

ABHANDLUNGEN

FÜNFZEHNTER BAND.

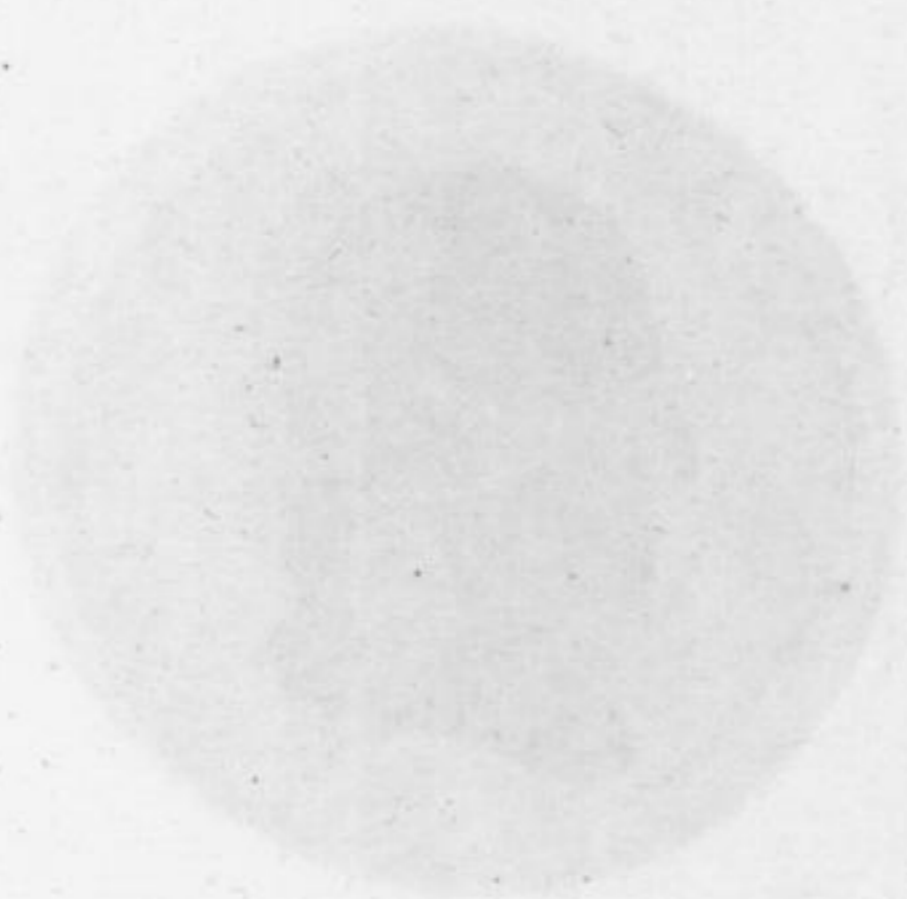
VERZÄHNDEUNGEN

ROCKENHOFER-RECHT

ARBEITSDIENSTEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE
DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN
ACADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

GESAMTVERZEICHNIS DER WISSENSCHAFTLICHEN



FÜNFTE BAND

MIT EINER NEUEN ZUSATZSEITE

LEIPZIG

BEI G. O. WOLFF

1851

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



FÜNFZEHNTER BAND.

MIT SIEBEN TAFELN.



LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1874.

ABHANDLUNGEN
DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE
DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ZEHNTER BAND.
MIT SIEBEN TAFELN.



LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

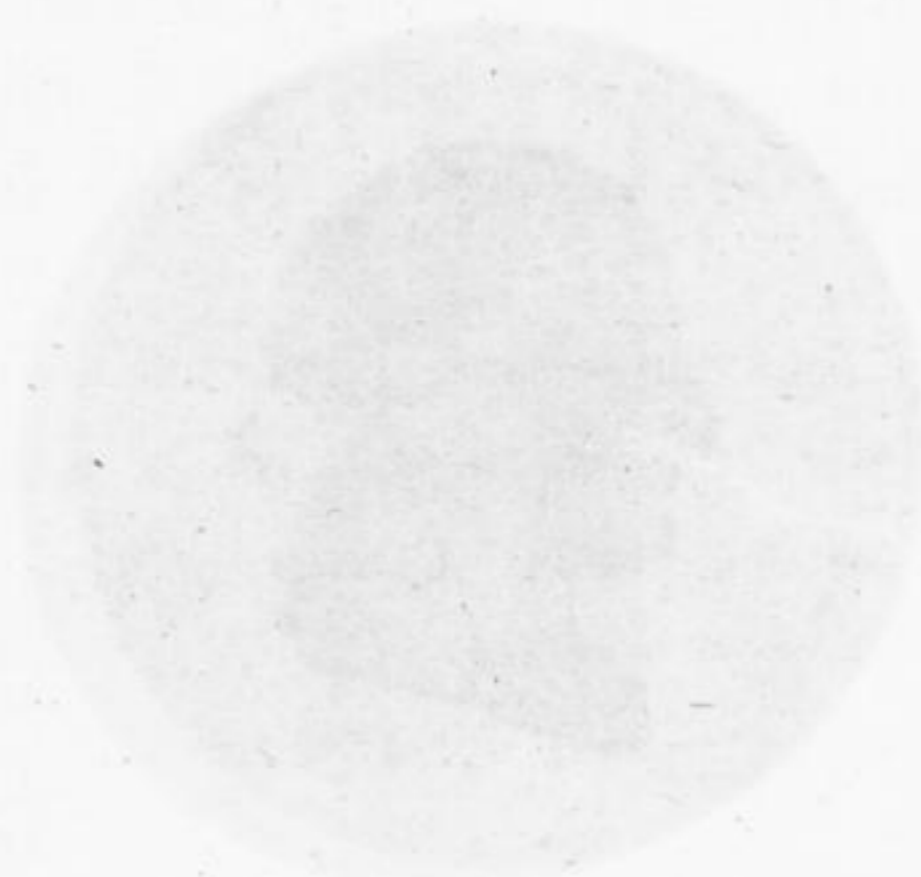
1874.

2633.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE
DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

IN FÜNF BÜCHERN



LEIPZIG
BEI G. O. F. SCHNEIDER



LEIPZIG

BEI G. O. F. SCHNEIDER

1825

INHALT.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie.	S. 1
P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. . .	- 63
C. BRUHNS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien.	- 203
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung. .	- 271
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung. .	- 343
C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze.	- 417
P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes.	- 525
P. A. HANSEN, Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge	- 669
P. A. HANSEN, Dioptrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung. .	- 693

INHALT

1	W. Werra, Die ethnographische Kartographie, insbesondere über das Prinzip der Einteilung der Länder
33	F. A. Haxer, Einweisung der Werra eines Länders durch eine biblische Anzahl von höchsten sphaerischen Ovale
503	C. Bauer, Bestimmung der Längswerte aus wahren Länge und Werra
571	W. G. Haxer, Die ethnographische Kartographie, zweite Abhandlung
571	W. G. Haxer, Die ethnographische Kartographie, dritte Abhandlung
571	E. Haxer, Über die von K. Haxer ethnographischen Kartographie ausgewählten Elemente
571	F. A. Haxer, Von der Bestimmung der Teilung der Länder
571	F. A. Haxer, Über die Bestimmung der ersten Ableitung weil der Höhe in Funktion der Länge in der der Kontinente
571	F. A. Haxer, Die ethnographische Kartographie, vierte Abhandlung



ÜBER DIE DARSTELLUNG
DER
GRADEN AUFSTEIGUNG UND ABWEICHUNG
DES MONDES
IN FUNCTION
DER LÄNGE IN DER BAHN UND DER KNOTENLÄNGE.

VON
P. A. HANSEN

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl.
Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N^o VIII.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

1874.

67411

ÜBER DIE DARSTELLUNG

DER

GRADEN ABSTREIFUNG UND ABWEICHUNG

DES MONDES

IN FUNCTION

DER LÄNGE IN DER BAHN UND DER KNOTENLÄNGE

Der Druckerei übergeben den 2. Mai 1874.

Der Abdruck vollendet den 13. Juni 1874.



LEIPZIG

BEI B. HIRSEH

1874

ÜBER DIE DARSTELLUNG

DER

GRADEN AUFSTEIGUNG UND ABWEICHUNG

DES MONDES

IN FUNCTION

DER LÄNGE IN DER BAHN UND DER KNOTENLÄNGE.

VON

P. A. HANSEN.

Eine Abkürzung des genannten Verfahrens kann man nur dadurch zu erlangen hoffen, dass man die Mondtafel so einrichtet, dass sie die grade Aufsteigung und Abweichung unmittelbar geben, damit die Auflösung des obengenannten sphärischen Dreiecks vermieden werde. — Wenn man lieber wieder von der Länge und Breite ausgehen wollte, so würde man gewiss sich keine Erleichterung

Anmerkung. Der Verfasser beabsichtigte die nachstehende, von Herausgabe der „Mondtafel“ niederzuschreibende Abhandlung, behufs ihrer Veröffentlichung, mit einer angelegentlichsten Empfehlung zu sprechen. Man hat jedoch, nach dem erfolgten Ableben des Verfassers, den unveränderten Wortlaut beibehalten zu sollen.

ÜBER DIE DARSTELLUNG

DER

GRADEN AUFSTIEGUNG UND ABWEICHUNG

DES MONDES

Der Druckerei übergeben den 2. Mai 1874.

Der Abdruck vollendet den 17. Mai 1874.

IN FUNKTION

DER LÄNGE IN DER BAHN UND DER KNOTENLÄNGE

VON

P. A. HANSEN.

Unsere bisherigen Mondtafeln geben nicht die grade Aufsteigung und Abweichung, sondern die Länge und Breite des Mondes. Um aus diesen jene zu erhalten, muss man die sphärische Trigonometrie anwenden, nemlich ein sphärisches Dreieck berechnen, in welchem die Mondlänge und Breite nebst der Schiefe der Ecliptik die gegebenen, und die grade Aufsteigung und Abweichung des Mondes die gesuchten Stücke sind. Wenngleich die Berechnung Eines solchen Dreiecks keine grosse Arbeit verursacht, so wächst dieselbe doch bedeutend an, wenn Hunderte von Mondörtern zu berechnen sind, und eine Abkürzung dieser Rechnung ist daher wünschenswerth. Sie ist um so mehr zu wünschen, weil das allgemeine Bedürfniss der Astronomie mehr auf die Erlangung der graden Aufsteigungen und Abweichungen, als auf die der Längen und Breiten gerichtet ist, und man in bei Weitem den meisten Fällen diese nur als ein bis jetzt nicht zu umgehendes Hülfsmittel zur Erlangung jener berechnet.

Eine Abkürzung des genannten Verfahrens kann man nur dadurch zu erlangen hoffen, dass man die Mondtafeln so einrichtet, dass sie die grade Aufsteigung und Abweichung unmittelbar geben, damit die Auflösung des obengenannten sphärischen Dreiecks vermieden werde. Wenn man hiebei wieder von der Länge und Breite ausgehen wollte, so würde man gewiss sich keine Erleichte-

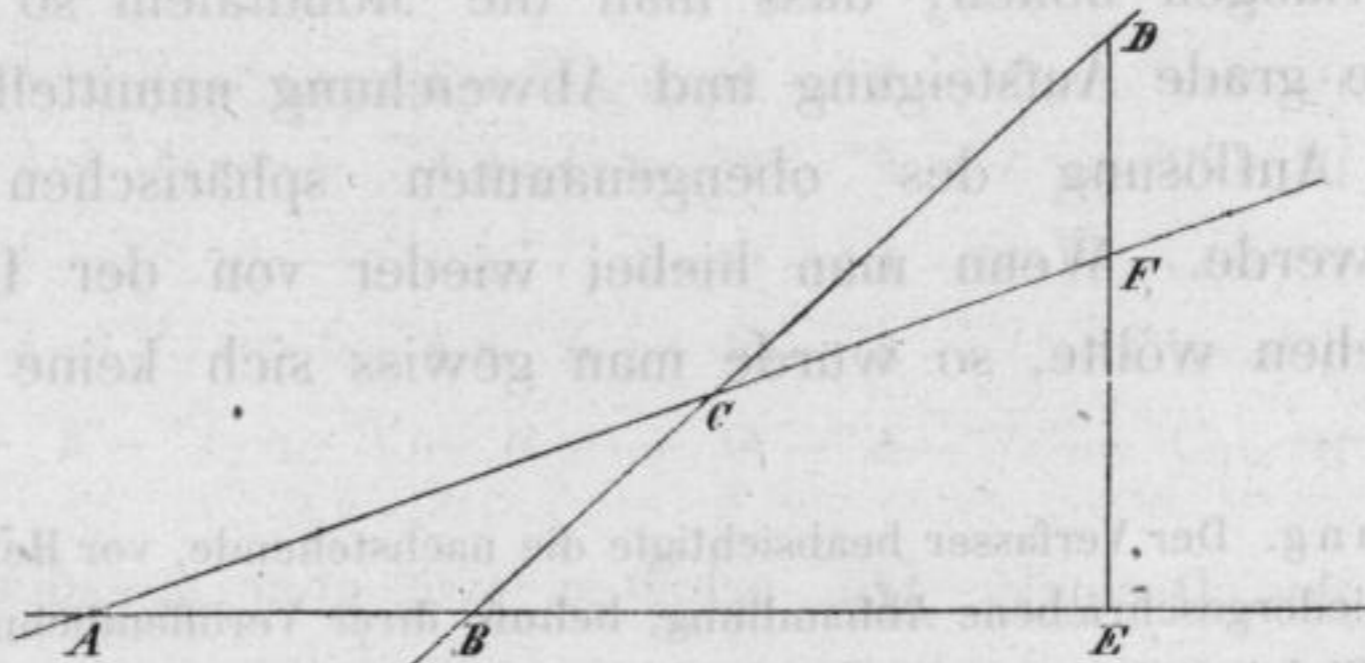
Anmerkung. Der Verfasser beabsichtigte die nachstehende, vor Herausgabe der »Mondtafeln« niedergeschriebene Abhandlung, behufs ihrer Veröffentlichung mit einer abgeänderten Einleitung zu versehen. Man hat geglaubt, nach dem erfolgten Ableben des Verfassers den unveränderten Wortlaut beibehalten zu sollen.

rung verschaffen können, aber wenn man diese hiebei gänzlich umgeht, und die Länge des Mondes in seiner Bahn als Ausgangspunkt wählt, so kann man eine Erleichterung des bisherigen Verfahrens erwarten. Es tritt nun aber beim Monde der bei den Planeten nicht vorkommende Umstand ein, dass die Bewegung der Mondknoten sehr schnell ist und die periodischen Veränderungen, welche die Lage der Mondbahn durch die störenden Kräfte erleidet, nicht unbedeutend sind. Die Mondknoten bewegen sich in ungefähr 19 Jahren um den ganzen Himmel, die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik erleidet periodische Veränderungen, die $16'$ übersteigen, und die wahre Länge der Mondknoten mit der Ecliptik ist Schwankungen unterworfen, die mehr als $2^{\circ} 40'$ betragen. Diese Umstände verursachen, dass die Aufgabe, von der hier geredet wird, mit eigenthümlichen Schwierigkeiten behaftet ist.

Vermöge der eben angeführten Umstände zerfällt die Auflösung dieser Aufgabe in zwei Theile, deren erster die Glieder in Betracht zieht, die aus der schnellen retrograden Bewegung der Mondknoten entstehen, und deren zweiter den Einfluss der periodischen Aenderungen der Lage der Mondbahn berücksichtigt. Ich werde mich hier auf die Darlegung meiner Auflösung des ersten Theils der Aufgabe beschränken, und die des zweiten Theils auf eine andere Zeit und einen anderen Ort verschieben.

1.

In der nachstehenden Figur sollen alle graden Linien grösste Kreise auf der Kugel, und zwar AE den Aequator, AF die Ecliptik und BD die Mondbahn bedeuten. Bei E soll ein rechter Winkel sein.



Nehmen wir den Durchschnittspunkt A für das Frühlingsäquinox an, dann ist CAB die Schiefe der Ecliptik, AC die Länge des aufsteigenden Mondknotens, DCF die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik. Wenn ferner D den gleichzeitigen Mondort bedeutet, dann ist DC das Argument der Breite des Mondes, $DC + CA$ seine Länge in der Bahn, AE seine grade Aufsteigung und DE seine Abweichung.

Die Bezeichnungen, die ich nun anwenden werde, sind die folgenden:

$$DC = W; \quad CB = N'' - K'' - \Theta;$$

$$AB = 360^\circ - N'' - K''; \quad AC = 360^\circ - \Theta;$$

$$CAB = J''; \quad DCF = J; \quad DBE = J'';$$

$$AE = \mathcal{R}; \quad DE = \delta.$$

Diese Bezeichnung ist der im siebenten Abschnitte meiner »Fundamenta nova investigationis etc.« eingeführten analog, von welchem Abschnitte in der That die gegenwärtige Aufgabe ein Theil der Fortsetzung ist. Die in dieser Bezeichnung angewandten Grössen besitzen die Eigenschaft, dass die periodischen, den zweiten hier zu übergehenden Theil der Auflösung bildenden Glieder leicht und sicher durch sie dargestellt werden können. Betrachten wir nun das rechtwinklige sphärische Dreieck DEB , so giebt uns die Trigonometrie folgende Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \sin (\mathcal{R} + N'' + K'') &= \cos J'' \sin (W - \Theta + N'' - K'') \\ \cos \delta \cos (\mathcal{R} + N'' + K'') &= \cos (W - \Theta + N'' - K'') \\ \sin \delta &= \sin J'' \sin (W - \Theta + N'' - K'') \end{aligned} \right\} (1)$$

wozu ich bemerke, dass $W - \Theta$ die Länge des Mondes in seiner Bahn ausdrückt. Durch Auflösung der zusammengesetzten Sinus und Cosinus verwandelt man diese Gleichungen leicht in die folgenden:

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin \mathcal{R} &= \sin W \{ \cos J'' \cos (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') + \sin (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') \} \\ &\quad + \cos W \{ \cos J'' \sin (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') - \cos (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') \} \\ \cos \delta \cos \mathcal{R} &= \sin W \{ \cos J'' \cos (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') - \sin (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') \} \\ &\quad + \cos W \{ \cos J'' \sin (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') + \cos (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') \} \\ \sin \delta &= \sin W \sin J'' \cos (N'' - K'' - \Theta) + \cos W \sin J'' \sin (N'' - K'' - \Theta) \end{aligned}$$

Vermöge des Dreiecks ABC erhalten wir aber aus der sphärischen Trigonometrie folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \cos J'' \cos (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') + \sin (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') \\ &= \cos J'' \cos J, \cos \Theta - \sin J'' \sin J, \\ \cos J'' \sin (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') - \cos (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') &= -\cos J'' \sin \Theta \\ \cos J'' \cos (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') - \sin (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') &= \cos J, \sin \Theta \\ \cos J'' \sin (N'' - K'' - \Theta) \sin (N'' + K'') + \cos (N'' - K'' - \Theta) \cos (N'' + K'') &= \cos \Theta \\ \sin J'' \cos (N'' - K'' - \Theta) &= \sin J'' \cos J, \cos \Theta + \cos J'' \sin J, \\ \sin J'' \sin (N'' - K'' - \Theta) &= -\sin J'' \sin \Theta \end{aligned}$$

womit man die Grössen J'' , N'' und K'' aus den vorstehenden Gleichungen eliminiren kann. Nachdem diess geschehen ist, und man die Producte der Sinus und Cosinus von W und Θ in linearische Sinus und Cosinus verwandelt hat, bekommt man:

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin \mathcal{R} &= \cos J'' \cos^{2\frac{1}{2}} J, \sin (W - \Theta) - \sin J'' \sin J, \sin W \\ &\quad - \cos J'' \sin^{2\frac{1}{2}} J, \sin (W + \Theta) \\ \cos \delta \cos \mathcal{R} &= \cos^{2\frac{1}{2}} J, \cos (W - \Theta) + \sin^{2\frac{1}{2}} J, \cos (W + \Theta) \\ \sin \delta &= \sin J'' \cos^{2\frac{1}{2}} J, \sin (W - \Theta) + \cos J'' \sin J, \sin W \\ &\quad - \sin J'' \sin^{2\frac{1}{2}} J, \sin (W + \Theta) \end{aligned}$$

wodurch die grade Aufsteigung und Abweichung des Mondes schon in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge dargestellt ist.

2.

Die eben gefundenen Gleichungen zeigen, dass von den drei Gruppen $\cos \delta \sin \mathcal{R}$, $\cos \delta \cos \mathcal{R}$, und $\sin \delta$ die erste und dritte aus drei und die zweite aus zwei Gliedern besteht, welche je Eine veränderliche Grösse enthalten. Diese acht Glieder liessen sich also in eben so viele Tafeln von einfachen Argumenten bringen, und wenn diess geschehen wäre, so könnte man in jedem vorliegenden Falle daraus die numerischen Werthe der genannten drei Gruppen berechnen, woraus man dann durch logarithmisch-trigonometrische Berechnung zu \mathcal{R} und δ selbst übergehen könnte. Nun kann man zwar, vermöge der numerischen Werthe von J'' und J , welche in der Natur stattfinden, die Glieder, aus denen $\sin \delta$ besteht, in drei Tafeln bringen, die, ohne unpractische Ausdehnung zu besitzen, in der Anwendung bequem werden; man kann sogar diese Tafeln so einrichten, dass man aus ihnen ohne Anwendung von trigonometrischer Rechnung δ selbst statt $\sin \delta$ erhält. Man muss zu dem Ende

die Coefficienten $\sin J''$, $\cos^{2\frac{1}{2}} J$, $\cos J''$, $\sin J$, und $\sin J''$, $\sin^{2\frac{1}{2}} J$, in den Tafeln nicht in Theilen des Radius, sondern in Theilen des Umfanges des Kreises (in Graden, Minuten und Secunden) ausdrücken und eine Tafel hinzufügen, die den Unterschied zwischen dem Bogen und dem ihm zukommenden Sinus giebt. Die beiden Gleichungen für $\cos \delta \sin R$ und $\cos \delta \cos R$ lassen sich aber nicht so bequem in Tafeln bringen, da die beiden Glieder $\cos J'' \cos^{2\frac{1}{2}} J$, $\sin(W - \Theta)$ und $\cos^{2\frac{1}{2}} J$, $\cos(W - \Theta)$ fast von -1 bis $+1$ variiren und mit sieben Decimalstellen angesetzt werden müssten; um hier bequem anzuwendende Tafeln zu erhalten, müsste man ihnen eine bedeutend grosse Ausdehnung geben. Es kommt hier noch hinzu, dass die Berücksichtigung der von der Veränderung der Mondbahn abhängigen periodischen Glieder in diesen Gleichungen sich weitläufiger herausstellt, als sie in der That ist. Die Berücksichtigung dieser Glieder in der Gleichung für $\sin \delta$ ist dagegen einfach. Durch die Entwicklung von R in eine unendliche Reihe aus den beiden ersten in Rede stehenden Gleichungen erlangt man freilich Glieder, die sich alle in nicht zu grosse und doch bequeme Tafeln bringen lassen; es entstehen aber dadurch der Glieder und also auch der erforderlichen Tafeln zu viele, als dass daraus ein namhafter Vortheil erwüchse. Um diess klar darzuthun, werde ich die bezeichnete Reihenentwicklung ausführen.

3.

Sei c die Grundzahl der hyperbolischen Logarithmen und $\rho = \sqrt{-1}$, dann ist bekanntlich, wenn z irgend einen reellen Kreisbogen bezeichnet,

$$2 \cos z = c^{\rho z} + c^{-\rho z}; \quad 2\rho \sin z = c^{\rho z} - c^{-\rho z}.$$

Wenden wir diese allgemeinen Gleichungen auf die obigen Werthe von $\cos \delta \sin R$ und $\cos \delta \cos R$ an, so ergibt sich:

$$\cos \delta (c^{\rho R} - c^{-\rho R}) = \cos J'' \cos^{2\frac{1}{2}} J, (c^{\rho(W-\Theta)} - c^{-\rho(W-\Theta)}) \\ - \sin J'' \sin J, (c^{\rho W} - c^{-\rho W}) - \cos J'' \sin^{2\frac{1}{2}} J, (c^{\rho(W+\Theta)} - c^{-\rho(W+\Theta)})$$

$$\cos \delta (c^{\rho R} + c^{-\rho R}) = \cos^{2\frac{1}{2}} J, (c^{\rho(W-\Theta)} + c^{-\rho(W-\Theta)}) \\ + \sin^{2\frac{1}{2}} J, (c^{\rho(W+\Theta)} + c^{-\rho(W+\Theta)})$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, multiplicirt ihre Summe mit

$$\frac{c^{-\varrho(W-\Theta)}}{(1 + \cos J''_n) \cos^2 \frac{1}{2} J'_n}, \text{ und setzt zur Abkürzung}$$

$$\eta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} J'_n, \quad \lambda = \operatorname{tg} \frac{1}{2} J_n,$$

so bekommt man:

$$\frac{2 \cos \delta c^{\varrho(R-W+\Theta)}}{(1 + \cos J''_n) \cos^2 \frac{1}{2} J'_n} = \\ = 1 + \eta^2 c^{-2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{-\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{-2\varrho W} + \eta^2 \lambda^2 c^{2\varrho\Theta}$$

und wenn man hierin $-\varrho$ für ϱ schreibt

$$\frac{2 \cos \delta c^{-\varrho(R-W+\Theta)}}{(1 + \cos J''_n) \cos^2 \frac{1}{2} J'_n} = \\ = 1 + \eta^2 c^{2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{-\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{2\varrho W} + \eta^2 \lambda^2 c^{-2\varrho\Theta}$$

Dividirt man die erste durch die zweite, und nimmt von jeder Seite der Gleichung den hyperbolischen Logarithmus, so entsteht

$$2\varrho(R-W+\Theta) = \\ = \log(1 + \eta^2 c^{-2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{-\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{-2\varrho W} + \eta^2 \lambda^2 c^{2\varrho\Theta}) \\ - \log(1 + \eta^2 c^{2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{-\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{2\varrho W} + \eta^2 \lambda^2 c^{-2\varrho\Theta})$$

Entwickelt man nun auf bekannte Art die beiden hier vorkommenden Logarithmen in unendliche Reihen, und geht hierauf von den imaginären Grössen zu den reellen Sinus über, so bekommt man folgende Reihe, die ich so weit fortgesetzt habe, dass man jeden Coefficienten bis auf 0",01 genau haben kann:

$$R = W - \Theta - 2\eta\lambda \sin \Theta - \eta^2 \lambda^2 \sin 2\Theta - \frac{2}{3} \eta^3 \lambda^3 \sin 3\Theta - \frac{1}{2} \eta^4 \lambda^4 \sin 4\Theta - \text{etc.} \\ - \lambda^2 \sin 2W - (2\eta\lambda + 2\eta\lambda^3) \sin(2W - \Theta) - (\eta^2 + 4\eta^2 \lambda^2 + 3\eta^2 \lambda^4) \sin(2W - 2\Theta) \\ - (2\eta^3 \lambda + 6\eta^3 \lambda^3 + 8\eta^3 \lambda^5) \sin(2W - 3\Theta) - (3\eta^4 \lambda^2 + 16\eta^4 \lambda^4) \sin(2W - 4\Theta) \\ - 4\eta^5 \lambda^3 \sin(2W - 5\Theta) - \text{etc.} \\ + \frac{1}{2} \lambda^4 \sin 4W + (2\eta\lambda^3 + 2\eta\lambda^5) \sin(4W - \Theta) + (3\eta^2 \lambda^2 + 8\eta^2 \lambda^4) \sin(4W - 2\Theta) \\ + (2\eta^3 \lambda + 12\eta^3 \lambda^3 + 24\eta^3 \lambda^5) \sin(4W - 3\Theta) + (\frac{1}{2} \eta^4 + 8\eta^4 \lambda^2 + 36\eta^4 \lambda^4) \sin(4W - 4\Theta) \\ + (2\eta^5 \lambda + 20\eta^5 \lambda^3) \sin(4W - 5\Theta) + 5\eta^6 \lambda^2 \sin(4W - 6\Theta) + 16\eta^7 \lambda^3 \sin(4W - 7\Theta) \\ + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \eta \lambda^5 \sin (6 W - \Theta) - 5 \eta^2 \lambda^4 \sin (6 W - 2 \Theta) - \frac{20}{3} \eta^3 \lambda^3 \sin (6 W - 3 \Theta) \\
& - (5 \eta^4 \lambda^2 + 40 \eta^4 \lambda^4) \sin (6 W - 4 \Theta) - (2 \eta^5 \lambda + 30 \eta^5 \lambda^3) \sin (6 W - 5 \Theta) \\
& - (\frac{1}{3} \eta^6 + 12 \eta^6 \lambda^2 + 120 \eta^6 \lambda^4) \sin (6 W - 6 \Theta) - (2 \eta^7 \lambda + 48 \eta^7 \lambda^3) \sin (6 W - 7 \Theta) \\
& - 8 \eta^8 \lambda^2 \sin (6 W - 8 \Theta) - \text{etc.} \\
& + \frac{35}{2} \eta^4 \lambda^4 \sin (8 W - 4 \Theta) + 14 \eta^5 \lambda^3 \sin (8 W - 5 \Theta) \\
& + (7 \eta^6 \lambda^2 + 112 \eta^6 \lambda^4) \sin (8 W - 6 \Theta) + (2 \eta^7 \lambda + 56 \eta^7 \lambda^3) \sin (8 W - 7 \Theta) \\
& + (\frac{1}{4} \eta^8 + 16 \eta^8 \lambda^2) \sin (8 W - 8 \Theta) + 2 \eta^9 \lambda \sin (8 W - 9 \Theta) + \text{etc.} \\
& - 24 \eta^7 \lambda^3 \sin (10 W - 7 \Theta) - 9 \eta^8 \lambda^2 \sin (10 W - 8 \Theta) - 2 \eta^9 \lambda \sin (10 W - 9 \Theta) \\
& - \frac{1}{5} \eta^{10} \sin (10 W - 10 \Theta) - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Nimmt man nun

$$J'' = 23^\circ 27' 54'' 80, \quad J, = 5^\circ 8' 48''$$

an und substituirt diese Zahlenwerthe, so erhält man:

$$\begin{aligned}
R = W - \Theta - 1^\circ 4' 10'',55 \sin \Theta & \quad - 0'',02 \sin (6 W - 6 \Theta) \\
& - 17,97 \sin 2 \Theta & \quad - 0,18 \sin (6 W - 2 \Theta) \\
& - 0,11 \sin 3 \Theta & \quad - 1,12 \sin (6 W - 3 \Theta) \\
& - 6' 56,64 \sin 2 W & \quad - 3,94 \sin (6 W - 4 \Theta) \\
& - 1^\circ 4' 18,33 \sin (2 W - \Theta) & \quad - 7,38 \sin (6 W - 5 \Theta) \\
& - 2^\circ 29' 28,71 \sin (2 W - 2 \Theta) & \quad - 5,93 \sin (6 W - 6 \Theta) \\
& - 2' 47,08 \sin (2 W - 3 \Theta) & \quad - 0,32 \sin (6 W - 7 \Theta) \\
& - 2,35 \sin (2 W - 4 \Theta) & \quad - 0,01 \sin (6 W - 8 \Theta) \\
& - 0,03 \sin (2 W - 5 \Theta) & \quad + 0,03 \sin (8 W - 4 \Theta) \\
& + 0,42 \sin 4 W & \quad + 0,10 \sin (8 W - 5 \Theta) \\
& + 7,80 \sin (4 W - \Theta) & \quad + 0,24 \sin (8 W - 6 \Theta) \\
& + 54,20 \sin (4 W - 2 \Theta) & \quad + 0,33 \sin (8 W - 7 \Theta) \\
& + 2' 48,10 \sin (4 W - 3 \Theta) & \quad + 0,20 \sin (8 W - 8 \Theta) \\
& + 3' 18,13 \sin (4 W - 4 \Theta) & \quad + 0,01 \sin (8 W - 9 \Theta) \\
& + 7,30 \sin (4 W - 5 \Theta) & \quad - 0,01 \sin (10 W - 7 \Theta) \\
& + 0,17 \sin (4 W - 6 \Theta) & \quad - 0,01 \sin (10 W - 8 \Theta) \\
& & \quad - 0,01 \sin (10 W - 9 \Theta) \\
& & \quad - 0,01 \sin (10 W - 10 \Theta)
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Glieder dieses Ausdrucks der Reduction der Mondlänge auf den Aequator ist 34; da sie bloss von den zwei Argumenten W und Θ , oder $W - \Theta$ und Θ abhängen, so wäre es nicht unmöglich, sie alle in Eine Tafel mit diesen zwei Argumenten zu vereinigen. Aber eine solche Tafel würde eine übermässig grosse

Ausdehnung bekommen müssen, um practisch werden zu können. Diese Ausdehnung würde so gross sein, dass sie selbst ein Hinderniss für ihre bequeme Anwendung bilden würde. Man muss daher jedenfalls den vorstehenden Ausdruck, wenn man ihn anwenden will, in Tafeln von einfachen Argumenten redigiren. Solcher erfordert er aber, wenn man keine Glieder übergehen will, nicht weniger wie 23, und diese Anzahl würde sich durch Uebergehung der kleinen Glieder nur wenig vermindern. Es wird daher jedenfalls durch Anwendung dieses Ausdrucks die unmittelbare Berechnung der graden Aufsteigung des Mondes aus den Mondtafeln mühsam und zeitraubend, und man würde sie aufgeben müssen, wenn es unmöglich wäre, andere und einfachere Ausdrücke dafür zu finden.

4.

Um einen einfacheren Ausdruck wie den vorhergehenden zu finden, ist es nothwendig, die beiden Argumente oder veränderlichen Grössen, von welchen er abhängt, möglichst von einander abzusondern und den Ausdruck in Factoren zu zerlegen, von denen der eine nur die eine, und der andere nur die andere, oder vielmehr überhaupt auch nur Eine veränderliche Grösse enthält. Die Transformationen, durch welche ich diess bewirkt habe, werde ich im Folgenden zuerst im Allgemeinen angeben, und dann speciell auf die vorliegende Aufgabe anwenden.

Seien in einem beliebigen rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $v - \sigma$ die Hypotenuse, $l - \theta$ und b die Katheten, so wie i der der Seite b gegenüberliegende Winkel. Dann ist allgemein:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos b \sin (l - \theta) = \cos i \sin (v - \sigma) \\ \cos b \cos (l - \theta) = \cos (v - \sigma) \\ \sin b = \sin i \sin (v - \sigma) \end{array} \right.$$

Diese Formeln habe ich in folgende umgewandelt:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos b \sin (l - II) = \cos i_0 \sin (v - \theta_0) - s_0 \left\{ \operatorname{tg} i_0 + \frac{q_0}{k \cos i_0} \right\} \\ \cos b \cos (l - II) = \cos (v - \theta_0) + s_0 \frac{p}{k} \\ \sin b = \sin i_0 \sin (v - \theta_0) + s_0 \end{array} \right.$$

wo

$$\left. \begin{aligned}
 p &= \sin i \sin (\sigma - \theta_0) \\
 q_0 &= \sin i \cos (\sigma - \theta_0) - \sin i_0 \\
 k &= \cos i_0 (\cos i + \cos i_0) - q_0 \sin i_0 \\
 s_0 &= q_0 \sin (v - \theta_0) - p \cos (v - \theta_0) \\
 \sin (\theta - II) &= \frac{\cos i + \cos i_0}{k} \sin (\sigma - \theta_0) \\
 \cos (\theta - II) &= \frac{(1 + \cos i \cos i_0) \cos (\sigma - \theta_0) - \sin i \sin i_0}{k}
 \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

i_0 und θ_0 hingegen durchaus willkürliche Grössen sind, die man nach Belieben bestimmen kann.

Die Ableitung dieser Gleichungen übergehe ich hier, weil ich sie bereits an einem anderen Orte gegeben habe; man kann sie indess auch ohne diese verificiren. Wenn man nemlich die Ausdrücke (4) in (3) substituirt und gehörig reducirt, so wird man finden, dass i_0 und θ_0 von selbst verschwinden und die Gleichungen (2) daraus hervorgehen, woraus die Richtigkeit der (3) und (4) schon folgt. Ich füge hinzu, dass die hier eingeführten Grössen i_0, θ_0, II , etc. sich auf sehr einfache Weise geometrisch construiren lassen.

Um eine Anwendung der Gleichungen (3) anzudeuten, seien i und θ die mit der Zeit veränderliche Neigung und Länge des aufsteigenden Knotens irgend eines Himmelskörpers zum Aequator, σ die Entfernung des in der Bahn gewählten Anfangspunkts der Längen von diesem Knoten, v die Länge des Himmelskörpers in seiner Bahn, dann sind l und b seine grade Aufsteigung und Abweichung. Wählt man nun z. B. für i_0 und θ_0 die Neigung und Knotenlänge, die in irgend einem bestimmten Zeitpunkt stattfand, so sind s_0, p, q_0 und II kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte, die die Lage der Bahn des Himmelskörpers im Raum zu verändern streben. Diese Glieder erscheinen in den Gleichungen (3) von den Hauptgliedern abgesondert, und können, da sie so einfach sind, leicht entweder in der endlichen Form, in welcher sie daselbst vorkommen, oder in sehr stark convergirende Reihen aufgelöst, auf die einfachste Weise berücksichtigt werden. In den Fällen, wo in Bezug auf die Zeit $\delta\theta = \frac{\delta\sigma}{\cos i}$ ist, nehmen die obigen Ausdrücke für II eine noch einfachere Form an, und gehen in folgenden über:

$$II = \int \frac{q_0 \delta p - p \delta q_0}{k \cos i}$$

Ich kann diess jedoch hier nur beiläufig erwähnen, denn die Anwendung, die ich im Folgenden von den aufgestellten Gleichungen machen werde, ist eine ganz andere.

5.

Entwickeln wir durch die beiden ersten Gleichungen (3) den Ausdruck des Bogens l in eine unendliche Reihe. Setzen wir

$$(5) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{k} = A \sin w_0 \\ \operatorname{tg} i_0 + \frac{q_0}{k \cos i_0} = A \cos w_0 \end{array} \right.$$

dann gehen die genannten Gleichungen über in:

$$\cos b \sin (l - II) = \cos i_0 \sin (v - \theta_0) - s_0 A \cos w_0$$

$$\cos b \cos (l - II) = \cos (v - \theta_0) + s_0 A \sin w_0$$

und wenn wir die imaginären Exponentialfunctionen einführen, in

$$\cos b (c^{\rho(l-II)} - c^{-\rho(l-II)}) = \cos i_0 (c^{\rho(v-\theta_0)} - c^{-\rho(v-\theta_0)}) - s_0 A (c^{\rho w_0} + c^{-\rho w_0})$$

$$\cos b (c^{\rho(l-II)} + c^{-\rho(l-II)}) = c^{\rho(v-\theta_0)} + c^{-\rho(v-\theta_0)} - \rho s_0 A (c^{\rho w_0} - c^{-\rho w_0})$$

Durch Addition und Division mit $(1 + \cos i_0) c^{\rho(v-\theta_0)}$ ergibt sich hieraus:

$$\frac{2 \cos b}{1 + \cos i_0} c^{\rho(l-II-v+\theta_0)} = 1 + \varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)} - \rho \varkappa s_0 c^{-\rho(v-\theta_0-w_0)}$$

wo

$$(6) \dots \dots \dots \varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} i_0, \quad \varkappa = \frac{2A}{1 + \cos i_0}$$

Setzt man in dieser Gleichung $-\rho$ für ρ , so entsteht die folgende analoge

$$\frac{2 \cos b}{1 + \cos i_0} c^{-\rho(l-II-v+\theta_0)} = 1 + \varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)} + \rho \varkappa s_0 c^{\rho(v-\theta_0-w_0)}$$

Dividirt man jene durch diese und nimmt die hyperbolischen Logarithmen, so erhält man

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} 2\rho(l-II-v+\theta_0) = \log (1 + \varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)} - \rho \varkappa s_0 c^{-\rho(v-\theta_0-w_0)}) \\ \quad - \log (1 + \varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)} + \rho \varkappa s_0 c^{\rho(v-\theta_0-w_0)}) \end{array} \right.$$

Lösen wir nun die Logarithmen in unendliche Reihen auf, und gehen von dem Imaginären zu dem Reellen über, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
 l = & v - \theta_0 + II - \varepsilon \sin 2(v - \theta_0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin 4(v - \theta_0) - \frac{1}{3} \varepsilon^3 \sin 6(v - \theta_0) \\
 & + \frac{1}{4} \varepsilon^4 \sin 8(v - \theta_0) \mp \text{etc.} \\
 - \varkappa s_0 \{ & \cos(v - \theta_0 - w_0) - \frac{2}{3} \varepsilon \cos(3v - 3\theta_0 - w_0) + \frac{2}{3} \varepsilon^2 \cos(5v - 5\theta_0 - w_0) \\
 & - \frac{1}{4} \varepsilon^3 \cos(7v - 7\theta_0 - w_0) \pm \text{etc.} \} \\
 - \varkappa^2 s_0^2 \{ & \frac{1}{2} \sin(2v - 2\theta_0 - 2w_0) - \frac{2}{3} \varepsilon \sin(4v - 4\theta_0 - 2w_0) + \frac{5}{4} \varepsilon^2 \sin(6v - 6\theta_0 - 2w_0) \\
 & - \frac{10}{5} \varepsilon^3 \sin(8v - 8\theta_0 - 2w_0) \pm \text{etc.} \} \\
 + \varkappa^3 s_0^3 \{ & \frac{1}{3} \cos(3v - 3\theta_0 - 3w_0) - \frac{1}{4} \varepsilon \cos(5v - 5\theta_0 - 3w_0) + \frac{10}{5} \varepsilon^2 \cos(7v - 7\theta_0 - 3w_0) \\
 & - \frac{20}{6} \varepsilon^3 \cos(9v - 9\theta_0 - 3w_0) \pm \text{etc.} \} \\
 + \varkappa^4 s_0^4 \{ & \frac{1}{4} \sin(4v - 4\theta_0 - 4w_0) - \frac{5}{8} \varepsilon \sin(6v - 6\theta_0 - 4w_0) + \frac{15}{8} \varepsilon^2 \cos(8v - 8\theta_0 - 4w_0) \\
 & - \frac{35}{7} \varepsilon^3 \sin(10v - 10\theta_0 - 4w_0) \pm \text{etc.} \} \\
 & \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Diese Reihen schreiten nach so einfachen Gesetzen fort, dass ihre beliebige Fortsetzung nur die Mühe des Hinschreibens kostet. Ueber das Gesetz des Fortschreitens der Bögen unter dem Sinus- und Cosinuszeichen, der Nenner und der algebraischen Vorzeichen braucht hier Nichts gesagt zu werden; über die numerischen Zähler ist bloss zu bemerken, dass zwischen je drei derselben, die in irgend zwei aufeinanderfolgenden Reihen folgende Stellung gegeneinander einnehmen:

$$\begin{matrix}
 & b & a & c \\
 & & & \\
 & & &
 \end{matrix}$$

wenn man von ihren Vorzeichen absieht, die Gleichung

$$c = a + b$$

stattfindet, durch welche man sie fortsetzen kann, so weit man will.

6.

Man kann die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\varkappa s_0$ auch durch endliche Ausdrücke geben. Man gelangt dahin, wenn man die Gleichung (7) wie folgt umstellt:

$$\begin{aligned}
 2\varrho(l - II - v + \theta_0) = & \log(1 + \varepsilon c^{-2\varrho(v - \theta_0)}) - \log(1 + \varepsilon c^{2\varrho(v - \theta_0)}) \\
 & + \log\left(1 - \frac{\varrho \varkappa s_0 c^{-\varrho(v - \theta_0 - w_0)}}{1 + \varepsilon c^{-2\varrho(v - \theta_0)}}\right) - \log\left(1 + \frac{\varrho \varkappa s_0 c^{\varrho(v - \theta_0 - w_0)}}{1 + \varepsilon c^{2\varrho(v - \theta_0)}}\right)
 \end{aligned}$$

Löst man die beiden letzten Logarithmen in unendliche Reihen auf, so ergibt sich zuerst

$$\begin{aligned}
 2\rho(l-II-v+\theta_0) &= \log(1+\varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)}) - \log(1+\varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)}) \\
 &- \rho \varkappa s_0 \left\{ \frac{c^{\rho(v-\theta_0-w_0)}}{1+\varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)}} + \frac{c^{-\rho(v-\theta_0-w_0)}}{1+\varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)}} \right\} \\
 &- \frac{1}{2} \varkappa^2 s_0^2 \left\{ \frac{c^{2\rho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)})^2} - \frac{c^{-2\rho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)})^2} \right\} \\
 &+ \frac{1}{3} \rho \varkappa^3 s_0^3 \left\{ \frac{c^{3\rho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)})^3} + \frac{c^{-3\rho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)})^3} \right\} \\
 &+ \frac{1}{4} \varkappa^4 s_0^4 \left\{ \frac{c^{4\rho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)})^4} - \frac{c^{-4\rho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)})^4} \right\}
 \end{aligned}$$

Wenn man hier die beiden Glieder eines jeden der Coefficienten von $\varkappa s_0$, $\varkappa^2 s_0^2$, etc. auf gleichen Nenner bringt, so giebt sich ihre Transformation in Sinus und Cosinus sogleich zu erkennen. Die beiden Logarithmen, die in diesem Ausdrucke vorkommen, verwandelt man durch folgende Betrachtungen in einen Kreisbogen.

Seien allgemein a , b , d , e irgend welche reelle Grössen, zwischen denen die Gleichung stattfindet

$$\log(a+\rho b) = d + \rho e$$

wo wie vorher $\rho = \sqrt{-1}$ ist. Geht man zu den Exponentialfunctionen über, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$a + \rho b = c^{d+\rho e} = c^d (\cos e + \rho \sin e)$$

und da diese Gleichung identisch sein muss, so folgt daraus, dass

$$a = c^d \cos e, \quad b = c^d \sin e$$

mithin

$$a^2 + b^2 = c^{2d}, \quad \text{oder } d = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2), \quad \text{und } e = \text{arc tg } \frac{b}{a}$$

Wir erhalten also identisch

$$\log(a+\rho b) = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) + \rho \text{arc tg } \frac{b}{a}$$

und ebenso bekommen wir

$$\log(a-\rho b) = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) - \rho \text{arc tg } \frac{b}{a}$$

Wenden wir diesen Satz auf die obige Gleichung an, so ist

$$\begin{aligned}
 \log(a-\rho b) &= \log(1+\varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)}) \\
 &= \log(1+\varepsilon \cos 2(v-\theta_0) - \rho \varepsilon \sin 2(v-\theta_0))
 \end{aligned}$$

also

$$a = 1 + \varepsilon \cos 2(v - \theta_0), \quad b = \varepsilon \sin 2(v - \theta_0),$$

folglich

$$\log(1 + \varepsilon c^{-2\rho(v-\theta_0)}) - \log(1 + \varepsilon c^{2\rho(v-\theta_0)}) = -2\rho \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sin 2(v - \theta_0)}{1 + \varepsilon \cos 2(v - \theta_0)}$$

Die obige Gleichung geht daher in folgende über:

$$\begin{aligned} l = v + II - \theta_0 - \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sin 2(v - \theta_0)}{1 + \varepsilon \cos 2(v - \theta_0)} \\ - \varkappa s_0 \frac{\cos(v - \theta_0 - w_0) + \varepsilon \cos(v - \theta_0 + w_0)}{1 + 2\varepsilon \cos 2(v - \theta_0) + \varepsilon^2} \\ - \varkappa^2 s_0^2 \frac{\sin 2(v - \theta_0 - w_0) - 2\varepsilon \sin 2w_0 - \varepsilon^2 \sin 2(v - \theta_0 + w_0)}{2(1 + 2\varepsilon \cos 2(v - \theta_0) + \varepsilon^2)^2} \\ + \varkappa^3 s_0^3 \frac{\cos 3(v - \theta_0 - w_0) + 3\varepsilon \cos(v - \theta_0 - 3w_0) + 3\varepsilon^2 \cos(v - \theta_0 + 3w_0) + \varepsilon^3 \cos 3(v - \theta_0 + w_0)}{3(1 + 2\varepsilon \cos 2(v - \theta_0) + \varepsilon^2)^3} \\ + \varkappa^4 s_0^4 \frac{\sin 4(v - \theta_0 - w_0) + 4\varepsilon(2v - 2\theta_0 - 4w_0) - 6\varepsilon^2 \sin 4w_0 - 4\varepsilon^3 \sin(2v - 2\theta_0 + 4w_0) - \varepsilon^4 \sin 4(v - \theta_0 + w_0)}{4(1 + 2\varepsilon \cos 2(v - \theta_0) + \varepsilon^2)^4} \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

wo das Gesetz des Fortganges ebenfalls deutlich zu erkennen ist. Zu bemerken ist ausserdem, dass zufolge der Gleichungen (3) und (6) der Artt. 4 und 5.

$$1 + 2\varepsilon \cos 2(v - \theta_0) + \varepsilon^2 = (1 + \varepsilon)^2 \cos^2 b_0 = (1 + \varepsilon)^2 (1 - \sin^2 i_0 \sin^2(v - \theta_0))$$

7.

Man kann auch die unendliche Reihe des vorstehenden Ausdrucks von l in einen durch seine Tangente gegebenen Kreisbogen verwandeln. Setzen wir

$$\varepsilon' c^{\rho(\mu - w_0)} = \frac{c^{\rho(v - \theta_0 - w_0)}}{1 + \varepsilon c^{2\rho(v - \theta_0)}}$$

und substituiren diesen Ausdruck in die erste Gleichung des vor. Art., so wird:

$$\begin{aligned} 2\rho(l - II - v + \theta_0) = \log(1 + \varepsilon c^{-2\rho(v - \theta_0)}) - \log(1 + \varepsilon c^{2\rho(v - \theta_0)}) \\ + \log(1 - \rho \varkappa s_0 \varepsilon' c^{-\rho(\mu - w_0)}) - \log(1 + \rho \varkappa s_0 \varepsilon' c^{\rho(\mu - w_0)}) \end{aligned}$$

woraus durch den im vor. Art. entwickelten Satz sich ergibt

$$l = v - \theta_0 + II - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \sin 2(v - \theta_0)}{1 + \varepsilon \cos 2(v - \theta_0)} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varkappa s_0 \varepsilon' \cos(\mu - w_0)}{1 - \varkappa s_0 \varepsilon' \sin(\mu - w_0)}$$

Die obige Gleichung für $\varepsilon' c^{\rho(\mu - w_0)}$ nebst der reciproken, die aus der Verwandlung von ρ in $-\rho$ folgt, giebt aber

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2(v - \theta_0)}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon'} \sin(\mu - w_0) = \sin(v - \theta_0 - w_0) - \varepsilon \sin(v - \theta_0 + w_0)$$

$$\frac{1}{\varepsilon'} \cos(\mu - w_0) = \cos(v - \theta_0 - w_0) + \varepsilon \cos(v - \theta_0 + w_0)$$

Aus diesen beiden Formeln zieht man:

$$\operatorname{tg}(\mu - v + \theta_0) = -\frac{\varepsilon \sin 2(v - \theta_0)}{1 + \varepsilon \cos 2(v - \theta_0)}$$

es ist daher

$$\mu = v - \theta_0 - \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sin 2(v - \theta_0)}{1 + \varepsilon \cos 2(v - \theta_0)}$$

$$l = \mu + \Pi - \operatorname{arctg} \frac{s_0 \varepsilon' \cos(\mu - w_0)}{1 - s_0 \varepsilon' \sin(\mu - w_0)}$$

8.

Wenden wir nun die vorstehenden Entwicklungen auf den Mond an. Hierbei ist zuerst zu bemerken, dass die Bedeutung der Grössen i , θ , σ , v , l , b durch die Vergleichung der Gleichungen (2) mit den Gleichungen (1) ermittelt werden muss. Diese Vergleichung zeigt, dass

$$i = J''$$

$$\theta = -N'' - K''$$

$$\sigma = -N'' + K''$$

$$v = W - \Theta$$

$$l = \mathcal{R}$$

$$b = \delta$$

ist. Die Grössen i_0 und θ_0 können nun nach Belieben bestimmt werden, und je nachdem man sie so oder anders bestimmt, geben die vorstehenden Reihenentwicklungen verschiedenartige Ausdrücke für die Reduction der Mondlänge in seiner Bahn auf den Aequator. Die zweckmässigste Bestimmung dieser beiden Grössen ist aber jedenfalls die, wodurch die genannten Reihenentwicklungen die Form annehmen, welche die Anwendung derselben am einfachsten macht und wodurch zugleich die Trennung der beiden veränderlichen Grössen bewirkt wird.

Zu dem Ende setze ich zuerst

$$\theta_0 = -N'' + K''$$

Durch diese Annahme wird $\sigma = \theta_0$, und die Gleichungen (4) geben daher

$$p = 0$$

$$q_0 = \sin J'' - \sin i_0$$

$$s_0 = (\sin J'' - \sin i_0) \sin (W - \Theta + N'' - K'')$$

$$k = 1 + \cos(J'' + i_0)$$

$$H = \theta = -N'' - K''$$

$$H - \theta_0 = -2K''$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) ergibt sich ferner

$$w_0 = 0$$

$$A = \operatorname{tg} i_0 + \frac{\sin J'' - \sin i_0}{k \cos i_0} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(J'' + i_0)$$

$$z = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(J'' + i_0)}{\cos^2 \frac{1}{2} i_0}$$

und hiemit

$$s_0 z = \frac{\cos i_0 - \cos J''}{\cos^2 \frac{1}{2} i_0} \sin (W - \Theta + N'' - K'')$$

Schreiben wir nun

$$\eta = \frac{\cos i_0 - \cos J''}{\cos^2 \frac{1}{2} i_0} \frac{1}{\alpha}$$

$$A = -\alpha \sin V \left\{ \cos V - \frac{2}{2} \varepsilon \cos 3V + \frac{3}{3} \varepsilon^2 \cos 5V \mp \text{etc.} \right\}$$

$$B = -\alpha^2 \sin^2 V \left\{ \frac{4}{2} \sin 2V - \frac{3}{3} \varepsilon \sin 4V + \frac{6}{4} \varepsilon^2 \sin 6V \mp \text{etc.} \right\}$$

$$C = \alpha^3 \sin^3 V \left\{ \frac{4}{3} \cos 3V - \frac{4}{4} \varepsilon \cos 5V + \frac{10}{5} \varepsilon^2 \cos 7V \mp \text{etc.} \right\}$$

$$D = \alpha^4 \sin^4 V \left\{ \frac{4}{4} \sin 4V - \frac{5}{5} \varepsilon \sin 6V + \frac{15}{6} \varepsilon^2 \sin 8V \mp \text{etc.} \right\}$$

etc. etc.

oder in endlicher Form

$$A = -\alpha \sin V \frac{(1 + \varepsilon) \cos V}{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V}$$

$$B = -\alpha^2 \sin^2 V \frac{(1 - \varepsilon^2) \sin 2V}{2(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V)^2}$$

$$C = \alpha^3 \sin^3 V \frac{(1 + \varepsilon^3) \cos 3V + 3\varepsilon(1 + \varepsilon) \cos V}{3(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V)^3}$$

$$D = \alpha^4 \sin^4 V \frac{(1 - \varepsilon^4) \sin 4V + 4\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \sin 2V}{4(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V)^4}$$

etc. etc.

..... (8)

wo $V = W - \Theta + N'' - K''$, $\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} i_0$

so erhalten wir, wenn wir überdiess

$$\operatorname{tg} R = \frac{\varepsilon \sin 2V}{1 + \varepsilon \cos 2V}$$

setzen, vermöge der Entwicklungen der Artt. 5 und 6:

$$R = W - \Theta - R - 2K'' + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3 + D\eta^4 + \text{etc.}$$

In diesem Ausdrucke sind die beiden veränderlichen Grössen von einander abgesondert, wenn wir für die bis jetzt nur scheinbar darin enthaltene Grösse α eine Constante wählen. Denn η ist bloß Function von J'' , welche Grösse bloß von Θ abhängt, wohingegen R , A , B , etc. bloß Functionen der Veränderlichen V sind. Die Längen N'' und K'' ihrerseits sind bloß Functionen von Θ . Der obige Ausdruck für \mathcal{R} lässt sich daher leicht in Tafeln bringen, wenn man die Multiplication von A , B , C , etc. mit den Potenzen von η der speciellen Anwendung überlässt.

9.

Es ist noch die Bestimmung der bis jetzt willkürlich gelassenen Grösse i_0 vorzunehmen. Man sieht leicht, dass im Allgemeinen die Reihe $A\eta + B\eta^2 + \text{etc.}$ möglichst convergent wird, wenn man i_0 so bestimmt, dass die Differenz $\cos i_0 - \cos J''$ möglichst kleine positive und negative Werthe annimmt. Nun sind aber $J'' + J$, und $J'' - J$ die Grenzwerte von J'' , und die eben genannte Bedingung wird daher erfüllt, wenn man $\cos i_0$ dem arithmetischen Mittel aus den Cosinus dieser Grenzwerte gleichsetzt. Hieraus folgt, wenn wir den so bestimmten Werth von i_0 vorzugsweise mit I bezeichnen, dass

$$\cos I = \cos J'' \cos J,$$

oder zur sicherern Berechnung

$$\sin \frac{1}{2} I = \frac{\sin \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J}{\cos A}, \text{ wo } \operatorname{tg} A = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J,$$

Da nun

$$\cos J'' = \cos J'' \cos J - \sin J'' \sin J \cos \Theta$$

ist, so wird

$$\cos i_0 - \cos J'' = \sin J'' \sin J \cos \Theta$$

Setzen wir daher in die Formeln des vor. Art.

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} I, \quad \alpha = \frac{\sin J'' \sin J}{\cos^2 \frac{1}{2} I}$$

so wird

$$\mathcal{R} = W - \Theta - 2K'' - R + A \cos \Theta + B \cos^2 \Theta + C \cos^3 \Theta + D \cos^4 \Theta + \text{etc.}$$

10.

Die eben gefundene Reihe convergirt am schwächsten, wenn die Mondknoten in der Nähe von 0° und 180° liegen, allein die Convergenz ist in diesen Punkten doch bedeutend, weil α eine kleine Grösse ist (in Theilen des Radius $\alpha = 0,0373\dots$); sie convergirt am stärksten, wenn die Mondknoten in der Nähe von 90° und 270°

liegen; für $\Theta = 90^\circ$ und $\Theta = 270^\circ$ ist die Summe der Reihe Null. Man kann aber noch andere Reihen angeben, die grade in den Punkten am stärksten convergiren, wo die Reihe des vor. Art. ihre schwächste Convergenz hat. Diese Reihen, die man auch aus jener erhalten könnte, leitet man am einfachsten dadurch ab, dass man i_0 den Grenzwerten von J'' gleichsetzt. Setzt man i_0 gleich dem Maximum von J'' , nemlich

$$i_0 = J'' + J,$$

dann wird

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(J'' + J), \quad \alpha = -\frac{2 \sin J'' \sin J}{\cos^2 \frac{1}{2}(J'' + J)}$$

$$R = W - \Theta - 2K'' - R + A \sin^2 \frac{1}{2}\Theta + B \sin^4 \frac{1}{2}\Theta + C \sin^6 \frac{1}{2}\Theta + \text{etc.}$$

Diese Reihe convergirt am stärksten, wenn Θ in der Nähe von 0° liegt. Setzt man hingegen

$$i_0 = J'' - J,$$

so wird

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(J'' - J), \quad \alpha = \frac{2 \sin J'' \sin J}{\cos^2 \frac{1}{2}(J'' - J)}$$

$$R = W - \Theta - 2K'' - R + A \cos^2 \frac{1}{2}\Theta + B \cos^4 \frac{1}{2}\Theta + C \cos^6 \frac{1}{2}\Theta + \text{etc.}$$

welche Reihe am stärksten convergirt, wenn Θ nahe gleich 180° ist.

44.

Der Merkwürdigkeit wegen will ich noch die Annahme $i_0 = 0$ untersuchen, aus welcher $\varepsilon = 0$ folgt. Setzt man hier nun $\alpha = 2$, so geht daraus hervor, dass

$$R = W - \Theta - 2K'' + A \sin^2 \frac{1}{2}J'' + B \sin^4 \frac{1}{2}J'' + \text{etc.}$$

wo

$$A = -2 \sin V \cos V$$

$$B = -2 \sin^2 V \sin 2V$$

$$C = \frac{8}{3} \sin^3 V \cos 3V$$

$$D = 4 \sin^4 V \sin 4V$$

etc.

Hier ist R verschwunden und die unendliche Reihe schreitet nach den positiven und graden Potenzen von $\sin \frac{1}{2}J''$ fort. Sie ist aber weit weniger convergent, wie die vorhergehenden Reihen, und deshalb zur Anwendung weit weniger geeignet. Ich bemerke übrigens, dass diese Reihe mit der folgenden nahe verwandt ist:

$$R = W - \Theta - 2K'' - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}J'' \sin 2V + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}J'' \sin 4V \mp \text{etc.}$$

die unmittelbar aus einer längst bekannten Reihe entspringt.

12.

Es ist noch die Entwicklung der einfachsten Ausdrücke für N'' und K'' übrig. Im ersten Artikel hatten wir aus dem Dreieck ABC die folgenden Relationen erhalten

$$\sin J'' \sin (N'' - K'' - \Theta) = -\sin J'' \sin \Theta$$

$$\sin J'' \cos (N'' - K'' - \Theta) = \cos J'' \sin J, + \sin J'' \cos J, \cos \Theta$$

Dasselbe Dreieck giebt auch die Gleichungen

$$\sin J'' \sin (N'' + K'') = \sin J, \sin \Theta$$

$$\sin J'' \cos (N'' + K'') = \sin J'' \cos J, + \cos J'' \sin J, \cos \Theta$$

Führt man hier die imaginären Exponentialfunctionen ein, so bekommt man leicht

$$\begin{aligned} \sin J'' c^{\rho(N'' - K'')} &= \sin J'' \cos^2 \frac{1}{2} J, + \cos J'' \sin J, c^{\rho\Theta} - \sin J'' \sin^2 \frac{1}{2} J, c^{2\rho\Theta} \\ &= 2 \{ \cos \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, - \sin \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{-\rho\Theta} \} \{ \sin \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, + \cos \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{\rho\Theta} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin J'' c^{\rho(N'' + K'')} &= \sin J'' \cos J, + \cos^2 \frac{1}{2} J'' \sin J, c^{\rho\Theta} - \sin^2 \frac{1}{2} J'' \sin J, c^{-\rho\Theta} \\ &= 2 \{ \cos \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, - \sin \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{-\rho\Theta} \} \{ \sin \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, + \cos \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{\rho\Theta} \} \end{aligned}$$

und noch zwei ähnliche Formeln, die sich aus den vorstehenden ergeben, wenn man darin $-\rho$ für ρ schreibt.*) Dividirt man die zweite dieser Relationen durch die erste, so bekommt man

$$c^{2\rho K''} = \frac{\cos \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, - \sin \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{-\rho\Theta}}{\cos \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, - \sin \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{\rho\Theta}}$$

Dividirt man die erste durch die zweite, nachdem man in letzterer $-\rho$ für ρ geschrieben hat, so ergibt sich

$$c^{2\rho N''} = \frac{\sin \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, + \cos \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{\rho\Theta}}{\sin \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, + \cos \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{-\rho\Theta}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man zur reellen Form zurückkehrt

$$\operatorname{tg} N'' = \frac{\cotg \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, \sin \Theta}{1 + \cotg \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, \cos \Theta}$$

$$\operatorname{tg} K'' = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, \sin \Theta}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, \cos \Theta}$$

*) Man bekommt ausserdem noch die Gleichungen

$$\cos^2 \frac{1}{2} J'' = \{ \cos \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, - \sin \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{\rho\Theta} \} \{ \cos \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, - \sin \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{-\rho\Theta} \}$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} J'' = \{ \sin \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, + \cos \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{\rho\Theta} \} \{ \sin \frac{1}{2} J'' \cos \frac{1}{2} J, + \cos \frac{1}{2} J'' \sin \frac{1}{2} J, c^{-\rho\Theta} \}$$

welche, in Verbindung mit den obigen, merkwürdige und nützliche Relationen geben, die ich aber hier nicht anwenden; und daher auch nicht ableiten werde. Auch die Gaussischen Relationen im sphärischen Dreiecke können aus diesen Gleichungen auf einfache Art abgeleitet werden.

Die vorstehenden Gleichungen zwischen den imaginären Grössen geben überdiess

$$2\varrho N'' = \log(1 + \cot \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, c^{e\Theta}) - \log(1 + \cot \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, c^{-e\Theta})$$

$$2\varrho K'' = \log(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, c^{-e\Theta}) - \log(1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, c^{e\Theta})$$

und wenn man die Logarithmen in unendliche Reihen entwickelt:

$$N'' = \cot \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, \sin \Theta - \frac{1}{2} \cot^2 \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J, \sin 2\Theta + \frac{1}{3} \cot^3 \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} J, \sin 3\Theta - \text{etc.}$$

$$K'' = \operatorname{tg} \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, \sin \Theta + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J, \sin 2\Theta + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} J, \sin 3\Theta + \text{etc.}$$

13.

Unter den im Vorhergehenden für R entwickelten Reihen convergirt die im Art. 9 abgeleitete am stärksten, und zwar in jedem Falle so stark, dass, wenn die Coefficienten derselben in Tafeln von zweckmässiger Ausdehnung gebracht worden sind, ihre Anwendung nie unbequem wird; in den Fällen, wo $\cos \Theta$ klein, und folglich ihre Convergenz am grössten ist, wird ihre Anwendung äusserst einfach. Da aber grade in den Fällen, wo diese Reihe am mindesten stark convergirt, die Convergenz der im Art. 10 entwickelten Reihen am grössten ist, so kann man für jeden Fall eine stärkere Convergenz und folglich eine Abkürzung der Arbeit herbeiführen, wenn man den ganzen Umlauf der Mondknoten in drei Theile zerlegt, und in jedem dieser Theile eine andere jener drei Reihen anwendet. Man wird demnach die erste Reihe des Art. 10 in dem Theile des Knotenumlaufs anwenden, wo

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \Theta < \cos \Theta$$

ist, d. i. von $\Theta = 300^\circ$ bis $\Theta = 60^\circ$; die Reihe des Art. 9 in dem Theile, wo

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} \Theta > \cos \Theta > -2 \cos^2 \frac{1}{2} \Theta$$

ist, d. i. von $\Theta = 60^\circ$ bis $\Theta = 120^\circ$ und von $\Theta = 240^\circ$ bis $\Theta = 300^\circ$; endlich die zweite Reihe des Art. 10 in dem Theile, wo

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} \Theta < -\cos \Theta$$

d. i. von $\Theta = 120^\circ$ bis $\Theta = 240^\circ$, womit der ganze Umkreis erschöpft ist. Es versteht sich indess von selbst, dass man diese Theilungspunkte nicht genau einzuhalten braucht, da alle drei Reihen für den ganzen Umkreis gelten und in der Nähe der Theilungspunkte

die Convergenz der einen Reihe nur wenig von der der anderen verschieden ist.

Ich werde noch, um einen Ueberblick über die hiefür nöthigen Tafeln zu geben, die Nullpunkte und die Maxima der entwickelten Grössen anführen. Die Bögen N'' und K'' sind Null für $\Theta=0$ und $\Theta=180^\circ$ und haben zwischen jedem dieser Nullpunkte Ein Maximum. Setzt man

$$\cotg \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, = \sin g, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} J'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} J, = \sin h$$

so ist g das Maximum von N'' und h das Maximum von K'' . Die Grössen R, A, B, C, D , etc. sind Null für $V=0^\circ, V=90^\circ, V=180^\circ, V=270^\circ$; R, A und B haben zwischen jedem dieser Nullpunkte Ein Maximum. Sei

$$\varepsilon = \sin f$$

so ist f das Maximum von R . Mit Rücksicht auf die eben angeführten Theilungspunkte wird das Maximum von $A \cos \Theta$

$$= \frac{\alpha}{4(1-\varepsilon)}$$

und das von $B \cos^2 \Theta$

$$= \frac{\alpha^2 \sin^3(60^\circ)}{8}$$

wo α so verstanden ist, wie in Art. 9, nemlich ohne den Factor 2. C und D haben zwischen jedem Nullpunkt zwei Maxima. Das Maximum Maximorum von $C \cos^3 \Theta$ ist nahe

$$= \frac{\alpha^3 \sin^4(67\frac{1}{2}^\circ)}{24}$$

und das von $D \cos^4 \Theta$ nahe

$$= \frac{\alpha^4 \sin^5(72^\circ)}{64}$$

Nehmen wir nun wie in Art. 3

$$J'' = 23^\circ 27' 54'' 80, \quad J, = 5^\circ 8' 48''$$

an, so wird das Maximum

$$\text{von } N'' = 12^\circ 29' 52''$$

$$\text{von } K'' = 0^\circ 32' 5'' 3$$

Setzen wir zur Unterscheidung

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} (J'' + J,), \quad \alpha = \frac{2 \sin J'' \sin J,}{\cos^2 \frac{1}{2} (J'' + J,)}$$

$$\varepsilon' = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Gamma, \quad \alpha' = \frac{\sin J'' \sin J,}{\cos^2 \frac{1}{2} \Gamma}$$

$$\varepsilon'' = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} (J'' - J,), \quad \alpha'' = \frac{2 \sin J'' \sin J,}{\cos^2 \frac{1}{2} (J'' - J,)}$$

und unterscheiden demgemäss auch R , R' und R'' , dann bekommen wir zuerst

$$\begin{aligned} \log \varepsilon &= 8,8134052, & \log \alpha &= 8,8813033n \\ \log \varepsilon' &= 8,6546430, & \log \alpha' &= 8,5720901 \\ \log \varepsilon'' &= 8,4149190, & \log \alpha'' &= 8,8650881 \end{aligned}$$

Hieraus folgt das Maximum

$$\text{von } R = 3^{\circ} 43' 42'' 6$$

$$\text{von } R' = 2 \quad 35 \quad 15,7$$

$$\text{von } R'' = 1 \quad 29 \quad 22,8$$

ferner mit Anwendung der vorstehenden Werthe von α' und ε' die Maxima

$$\text{von } A \cos \Theta = 33' 36'' 2$$

$$\text{von } B \cos^2 \Theta = 23,3$$

$$\text{von } C \cos^3 \Theta = 0,32$$

$$\text{von } D \cos^4 \Theta = 0,005$$

Man sieht also, dass das vierte Glied stets unmerklich ist und die Anwendung der drei ersten Glieder stets ausreicht. Wegen der vier Nullpunkte, die die Coefficienten in jedem Umlauf des Mondes haben, sind sie auch in dem grössten Theile jedes Monats viel kleiner wie diese Maxima, und es wird in jedem Monat nur eine kurze Zeit eintreten, wo man nicht mit den beiden ersten Gliedern ausreicht. Ferner wird es, wegen der minder grossen Bewegung der Knoten im Verhältniss zur Bewegung des Mondes selbst, in jedem Knotenumlauf Jahre geben, wo das dritte Glied ganz unmerklich wird, und das zweite nur selten berücksichtigt zu werden braucht, also von den übrigen Gliedern fast nur $A \cos \Theta$ merklich wird.

LEIPZIG

VERLAG VON B. G. TEUBNER

1874

1874

Die drei ersten Glieder sind die ersten drei Potenzen von x , die letzten drei Glieder sind die ersten drei Potenzen von x^{-1} . Die Summe aller Glieder ist die Entwicklung von $\frac{1}{1-x^2}$ für $|x| < 1$.

Die Entwicklung von $\frac{1}{1-x^2}$ für $|x| < 1$ ist die Summe aller Potenzen von x^{2n} für $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Entwicklung von $\frac{1}{1-x^2}$ für $|x| > 1$ ist die Summe aller Potenzen von x^{-2n} für $n = 0, 1, 2, \dots$.

Man sieht also, dass das zweite Glied stets unendlich wird, wenn die Entwicklung für $|x| > 1$ betrachtet wird. Die Entwicklung für $|x| < 1$ ist die Summe aller Potenzen von x^{2n} für $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Entwicklung für $|x| > 1$ ist die Summe aller Potenzen von x^{-2n} für $n = 0, 1, 2, \dots$.

Die Entwicklung von $\frac{1}{1-x^2}$ für $|x| < 1$ ist die Summe aller Potenzen von x^{2n} für $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Entwicklung von $\frac{1}{1-x^2}$ für $|x| > 1$ ist die Summe aller Potenzen von x^{-2n} für $n = 0, 1, 2, \dots$.