (8) übergeht, kann man auch eine Vereinfachung derselben für den Uebergang von einem beliebigen Ausgangswerthe zu A erzielen.

Sei P die Summe, p die Zahl der mit c gleichseitigen Abweichungen, welche c an Grösse übersteigen, bezüglich des ersten Ausgangswerthes, so wird die Summe $\mathfrak{S}$ bei Verlegung von da auf den Ausgang von A sein:

$$\mathfrak{S} = 2\,(P - pc) \ldots (9).$$

Beim Ausgange von A ist nämlich $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{,}$, mithin $\mathfrak{S}$ durch Verdoppelung von $\mathfrak{S}'$, d. i. von $S' - (m' - z) - Z$ zu erhalten. $S' - Z$ ist aber in der Formel (9) durch P und $m' - z$ durch p ersetzt.

Für weitere Folgerungen möge die Differenz zwischen der positiven und negativen Abweichungssumme bezüglich eines gegebenen

Ausgangswerthes kurz Summendifferenz dieses Ausgangswerthes heissen und zwar als diesseitige oder jenseitige Differenz desselben bezeichnet werden, je nachdem man darunter die diesseitige Summe minus der jenseitigen oder die jenseitige Summe minus der diesseitigen versteht.

So verstanden steht der Abstand c zwischen dem ersten und zweiten Ausgangswerthe in einer Beziehung zu ihren Summendifferenzen, welche in allgemeinster Weise durch Formel (4) ausgedrückt wird, wobei, wie überall in unsern Formeln, c als positiv zu verstehen und diess bei der Deutung der Formel festzuhalten ist.

Die allgemeinste Auslegung der Formel (4) geht hienach dahin, dass der Abstand c zwischen dem ersten und zweiten Ausgangswerthe gleich der, durch m dividirten, positiven Differenz zwischen der diesseitigen Summendifferenz $S'-S_{\prime}$ des ersten Ausgangswerthes und diesseitigen Summendifferenz $\mathfrak{S}'-\mathfrak{S}_{\prime}$ des zweiten Ausgangswerthes hiemit $c=\frac{(S'+\mathfrak{S}_{\prime})-(S_{\prime}+\mathfrak{S}')}{m}$ ist, ein Werth, der sich in der That stets positiv findet, mag man c nach einer oder der andern Seite des ersten Ausgangspunctes nehmen, und hienach diesseitige und jenseitige Summen unterscheiden.

Für die speciellen Fälle des Ausgangs von C und A vereinfacht sich die vorige Formel. In der That gehe man von C als erstem Ausgange zu A über, so hat man, nach dem Begriffe von A, $\mathfrak{S}'=\mathfrak{S}_{\prime}$, wonach (4) für diesen Fall giebt

$$c=\frac{S'-S_{\prime}}{m} \quad \ldots \quad (10)$$

d. h. A liegt um die durch die Gesammtzahl dividirte Summendifferenz des Werthes C von C ab, und zwar in Richtung der grössern Summe, was selbstverständlich ist, weil nur durch Verlegung in dieser Richtung die Ungleichheit der Summen in die bezüglich A gefoderte Gleichheit übergehen kann, was aber auch aus (10) zu folgern ist, weil c den gefoderten positiven Werth nur haben kann, wenn die mit ihm gleichseitige Summe S' die grössere ist.

Nach Gleichung (10) lässt sich die S. 10 erwähnte Charakteristik der Asymmetrie durch das Verhältniss des Abstandes c zwischen C und A zum Mittel der Abweichungen (bezüglich C) in folgende übersetzen: Die Asymmetrie ist ihrer Grösse und Richtung nach bestimmt durch die Summendifferenz von C, dividirt durch die Totalsumme bezüglich C, sofern nach Gleichung (10) $c=\frac{S'-S_{\prime}}{m}$, und das betreffende Abweichungsmittel $=\frac{S'+S_{\prime}}{m}$.

Geht man umgekehrt von A als α zu C als β über, so muss selbstverständlich der Abstand zwischen beiden noch gleich gross als vorhin gefunden werden, nur in entgegengesetzter Richtung bezüglich A als vorhin bezüglich C, was sich nicht minder aus (4) ableitet. Jetzt nämlich hat man S', $S_{,}$ in Bezug auf A, und $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_{,}$ in Bezug auf C zu nehmen, hienach $S' = S_{,}$, mithin

$$c = \frac{\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}_{,}}{m} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

was sich darein übersetzt: C liegt von A um die durch die Gesammtzahl dividirte Summendifferenz des Werthes C, also wie vorhin aber so von C ab, dass die mit c ungleichseitige Summe $\mathfrak{S}_{,}$ die grössere ist, widrigenfalls c nicht positiv sein könnte, d. i. in entgegengesetzter Richtung als vorher.

Inzwischen obschon hienach (11) mit (10) stimmt, kann man doch im Uebergange von A zu C den Abstand c zwischen beiden nicht nach (11) finden, weil $\mathfrak{S}_{,}$, $\mathfrak{S}'$ nicht gegeben sind. Hiegegen lässt sich für diesen Uebergang aber nicht für den umgekehrten die Zahl z, welche zwischen A und C liegt, nach (6) finden. Denn geht man von A zu C über, so hat man in der betreffenden Formel zu setzen: $\mathfrak{m}' - \mathfrak{m}_{,} = 0$, mithin $z = \frac{m' - m_{,}}{2}$, was z als halbe Differenz der beiderseitigen Zahlen m', $m_{,}$ bezüglich A giebt; wogegen, wenn man von C zu A übergeht, in Formel (6) zu setzen ist: $m' - m_{,} = 0$, was $z = \frac{\mathfrak{m}_{,} - \mathfrak{m}'}{2}$ giebt. Aber $\mathfrak{m}_{,}$, $\mathfrak{m}'$ sind selbst gesucht.

Im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände kommen ausser den drei Hauptwerthen A, C, D und den Abweichungen davon noch die Gränzwerthe der gegebenen Grössenreihe in wesentlichen Betracht, wie man denn schon seither gewohnt ist, zur Bezeichnung der Schwankungsweite eines Collectivgegenstandes ausser dem arithmetischen Mittel die extremen Werthe anzuführen. Hienach kann es ein Interesse haben, auch die Abweichungsverhältnisse bezüglich derselben festzustellen, soweit sie sich rücksichtslos auf die besondere Beschaffenheit der Gegenstände feststellen lassen, wodurch man zu folgenden, durch ihre Einfachheit bemerkenswerthen, Sätzen geführt wird.

1) Die Abweichungssumme bezüglich eines Extrems ist (selbstverständlihc) nach einer Seite null, indess sie nach der andern Seite die Totalsumme repräsentirt; man kann aber von jedem Extrem her

eine einseitige Summe erhalten, die abgesehen von einem, unter 4) zu bemerkenden, Specialfalle mit der Summe vom andern Ende her nicht übereinstimmt.

2) Die Abweichungssumme bezüglich jedes Extrems insbesondere ist gleich seinem m-fachen Abstande vom arithmetischen Mittel.

Z. B. in unserm Beispiele

0, 2, 4, 6, 7, 8, 8

ist $m = 7$, $A = 5$, die Extreme 0 und 8, ihre Abstände von A respective 5 und 3, die Summe bezüglich 0 gleich $5 . 7 = 35$, die Summe bezüglich 8 gleich $3 . 7 = 21$.

Hienach kann der arithmetische Mittelwerth auch so bestimmt werden, dass man die Summe der Abweichungen bezüglich eines Extrems der Grössenreihe mit der Gesammtzahl der Werthe dividirt, und den Quotienten als Abstand des A vom betreffenden Extrem nimmt.

3) Die Summe der beiden einseitigen Abweichungssummen bezüglich der Extreme ist gleich dem m-fachen Abstande zwischen beiden Extremen, mithin die durch m dividirte Summe beider einseitigen Summen gleich diesem Abstande selbst, was sich eben so wie der vorige und folgende Satz an obigem Beispiele bewähren lässt.

4) Die Differenz zwischen beiden einseitigen Abweichungssummen ist gleich der m-fachen Differenz zwischen den Abständen beider Extreme vom arithmetischen Mittel. Wenn also beide Extreme gleich weit von diesem Mittel abstehen, so sind auch beide Abweichungssummen bezüglich der Extreme gleich, sonst in jedem Falle ungleich.

Der Beweis für diese Sätze kann durch unsere Formeln (1) und (2) geliefert werden.

In der That, sei der erste Ausgang von A genommen, und die Abstände der beiden Extreme von da respective $c_{,}$ und $c_{,,}$. Werde danach der Ausgangspunct auf das, um $c_{,}$ abweichende, Extrem verlegt, und die Summen $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_{,}$ für diesen Fall gesucht, so hat man in unsere Formeln zu setzen $c = c'$, $S = S_{,} = Z$, $m' = z$, $m_{,} + z = m$; hienach $\mathfrak{S}_{,} = 0$ und $\mathfrak{S}_{,} = mc_{,}$; was den ersten und zweiten Satz giebt.

Entsprechend findet man für die Verlegung nach dem andern Extrem $\mathfrak{S}' = 0$ und $\mathfrak{S}_{,} = mc_{,,}$, mithin für die Summe der beiden einseitigen Summen $m\ (c_{,}+c_{,,})$, für die Differenz derselben $m\ (c_{,}-c_{,,})$, was mit Rücksicht, dass $c_{,}$ und $c_{,,}$ sich zum vollen Abstande zwischen beiden Extremen ergänzen, zum dritten und vierten Satze führt.

Die Sätze 2) bis 4) ergeben sich übrigens auch ohne Rückgang auf unsre allgemeinen Formeln leicht so. Nehmen wir beispielsweise m zum bestimmten Werth 4 an, so werden wir, um den 2. Satz zu finden, in der geordneten Werthreihe a, b, c, d als Abstand des Extrems d vom arithmetischen Mittel haben

$$d-\frac{(a+b+c+d)}{4}=\frac{3d-(a+b+c)}{4}$$

und als Abweichungssumme bezüglich d haben

$$(d-a)+(d-b)+(d-c)=3d-(a+b+c).$$

Letztre soll nach unserm Satze gleich dem 4fachen des ersten Werthes sein, wie sich in der That nach Vergleich der vorigen Ausdrücke findet.

Anderseits ist der Abstand des andern Extremes a von A gleich $\frac{a+b+c+d}{4}-a$, und die Abweichungssumme bezüglich a gleich $(b-a)+(c-a)+(d-a)$, wonach sich der Beweis für die andern Sätze weiter führen lässt.

Ist das Gesetz der Abweichungen in so weit bekannt, dass daraus Beziehungen zwischen den in den allgemeinen Formeln enthaltenen Werthen hervorgehen, so wird man diesen Formeln bestimmtere substituiren können. Setzen wir z. B. die Abweichungen bezüglich eines gewissen Werthes $\mathfrak{A}$, befolgen das Gauss'sche Gesetz zufälliger Abweichungen, es solle von da der Uebergang zu einem andern, um c davon abliegenden, Werthe genommen, und die hiebei erfolgende Aenderung der Abweichungssumme bestimmt werden, so lassen sich z und Z als Functionen des Werthes c bestimmen. Sei nämlich $\varepsilon'=\frac{S'}{m'}$ das einfache Mittel der diesseitigen Abweichungen bezüglich $\mathfrak{A}$, so ist unter Voraussetzung, dass das betreffende Gesetz für jede Seite insbesondre anwendbar ist, nach Uebersetzung der bekannten massgebenden Integrale in unendliche Reihen

$$\frac{z}{m'}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{c}{\varepsilon'}-\frac{c^3}{3\pi\varepsilon'^3}+\ldots\right)$$
$$\frac{Z}{S'}=\frac{c}{\varepsilon'\pi}\left(\frac{c}{\varepsilon'}-\frac{c^3}{3\pi\varepsilon'^3}+\ldots\right)$$

worin π die Ludolf'sche Zahl.

Wird nun c als klein gegen ε' angenommen, so kann man die Glieder mit der dritten und höhern Potenzen von $\frac{c}{\varepsilon'}$ gegen die erste Potenz vernachlässigen, und wird hiemit, unter Rücksicht, dass $S' = m'\varepsilon'$, haben:

$$z=\frac{2m'c}{\pi\varepsilon'},\ Z=\frac{m'c^2}{\pi\varepsilon'}$$
$$\mathfrak{S}'=S'-m'c+\frac{m'c^2}{\pi\varepsilon'}\ \ldots\ (12)$$
$$\mathfrak{S}_,=S_,+m_,c+\frac{m'c^2}{\pi\varepsilon'}\ \ldots\ (13)$$
$$\mathfrak{S}=S+(m_,-m')c+\frac{2m'c^2}{\pi\varepsilon}.\ \ldots\ (14)$$

Zum Vergleiche mit den bisherigen, auf die Summe der einfachen Abweichungen bezüglichen, Formeln füge ich schliesslich noch die entsprechenden Formeln bezüglich der Summen der Abweichungsquadrate, kurz Quadratsummen, mit einigen Hauptfolgerungen daraus hinzu, ohne jedoch auf die Ableitung derselben einzugehen, welche in analoger Weise als Betreffs der einfachen Summen geschehen ist. Der Richtigkeit dieser Formeln kann man sich an beliebigen Zahlenbeispielen versichern.

Sei wie früher c die Grösse, um welche der zweite Ausgangspunct β vom ersten α abweicht, z, Z die Zahl und Summe der in das Intervall c fallenden einfachen Abweichungen, m' und $m_,$ die diesseitige und jenseitige Zahl der einfachen Abweichungen bezüglich α; hingegen seien jetzt s' und $s_,$ die diesseitige und jenseitige Summe der einfachen Abweichungen bezüglich α; ferner S', $S_,$, S, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_,$, $\mathfrak{S}$ jetzt eben so Quadratsummen wie früher einfache Summen von Abweichungen, die ersten 3 bezüglich α, die andern 3 bezüglich β, endlich Q die Summe von Quadraten der Abweichungen bez. α, die in das Intervall c fallen; hienach hat man

$$\mathfrak{S}'=S'+(m'-z)c^2-2c(s'-Z)-Q\ \ldots\ (15)$$
$$\mathfrak{S}_,=S_,+(m_,+z)c^2+2c(s_,-Z)+Q\ \ldots\ (16)$$
$$\mathfrak{S}=S+mc^2+2c(s_,-s')\ \ldots\ (17)$$
$$\mathfrak{S}'-\mathfrak{S}_,=S'-S_,+(m'-m_,-2z)c^2-2c(s'+s_,-2Z)-2Q\ \ldots\ (18)$$

Die potenzielle Eigenschaft von A, dass die Quadratsumme in

Bezug dazu die kleinstmögliche ist, folgt aus (17); denn, setzen wir A als ersten Ausgangswerth, wozu die Quadratsumme S gehört, und berücksichtigen, dass $s'=s_,$ bezüglich A, so erhalten wir bei Verlegung auf irgend einen, um c davon abweichenden, Ausgangswerth die Summe

$$\mathfrak{S}=S+mc^2 \quad . \; . \; (19)$$

also $\mathfrak{S}$ um mc^2 grösser als S.

Nennen wir nun $\mathfrak{S}(c_,)$ die Quadratsumme bezüglich eines Werthes, der um $c_,$ von A abweicht, und $\mathfrak{S}(c_{,,})$ bezüglich eines andern, der um $c_{,,}$ von A abweicht, so haben wir nach Vorigem:

$$\mathfrak{S}(c_,)-\mathfrak{S}(c_{,,})=m(c_,^2-c_{,,}^2)=m(c_,+c_{,,})(c_,-c_{,,}) \quad . \; . \; (20)$$

woraus dann weiter folgende Sätze fliessen:

Die Quadratsummen bezüglich zweier Ausgangswerthe, die nach beiden Seiten um gleich viel von A abweichen, sind einander gleich.

Die Quadratsumme bezüglich eines Extrems übersteigt die Quadratsumme bezüglich A um das m-fache Quadrat des Abstandes zwischen A und dem betreffenden Extrem.

Die Differenz zwischen den Quadratsummen bezüglich beider Extreme ist gleich dem m-fachen Product aus der Summe in die Abstände beider Extreme von A.

Durch Vergleich von Formel (10) mit (19) unter Rücksicht auf die verschiedene Bedeutung der Buchstaben in beiden Formeln ergiebt sich noch der Satz:

Der m-fache Unterschied zwischen den Quadratsummen bezüglich A und C ist gleich dem Quadrat des Unterschiedes zwischen der diesseitigen und jenseitigen einfachen Summe bezüglich C.

V. Ueber die Potenzmittelwerthe im Allgemeinen.

Unter einem Potenzmittelwerthe gegebener Einzelwerthe verstehe ich nach der im Eingange gegebenen Erklärung einen Werth, bezüglich dessen die Summe der, auf eine und dieselbe Potenz erhobenen, Abweichungen die kleinstmögliche ist; wonach der Centralwerth, als

Ausgangswerth der Minimalsumme von Abweichungen erster Potenz, und der arithmetische Mittelwerth, als Ausgangswerth der Abweichungen zweiter Potenz, nur besondere Fälle der Potenzmittelwerthe überhaupt darstellen.

Nachdem wir nun die Regel kennen, nach welcher diese Potenzmittel niederster Ordnung zu bestimmen sind, lässt sich nach blosser Analogie damit, die später durch einen Beweis zu ersetzen sein wird, auch die Bestimmungsweise der höheren Potenzmittel schon voraussehen, nämlich so:

Jeder Werth von der Potenz null ist bekanntlich gleich 1, mithin eine Summe von m Werthen nullter Potenz gleich der Zahl m selbst. Hienach lässt sich die Eigenschaft des C, eine gleiche Zahl beiderseitiger Abweichungen von sich abhängig zu haben, auch unter der Form ausdrücken, dass C eine gleiche Summe von Abweichungen nullter Potenz von sich abhängig hat; womit die Eigenschaft solidarisch ist, die kleinste Summe von Abweichungen erster Potenz von sich abhängig zu haben. Weiter ist bei dem A die Eigenschaft, die gleiche Summe beiderseitiger Abweichungen erster Potenz von sich abhängig zu haben, solidarisch mit der Eigenschaft, die kleinste Summe von Abweichungen zweiter Potenz von sich abhängig zu haben. Also lässt sich voraussehen, dass allgemein die Eigenschaft, eine gleiche Summe beiderseitiger Abweichungen n-ter Potenz von sich abhängig zu haben, was wir kurz die Gleichheitseigenschaft eines Potenzmittels nennen mögen, solidarisch mit der Eigenschaft sein wird, die kleinste Summe von Abweichungen $(n+1)$ter Potenz von sich abhängig zu haben, wofür wir schon früher die Bezeichnung potenzielle Eigenschaft gebraucht haben.

Und in der That bestätigt sich die allgemeine Verknüpfung beider Eigenschaften, eben so wie bezüglich C und A, auch bezüglich höherer Potenzmittel an jedem Zahlenbeispiel, an welchem man dieselbe prüfen will.

Gelte es z. B. zu zeigen, dass die Summe der auf die dritte Potenz erhobenen Abweichungen die kleinstmögliche ist, wenn die Abweichungen von einem Werthe genommen werden, der eine gleiche Summe von Quadraten der beiderseitigen Abweichungen von sich abhängig hat, so nehme man von vorn herein eine Werthreihe so, dass letztere Bedingung bezüglich eines gegebenen Ausgangswerthes erfüllt ist, stelle die Summe der cubirten Abweichungen in Bezug darauf dar, und ändere dann den Ausgangswerth der Abweichungen beliebig, so wird nach Massgabe als die Bedingung der Gleichheit der Quadrate der beiderseitigen Abweichungen damit verletzt wird, auch die Summe der cubirten Abweichungen damit wachsen, sei es, dass die Aenderung des Ausgangswerthes nach einer oder der andern Seite geschehe. Es genüge an folgenden zwei Beispielen.

Erstes Beispiel. Seien die drei Werthe

1, 2, 10

gegeben, und werden die Abweichungen derselben von 5 genommen, so ist die angegebene Bedingung des ersten Ausganges erfüllt, indem die Summe der Quadrate der Abweichungen nach jeder von beiden Seiten 25 ist. Die Summe der Cuben der Abweichungen findet sich links 91, rechts 125, zusammen 216. Soll unser Theorem bezüglich der Verknüpfung der zwei fundamentalen Eigenschaften der Potenzmittel richtig sein, so muss jede Verlegung von dem Ausgangswerthe 5, welcher die Summe der Abweichungsquadrate nach beiden Seiten gleich macht, auf einen andern, der sie ungleich macht, eine grössere Summe der Cuben mitführen. Verlege man nun z. B. den Ausgang von 5 auf den nahen Werth 5,5, so erhält man als Summe der Abweichungsquadrate links 32,50, rechts 20,25, und als Summe der Cuben links 134,000, rechts 91,125, im Ganzen 225,125 statt vorhin 216.

Verlege man hienach den Ausgangspunct um eben so viel nach Links, als vorhin nach Rechts, indem man die Abweichungen von 4,5 statt von 5 rechnet, so findet man jetzt nach entsprechender Rechnung als Summe der cubirten Abweichungen im Ganzen 224,875 statt 216.

Zweites Beispiel. Sei die Zahlenreihe

1, 5, 6, 11, 12

gegeben, so findet sich die Gleichheit der beiderseitigen Summen der Abweichungsquadrate für den Ausgang von 7 erfüllt, indem man bezüglich dazu links wie rechts 41 hat, indess die Summe der Cuben links 225, rechts 189, zusammen 414 ist. Werde jetzt der Ausgang von 8 genommen, so erhält man als Summe der Cuben 469, und werde er von 6 genommen, 467 statt 414.

Bei letzterm Beispiele kann man bemerken, dass der Werth 7, bezüglich dessen die beiderseitigen Summen der Abweichungsquadrate gleich sind, mit dem arithmetischen Mittel, bezüglich dessen die einfachen Summen gleich sind, als welches ebenfalls 7 ist, zusammenfällt, was aber nur zufällig ist, wie denn derselbe Umstand bei vorigem Beispiel nicht statt findet.

Allgemein nun werde ich einen Potenzmittelwerth mit M bezeichnen, und als Mittel nullter, erster, zweiter u. s. w. Ordnung, respective als M_0, M_1, M_2 u. s. w. unterscheiden, je nachdem die beiderseitigen Abweichungen von nullter, erster, zweiter Potenz u. s. w. einander gleich sind, werde also die Ordnung nach der Potenz, auf welche sich die Gleichheitseigenschaft bezieht, nicht nach der, auf welche sich die potenzielle Eigenschaft bezieht, bezeichnen. Hienach fällt das Potenzmittel nullter Ordnung M_0 mit unserm C, das Potenzmittel erster Ordnung M_1 mit unserm A zusammen. Da wir uns wesentlich hier überhaupt nur mit Potenzmitteln beschäftigen, kann auch der Ausdruck Mittel schlechthin dafür gelten.

An die Stelle der vorhin gebrauchten Analogie und empirischen Einzelbewährung lässt sich nun folgender ebenso einfacher als allgemeiner Beweis für die Verknüpfung der beiden fundamentalen Eigenschaften der Potenzmittel irgend welcher Ordnung setzen:

Seien allgemein a die Werthe, deren Abweichungen von einem bestimmten M genommen werden sollen, a' die Werthe, welche grösser als M, und $a_,$ die Werthe, welche kleiner als M sind; mithin $a'-M$ positive, $a_,-M$ negative Abweichungen. Sofern aber letztere auch als positiv zählen sollen, wird man sie durch $M-a_,$ ersetzen. Hienach wird es gelten, um ein M von n-ter Ordnung aus den gegebenen Werthen a zu erhalten, dasselbe als unbekannten Werth x daraus so zu bestimmen, dass

$$\Sigma(x-a_,)^{n+1}+\Sigma(a'-x)^{n+1} \quad . . . (21)$$

ein Minimum wird, was durch Differenzirung dieses Werthes in Bezug auf x und Nullsetzung des Differenzials giebt

$$\Sigma(x-a_,)^{n}-\Sigma(a'-x)^{n}=0 \quad . . . (22)$$

mithin

$$\Sigma(x-a_,)^{n}=\Sigma(a'-x)^{n} \quad . . . (23)$$

Wie man sieht, liegt in der Verknüpfung der Gleichungen (21) und (23) die Verknüpfung der fundamentalen Eigenschaften der Potenzmittel allgemein ausgedrückt, indem damit gesagt ist: um die Summe von Abweichungen bezüglich eines Werthes x, die zur $(n+1)$ten Potenz erhoben sind, zu einem Minimum zu machen, hat man x so zu bestimmen, dass die beiderseitigen Summen der zur n-ten Potenz erhobenen Abweichungen einander gleich sind.

Im Allgemeinen fallen die M verschiedener Ordnung aus denselben Werthen a auseinander, doch können in speciellen Fällen (wie im obigen Beispiel (S. 39) auch diese oder jene zusammenfallen, ohne dass desshalb alle zusammenfallen. Es giebt aber einen noch ziemlich allgemeinen Fall, wo alle nothwendig zusammenfallen, d. i. der Fall vollkommener Symmetrie der beiderseitigen Abweichungen bezüglich eines M, die damit zugleich für alle M verschiedener Ordnung besteht.

In der That, wenn in einer Werthreihe jeder einzelnen Abweichung $a'-x$ bezüglich eines Werthes x auf einer Seite eine gleich grosse Abweichung $x-a_,$ auf der andern Seite entspricht, so reicht die Gleichung zwischen irgend zwei gleichen Gliedern $(a'-x)^n$ und $(x-a_,)^n$ der einen und andern Seite hin, den Werth von x unabhängig von der Grösse des Exponenten, also für jedes n identisch, zu bestimmen.

Unter diesen Fall gehört der einfachste, mit dem man überhaupt zu thun haben kann, dass man nämlich ein Mittel blos aus zwei Werthen a', $a_,$ zieht; indem man aus der Gleichung

$$(a'-x)^n = (x-a_,)^n$$

denselben Werth für x erhält, mag man für n eine beliebige Potenz setzen, nur dass derselbe bei $n = 0$ unbestimmt wird.

Ferner aber gehört hierunter der, bei den Beobachtungsfehlern vorausgesetzte, Fall einer symmetrischen Wahrscheinlichkeit bezüglich des arithmetischen Mittels, dem man sich aber in Wirklichkeit nur um so mehr nähern kann, je mehr man die Zahl der Beobachtungen vervielfältigt.

Nächst dem Beweise des allgemeinen Zusammengehörs der Gleichheits-Eigenschaft und potenziellen Eigenschaft bei Potenzmitteln jeder Ordnung gilt es die Ableitung der M gegebener Ordnung aus den dazu gegebenen Einzelwerthen a, was, wie man leicht aus der Form der Gleichungen (22) oder (23) erkennt, für ein Mittel M_n auf die Lösung einer Gleichung n-ter Ordnung herauskommt. Nun gilt die Gleichung

(22) oder (23) zwar ganz allgemein für Bestimmung von $x = M_n$ sowohl bei geradem als ungeradem n; aber ihre Anwendung setzt voraus, dass man schon wisse, zwischen welche Werthe a der Werth x falle, um danach die Scheidung der a' und $a_{,}$ vornehmen zu können. Diese Kenntniss wird jedoch bei ungeradem n durch die Bemerkung entbehrlich, dass man in diesem Falle, ohne die negativen Abweichungen in positive umzukehren und die a' und $a_{,}$ zu scheiden, den Werth x aus der Gleichung

$$\Sigma(a-x)^n = 0 \ . \ . \ (24)$$

bestimmen kann, wie sich durch die bekannte Bestimmung des arithmetischen Mittels M_1 erläutert. Lösen wir nämlich den Ausdruck $\Sigma(a-x)$ in seine Bestandtheile auf, indem wir unter $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ die einzelnen a rücksichtslos ob $> x$ oder $< x$ verstehen, so haben wir

$$(a_{,}-x)+(a_{,,}-x)+(a_{,,,}-x)\ldots = 0,$$

und hieraus $x = \frac{\Sigma a}{m}$, wenn m die Zahl der Werthe.

Bei einem geraden Index n aber kann man nicht eben so ohne Unterscheidung der a' und $a_{,}$ setzen

$$(a_{,}-x)^n+(a_{,,}-x)^n+ \text{etc.} = 0$$

weil die Glieder dieser Gleichung linkerseits bei geradem n alle positiv sind, mithin keine Summe $= 0$ geben können. Auch stimmt diese Gleichung bei geradem n nicht eben so wie bei ungeradem mit der fundamentalen (22) oder (23), weil $(x-a_{,})^n$ hier nicht mit $-(a_{,}-x)^n$ vertauscht werden kann. Man muss also bei (22) oder (23) zur Ableitung von x stehen bleiben, ohne aus der Gleichung selbst folgern zu können, zwischen welche Werthe a der Werth x fällt, und wie demnach die a' und $a_{,}$ zu scheiden.

Vielleicht giebt es eine allgemeine Lösung dieser Schwierigkeit, die mir doch nicht beifällt. Indessen kann man derselben für den Fall, dass es ein Interesse haben sollte, sich mit höheren Potenzmittelwerthen eingehender zu beschäftigen, empirisch dadurch begegnen, dass man aus den gegebenen a, statt des M mit geradem Index n, erst das M von nächst niederer ungerader Ordnung $n-1$ nach Gleichung (24) sucht, also z. B. um die Scheidung der a für die Bestimmung von M_2 vorzunehmen, erst das arithmetische Mittel M_1 bestimmt, hienach die Scheidung der a bezüglich der Bestimmung von M_2 so vornimmt, wie sie sich für M_1 gefunden hat. Nach Anwendung dieser Scheidung wird man aus Formel (22) oder (23) ein M_n finden, was entweder dieser Scheidung entspricht, indem es zwischen die vorausgesetzten a' und $a_,$ fällt — dann kann man dabei stehen bleiben — oder zwischen andere a' und $a_,$ fällt; dann hat man die Scheidung hienach bei einer neuen Rechnung vorzunehmen, und diess nöthigenfalls zu wiederholen, bis man zum Zweck kommt. Bei den weiterhin im 8. Abschnitt geführten Berechnungen von M_2 jedoch hat weit in den meisten Fällen schon die erste Rechnung nach der durch das arithmetische Mittel angezeigten Scheidung, und, wo diese fehl schlug, ausnahmslos die zweite zugereicht.

Abgesehen von voriger Schwierigkeit hat man natürlich für die Ableitung der M höherer Ordnung noch die Schwierigkeit der Auflösung von Gleichungen höheren Grades zu überwinden, die nur für M_2 ohne Belang ist, da es sich dabei blos um die Auflösung einer quadratischen Gleichung handelt; und da ich hiervon im 8. Abschnitte Gebrauch zu machen haben werde, so entwickele ich folgends die Regel dazu:

Die für den Fall von $n = 2$ geltende Gleichung

$$\Sigma(x-a_,)^2 - \Sigma(a'-x)^2 = 0$$

entwickelt sich zu folgender:

$$\Sigma a'^2 - \Sigma a_,^2 - 2(\Sigma a' - \Sigma a_,)x + (m' - m_,)x^2 = 0$$

worin m' die Zahl der a', und $m_,$ die der $a_,$. Setzen wir nun kurz:

$$\Sigma a'^2 - \Sigma a_,^2 = \varkappa, \quad \Sigma a' - \Sigma a_, = \lambda, \quad m' - m_, = \mu,$$

so finden wir

$$x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu\varkappa}}{\mu} \quad \ldots \ (25).$$

Wenn $m' = m_,$, mithin $\mu = 0$, fällt das Glied mit x^2 weg, und hat man einfach $x = \frac{\varkappa}{2\lambda}$.

Wenden wir diess auf das erste Beispiel S. 39 an, so haben wir nach der hiebei zutreffenden Voraussetzung, dass die a' und $a_,$ sich entsprechend als für $M_,$ oder A scheiden,

$$\varkappa = 95, \ \lambda = 7, \ \mu = -1$$

was giebt

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{144}}{-1} = +5 \text{ und } -19$$

wovon nur der erste Werth, welcher M_2 zwischen die gegebenen a fallen lässt, brauchbar ist.

Nehmen wir das zweite Beispiel S. 39, so werden wir nach gleicher Regel haben

$$\varkappa = 203,\ \lambda = 11,\ \mu = -1,$$

was giebt $x = +7$ und $= -29$.

Beide berechnete x stimmen mit den bei den Beispielen von vorn herein zu Grunde gelegten überein.

Man könnte wünschen, einfache Formeln für den directen Uebergang von einem niedern zum nächst höhern Potenzmittel zu haben, wozu es genügte, den Abstand c zwischen beiden als Function der Abweichungen oder Abweichungspotenzen bezüglich des niedern angeben zu können, und für den Uebergang von C zu A d. i. von M_0 zu M_1 ist diesem Bedürfniss durch Formel (10) S. 32 genügt. Aber höher hinauf gelingt es nicht, demselben ferner zu entsprechen. Indem ich z. B. eine solche Formel bezüglich des Ueberganges von M_1 zu M_2 aufzustellen versuche, komme ich nur auf folgende Beziehungen, in welche die Zahlen und Summen oberhalb c mit eingehen, so dass sie die Kenntniss von c schon voraussetzen.

$$\mathfrak{S}_2 = 2(P_2 - 2Pc + pc^2)$$
$$S_2 = 2P_2 - 4cP - (m - 2p)c^2$$
$$\mathfrak{S}_2 - S_2 = mc^2.$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{S}_2$ die Summe der Abweichungsquadrate bezüglich M_2; S_2 die Summe derselben bezüglich M_1; p die Zahl, P die Summe der diesseitigen einfachen Abweichungen bezüglich M_1, welche c an Grösse übersteigen, P_2 die Summe der Quadrate dieser Abweichungen, m die Totalzahl der Werthe.

Ich übergehe die Ableitung dieser Gleichungen, die sich leicht an beliebigen Beispielen bewähren lassen. Auch liegt schon eine Bewährung darin, dass die dritte, mit (19) stimmende, Gleichung richtig als Differenz der beiden ersten herauskommt, wobei zu berücksichtigen, dass in (19) $\mathfrak{S}_2$, S_2 einfach durch $\mathfrak{S}$, S ersetzt sind.

Wenn ein M beliebiger Ordnung für eine bestimmte Werthreihe bestimmt ist, so kann man fragen, wie es sich ändert, wenn einer oder der andere Werth aus der Werthreihe sich ändert. Gilt es nun das arithmetische Mittel M_1 oder A, so findet sich leicht, dass, wenn irgend ein Werth a sich um δ ändert, sei δ gross oder klein, der Werth M_1 sich genau um $\frac{\delta}{m}$ ändert, wenn m die Zahl der Werthe ist. Gilt es aber höhere M, so würden zur genauen Bestimmung der Aenderung von M_n als Function der Veränderung eines Werthes a höhere Gleichungen gehören. Ist indessen die Aenderung von a verhältnissmässig nur klein, $= da$, so kann man die zugehörige Aenderung von M_n leicht approximativ nach folgender Gleichung bestimmen:

$$dx = \frac{\pm(a-x)^{n-1} da}{\Sigma(a'-x)^{n-1} + \Sigma(x-a_{,})^{n-1}} \quad . \; . \; . \quad (26)$$

wo $x = M_n$, a der Grössenwerth, welcher die Aenderung da erleidet, und das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem a zu den a' oder $a_{,}$ gehört, so dass dx immer dem Vorzeichen von da folgt.

In der That, wenn man nach der Gleichung für $x = M_n$ hat

$$(x-a_{,})^n + (x-a_{,,})^n + \ldots = (a'-x)^n + (a''-x)^n + \ldots$$

so wird man, wenn beispielsweise unter den Werthen $a > x$ sich a' um das kleine da' und x in Abhängigkeit davon ändert, ohne dass die übrigen a sich ändern, die Beziehung zwischen dx und da' durch Differenzirung voriger Gleichung in Bezug auf a' und auf x als Function von a' erhalten können, indem man die Aenderung von x, welche der Aenderung von a' zugehört, $= \frac{dx}{da'} da'$ setzt. Diess giebt, unter Ersatz der, allen Gliedern der Differenzialgleichung gemeinsam werdenden, Factoren n und da' durch 1

$$(a'-x)^{n-1}\left(1 - \frac{dx}{da'}\right) - (a''-x)^{n-1}\frac{dx}{da'} - \text{etc.} =$$
$$(x-a_{,})^{n-1}\frac{dx}{da'} + (x-a_{,,})^{n-1}\frac{dx}{da'} + \text{etc.}$$

was sich in die Gleichung (26) zusammenziehen lässt. Entsprechend, wenn statt eines Werthes a' ein Werth $a_{,}$ sich ändert.

Diese Ableitung und mithin auch die Gleichung (26) schlägt nur in dem Falle fehl, wenn $n = 0$, es sich also um den Centralwerth handelt, indem dann jedes $(a'-x)^n$ und $(x-a_{,})^n = 1$, also constant, mithin das Differenzial davon null ist; was der Thatsache entspricht, dass durch Veränderung eines Werthes a keine Veränderung von x wesentlich bedingt ist.

Für $x = M_2$ mag man zur Bewährung von (26) die oben gegebene Werthreihe

1, 2, 10

benutzen. Das x ist hier angegebenermassen 5. Aendert sich jetzt $10 = a$ in 11, so ist $a - x = 5$, $da = 1$, der Nenner von (26) $= 4 + 3 + 5$; also

$dx = \frac{5}{12}$, mithin das neue M_2 der Reihe 1, 2, 11 gleich $5\frac{5}{12} = 5,417$. Die directe genaue Bestimmung giebt 5,416. Hienach müssen die Quadrate der Abweichungen der Einzelwerthe 1, 2, 11 von $5\frac{5}{12}$ beiderseits eine nahe gleiche Summe geben. Diese Abweichungen sind respective $5\frac{7}{12}$ rechts, und $3\frac{5}{12}$, $4\frac{5}{12}$ links; ihre Quadrate $\frac{4489}{144}$ rechts und $\frac{1681}{144}$, $\frac{2809}{144}$ links. $1681 + 2809 = 4490$ ist aber fast genau $= 4489$.

Aendert sich statt dessen 1 auf 2, so ist $x - a = 4$, $da = 1$ etc., giebt $dx = \frac{1}{3}$, das neue $x = 5,333$, indess die genaue directe Bestimmung 5,314 giebt.

Wenn mehrere oder auch alle Werthe a sich um ein Weniges ändern, so erhält man durch Verallgemeinerung der für (26) gegebenen Herleitung folgende allgemeinere Formel

$$dx = \frac{\Sigma(a'-x)^{n-1}\,da' + \Sigma(x-a_{,})^{n-1}\,da_{,}}{\Sigma(a'-x)^{n-1} \quad + \Sigma(x-a_{,})^{n-1}} \quad . \quad . \quad (27)$$

In die Summe des Zählers dieses Ausdruckes gehen natürlich nur die Werthe

$$(a'-x)^{n-1}\,da' \text{ und } (x-a_{,})^{n-1}\,da_{,}$$

ein, welche wirklich mit einer Aenderung da' oder $da_{,}$ behaftet sind, indem die anderen durch Nullsetzung der Aenderung ausser Acht fallen; in die Summen des Nenners aber gehen alle auf die Potenz $n-1$ erhobenen Abweichungen ein, da sie nicht mit den Aenderungen multiplicirt sind. Die, in die Summen des Zählers eingehenden, Aenderungen sind nicht nach absolutem Werthe, sondern, je nachdem sie Vergrösserung oder Verkleinerung bedeuten, positiv oder negativ zu nehmen.

Lassen wir im obigen Beispiele 1, 2, 10 die drei Werthe sich in 0, 3, 9 ändern, so ändert sich nach (27) $x = M_2 = 5$ um $dx = -0,5$, geht mithin in 4,5 über. Die directe genaue Bestimmung giebt 4,392.

Wenn $n = 1$ ist, es sich also um den arithmetischen Mittelwerth handelt, wird in Formel (27) jeder Werth $(a'-x)^{n-1}$ und $(x-a_{,})^{n-1}$ $= 1$, und hat man also einfach

$$dx = \frac{\Sigma da' + \Sigma da_{,}}{m},$$

welche Gleichung nicht blos approximativ, sondern für beliebig grosse Aenderungen genau ist.

Principiell wird man die Reihe der M noch unter M_0 fortsetzen können, indem man negative Werthe von n als Potenzen der Abweichungen verwendet, und es übersetzt sich dann die Gleichung

$$\Sigma(x-a_{,})^{-n} = \Sigma(a'-x)^{-n}, \quad . \quad . \quad (28)$$

aus welcher $M_{-n} = x$ zu bestimmen ist, in folgende

$$\Sigma\left(\frac{1}{x-a_{,}}\right)^n = \Sigma\left(\frac{1}{a'-x}\right)^n \ldots (29)$$

wofür bei ungeradem n ohne Unterscheidung der a' und $a_{,}$ stehen kann

$$\Sigma\left(\frac{1}{a-x}\right) \ldots (30)$$

Für $n = 0$ fällt (29) mit der für den Centralwerth geltenden Gleichung $\Sigma(x-a_{,})^0 = \Sigma(a'-x)^0$ zusammen, da eben so $\left(\frac{1}{x-a'}\right)^0$ wie $(x-a)^0 = 1$, indem die eine wie die andere Gleichung sagt, x sei so zu bestimmen, dass die Zahl der Abweichungen nach beiden Seiten von x gleich ist. Bei allgemeiner Entwicklung der Gleichung (29) oder (30) aber findet man alsbald, dass der Grad der Gleichung für Bestimmung von M_{-n} nicht blos von der Potenz n der reciproken Abweichungswerthe, sondern auch von der Zahl m derselben abhängt, nämlich allgemein $= n(m-1)$ ist; so dass man über $m=2$ bei $n=2$ hinaus, und über $m=3$ bei $n=1$ hinaus, schon zu höhern als quadratischen Gleichungen geführt wird. Ein empirisches Interesse dürfte diesen Potenzmitteln von negativem n überhaupt schwerlich beizulegen sein; doch mag die Bestimmung von $x=M_{-1}$ für $m=3$ zur Erläuterung der Bestimmungsweise dieser Art von Potenzmitteln überhaupt hier ausgeführt werden.

Da n hier ungerade ist, haben wir ohne Unterscheidung von a' und $a_{,}$ den Werth $M_{-1}=x$ aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$\frac{1}{a_{,}-x} + \frac{1}{a_{,,}-x} + \frac{1}{a_{,,,}-x} = 0$$

welche dadurch, dass wir alle Brüche auf denselben Nenner bringen, in folgende übergeht.

$$(a_{,}-x)(a_{,,}-x) + (a_{,}-x)(a_{,,}-x) + (a_{,,}-x)(a_{,,,}-x) = 0$$

was entwickelt giebt:

$$k - 2\lambda x + 3x^2 = 0$$

wenn

$$k = a_{,}\,a_{,,} + a_{,}\,a_{,,,} + a_{,,}\,a_{,,,}$$
$$\lambda = a_{,} + a_{,,} + a_{,,,}$$

gesetzt wird, hienach

$$x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 3k}}{3}$$

Das obige Beispiel der drei Werthe 1, 2, 10 giebt $\varkappa = 32$, $\lambda = 13$, hienach $x=1{,}48533$, was zwischen 1 und 2 fällt. Hievon sind die Abweichungen der drei Werthe links 0,48533, rechts 0,51467 und 8,51467. Ist x als M_{-1} richtig bestimmt, so müssen die Summen der reciproken

Werthe dieser Abweichungen nach beiden Seiten gleich sein. In der That ist $\frac{1}{0,48533} = \frac{1}{0,51467} + \frac{1}{8,51467}$; d. i. $2,0604 = 1,9429 + 0,1125$.

Ein M_{-n}, was aus den Gleichungen (29) oder (30) als x hervorgeht, giebt ein Minimum der Summe

$$\Sigma(x-a_{,})^{-n+1} + \Sigma(a'-x)^{-n+1}$$

oder

$$\Sigma\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n-1} + \Sigma\left(\frac{1}{a'-x}\right)^{n-1} \ldots (31)$$

So giebt, wenn ich die Abweichungen kurz mit Δ bezeichne, die Reihe

1; 4; 11, 9926

in Bezug auf $x = M_2 = 10$ die Summe

$$\frac{1}{\Delta_{,}^2} + \frac{1}{\Delta_{,,}^2} = \frac{1}{\Delta'^2} = 0,040124$$

und hiezu 0,4788 als Minimalsumme $\Sigma\frac{1}{\Delta}$ bezüglich 10, hingegen 0,4931 bezüglich 11 und 0,49161 bezüglich 9.

Weicht ein Werth von einem M_n ab, so wird zwar nicht mehr bezüglich desselben die Eigenschaft bestehen, dass die Summe der zur $(n+1)$ten Potenz erhobenen Abweichungen davon ein Minimum ist, aber folgendes allgemeinere Theorem, welches sich auf entsprechende Weise ableitet wie das bezüglich der M gültige; ein Theorem, was den Fall des dichtesten Werthes im Felde der Collectivgegenstände mit unter sich fasst, und in dieser Hinsicht für die Theorie der Asymmetrie von Interesse ist, ohne sich jedoch auf diesen Fall zu beschränken.

Der Begriff eines Potenzmittels gegebener Ordnung n wird überhaupt verlassen, wenn die Summe der, zur Potenz n erhobenen, beiderseitigen Abweichungen bezüglich dazu ungleich ist. Sei nun die Ungleichheit der Art, dass man für x als Ausgangswerth statt $\Sigma(x-a_{,})^n = \Sigma(a'-x)^n$ vielmehr hat:

$$\Sigma(x-a_{,})^n = f\Sigma(a'-x)^n \ldots (32)$$

so dass

$$f = \frac{\Sigma(x-a_{,})^n}{\Sigma(a'-x)}$$

so wird

$$\Sigma(x-a_{,})^{n+1} + f\Sigma(a'-x_{,})^{n+1} \quad . \quad . \quad (33)$$

ein Minimum in so fern sein, als jede Substitution eines andern Ausgangswerthes für das aus (32) folgende x in (33), unter Beibehaltung des wie vorhin bestimmten f, die Summe (33) grösser macht. Wie leicht zu erachten ist das Theorem für die eigentlichen Potenzmittel nur der besondere Fall von diesem, wo nämlich $f=1$.

Sei z. B. in unserer einfachen Reihe 1, 2, 10 als Ausgangswerth $x = 6$, und $n = 2$ genommen, so ist $\Sigma\ (x-a_{,})^2 = 41$, und $\Sigma\ (a'-x)^2 = 16$, mithin $f = \frac{41}{16}$. Ferner ist $\Sigma\ (x-a_{,}^3) = 189$, $\Sigma\ (a'-x)^3 = 64$, und es muss nach unserm Theorem $189 + \frac{41}{16} \cdot 64 = 353$ kleiner sein, als jede entsprechend bezüglich eines andern x aber noch mit $f = \frac{41}{16}$ genommene Summe. In der That, nehmen wir z. B. $x = 5$, so erhalten wir 411,3, und nehmen wir $x = 7$, so erhalten wir 410,2 statt 353.

Substituirt man in den Formeln für die eigentlichen Potenzmittel (wo $f=1$) den gegebenen Werthen a ihre Logarithmen, so kann man aus diesen Logarithmen eben so Potenzmittel verschiedener Ordnung, sog. logarithmische Potenzmittel $M(l)_n$, ziehen, als aus den directen Werthen a, und von den logarithmischen Potenzmitteln nach den logarithmischen Tafeln auf die zugehörigen Grössenwerthe als geometrische Potenzmittelwerthe verschiedener Ordnung kommen, wogegen die bisher betrachteten Potenzmittel als arithmetische im weiteren Sinne bezeichnet werden können.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung eines logarithmischen Potenzmittels $M(l)_n = x$ ist:

$$\Sigma(\log x - \log a_{,})^n = \Sigma(\log a' - \log x)^n \ldots (34)$$

oder

$$\Sigma\left(\log\frac{x}{a_{,}}\right)^n = \Sigma\left(\log\frac{a'}{x}\right)^n \ldots (35)$$

Der geometrische Mittelwerth von der Ordnung null stimmt hienach wieder mit dem arithmetischen Centralwerth überein, der geometrische Mittelwerth von der Ordnung 1 aber mit dem schlechthin so genannten geometrischen Mittelwerthe der Grössen a', a'', $a_{,}$, $a_{,,}$, von welchem im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände angegebenermassen (S. 15) Gebrauch zu machen, wogegen höheren logarithmischen und geometrischen Mittelwerthen kaum eine empirische Verwendbarkeit zukommen dürfte.

Unstreitig kann es dem Interesse des Centralwerthes nur zu Statten kommen, dass er sich solchergestalt zugleich als Gränzwerth zwischen Potenzmittelwerthen von positivem und negativem Index und Verknüpfungsglied für arithmetische und geometrische Potenzmittel darstellt.

Nach allen vorigen Erweiterungen des Begriffes der Potenzmittel werde ich doch folgends wie früher unter Potenzmitteln schlechthin nur solche mit positivem Index n von 0 an, solche, welche als Ausgang arithmetischer Abweichungen auftreten, und solche, wo $f = 1$, verstehen.

VI. Bemerkungen zur Gültigkeitsfrage des Principes des arithmetischen Mittels.

Die höheren Potenzmittel über dem arithmetischen Mittel A oder M_1 würden unstreitig an Interesse sehr gewinnen, wenn sie diesem Mittel im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete eben so Concurrenz zu machen vermöchten, als es von dem niedersten, dem C oder M_0, im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände gilt. Aber, wenn schon diess definitiv nicht der Fall ist, lässt sich doch von vorn herein fragen, was denn von allen Potenzmitteln verschiedener Ordnung gerade dem arithmetischen Mittel, was weder das niederste noch höchste darunter ist, den Vorzug als sicherstem Werth vor den andern Mitteln zugestehen lässt, oder, wie ich mich kurz ausdrücke, was die Gültigkeit des Principes des arithmetischen Mittels im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete vor dem Principe jedes andern Mittels begründet. Hierüber folgen einige Bemerkungen, die erklärtermassen nur zu dem schon anerkannten Vorzuge des Principes des arithmetischen Mittels zurückführen, doch im Wege dazu nicht ganz in Einstimmung mit bisher aufgestellten Gesichtspuncten bleiben. Sollte ich hierin irren, so möge man es durch die principiellen Schwierigkeiten der Frage entschuldigt finden.

Unstreitig macht von gegebenen Beobachtungswerthen a einer in der Wirklichkeit gegebenen Grösse jeder an sich den gleichen Anspruch, für den gesuchten wahren Werth x zu gelten; es wird aber eine Beobachtung für um so ungenauer zu gelten haben, je weiter der Werth a, den sie giebt, vom wahren x abweicht, gleichviel, ob ins Positive oder Negative, so dass in dieser Hinsicht blos der absolute Werth des Fehlers, d. h. rücksichtslos auf sein Vorzeichen, in Betracht kommt. Als das einfachste und nächstliegende Princip erschiene es hienach, den Werth M für den sichersten anzusehen, von dem in Summa absolut genommen am wenigsten Seitens der einzelnen a abgewichen wird, d. h. bezüglich dessen die Summe der einfachen Abweichungen nach absolutem Werthe kleiner als bezüglich jedes andern ist. Diess würde aber statt des arithmetischen Mittelwerthes der Centralwerth sein. Auch hätte dieser Werth die zwei wichtigen Vortheile vor jedem andern voraus, dass er am einfachsten zu bestimmen ist, und dass extreme Werthe a von aussergewöhnlicher Grösse oder Kleinheit, bei denen man so oft in Zweifel ist, ob man sie nicht bei der Mittelbestimmung ausschliessen soll, den überwiegenden Einfluss, den sie auf die Bestimmung des M äussern, verlieren, da bei der Bestimmung des M_0 auf die Grösse der Extreme nichts ankommt. Und gewiss ist, dass der Centralwerth aus einer gegebenen endlichen Zahl von Beobachtungswerthen nicht minder als der arithmetische Mittelwerth eine Annäherung an den wahren Werth gewährt, die mit Vermehrung der Zahl der Beobachtungswerthe ins Unbestimmte wächst, da ja bei unendlicher Zahl derselben, nach der hier und folgends immer vorausgesetzten symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, der eine und der andre principiell zugleich mit dem wahren Werthe und mit einander zusammenfallen müssen.

Wenn nun aber doch schon angeführte und folgends noch zu verstärkende Gründe das Potenzmittel nullter Ordnung in Nachtheil gegen das Mittel erster Ordnung erscheinen lassen, so drängt sich leicht die Frage auf, ob nicht dieselben Gründe das Mittel erster Ordnung in Nachtheil gegen das Mittel zweiter Ordnung setzen u. s. f., kurz, ob nicht die Sicherheit der Bestimmung mit der Höhe des Potenzmittels wächst. Und bei allen handelt es sich doch blos um den Vortheil der Sicherheit bei endlicher Zahl, da bei unendlicher Zahl alle auf denselben Werth hinauslaufen müssten. Nach der Analogie, die von der Bestimmung der Potenzmittel niedrer Ordnung höher hinaufführt, gestehe ich, dass dieser Gesichtspunct von vorn herein etwas Bestechendes für mich hatte.

Hiemit würde nicht ausgeschlossen sein, den arithmetischen Mittelwerth immer noch im Ganzen als den praktischsten, an den man sich halten kann, gelten zu lassen, sofern mit der Höhe eines Mittelwerthes die Schwierigkeit seiner Bestimmung wächst, indess die Sicherheit um so weniger damit wachsen kann, je mehr in dieser Hinsicht schon durch niedre Ordnungen zu leisten ist. Indess könnte doch der, verhältnissmässig noch leicht zu bestimmende, Mittelwerth zweiter Ordnung dem arithmetischen Mittel Concurrenz machen. Natürlich aber kann in solchen Aperçü's überhaupt nur die Anregung zur genaueren Untersuchung der Frage, keine Beantwortung derselben gefunden werden.

Wie sich nun auch dieselbe beantworte, so behält jedenfalls die ganze Classe der Potenzmittelwerthe allen andersartig bestimmten Mitteln gegenüber, wovon Beispiele im letzten Abschnitte folgen, unter Voraussetzung symmetrischer Wahrscheinlichkeit der Fehler das eigenthümliche Interesse, dass, welchen Potenzmittelwerth man auch nehmen will, er principiell eine, mit der Zahl der Beobachtungswerthe wachsende, Annäherung an den wahren Werth gewährt, indess jeder anderswie bestimmte Mittelwerth eine mit der Zahl der Werthe sich immer fester stellende Abweichung davon gewähren dürfte. Ja principiell ist jedes Potenzmittel als Beobachtungsmittel brauchbar, nur eins brauchbarer, weil aus gleich grosser Zahl der Werthe sichrer bestimmbar, als das andre; man wird aber blos die Zahl der Werthe hinreichend zu vermehren haben, um mit einem daraus gezogenen an sich minder sichren Potenzmittel sogar eine grössere Annäherung an den wahren Werth zu erhalten, als mit dem an sich sicherern aus einer geringern Zahl gezogenen, indess keiner von allen, aus einer endlichen Zahl bestimmt, den wahren Werth anders als zufällig mit unendlich geringer Wahrscheinlichkeit genau treffen lassen kann. Also kann man auch selbst den Centralwerth wegen der Leichtigkeit seiner Bestimmung aus einer geordneten Werthreihe da, wo es nicht um grosse Sicherheit zu thun ist, als Approximation mitunter statt des arithmetischen Mittels gelten lassen, insbesondre bei grossen Werthreihen, da die Mühe der Bestimmung des arithmetischen Mittels mit der Zahl der Werthe wächst, die Abweichung des Centralwerths davon aber allgemein gesprochen damit abnimmt, immer dabei symmetrische Wahrscheinlichkeit der Abweichungen vorausgesetzt.

Zur Erläuterung und Bestätigung des Vorstehenden können die für den Januar specificirten Resultate bezüglich der thermischen Monatsabweichungen im 8. Abschnitte dienen. Das aus 90 Werthen, welche zwischen den Extremen $+5,29^0$ und $-5,31^0$ R. schwanken, abgeleitete M_1 ist $=-0,0472$, welches natürlich noch nicht als genau, aber doch als der Genauigkeit sehr nahe kommend anzusehen ist. Das aus denselben 90 Werthen abgeleitete M_0 und M_1 sind respectiv $+0,150$ und $-0,160$, welche Werthe sich dem als nahe genau anzusehenden Werthe $-0,0472$ viel mehr nähern, als die Werthe von M_1, welche aus Fractionen der ganzen Werthreihe mit geringerer Werthzahl abgeleitet sind. So gab die erste Fraction aus 10 Werthen ein $M_1 = -1,048$, die zweite $= +0,798$, und unter allen 9 Fractionen à $m = 10$, gaben blos zwei ein M_1, welches dem $-0,0472$ näher kam, als $+0,150$ und $-0,160$. Man hat beim Vergleiche dieser Werthe nicht das Verhältniss derselben, sondern die gemeinsam geringe Abweichung von null, wo ungefähr der wahre Temperatur-Werth lag, in Betracht zu ziehen.

Mit der Frage, welchen Mittelwerth man bevorzugen soll, steht natürlicherweise die Frage in Beziehung, nach welcher Potenz der Abweichungen man die Ungenauigkeit verschiedener Systeme von Beobachtungen schätzen und vergleichen soll. Sollte man nach dem einfachst scheinenden Princip den Centralwerth als Mittelwerth bevorzugen, so würde natürlich auch die Schätzung der Ungenauigkeit der Beobachtungen nach der absoluten Grösse der einfachen Fehler geschehen müssen, weil nur die Summe der einfachen Fehler bezüglich desselben ein Minimum ist; wogegen bei Bevorzugung des arithmetischen Mittels diese Summe nicht zur Schätzung dienen kann, weil sie nicht bezüglich dieses Mittels, sondern bezüglich des Centralwerths ein Minimum ist; indess bezüglich des arithmetischen Mittels die Schätzung nach den Quadraten den, ihr auch allgemein beigelegten, Vorzug in Anspruch nimmt, weil deren Summe bezüglich dieses und keines andern Werthes ein Minimum ist. Wozu noch kommt, dass nach dem Resultate des folgenden Abschnittes zur Gültigkeit des Principes irgend eines Potenzmittels von der Ordnung n allgemein ein Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen gehört, in dessen Ausdruck die Abweichungen in $(n+1)$. Potenz eingehen, also in Bezug zum arithmetischen Mittel in zweiter Potenz. Hienach ist die Bevorzugung des Principes irgend eines Potenzmittels von der Ordnung n meines Erachtens überhaupt als solidarisch mit der Schätzung der Genauigkeit nach der $(n+1)$. Potenz der Abweichungen anzusehen.

Diese Solidarität nun ist es, die ich bisher bei Behandlung unsrer Frage nicht beachtet finde, weil man überhaupt auf andre Potenzmittel als das erste und deren Abweichungsverhältnisse bisher nicht geachtet hat. Daraus aber scheint mir einiges Untriftige hervorgegangen zu sein, was ich nicht ohne Schüchternheit sage, da ich mich dabei in Collision mit hohen Autoritäten betreffe.

In der That hat bekanntlich Laplace (in s. Theorie anal. des probab.) sich für die Schätzung der grössern oder geringern Ungenauigkeit der Beobachtungen nach der absoluten Grösse der einfachen Fehler erklärt, und consequent, meine ich, hätte er hienach die Abweichungen vom Centralwerth rechnen sollen, indess er sie doch nach üblicher Weise vom arithmetischen Mittel rechnet, ohne untersucht zu haben, ob es nicht einen andern Werth giebt, bezüglich dessen das Minimum der einfachen Abweichungssumme stattfindet. Gauss anderseits (in s. Theoria combin. observ. error. min. obn.*) verwirft die Schätzung nach der einfachen Fehlergrösse, aber nicht, weil sie mit dem von ihm wie überall acceptirten Princip des arithmetischen Mittels nicht stimmt, sondern weil, wollte man die Schätzung nach der einfachen Fehlergrösse oder überhaupt einer ungeraden Fehlerpotenz vornehmen, man die negativen Fehler oder Fehlerpotenzen Gewinn an Genauigkeit bedeuten lassen und in diesem Sinn verrechnen müsste, wenn die positiven Verlust bedeuten sollten. Mithin sei die Schätzung nach einer geraden Fehlerpotenz vorzunehmen. Dass man bei der zweiten Fehlerpotenz stehen bleibe, sei im Grunde genommen Willkühr; es sei nur die einfachste Schätzungsweise, an die man sich halten könne, und welche (unter Einführung in die allgemeine Methode der kleinsten Quadrate) die grössten Rechnungsvortheile gewähre.

Ist nun aber das von uns aufgestellte Princip der solidarischen Beziehung zwischen der Ordnung des Potenzmittels, an das man sich als das sicherste oder auch nur praktischste hält, und der Potenz der Fehler, nach der man die Ungenauigkeit zu beurtheilen hat, richtig, so kann man den Grund, sich bei Anwendung des arithmetischen Mittels an die Schätzung nach den Fehlerquadraten zu halten, einfach in jener wesentlichen Beziehung finden, und die von Gauss statuirte principielle Willkühr dadurch ausgeschlossen halten. Was aber den, von Gauss selbst angegebenen und auf seine Autorität hin seitdem allgemein acceptirten, Grund für die Ausschliessung

*) Commentat. Soc. Gott. rec. V. ad 1819—1822. p. 33.

ungerader Potenzen bei Schätzung der Ungenauigkeit anlangt, so gestehe ich, bei aller Scheu einer solchen Autorität gegenüber mit Zweifeln aufzutreten, mich von der Evidenz desselben nicht haben überzeugen und keinen Ersatz des obigen Grundes darin finden zu können.

In der That kommen doch auch sonst Fälle vor, und zwar solche, die mit dem Falle, um den sich's hier handelt, vergleichbarer erscheinen, als der von Gauss zur Erläuterung zugezogene Fall eines Spieles mit Gewinn und Verlust, wo man sich durch den Gegensatz des Vorzeichens nicht zu entsprechenden Consequenzen als Gauss in unserm Falle geführt findet. So, wenn jemand von demselben Puncte wiederholt nach entgegengesetzter Richtung geht, werden die Wege, die er macht, eben so mit entgegengesetzten Vorzeichen bezüglich dieses Punctes behaftet sein, wie Fehler als Abweichungen von einer wahren Grösse; aber man wird nicht sagen: wenn der positive Weg als Entfernung vom Puncte betrachtet wird, so müsste der negative als Näherung daran betrachtet werden, wenn man nicht die vergleichsweise Schätzung beider vielmehr nach ihrem Quadrate als ihrem absoluten Werthe vornehmen wollte.

Werde jemand die Aufgabe gestellt, eine Grösse nach dem Augenmasse zu schätzen, und verurtheilt, sowohl für das, was er zu viel als was er zu wenig findet, ein Strafgeld nach irgend einer Taxe der Fehler zu zahlen (wie das wirklich beim Meisterwerden eines Fleischers mit der Schätzung des Gewichts eines Stücks Vieh der Fall ist), so wird man nicht sagen: wollte man die Schätzung des Zuviel als strafbar ansehen, so müsste man die Schätzung des Zuwenig als lohnenswerth betrachten, wenn man nicht die Taxation der begangenen Fehler vielmehr nach ihren Quadraten als ihrem einfachen Werthe vornähme.

Ja müsste man nicht nach dem Gauss'schen Princip bezüglich der Fehler selbst sagen: wenn das positive Vorzeichen einen Fehler, d. i. eine Abweichung von der Genauigkeit bezeichnen soll, so würde das negative einen Gewinn von Genauigkeit bedeuten, wenn man nicht den Fehlerbegriff von vorn herein vielmehr auf die Quadrate der Abweichungen als deren einfache Werthe bezöge.

Allgemein aber dürfte zu behaupten sein, dass dem Gegensatz der Vorzeichen nicht zwei ganz verschiedene Bedeutungen zugleich beigelegt werden dürfen. Gewiss bedeutet ein positiver Fehler, dass eine Grösse zu gross, ein negativer, dass sie zu klein durch Messung oder Schätzung gefunden worden ist, also wird an denselben Gegensatz nicht zugleich der Gegensatz einer Schätzung als Verlust oder Gewinn von Genauigkeit geknüpft werden können und zur Verhütung davon es nicht erst der Quadrirung der Fehler bedürfen.

Mit all' dem wäre an sich nicht ausgeschlossen, dass überhaupt in Fällen, wo nur die Grösse, nicht das Vorzeichen der in Rechnung genommenen Werthe bestimmend für das quantitative Resultat sein soll, eine mathematische Nothwendigkeit besteht, statt einfacher absolut genommener Werthe eine gerade Potenz derselben in die Rechnung einzuführen; und unstreitig sind es auch tiefer liegende Rechnungsgründe viel mehr als begriffliche Gründe gewesen, welche Gauss bestimmt haben, die Schätzung der Ungenauigkeit nach absoluten Werthen ungerader Fehlerpotenzen zu verwerfen, die nur durch den von ihm angegebenen Grund in Kürze vertreten werden sollen. Ich weiss aber nicht, ob sich eine solche Nothwendigkeit allgemein begründen lässt; ein Axiom scheint mir nicht daraus zu machen, und zur Verwerfung negativer Abweichungspotenzen bei Anwendung des arithmetischen Mittels nicht nöthig, sich auf ein solches Princip zu berufen.

Jedenfalls ist bemerkenswerth, dass zur Aufstellung der allgemeinen Formeln für die Verknüpfung der beiden fundamentalen Eigenschaften der Potenzmittelwerthe (S. 40) die ungeraden Potenzen der Abweichungen nothwendig eben so wie die geraden nach absolutem Werthe einzuführen und die Potenzmittel selbst hienach zu berechnen sind.

Bisher haben wir bei der Frage nach dem principiellen Vorzuge des einen oder anderen Potenzmittels nur die abstract mathematischen Verhältnisse dieser Art Mittel und der Abweichungen davon in das Auge gefasst; aber unstreitig kann die Frage nicht blos auf diesem Wege entschieden, sondern der Entscheidung nur dadurch vorgearbeitet werden, da es eine Frage der Anwendbarkeit aprioristischer Verhältnisse auf empirische Verhältnisse ist, wobei die Empirie selbst das letzte Wort zu sprechen hat. Hagen hat freilich eine, gewiss sinnreiche, aprioristische Ableitung des Gauss'schen Fehlergesetzes zu geben versucht, welche zugleich als Begründung des damit zusammenhängenden Principes des arithmetischen Mittels zu gelten haben würde; indess ist schon von anderer Seite dagegen bemerkt worden, dass die Voraussetzungen, von welchen Hagen dabei ausgeht, nichts weniger als evident sind, und anstatt eine empirische Bewährung des Gesetzes zu ersparen, zu ihrer eignen Aufrechthaltung solche fodern. Meines Erachtens nun dürfte sich die Entscheidung in dieser Hinsicht schliesslich an folgende Puncte knüpfen.

1) Eben so wesentlich als mit der Gleichheitseigenschaft jedes M_n die potenzielle Eigenschaft desselben zusammenhängt, hängt mit der Gültigkeit seines Principes die Gültigkeit eines bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Abweichungen Δ in Bezug dazu, kurz ein bestimmtes $\varphi_n\Delta$, zusammen, wonach das betreffende Mittel nur insofern der wahrscheinlichste Werth sein kann, der sich aus den Beobachtungen folgern lässt, als zugleich ein bestimmtes Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen in Beziehung dazu besteht.*) Also wird man dasjenige M_n vorzuziehen haben, bezüglich dessen sich das damit in Beziehung stehende Wahrscheinlichkeitsgesetz $\varphi_n\Delta$ der Beobachtungsfehler in der Erfahrung bestätigt. Diess trifft nun bei dem Gesetze zu, welches Gauss aus dem Princip des arithmetischen Mittels theoretisch abgeleitet hat, indem nicht nur er selbst, sondern auch Bessel dasselbe an astronomischen Beobachtungsfehlern bewährt hat. Hiemit scheint die Gültigkeit des Principes des arithmetischen Mittels sicher erwiesen, und hat man auch, insoweit man überhaupt empirische Beweise gesucht hat, sich hieran gehalten.

Inzwischen, nachdem sich dem arithmetischen Mittel die andern Potenzmittel als beachtenswerth zur Seite gestellt haben, blieb doch folgender Einwand möglich. Die Bewährungen des Gesetzes durch Erfahrung mittelst einer endlichen Zahl von Beobachtungswerthen können immer blos approximativ sein. Gesetzt nun, die Wahrscheinlichkeitsgesetze $\varphi_n\Delta$ wichen für die verschiedenen M_n eben so, wie es von den M_n selbst bei Ableitung aus einer nicht gar zu geringen Zahl von Beobachtungswerthen derselben Grösse gilt, wenig von einander ab, so könnte dieselbe Bewährung dem einen wie dem andern M_n zu statten kommen, und wäre dadurch noch nicht ohne Weiteres über den Vorzug des M_1 vor den andern M_n entschieden.

*) Vrgl. hierüber u. a. Encke im astronom. Jahrb. f. 1834. S. 264. 268.

Also schien es nützlich, das für die verschiedenen M_n zur Gültigkeit ihres Principes zu fodernde Wahrscheinlichkeitsgesetz allgemein zu bestimmen, was meines Wissens bisher nicht geschehen ist. Indem ich nun im folgenden Abschnitte darauf eingehe, zeigt sich, dass diese Gesetze, ungeachtet nach einem gemeinsamen Princip ableitbar, in den numerischen Ergebnissen so von einander und von dem bezüglich des M_1 insbesondere gültigen abweichen, dass nicht daran zu denken, eine für letzteres gültige Bewährung zugleich als eine solche für die Gesetze bezüglich der anderen Mittel geltend zu machen; wonach man in jedem Falle im physikalischen und astronomischen Beobachtungsfelde an das arithmetische Mittel als sichersten Werth gebunden bleibt, insoweit diess Feld der überall hier vorausgesetzten symmetrischen Fehlerwahrscheinlichkeit genügt.

2) Theile man eine Beobachtungsreihe aus vielen Werthen a, deren Gesammtzahl N sei, in z Fractionen aus einer gleichen Anzahl m von Werthen, so dass $zm=N$, unter Belassung der zufälligen Folge, in der die Einzelwerthe a erhalten worden sind, und bestimme aus jeder dieser Fractionen insbesondre die ihrer Sicherheit nach zu vergleichenden M von verschiedener Ordnung, was im 8. Abschnitt mit den drei untersten Mitteln M_0, M_1, M_2 geschehen und auch hier zur Fixirung der Vorstellung angenommen werden soll, so wird man aus denselben z Fractionen z Bestimmungen von jedem der drei Mittel, sog. Fractionsmittel, erhalten. Dazu bestimme man auch die dreierlei Mittel, als Totalmittel, aus der zusammengefassten unfractionirten Totalität der N Werthe a. Natürlich wird die Totalbestimmung, als aus z-mal so viel Werthen als jede Fractionsbestimmung geschehen, genauer sein, als die einzelnen im Durchschnitt sind, und unter den Totalmitteln jedes nach Massgabe sichrer, als die einzelnen Fractionsmittel weniger darum schwanken. Zeigt sich nun, dass die einzelnen Fractionsmittel M_1 weniger um das arithmetische Total-M_1 schwanken, als die Fractions-M_0 und M_1 um die entsprechenden Totalmittel, so wird dem arithmetischen Mittel als dem sichersten der Vorzug zu geben sein. In der That aber wird der 8. Abschnitt an den darin geprüften, das Gesetz der Beobachtungsfehler befolgenden, Reihen aus je 90 Werthen a zeigen, dass das arithmetische Mittel M_1 im Durchschnitt der Ergebnisse einen solchen Vortheil vor M_0 und M_2 entschieden genug behauptet, indess die mit vorkommenden

Ausnahmen (im Ganzen 6 bei 36 Summenbestimmungen) durch Zufälligkeiten der Werthvertheilung wohl erklärlich sind, mit Rücksicht, dass auch unwahrscheinlichere Abweichungsverhältnisse mitunter eintreten können, nur dass sie seltener als die wahrscheinlichern sind.

Allerdings lässt dieser empirische Beweis für den Vorzug des M_1, eines Mittels von ungerader Ordnung, nach Vergleich mit den zwei Nachbarmitteln M_0 und M_2 von gerader Ordnung, für sich noch dem Einwurf Raum, dass der Vorzug eben nur an der ungeraden Ordnung des M_1 hängen möge. Doch liegt kein bestimmter Grund vor, hieran einen Vorzug zu knüpfen. Zur vollständigeren empirischen Beseitigung des Einwurfes würde der Vergleich noch auf M_3 auszudehnen sein; nur möchte schwerlich jemand Geduld genug haben, die dazu erfoderliche Bestimmung so vieler Fractionsmittel aus Gleichungen dritten Grades durchzuführen, nachdem der vorige Grund schon für sich allein als durchschlagend anzusehen ist. Auch können nach der Bewährung des Gauss'schen Fehlergesetzes bezüglich M_1 die Unsicherheitsverhältnisse bezüglich der andern Potenzmittel als Rechnungssache gelten, ohne dass es doch nöthig ist, eine besondere Rechnung desshalb vorzunehmen, insofern nach jenem Gesetze jeder andre Werth überhaupt, also auch jeder andre Potenzmittelwerth als M_1, unwahrscheinlicher als dieser Werth ist. Wenn nun hienach die im 8. Abschnitt geführte empirische Untersuchung keine wesentliche Verstärkung des vorigen Grundes gewährt, da ihr Resultat nach demselben vorauszusehen war, so dürfte sie doch als factische Bestätigung dieser Voraussicht demselben immerhin zur Unterstützung und zugleich zur Veranschaulichung und Erläuterung der hiebei ins Spiel kommenden Abweichungsverhältnisse dienen können.

Noch kann man folgende drei, wenn auch nicht für sich allein durchschlagende, Puncte für die Bevorzugung des arithmetischen Mittels als Beobachtungsmittel vor andern Potenzmitteln geltend machen.

Erstens. Wenn ich, wie vorhin angegeben, eine grössere Beobachtungsreihe in z Fractionen aus gleich viel Werthen theile, aus jeder Fraction das arithmetische Mittel der Einzelwerthe besonders bestimme, und das arithmetische Mittel dieser arithmetischen Fractionsmittel nehme, so erhalte ich einen Werth, der genau und nothwendig mit dem arithmetischen Totalmittel der ganzen unfractionirt behandelten Werthe zusammenfällt. Das Entsprechende hievon findet aber bei keinem andern Potenzmittel statt; sondern man wird nur sagen können, dass das Mittel aus den Fractionsmitteln sich dem Totalmittel aus der Gesammtzahl der Werthe mehr nähert, als diess durchschnittlich von den einzelnen Fractionsmitteln gilt. Auch ohne Beobachtungsfehler oder Abweichungen, die das gleiche Gesetz befolgen, vor sich zu haben, kann man sich hievon an beliebigen Zahlenbeispielen überzeugen.

Nehmen wir z. B. die schon oben zum Beispiel gebrauchten 8 Ziffern des zufällig aufgeschlagenen Logarithmus von 6700 als eben so viel Werthe a, und fügen, um 9 Werthe zur Herstellung von 3 gleichzahligen Abtheilungen à $m=3$ zu haben, die unter diesen Ziffern noch fehlende 1 vorn hinzu, so haben wir, ohne die ursprüngliche Reihenfolge der Ziffern übrigens zu ändern, folgende 3 Abtheilungen:

$$1,\ 3,\ 8\ |\ 2,\ 6,\ 0\ |\ 7,\ 4,\ 8$$

Die arithmetischen Fractionsmittel sind 4; 2,667; 6,333, und das arithmetische Mittel hieraus 4,333, übereinstimmend mit dem, was man erhält, wenn man das arithmetische Mittel aus der Totalreihe ohne Fractionirung derselben zieht.

Hingegen sind die drei, nach Ordnung der Ziffern jeder Fraction sich ergebenden, Fractionscentralwerthe 3, 2, 7, und der aus diesen 3 Werthen resultirende Centralwerth 3, indess der, aus der Totalreihe nach Ordnung derselben sich ergebende, Centralwerth 4 ist.

Ferner sind die 3 Fractionsmittel M_2 nach Anwendung der S. 43 gegebenen Regeln 4,3666; 2,9282; und 6,1010; aus welchen nach Anwendung derselben Regeln 4,518 als M_2 dieser 3 Fractions-M_2 resultirt, wogegen die Totalreihe ohne Fractionirung 4,324 giebt.

Auch macht es bei dem arithmetischen Mittel keinen Unterschied, wie man die Einzelwerthe der gesammten Reihe zu den Fractionen combinirt, aus deren Mitteln man ein letztes Mittel zieht, wohl aber bei den andern Potenzmitteln. In der That, wenn ich die obigen Zahlen nur mit veränderter Ordnung zu folgenden drei Fractionen combinire

$$2,\ 3,\ 4\ |\ 1,\ 6,\ 8\ |\ 0,\ 7,\ 8,$$

so sind die Fractions-Centralwerthe 3, 6, 7 und der daraus resultirende definitive Centralwerth nicht mehr wie der obige 3, sondern 6. Die drei Fractions-M_2 aus denselben so angeordneten Werthen sind jetzt 3; 4,6334 und 4,4170; und das daraus resultirende M_2 nicht mehr 4,518 sondern 3,899.

Inzwischen, so günstig diess für das Princip des arithmetischen Mittels erscheint, auch schon sonst für dasselbe im Vergleich mit andern Mitteln überhaupt geltend gemacht worden ist, erscheint es doch für sich allein nicht völlig entscheidend, denn wenn zugestandenermassen nur eine unendliche Totalzahl das richtige Resultat geben kann, so ist es nicht selbstverständlich, dass eine fractionsweise Behandlung der empirisch vorliegenden endlichen Totalzahl und Ziehung des definitiven Resultates aus den Fractionsresultaten die Ziehung desselben aus der ungetrennten Totalität müsse vertreten können. Auch kann man bemerken, dass das arithmetische Mittel denselben Vortheil, den es gegen die andern Potenzmittel in dieser Hinsicht beweist, doch nicht gegen Mittel jeder andern Art beweist, so namentlich nicht gegen das geometrische Mittel, noch auch, was schon früher anderwärts bemerkt worden ist, gegen Mittel von der Form $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{m}\cdots}$, deren im letzten Abschnitte gedacht werden wird.

Zweitens. Die Bestimmungsweise des arithmetischen Mittels ist von allen Potenzmitteln die einzige, welche niemals und in keiner Hinsicht eine Zweideutigkeit einschliesst; man kann aus gegebenen Beobachtungswerthen a stets nur einen bestimmten Werth als arithmetisches Mittel ableiten. Hiegegen wurde schon bemerkt, dass beim Centralwerth im Falle einer geraden Anzahl von Werthen eine principielle Unbestimmtheit in der Lage desselben zwischen seinen zwei Seitenwerthen statt findet; bei höheren Potenzmitteln über dem arithmetischen aber giebt der, mit der Ordnung desselben übereinstimmende, Grad der Gleichung, woraus sie zu bestimmen, stets eine Mehrheit von Werthen dafür, von denen allerdings die imaginären und ausserhalb der Reihe der a fallenden als unbrauchbar zu verwerfen sind; doch würde erst noch zu untersuchen sein, ob nicht bei höheren Potenzmitteln auch mehrere reale Werthe in die Reihe fallen können, welche zugleich als Ausgangswerthe verschiedener Minimalsummen in Verhältniss zu ihren Nachbarwerthen anzusehen; und jedenfalls ist es schon als ein Vorzug des arithmetischen Mittels anzusehen, dass es keine zu beseitigende Nebenwerthe hat.

Drittens. Der arithmetische Mittelwerth ist nach den Erörterungen und Formeln S. 44. 46 von allen Potenzmittelwerthen der einzige, dessen Veränderungen in genauer und einfacher Proportionalität mit den Veränderungen der Einzelwerthe, aus denen er zu bestimmen ist, stehen.

VII. Wahrscheinlichkeitsgesetze der Abweichungen bezüglich der verschiedenen Potenzmittel unter Voraussetzung der Gültigkeit ihres Principes.

Von dem Motiv und allgemeinen Gesichtspunct der Bestimmung dieser Gesetze ist S. 57 gesprochen. Indem ich im Princip und der Ausführung dieser Bestimmung wesentlich dem Gange folge, nach welchem Encke in s. Abh. über die Methode der kl. Qu.*) das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen bezüglich des A oder M_1 abgeleitet hat, nur mit Verallgemeinerung dieses Ganges auf beliebige Abweichungspotenzen, glaube ich der umständlichen und etwas weites Ausholen erfodernden Auseinandersetzung desselben durch Verweisung auf jene Abhandlung überhoben zu sein, und werde mich demnach wesentlich auf die Resultate beschränken, wobei folgende Bezeichnungen in Rücksicht kommen.

Mit e wird folgends die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, mit π die Ludolf'sche Zahl, mit $\varphi_n\varDelta$ die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bezüglich eines Potenzmittels M_n bezeichnet, sofern sie eine Function φ der Grösse von $\varDelta$ und des Index n ist. Unter verhältnissmässiger Zahl der Fehler von 0 bis $\varDelta$ verstehe ich den Bruchtheil von der Gesammtzahl der Fehler bezüglich eines Mittels M_n, der nach dem betreffenden Wahrscheinlichkeitsgesetze zwischen den Grössengränzen der Fehler 0 und $\varDelta$ enthalten ist, und bezeichne ihn mit V_n. Alle Fehler werden nach absolutem Werthe genommen, und symmetrische Wahrscheinlichkeit derselben vorausgesetzt.

Wie bekannt nun, und aus den unten zu gebenden allgemeinen

---

*) Astronom. Jahrb. f. 1834. S. 259. 264. 280.

Formeln als besonderer Fall folgend, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nach dem Principe des arithmetischen Mittels,

$$\varphi_1 \Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \quad \ldots \quad (36)$$

und hienach:

$$V_1 = \int^{\Delta} \varphi_1 \Delta d\Delta \quad \ldots \quad (37)$$

worin $h = \frac{1}{q\sqrt{2}} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}$, wenn q den quadratischen Mittelfehler (Quadratwurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat), ε das einfache Fehlermittel bezüglich M_1 bedeuten. In die Formel für V_1 ist der Werth von $\varphi_1 \Delta$ aus der vorhergehenden zu substituiren.

Das Integral V_1 ist bekanntlich nicht in endlicher Form darstellbar, aber für nicht zu grosse Werthe von Δ durch die, für Werthe von $\frac{\Delta}{\varepsilon} < \sqrt{\pi}$ convergirende unendliche Reihe

$$V_1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{v}{1} - \frac{1}{1} \cdot \frac{v^3}{3\pi} + \frac{1}{1.2.} \frac{v^5}{5\pi^2} - \text{etc.}\right) \ldots (38)$$

worin $v = \frac{\Delta}{\varepsilon}$, ausdrückbar und hienach und nach einer andern, für grosse Werthe von Δ convergirenden, Reihe in einer bekannten Tabelle worin $t = \frac{\Delta}{\varepsilon\sqrt{\pi}}$ für, von 0 an wachsende, Gränzen Δ, nach deren Verhältniss zu $\varepsilon\sqrt{\pi}$ berechnet.

Um nun hienächst vor den allgemeinen Formeln die für den Centralwerth insbesondere daraus folgenden zum Vergleich mit den vorigen darzubieten, so hat man bezüglich C oder M_0 sehr einfach

$$\varphi_0 \Delta = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{\Delta}{\varepsilon}}; \quad V_0 = 1 - e^{-\frac{\Delta}{\varepsilon}} \ldots (39)$$

worin V_0 wie man sieht, in endlicher Form erscheint.

Das ε ist principiell hier nicht mehr das einfache Mittel der bezüglich M_1 sondern bezüglich M_0 genommenen Abweichungen; aber bei der voraussetzlich symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler fallen bemerktermassen alle M wesentlich (im Sinne von S. 7 u. 8 verstanden) zusammen, und wenn diess bei endlicher Zahl der Werthe nicht mehr der Fall ist, so kann doch in den allgemeinen Wahrscheinlichkeitsformeln nur der wesentliche Fall, von welchem zufällig nach einer oder der andern Seite abgewichen wird, berücksichtigt werden.

Wohl zu merken nun, ist die durch die Formeln (39) ausgedrückte Vertheilungsweise der Abweichungen die, welche man zu erwarten haben würde und zu fodern hat, sollte das

Princip des Centralwerthes in dem S. 57 angegebenen Sinne gültig sein; insofern sich aber diese Vertheilungsweise nicht bestätigt, bestätigt sich auch die Gültigkeit dieses Principes nicht. Und da man von anderer Seite schon das Abweichungsgesetz bezüglich des arithmetischen Mittels mit erwünschter Approximation bestätigt gefunden hat, so gilt es, wie früher bemerkt, blos zuzusehen, ob das bezüglich des Centralwerthes gefundene zu Resultaten führt, welche mit denen bezüglich des arithmetischen Mittelwerthes noch nahe genug stimmen, um eine Concurrenz damit zuzulassen; man sieht aber sofort aus der grossen Abweichung zwischen der Form von φ_o und φ_1, dass diess nicht der Fall sein kann, und diess bestätigt sich, wenn man V_o und V_1 für einige Gränzwerthe $\varDelta$ vergleichungsweise nach den gegebenen Formeln berechnet.

In der That findet man hienach

Von $\varDelta = 0$ bis $\varDelta =$	V_0 bez. M_0	V_1 bez. M_1
$\frac{\varepsilon}{4}$	0,39347	0,31006
ε	0,63212	0,57506
2ε	0,86466	0,88946
4ε	0,94540	0,99885

Wie man sieht ist das V_0 bis $\varDelta = \frac{\varepsilon}{2}$ so wie bis $\varDelta = \varepsilon$ erheblich grösser als das V_1 und die Vertheilung bezüglich M_0 im Ganzen verhältnissmässig gleichförmiger, als bez. M_1.

Was nun die allgemeinen Formeln für beliebiges n anlangt, so finde ich Folgendes:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n \varDelta &= K_n h e^{-h^{n+1} \varDelta^{n+1}} \\ V_n &= \int_0^\varDelta \varphi_n \varDelta d\varDelta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (40)$$

Hierin sind K_n und h Constanten, welche bezüglich jedes n einen besondern Werth annehmen. Und zwar ist allgemein für ein gegebenes n

$$h^{n+1} = \frac{1}{(n+1) < \varDelta^{n+1} >}$$

worin $< \varDelta^{n+1} >$ das arithmetische Mittel der gesammten, zur $(n+1)$-ten Potenz erhobenen Fehler bedeutet Hieraus ist h durch Ausziehung der $n+1$. Wurzel zu gewinnen. K_n hängt von einem bestimmten Integral ab, ist nämlich allgemein

$$K_n = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^{n+1}} dt}$$

welcher Werth sich für $n=0$ auf $\frac{1}{2}$, für $n=1$ auf $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ reducirt.

Hienach findet sich durch Uebersetzung in eine unendliche Reihe z. B. für M_3

$$V_3 = K_3 \left(\frac{h\Delta}{1} - \frac{h^4\Delta^4}{1.4.} + \frac{h^7\Delta^7}{1.2.7.} - \text{etc.}\right)$$

was eben so wie die Ausdrücke für höhere V einem ganz andern Gange entspricht, als der unter (36) gegebene Ausdruck für V_1.

VIII. Bewährung des Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Abweichungen an den thermischen Monatsabweichungen. Empirische Vergleichung der Sicherheit der drei niedersten Potenzmittel.

Im 6. Abschnitt ist unter andern Gründen für die Bevorzugung des Principes des arithmetischen Mittels M_1 vor dem Principe anderer Potenzmittel im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete geltend gemacht, dass, wenn man eine längere Beobachtungsreihe bezüglich derselben Grösse in z Abtheilungen fractionirt, deren jede eine gleiche Zahl m von Beobachtungswerthen enthält, man die arithmetischen Mittel M_1 dieser Abtheilungen durchschnittlich weniger vom arithmetischen Totalmittel der Reihe abweichend, weniger darum schwankend, findet, als wenn man andere Potenzmittel, als wie M_0, M_2, aus denselben Fractionen zieht, und ihre Schwankungen um das entsprechende Potenzmittel der ganzen Reihe mit den vorigen Schwankungen vergleicht, mag man bei dem Vergleiche der Schwankungen die einfachen, quadrirten oder cubirten Abweichungen der einzelnen Fractionsmittel vom Totalmittel zu Grunde legen, Ausnahmen von dieser Regel im Einzelnen dabei zugestanden. Dazu sollen jetzt die Belege folgen.

Nun wäre hiezu eigentlich nöthig, eine längere physikalische oder astronomische Beobachtungsreihe bezüglich derselben Grösse zur Disposition zu haben, ohne dass ich mir eine solche, zum Zwecke hinreichend geeignete, zu verschaffen gewusst. Aber nachdem sich das, durch das Integral (37) ausgedrückte, Gauss'sche Fehlergesetz für Beobachtungen dieser Art hinreichend bestätigt hat, wird man ihnen Beobachtungen, welche dasselbe Gesetz befolgen, füglich für unsern Zweck substituiren können; und da diess nach dem Belege, den ich hiezu sofort folgen lasse, von den thermischen Monatsabweichungen gilt, von welchen Dove ein reiches Material in verschiedenen Jahrgängen der Abhandlungen der Berl. Akademie zusammengestellt hat, so werde ich davon hier für unsern Zweck Gebrauch machen.

Zum Verständniss des Ausdrucks »thermische Monatsabweichungen« Folgendes.

Die, aus den 30 oder 31 Tagen eines gegebenen Monates an einem gegebenen Orte bestimmte, arithmetische Mitteltemperatur des Monats ist in jedem Jahre etwas verschieden. Zieht man nun aus den durch eine Reihe von Jahren hindurch bestimmten Mitteltemperaturen desselben Monates für denselben Ort das allgemeine arithmetische Mittel und nimmt die Abweichungen der einzelnen Monatsmittel davon, so hat man das, was ich Kürze halber thermische Monatsabweichungen nenne. Ungeachtet sie direct bezüglich des arithmetischen Mittels bestimmt sind, hindert doch nichts, beliebige andere Potenzmittel mit zugehörigen Abweichungen daraus eben so zu bestimmen, als wenn man statt der Abweichungen vom arithmetischen Mittel die Werthe, welche diese Abweichungen geben, selbst vor sich hätte. Denn man braucht ja nur zu jeder der thermischen Monatsabweichungen den arithmetischen Mittelwerth, bezüglich dessen sie als positive und negative bestimmt sind, wieder (algebraisch) zugefügt zu denken, so hat man darin die ursprünglichen Beobachtungswerthe a selbst, um die es zu thun ist; ohne dass es doch nöthig ist, dieses Mittel wirklich zuzufügen, da sich in den hier in Betracht zu ziehenden Verhältnissen der Abweichungen überhaupt nichts ändert, wenn man allen denselben Werth, sei es das arithmetische Mittel oder einen andren Werth, zufügt oder davon abzieht. Also können uns die, in Dove's Tabellen angeführten, thermischen Monatsabweichungen die Werthe a, die wir zur Ableitung unsrer Potenzmittel brauchen, unmittelbar vertreten, wie unten an einem Beispiele besonders auszuführen.

Für unsern Zweck habe ich nun von den 90 jährigen Beobachtungen (von 1775 an) für Wien, welche sich in den Abhandlungen der Berl. Akad. f. 1866 finden,*) die Beobachtungen für die 4 Monate Januar, April, Juli und October benutzt, und gebe zuerst in folgender Tabelle den Beleg für die wesentliche Zusammenstimmung derselben mit dem durch (37) ausgedrückten Wahrscheinlichkeitsgesetze der Fehlervertheilung. In dieser Tabelle ist unter »beobachtet« angegeben, wie viel von den 90 Abweichungen jedes Monates bezüglich des arithmetischen Mittels zwischen den Gränzen null und einem, in der ersten Verticalspalte angegebenen, Abweichungswerthe enthalten sind, welcher ein bestimmter Bruchtheil oder ein bestimmtes Multiplum des einfachen Fehlermittels ε ist, wobei die Abweichungen auf positiver und negativer Seite zusammengerechnet sind; unter »berechnet«, wie viel nach dem Gauss'schen Gesetze zwischen diesen Gränzen enthalten sein sollten. Dabei hat man hauptsächlich den Vergleich der beiden letzten Verticalspalten ins Auge zu fassen, welche die mittleren Beobachtungswerthe sämmtlicher 4 Monate mit den nach (37) berechneten Werthen zusammengestellt geben, indess die vorhergehenden 4 Spalten das Resultat der einzelnen Monate bieten. Unten findet sich noch angegeben: 1) ein kleiner Werth α, der den arithmetischen Mittelwerth der thermischen Abweichungen jedes Monates bei algebraischer Zusammenrechnung (also mit Rücksicht auf das Vorzeichen) bildet, und eigentlich null sein sollte, weil die Abweichungen ja bezüglich des arithmetischen Mittels gelten sollen, wo sie sich allgebraisch zu Null compensiren müssen. Wenn diess doch nicht genau bei den in der Originaltabelle angegebenen Monatsabweichungen zutrifft, so hängt diess zwar meist nur von Abrundung der Einzelwerthe, aus denen das Mittel gezogen wird, in Decimalen ab; sofern diess jedoch nicht überall ganz ausreicht, müssen kleine Rechnungsfehler oder Vorzeichenverwechselungen im Original angenommen werden, ohne dass jedoch ein erheblicher Irrthum in den Resultaten daraus erwachsen kann;**) — 2) der einfache Mittelfehler ε der absolut genommenen Abweichungen.

---

*) Daraus unter dem Titel: Ueber die mittlere und absolute Veränderlichkeit der Temperatur der Atmosphäre, von Dove. Berlin. 1867. Hierin die Wiener Beobachtungen S. 55.

**) Der Werth α ist überall so klein, dass es keinen erheblichen Unterschied machen würde, wollte man ihn überall vernachlässigen; ich habe aber bei Be-

Wenn unter den Zahlen der Tabelle einige mit dem Bruchtheil 0,5 vorkommen, so rührt diess daher, dass, wenn eine Gränze genau mit einem Werthe der Beobachtungsreihe zusammenfällt, der darauf fallende Werth nur mit 0,5 bis zu dieser Gränze mitzuzählen ist.

Zahl der Abweichungen Δ bezüglich α zwischen den in der 1. Verticalspalte angegebenen Gränzen.

Von 0 bis $\Delta =$	Beobachtete Zahlen in den einzelnen Monaten				Mittelzahlen V für die 4 Monate.	
	Januar	April	Juli	October	beob.	ber.
0,25 ε	12	15,5	11	12	12,63	14,2
0,5 –	28	24	26	24	25,50	27,9
0,75 –	38	39	40	41	39,50	40,5
1,0 –	53	50	49	54	51,50	51,8
1,25 –	63	60,5	61	63	61,88	61,3
1,5 –	69	71	71	67	69,50	69,2
1,75 –	75	78	76	76	76,25	75,4
2,0 –	79	83	78	80	80,00	79,6
2,25 –	83	86	82	83	83,50	83,4
2,5 –	87	86	86	86	86,30	85,9
2,75 –	90	87	87	89	88,30	87,5
3,00 –	90	89	89	89	89,30	88,4
∞	90	90	90	90	90	90
α	−0,047	−0,025	−0,0147	+0,0594		
ε	1,986	1,380	1,014	1,140		

Man sieht, dass im Mittel der 4 Monate sich die beobachteten Werthe sehr gut an die berechneten anschliessen, nur dass sie im Anfange der Tabelle ein wenig in minus, zuletzt ein wenig in plus davon abweichen; indess die Werthe der 4 Einzelmonate nach beiden Seiten um die berechneten schwanken. Hiezu gebe ich noch für doppelt so weit auseinander gehaltene Gränzen das aus der Sonderberechnung der 12 Monate zusammengefasste Resultat für alle, wozu also im Ganzen 1080 Beobachtungen beigetragen haben. Natürlich konnte aus der Zusammenfassung der 12 Monate eine noch genauere Zusammenstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als aus blos 4 Monaten erwartet werden, und findet sich auch wirklich.

---

stimmung des Werthes ε die Abweichungssumme doch gegen α gerechnet, und dann auch von α aus die Gränzen der Δ nach beiden Seiten bestimmt.

Von 0 bis $\Delta =$	beob.	ber.
0,5 ε	322,5	334,8
1,0 –	621,0	621,1
1,5 –	832,0	830,1
2,0 –	966,0	960,7
2,5 –	1037,0	1030,2
3,0 –	1063,0	1062,0
∞	1080,0	1080,0

Gelegentlich hiezu die Bemerkung, dass ich nach einer sehr ausgedehnten Untersuchung der, von Dove in verschiedenen Abhandlungen mitgetheilten, thermischen Monatsabweichungen für Europa und Nordamerika durchschnittlich eine positive Asymmetrie der Wintermonate, und eine, doch geringere, negative der Sommermonate bezüglich der allgemeinen (d. i. vieljährigen) arithmetischen Mitteltemperatur des Monates gefunden habe, womit in angebbarer Weise ein durchschnittliches gegentheiliges Uebergewicht der negativen extremen Abweichung in den Wintermonaten, der positiven in den Sommermonaten über die entgegengesetzte extreme Abweichung zusammenhängt. Beides erleidet freilich zufällige Ausnahmen und stellt sich nur bei grösserer Zahl der Werthe und Vergleich vieler Orte durch die Zufälligkeiten durch mit Sicherheit heraus. Für Wien insbesondere ergeben sich aus den 90 Werthen jedes Monates folgende Resultate, die natürlich für sich allein noch kein hinreichendes Fundament für obige Regeln geben würden, da man mindestens die in den Sommermonaten sehr geringen Unterschiede zwischen m' und $m_,$ sehr wohl auf Zufälligkeiten schreiben kann, und in Betreff der E' und $E_,$ sogar unter den 12 Fällen 3 Ausnahmen von der Regel findet. Unter m' und $m_,$ verstehe ich die Zahlen der positiven und negativen Abweichungen, unter E' und $E_,$ die extremen Abweichungen beider Seiten, jene wie diese bezüglich des, das arithmetische Mittel vertretenden, beigefügten α gerechnet. Anderwärts werde ich ausführlicher auf diesen Gegenstand eingehen.

	m'	$m_,$	E'	$E_,$	α
Januar	47	43	5,34	5,26	−0,0472
Februar	48	42	4,04	6,20	+0,0625
März	50	40	3,95	5,36	+0,0196
April	46	44	5,79	3,84	−0,025
Mai	44	46	3,41	3,05	±0,0
Juni	44	46	4,08	2,99	−0,0163
Juli	44	46	3,06	2,71	−0,0147
August	44	46	4,92	2,60	+0,020
September	46	44	3,01	2,16	+0,010
October	45	45	3,52	2,99	+0,0594
November	47	43	2,34	3,58	−0,004
December	52	38	4,19	7,59	−0,002

Man sieht, dass jedenfalls in den 4 Monaten, die uns zu dem, Eingangs dieses Abschnittes angegebenen, Zwecke dienen sollen, die Asymmetrie merklich vernachlässigt werden kann, und selbst eine stärkere und entschiedenere Asymmetrie würde nach der S. 13 gemachten Bemerkung nicht hindern, das Gauss'sche Fehlergesetz noch bei Zusammenrechnung der Abweichungen beider Seiten merklich bestätigt zu finden, wie denn der December, der die stärkste Asymmetrie zeigt, sogar fast die geringste Summe von Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung gegeben hat.

Für den Hauptzweck dieses Abschnittes habe ich nun von den 4 Monaten Januar, April, Juli und October die zwei ersten in 9 Abtheilungen à $m = 10$ Werthen, die zwei letzten in 18 Abtheilungen à $m = 5$ Werthen fractionirt. Zum Anhalt für die weitere Erläuterung folgt hier die erste Abtheilung (Decade) der thermischen Monatsabweichungen (in Graden *R.*) für Januar, und zwar unter 1) nach der ursprünglichen Folge der 10 Jahre von 1775 an, unter 2) nach der Grössenfolge geordnet, wie es zur weiteren Behandlung nöthig ist.

1) $-1{,}00 \,|\, -4{,}49 \,|\, -1{,}69 \,|\, -1{,}93 \,|\, -1{,}67 \,|\, -1{,}73 \,|\, -0{,}75 \,|\, 2{,}85 \,|\, 3{,}42 \,|\, -3{,}49$

2) $-4{,}49 \,|\, -3{,}49 \,|\, -1{,}93 \,|\, -1{,}73 \,|\, -1{,}69 \,|\, -1{,}67 \,|\, -1{,}00 \,|\, -0{,}75 \,|\, 2{,}85 \,|\, 3{,}42$

Der Centralwerth M_0 hievon, als arithmetisches Mittel seiner beiden Seitenwerthe bestimmt, ist $-1{,}68$, der arithmetische Mittelwerth M_1 ist $-1{,}048$, und da dieser zwischen $-1{,}67$ und $-1{,}00$ fällt, so haben wir nach der S. 42 u. 43 gegebenen Regel zunächst auch M_2 zwischen denselben Werthen zu suchen, und hienach die a' und $a_,$ zu scheiden. Diess giebt $m' = 6$, $m_, = 4$, $\mu = 2$, $\lambda = -1{,}952$ und $k = 13{,}3216$; woraus $x = M_2 = \frac{-1{,}952 \pm \sqrt{334{,}39}}{2} = -0{,}6165$ folgt, da der andere Werth $-18{,}90$ als ausserhalb der Werthreihe fallend nicht in Betracht kommt. Inzwischen entspricht dieser Werth von x nicht der Voraussetzung, dass er zwischen $-1{,}67$ und $-1{,}00$ falle, da er vielmehr zwischen $-0{,}75$ und $+2{,}85$ fällt; also ist er zu verwerfen, und zwischen letztern Werthen zu suchen, was nach demgemässer Scheidung der Werthe a' und $a_,$ giebt $m' = 8$, $m_, = 2$, $\mu = 6$, $\lambda = -23{,}02$, $k = 26{,}447$, und hieraus $x = -0{,}625$, welches der Voraussetzung entspricht, und wobei man also stehen zu bleiben hat. Dabei sieht man doch, dass schon der vorige, nach falscher Voraussetzung berechnete, Werth dem jetzigen richtigen sehr nahe kam. Uebrigens gaben von den 9 Decaden des Januar ausser der ersten nur noch die 2. und 9. Decade zu einer solchen doppelten Rechnung Anlass.

Nachdem nun solchergestalt in allen 9 Decaden des Januar die drei Werthe M_0, M_1, M_2 als Fractionsmittel bestimmt waren, wurden die entsprechenden Totalmittel aus der ganzen unfractionirten Reihe von 90 Werthen bestimmt, und hienach folgende Zusammenstellung erhalten, in welcher die Totalmittel unten stehen.

Fractions-M des Januar.

Decade	M_0	M_1	M_2
1	−1,68	−1,048	−0,625
2	+0,60	+0,798	+1,064
3	+1,17	+0,243	+0,130
4	−0,43	−0,293	−0,109
5	+1,80	+0,791	+0,250
6	−0,62	−0,610	−0,504
7	+0,25	−0,194	−0,773
8	+0,42	−0,113	−0,450
9	−0,31	+0,004	+0,215
Total M	+0,150	−0,0472	−0,160

Nun wurden zuvörderst die Abweichungen der 9 einzelnen Fractions-M_0 dieser Tabelle vom untenstehenden totalen M_0 algebraisch, d. i. mit Berücksichtigung der Vorzeichen genommen, und sowohl unpotenzirt, als quadrirt, als cubirt, nach abs. Werthe zusammengerechnet, was ergab $\Sigma\Delta = 7{,}03$; $\Sigma\Delta^2 = 8{,}659$; $\Sigma\Delta^3 = 12{,}545$. Eben so wurde mit den Fractions-M_1 und M_2 bezüglich der entsprechenden Totalmittel verfahren; um schliesslich die bezüglich der verschiedenen Totalmittel erhaltenen Summen mit einander zu vergleichen; und dasselbe geschah mit den übrigen 3 Monaten.

Zur Vornahme dieses Vergleiches folgt nun, nach Vorausschickung einer Tabelle über die erhaltenen Totalmittel, für alle 4 Monate die Tabelle der Summen der einfachen, quadrirten und cubirten Abweichungen davon.

Totalmittel der 4 Monate.

	M_0	M_1	M_2
Januar	+0,15	−0,047	−0,160
April	+0,04	−0,025	+0,019
Juli	−0,09	−0,015	+0,081
October	+0,025	+0,060	+0,080

Summen der einfachen und potenzirten Abweichungen bezüglich der vorstehenden Totalmittel nach absolutem Werthe.

	M_0	M_1	M_2
	Januar à $m = 10$		
$\Sigma\Delta$	7,130	4,047	3,957
$\Sigma\Delta^2$	8,539	2,909	2,448
$\Sigma\Delta^3$	12,545	2,402	1,962
	April à $m = 10$		
$\Sigma\Delta$	5,130	4,955	5,288
$\Sigma\Delta^2$	3,791	3,942	5,160
$\Sigma\Delta^3$	3,057	4,055	6,576
	Juli à $m = 5$		
$\Sigma\Delta$	8,88	7,939	8,644
$\Sigma\Delta^2$	5,209	5,112	5,903
$\Sigma\Delta^3$	3,426	3,845	5,024
	October à $m = 5$		
$\Sigma\Delta$	9,840	9,582	9,923
$\Sigma\Delta^2$	7,170	6,920	7,653
$\Sigma\Delta^3$	6,299	6,103	6,744

Man sieht nun, dass mit einigen Ausnahmen (bezüglich M_0 im April bei $\Sigma\Delta^2$ und $\Sigma\Delta^3$, im Juli bei $\Sigma\Delta^3$; bezüglich M_2 im Januar bei allen drei Summen) das Mittel M_1 entschieden in Vortheil betreffs der Kleinheit der, die Schwankungsgrösse um das Mittel charakterisirenden, Abweichungssummen ist, welche Potenz der Abweichungen man dabei immer massgebend halten will, da die Summen bei verschiedener Potenz der Abweichungen einander fast überall parallel gehen. Wenn diess doch ein paar Ausnahmen erleidet, sofern im April $\Sigma\Delta$ für M_0 grösser, $\Sigma\Delta^2$ und $\Sigma\Delta^3$ kleiner als für M_1 sind, so darf diess nicht befremden, da, je höher die Potenzirung der Abweichungen getrieben wird, desto mehr die kleinen Abweichungen gegen die grossen ihren Einfluss auf die Summe verlieren.

Eben so wenig darf befremden, dass die Summen mit der Höhe der Potenzirung der Abweichungen theils abnehmen, theils zunehmen; erstres muss der Fall sein, wenn die Abweichungen, welche < 1 sind, letztres, wenn die Abweichungen, die > 1 sind, den grössern Einfluss gewinnen.

Bei dieser Untersuchung liess sich zugleich der oben S. 59 ausgesprochene Satz bestätigen, dass nur für das arithmetische Mittel eine Uebereinstimmung des Totalmittels der ganzen Reihe mit dem

Mittel stattfindet, welches aus den Fractionsmitteln resultirt. So geben die obigen 9 Fractions-M_0 für Januar ein daraus resultirendes $M_0 = +0{,}250$, und die 9 Fractions-M_2 ein resultirendes $M_2 = -0{,}0241$, statt der angegebenen Totalmittel $+0{,}150$ und $-0{,}160$, und stellen sich überhaupt die Totalmittel und aus den Fractionsmitteln resultirenden Mittel M_0 und M_2 so zusammen.

	M_0		M_2	
	tot.	res.	tot.	res.
Januar	+0,15	+0,25	−0,160	−0,0241
April	+0,04	−0,20	+0,019	+0,118
Juli	−0,09	−0,145	+0,081	+0,0484
October	+0,025	+0,020	+0,080	+0,151

Nun könnte man meinen, dass, wenn die Abweichungen der Fractionsmittel bezüglich des aus ihnen resultirenden Mittels statt wie oben bezüglich des Totalmittels genommen wären, so würde, gemäss der potenziellen Eigenschaft der Mittel, $\Sigma\Delta$ bei M_0, $\Sigma\Delta^2$ bei M_1, $\Sigma\Delta^3$ bei M_2 in allen Monaten am kleinsten sein müssen, was aber keineswegs der Fall ist, da vielmehr die bezüglich der resultirenden Mittel erhaltenen Summen sich nicht sehr von den obigen bezüglich der Totalmittel erhaltenen unterscheiden, wie folgende kleine Tabelle für den Januar lehrt, in welcher die Abweichungen respectiv bezüglich $M_0 = 0{,}25$, $M_1 = 0{,}047$ und $M_2 = 0{,}024$, als resultirenden Mitteln genommen sind,

bezüglich	M_0	M_1	M_2
$\Sigma\Delta$	7,03	4,047	4,093
$\Sigma\Delta^2$	8,66	2,909	2,678
$\Sigma\Delta^3$	12,89	2,402	2,148

Inzwischen lehrt eine nähere Ueberlegung leicht, dass die vorige Erwartung nur dann im Rechte wäre, wenn die Abweichungen derselben 9 Fractions-M_0 nicht blos von dem aus ihnen resultirenden M_0, wie hier geschehen, sondern auch vergleichsweise damit von dem resultirenden M_1 und M_2 genommen würden, wo man nothwendig die Summe der ersten als die kleinste finden würde; hingegen rühren die Summen bezüglich M_1 und M_2, mit welchen hier die Summen bezüglich M_0 verglichen werden, von den Abweichungen der Fractions-M_1 und M_2 bezüglich der aus ihnen resultirenden Mittel her.

IX. Von einigen Mitteln, welche das arithmetische Mittel und das Aufsteigen von da zu höhern Ordnungen mit den Potenzmitteln gemein haben.

Verstehen wir überhaupt unter einem Mittel aus gegebenen Einzel-Werthen einen Werth, der nach einem bestimmten Princip so aus diesen Werthen abgeleitet wird, dass er zwischen dieselben fällt, oder kurz eine Function der Einzelwerthe, welche zwischen die Gränzwerthe fällt, so giebt es natürlich so vielerlei Mittel, als es Principe solcher Bestimmung oder Functionen der Art giebt, was unbestimmt viele sein möchten; wonach nur solche eine besondere Erwähnung verdienen, an die sich ein besondres mathematisches oder empirisches Interesse knüpft. In Rücksicht hierauf gedenken wir hier nur zweier Bestimmungsweisen, welche wie die der Potenzmittel zu Mitteln von verschiedener Ordnung führen, und darunter das arithmetische Mittel mit den Potenzmitteln gemein haben, indess sie darüber hinaus in anderm und von einander selbst verschiedenem Sinne aufsteigen. Die Einzelwerthe sollen hiebei allgemein mit a oder bei Entwickelung der Formeln mit a, b, c . . . bezeichnet werden, die Zahl derselben mit m, die Ordnung des Mittels mit n, ein Mittel von der n-ten Ordnung mit $\mathfrak{M}_n$.

1) Eine gewisse Classe hieher gehöriger Mittel, welche sich um den Namen mit den von uns so genannten Potenzmitteln streiten könnte, ist unter den Ausdruck

$$\mathfrak{M}_n = \sqrt[n]{\frac{\Sigma a^n}{m}}$$

zu bringen, wovon das arithmetische Mittel $\sqrt[1]{\frac{a+b+c \ldots}{m}}$ die erste, $\sqrt[2]{\frac{a^2+b^2+c^2 \ldots}{m}}$ die zweite Ordnung u. s. f. repräsentirt. Von einem Mittel nullter Ordnung dieser Art ist nicht zu sprechen, da $a^0 = 1$, mithin auch $\frac{\Sigma a^0}{m} = 1$, und $\sqrt[0]{1} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$ ist; 1^{∞} aber einen unbestimmten Werth zwischen 0 und ∞ repräsentirt.*) Ich wüsste nicht, welcher Gebrauch von diesen Mitteln ausser dem M_1 in Anwendung auf direct er-

*) Vrgl. Cauchy cours d'Analyse algebr. p. 69.

haltene Beobachtungsgrössen a zu machen, indess die Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen nach Gauss'schem Princip zu einer Anwendung dieser Art Mittel, unter Ersatz der a durch die Abweichungen Δ bezüglich des arithmetischen Beobachtungsmittels, führt, indem $\mathfrak{M}_2 = \sqrt[2]{\frac{\Sigma \Delta^2}{m}}$, kurz $= q$ den dazu dienenden quadratisch mittlern Fehler und $\varepsilon = \frac{\Sigma \Delta}{m}$ den mittelst der Gleichung $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, q$ nach dem Gauss'schen Fehlergesetze daraus ableitbaren einfach mittleren Fehler bedeutet, indess höhere Mittel dieser Art zur Genauigkeitsbestimmung der niedern dienen können, wie hier nicht auszuführen. Allgemein lassen sich die Fehlerfunctionen dieser Art nach Gauss'schem Fehlergesetze als Function von $\mathfrak{M}_2 = q$, darstellen, wie man in Encke's Abh. über die Meth. d. kl. Qu. im astronom. Jahrb. f. 1834 S. 293 (mit Rücksicht auf S. 280 und 289) finden kann. Hienach ist unter Ersatz der a durch Δ, des $\mathfrak{M}_2$ durch q, und Bezeichnung der Ludolf'schen Zahl mit π

$$\varepsilon = \mathfrak{M}_1 = q\sqrt{\frac{2}{\pi}} \;\Big|\; \mathfrak{M}_2^2 = q^2 \;\Big|\; \mathfrak{M}_3^3 = 2\,q^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \;\Big|\; \mathfrak{M}_4^4 = \frac{3}{2}\, q^4 \quad \text{u. s. w.}$$

und allgemein $\mathfrak{M}_n^n$ für

$$n \text{ gerade} = q^n\, 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1.3.5 \ldots (n-1)}{2.2.2 \ldots 2}$$

$$n \text{ ungerade} = q^n\, 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1.2.3 \ldots \frac{1}{2}(n-1)}{\sqrt{\pi}}$$

Aus $\mathfrak{M}_n^n$ erhält man hienach $\mathfrak{M}_n$ durch Ausziehung der n-ten Wurzel.

2) Eine zweite Art hieher gehöriger Mittel $\mathfrak{M}_n$, welche man Combinationsmittel nennen könnte, erläutert sich an folgendem Beispiele aus 4 Werthen a, b, c, d.

$$\mathfrak{M}_1 = \sqrt[1]{\frac{a+b+c+d}{4}} = \text{arithm. Mittel}$$

$$\mathfrak{M}_2 = \sqrt[2]{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

$$\mathfrak{M}_3 = \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

$$\mathfrak{M}_4 = \sqrt[4]{abcd}$$

Für $\mathfrak{M}_0$ würde man auch hier einen unbestimmten Werth erhalten. Abgesehen davon beginnt die Reihe dieser Mittel wie die vorige mit dem arithmetischen Mittel, schreitet aber nicht eben so ins Unbestimmte fort, sondern schliesst mit dem geometrischen Mittel.

Allgemein hat man zu einem Mittel n-ter Ordnung dieser Art aus m Werthen alle möglichen Combinationen ohne Wiederholung von je n Werthen zu bilden, welche sich aus den m Werthen darstellen lassen, die Summe der so erhaltenen Glieder mit der Zahl derselben, welche =

$$\frac{m(m-1)\,m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n}$$

ist, zu dividiren, und aus dem Quotienten die n-te Wurzel zu ziehen. Diess sind die Mittel, welche Scheibner in den Berichten dieser Societät 1873 p. 562 so elegant behandelt hat, worauf hier nicht näher zurückzukommen ist.

Auch von dieser Art Mittel ist mir, ausser dem arithmetischen und geometrischen Mittelwerthe, keine Verwendung bekannt. Immerhin aber ist bemerkenswerth, wie der arithmetische Mittelwerth ein Verknüpfungsglied für Mittel von so ganz verschiedenem Princip der Bestimmung bildet, als die Potenzmittelwerthe, die mit denselben um den Namen streitenden Mittelwerthe unter 1) und die Combinationsmittelwerthe unter 2) sind, so dass man, wenn man sonst keinen besondern Grund haben sollte, das eine Princip dem andern vorzuziehen, auch hierin einen Grund finden könnte, sich an das arithmetische Mittel als das allen gleich genügende zu halten.