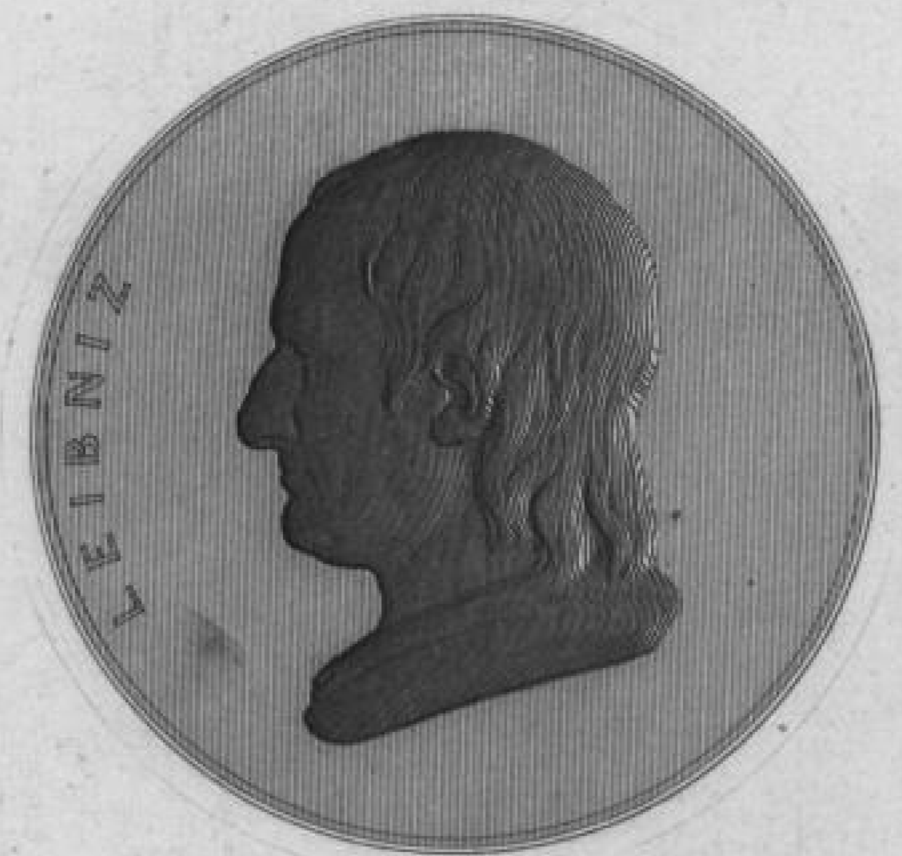
ABHANDLUNGEN

ACHTZEHNTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ACHTZEHNTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

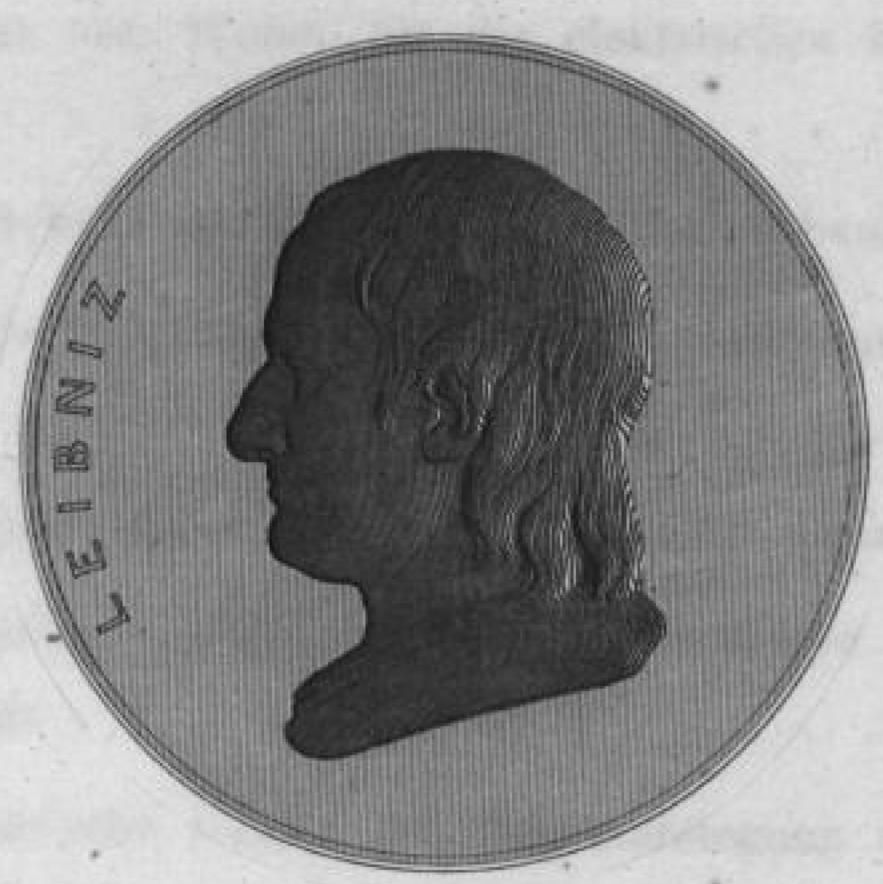
BEI S. HIRZEL.

1878.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



EILFTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

INHALT.

UEBER DIE

STÖRUNGEN DER GROSSEN PLANETEN,

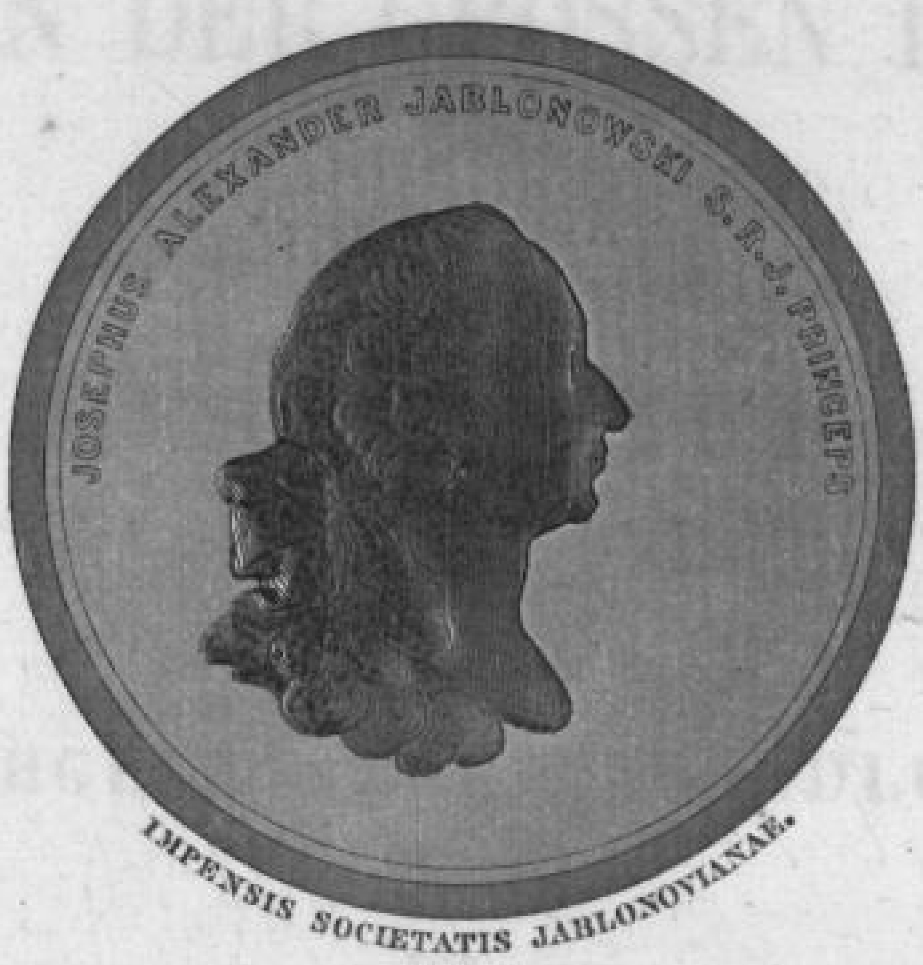
INSBESONDERE

DES JUPITER.

VON

P. A. HANSEN,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1875.

Im Manuscript übergeben den 26. November 1874.
Der Abdruck vollendet den 31. Juli 1875.

ÜBER

DIE

STÖRUNGEN DER GROSSEN PLANETEN

INSBESONDERE

DES JUPITER.

NACHGELASSENE ABHANDLUNG

VON

P. A. HANSEN.

§. 1. Entwickelung der Störungsfunction und der partiellen Differentialquotienten derselben, die hier gebraucht werden.

1.

Es sollen die Bezeichnungen angewandt werden, die ich in meinen früheren Arbeiten über die Störungstheorie, insbesondere über die Störungen der kleinen Planeten, gebraucht habe, nemlich:

g ... die mittlere Anomalie,
f ... die wahre Anomalie,
r ... der Radius Vector,
nz ... die gestörte mittlere Anomalie oder mittlere Länge,
$\bar{r}(1+\nu)$ der gestörte Werth des Radius Vector,
au ... die Störungen der Coordinate Z, die senkrecht auf der Fundamentalebene steht,
Ω ... die Störungsfunction,
m ... die Masse,
n ... die mittlere siderische Bewegung,
a ... die halbe grosse Achse,
e ... die Excentricität,
π ... die Länge des Perihels,
i ... die Neigung,
θ ... die Länge des aufsteigenden Knotens

des gestörten Planeten, von welchen die drei zuletzt genannten Elemente auf eine feste Ebene und eine feste Linie in derselben bezogen werden müssen.

In Bezug auf den störenden Planeten sollen alle diese Grössen rechts oben mit einem Strich versehen werden.

Bezeichnet man ferner die Bahnebene des gestörten Planeten mit XY, und die des störenden mit $X'Y'$, nennt Φ den Bogen der XY-Ebene, der sich von dem aufsteigenden Knoten dieser Ebene auf der festen Fundamentalebene, auf welche $\pi, i, \theta, \pi', i', \theta'$ bezogen sind, bis zum aufsteigenden Knoten der XY-Ebene auf der $X'Y'$-Ebene erstreckt, Ψ den Bogen, welcher sich von dem aufsteigenden Knoten der $X'Y'$-Ebene auf derselben Fundamentalebene bis zu demselben gegenseitigen Knoten erstreckt, und J die Neigung zwischen den beiden Bahnebenen, so sind vor Allem J, Φ, Ψ entweder aus den Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) = \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i+i')$$

$$\sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) = \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i-i')$$

$$\cos\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) = \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i+i')$$

$$\cos\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) = \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i-i')$$

oder, nach Belieben, aus den folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\cos p\sin q &= \sin i'\cos(\theta-\theta') \\
\cos p\cos q &= \cos i' \\
\cos p\sin r &= \cos i'\sin(\theta-\theta') \\
\cos p\cos r &= \cos(\theta-\theta') \\
\sin p &= \sin i'\sin(\theta-\theta')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin J\sin\Phi &= \sin p \\
\sin J\cos\Phi &= \cos p\sin(i-q) \\
\sin J\sin(\Psi-r) &= \sin p\cos(i-q) \\
\sin J\cos(\Psi-r) &= \sin(i-q) \\
\cos J &= \cos p\cos(i-q)
\end{aligned}$$

Setzt man hierauf

$$\Pi = \pi-\theta-\Phi, \quad \Pi' = \pi'-\theta'-\Psi$$

so werden die Argumente der Breite des gestörten und des störenden Planeten

$$f+\Pi \quad \text{und} \quad f'+\Pi'$$

2.

Man hat bei der Anwendung der obigen Gaussischen Formeln, namentlich wenn es sich um einen Kometen handelte, Schwierigkeiten in der richtigen Bestimmung des Quadranten gefunden, in welchem die Bögen $\frac{1}{2}(\Psi+\Phi)$ und $\frac{1}{2}(\Psi-\Phi)$ zu nehmen sind; durch Anwendung der folgenden einfachen Betrachtungen fallen diese Schwierigkeiten ganz weg. Man braucht nur die Dreiecksseite $\theta-\theta'$ etwas anders wie die Winkel i und i' zu behandeln. Letztere muss man unverändert so beibehalten, wie sie sind, und demgemäss ihre halbe Summe und ihren halben Unterschied bilden. Es kann sich hierbei ereignen, dass $\frac{1}{2}(i-i')$ durch einen negativen Bogen dargestellt wird; dieser muss unverändert in der Rechnung angewandt werden*). Den Bogen $\theta-\theta'$ darf man aber nie negativ nehmen, sondern muss, wenn $\theta<\theta'$ ist, $\frac{1}{2}(360^0+\theta-\theta')$ statt $\frac{1}{2}(\theta-\theta')$ in der Rechnung anwenden.

Durch den Gebrauch dieser Regeln, Berücksichtigung der algebraischen Vorzeichen der trigonometrischen Functionen, und mit Rücksicht darauf, dass ohne Ausnahme $\sin\frac{1}{2}J$ und $\cos\frac{1}{2}J$ positiv werden müssen, sind die Quadranten, in denen $\frac{1}{2}(\Psi+\Phi)$ und $\frac{1}{2}(\Psi-\Phi)$ zu nehmen sind, völlig bestimmt. Ich füge noch hinzu, dass dieselben Regeln bei jeder anderen Anwendung dieser Gaussischen Formeln Geltung haben.

Zur Anwendung des zweiten obigen Systems von Formeln bemerke ich, dass, wenn man die Logarithmen der trigonometrischen Functionen der bekannten Bögen in der folgenden Ordnung unter einander hinschreibt:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta-\theta')\\ \sin i'\\ \sin(\theta-\theta')\\ \cos i'\end{array}\right\}\text{ und bez. }\left\{\begin{array}{l}\sin p\\ \cos(i-q)\\ \cos p\\ \sin(i-q)\end{array}\right.$$

man zunächst nur über oder unter einander stehende Logarithmen zu addiren hat.

---

*) Es versteht sich von selbst, dass bei einem rückläufigen Kometen $i>90^0$ ist.

3.

Es ist noch Folgendes anzumerken:

1) Wenn nicht nur die Störungen des Planeten m durch m', sondern auch die des Planeten m' durch m zu berechnen sind, so braucht man dem ungeachtet die obigen Formeln nur Ein Mal zu berechnen. Wählt man im zweiten Falle die Bezeichnungen wieder so, dass die dem gestörten Planeten zukommenden Grössen ohne Strich, und die dem störenden zukommenden mit einem Strich bezeichnet werden, mit anderen Worten, wechselt man die Bezeichnungen um, welches das Bequemste ist, da sonst in allen folgenden Ausdrücken die Bezeichnungen umgewechselt werden müssten, so hat man

$$180^0 + \Phi \text{ statt } \Psi$$
$$180^0 + \Psi \text{ statt } \Phi$$

zu schreiben, während J unverändert beizubehalten ist. Es folgt hieraus, dass

$$\begin{array}{rcl} \Pi & \text{statt} & 180^0 + \Pi' \\ \Pi' & - & 180^0 + \Pi \\ \Pi - \Pi' & - & -(\Pi - \Pi') \\ 2\Pi & - & 2\Pi' \\ \Pi + \Pi' & - & \Pi + \Pi' \\ 2\Pi' & - & 2\Pi \end{array}$$

zu setzen sind.

2) Vorausgesetzt, dass man eine gewisse feste Ecliptik zur Fundamentalebene annimmt, wie gewöhnlich geschieht, so bietet die Erde, wenn sie als gestörter oder störender Planet eintritt, besondere Fälle dar.

a) Wenn die Erde störender Planet ist, so werden

$$i' = 0, \quad \theta' \text{ unbestimmt},$$

und hiemit geben die Ausdrücke des Art. 1

$$\begin{aligned} J &= i \\ \Phi &= 0 \\ \Pi &= \pi - \theta \\ \Pi' &= \pi' - \theta \end{aligned}$$

und $\Psi = \theta - \theta'$ unbestimmt. Dieser Bogen kommt aber in den unten zu entwickelnden Formeln gar nicht vor, nur $\Psi + \theta'$ kann bei gewissen Veränderlichen vorkommen, und nimmt einen bestimmten Werth an, denn dem Vorstehenden zufolge wird

$$\Psi + \theta' = \theta$$

b) Wenn die Erde gestörter Planet ist, dann werden

$$i = 0, \quad \theta \text{ unbestimmt.}$$

Verbindet man nun die unter a) erhaltenen Gleichungen mit den unter 2) abgeleiteten Verwandelungsformeln, so ergeben sich

$$J = i'$$
$$\Psi = 180^0$$
$$\Pi = 180^0 + \pi - \theta'$$
$$\Pi' = 180^0 + \pi' - \theta'$$

und es wird ferner $\Phi = 180^0 - \theta + \theta' =$ unbestimmt. Aber jetzt kann dieser Bogen in den Ausdrücken für die Störungen nicht vorkommen, sondern höchstens $\Phi + \theta$, und dieser ist bestimmt, nemlich

$$\Phi + \theta = 180^0 + \theta'$$

3) Wenn die zu berechnenden Störungen sehr klein sind und man sich in Folge dessen mit der Aufnahme der Glieder der niedrigsten Ordnung begnügen kann, so braucht man in der Regel die Bögen Π und Π' selbst nicht zu kennen, sondern nur deren Unterschied nebst der gegenseitigen Neigung J. In diesen Fällen kann man immer setzen

$$\Pi - \Pi' = \pi - \pi'$$

und J aus der folgenden Formel berechnen

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} J = \sin^2 \tfrac{1}{2}(i - i') + \sin i \sin i' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta - \theta')$$

4.

Die Störungsfunction nimmt den folgenden Ausdruck an

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'H)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{r'^2} H\right\}$$

in welchem H den Cosinus des Winkels zwischen den beiden Radien r und r' bezeichnet, und für unseren Zweck auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$H = \cos(f - f' + \Pi - \Pi')$$
$$+ \sin^2 \tfrac{1}{2} J \{\cos(f + f' + \Pi + \Pi') - \cos(f - f' + \Pi - \Pi')\}$$

Entwickelt man nun vorläufig Ω nach den Potenzen von $\sin^2 \frac{1}{2} J$, und bleibt bei der ersten derselben stehen, da diess für das hier zu erreichende Ziel hinreicht, so bekommt man leicht, wenn man zur Abkürzung den Nenner $1+m$ weglässt, der später leicht ergänzt werden kann, wenn es nothwendig sein sollte,

$$\frac{\Omega}{m'} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(f - f' + \Pi - \Pi'))^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{r'^2}\cos(f - f' + \Pi - \Pi')$$
$$+ \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, rr' \frac{\cos(f + f' + \Pi + \Pi') - \cos(f - f' + \Pi - \Pi')}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(f - f' + \Pi - \Pi'))^{\frac{3}{2}}}$$
$$- \sin^2 \tfrac{1}{2} J \frac{r}{r'^2}\{\cos(f + f' + \Pi + \Pi') - \cos(f - f' + \Pi - \Pi')\}$$

welcher Ausdruck bis auf Grössen vierter Ordnung (excl.) in Bezug auf die Excentricitäten e und e' und die Neigung J entwickelt werden soll.

5.

Setzt man zur Abkürzung

$$K = \Pi - \Pi', \quad \Gamma = g - g', \quad G = \Gamma + K$$

und bezeichnet mit i irgend eine ganze positive oder negative Zahl, die Null eingeschlossen, und setzt man ferner

$$\frac{1}{(a^2 + a'^2 - 2aa'\cos G)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{a'^2}\cos G = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_i \cos iG$$

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 \sin^2 \tfrac{1}{2} J$$

so wie

$$r = a(1 + x), \qquad f = g + y$$
$$r' = a'(1 + x'), \qquad f' = g' + y'$$

so giebt das auf mehrere Unbekannte ausgedehnte TAYLOR'sche Theorem, wenn der Kürze wegen die Summenzeichen Σ weggelassen, und

$$D_i = (0,0)\, D_i$$
$$a\left(\frac{\partial D_i}{\partial a}\right) = (1,0)\, D_i, \qquad a'\left(\frac{\partial D_i}{\partial a'}\right) = (0,1)\, D_i$$
$$a^2\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial a^2}\right) = (2,0)\, D_i, \qquad aa'\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial a\, \partial a'}\right) = (1,1)\, D_i, \qquad a'^2\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial a'^2}\right) = (0,2)\, D_i$$

etc.

gesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Omega_0}{m'} = & \left\{\begin{array}{ll} & (0,0)\, D_i \\ + & (1,0)\, D_i x \\ + & (0,1)\, D_i x' \end{array}\right\} \cos i G \\
& - \; i\,(0,0)\, D_i\,(y-y') \sin i G \\
& + \left\{\begin{array}{ll} + & \frac{1}{2}\,(2,0)\, D_i x^2 \\ + & (1,1)\, D_i x x' \end{array}\right\} \cos i G \\
& - \; i\,(1,0)\, D_i x\,(y-y') \sin i G \\
& + \; \frac{1}{2}\,(0,2)\, D_i x'^2 \cos i G \\
& - \; i\,(0,1)\, D_i x'\,(y-y') \sin i G \\
& + \left\{\begin{array}{ll} - & \frac{1}{2} i^2\,(0,0)\, D_i\,(y-y')^2 \\ + & \frac{1}{6}\,(3,0)\, D_i x^3 \\ + & \frac{1}{2}\,(2,1)\, D_i x^2 x' \end{array}\right\} \cos i G \\
& - \frac{1}{2} i\,(2,0)\, D_i x^2\,(y-y') \sin i G \\
& + \; \frac{1}{2}\,(1,2)\, D_i x x'^2 \cos i G \\
& \; i\,(1,1)\, D_i x x'\,(y-y') \sin i G \\
& + \left\{\begin{array}{ll} - & \frac{1}{2} i^2\,(1,0)\, D_i x\,(y-y')^2 \\ + & \frac{1}{6}\,(0,3)\, D_i x'^3 \end{array}\right\} \cos i G \\
& - \; \frac{1}{2} i\,(0,2)\, D_i x'^2\,(y-y') \sin i G \\
& - \frac{1}{2} i^2\,(0,1)\, D_i x'\,(y-y')^2 \cos i G \\
& + \frac{1}{6} i^3\,(0,0)\, D_i\,(y-y')^3 \sin i G
\end{aligned}
$$

bis auf Grössen vierter Ordnung vollständig.

6.

Die Function Ω_1, in welcher nur die ersten Potenzen der Excentricitäten berücksichtigt zu werden brauchen, wird auf dieselbe Art behandelt. Setzt man

$$\frac{a a'}{(a^2+a'^2-2 a a' \cos G)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a}{a'^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_i \cos i G$$

so bekommt man zuerst

$$
\begin{aligned}
\frac{r r'}{(r^2+r'^2-2 r r' \cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}} - \frac{r}{r'^2} = & \left\{\begin{array}{ll} & (0,0)\, E_i \\ + & (1,0)\, E_i x \\ + & (0,1)\, E_i x' \end{array}\right\} \cos i G \\
& - i\,(0,0)\, E_i\,(y-y') \sin i G
\end{aligned}
$$

und dieser Ausdruck ist mit

$$\cos(f+f'+\Pi+\Pi') - \cos(f-f'+\Pi-\Pi') =$$
$$\cos(2g-G+2\Pi) - (y+y')\sin(2g-G+2\Pi) - \cos G + (y-y')\sin G$$

zu multipliciren. Zu dem Ende ist zu bemerken, dass wenn M_i überhaupt eine Function von i bezeichnet, die die Eigenschaft besitzt, dass

$$M_{-i} = M_i$$

wie hier bei den D_i und E_i der Fall ist, und die Summen von $i = -\infty$ bis $i = +\infty$ genommen werden, die folgenden Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned}
\Sigma M_i \cos(lG+L)\cos iG &= \Sigma M_{i-l}\cos(iG+L)\\
\Sigma M_i \sin(lG+L)\cos iG &= \Sigma M_{i-l}\sin(iG+L)\\
\Sigma i M_i \cos(lG+L)\sin iG &= \Sigma (i-l) M_{i-l}\sin(iG+L)\\
\Sigma i M_i \sin(lG+L)\sin iG &= -\Sigma (i-l) M_{i-l}\cos(iG+L)
\end{aligned}$$

Durch Zuziehung dieser Gleichungen giebt das Vorhergehende ohne Mühe

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_1}{m'} = &\left\{\begin{array}{ll} & (0,0)\,E_{i+1} \\ + & (1,0)\,E_{i+1}x \\ + & (0,1)\,E_{i+1}x' \end{array}\right\}\cos(2g+iG+2\Pi)\\
+&\left\{\begin{array}{l} -(i+1)\,(0,0)\,E_{i+1}(y-y') \\ -\quad (0,0)\,E_{i+1}(y+y') \end{array}\right\}\sin(2g+iG+2\Pi)\\
+&\left\{\begin{array}{ll} - & (0,0)\,E_{i-1} \\ - & (1,0)\,E_{i-1}x \\ - & (0,1)\,E_{i-1}x' \end{array}\right\}\cos iG\\
+&\quad i\,(0,0)\,E_{i-1}(y-y')\sin iG
\end{aligned}$$

7.

Die Theorie der elliptischen Bewegung giebt in der hier erforderlichen Ausdehnung

$$x = \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{8}e^3\right)\cos g - \frac{1}{2}e^2\cos 2g - \frac{3}{8}e^3\cos 3g$$

$$x' = \frac{1}{2}e'^2 - \left(e' - \frac{3}{2}e'^3\right)\cos(g-\Gamma) - \frac{1}{2}e'^2\cos(2g-2\Gamma) - \frac{3}{8}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$y = \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\sin g + \frac{5}{4}e^2\sin 2g + \frac{13}{12}e^3\sin 3g$$

$$y' = \left(2e' - \frac{1}{4}e'^3\right)\sin(g-\Gamma) + \frac{5}{4}e'^2\sin(2g-2\Gamma) + \frac{13}{12}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^3\cos g + \frac{1}{4}e^2\cos 2g + \frac{1}{4}e^3\cos 3g$$

$$\begin{aligned} xx' = {} & \frac{1}{2}ee'\cos\Gamma \\ & -\frac{1}{2}ee'^2\cos g + \frac{1}{4}e^2e'\cos(g+\Gamma) - \frac{1}{2}e^2e'\cos(g-\Gamma) + \frac{1}{4}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & +\frac{1}{2}ee'\cos(2g-\Gamma) \\ & +\frac{1}{4}e^2e'\cos(3g-\Gamma) + \frac{1}{4}e^2e'\cos(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(y-y') = {} & -ee'\sin\Gamma \\ & +\frac{7}{8}e^3\sin g - \frac{1}{2}e^2e'\sin(g+\Gamma) - e^2e'\sin(g-\Gamma) + \frac{5}{8}ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & -e^2\sin 2g + ee'\sin(2g-\Gamma) \\ & -\frac{9}{8}e^3\sin 3g + \frac{1}{2}e^2e'\sin(3g-\Gamma) + \frac{5}{8}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x'^2 = \frac{1}{4}e'^2 - \frac{1}{4}e'^3\cos(g-\Gamma) + \frac{1}{4}e'^2\cos(2g-2\Gamma) + \frac{1}{4}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\begin{aligned} x'(y-y') = {} & -ee'\sin\Gamma \\ & +ee'^2\sin g - \frac{5}{8}e^2e'\sin(g+\Gamma) - \frac{7}{8}e'^3\sin(g-\Gamma) + \frac{1}{2}ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & -ee'\sin(2g-\Gamma) + e'^2\sin(2g-2\Gamma) \\ & -\frac{5}{8}e^2e'\sin(3g-\Gamma) - \frac{1}{2}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) + \frac{9}{8}e'^3\sin(3g-3\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y-y')^2 = {} & e^2 + e'^2 - 2ee'\cos\Gamma \\ & +\frac{5}{4}e^3\cos g - \frac{5}{4}e^2e'\cos(g+\Gamma) + \frac{5}{4}e'^3\cos(g-\Gamma) - \frac{5}{4}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & -e^2\cos 2g + 2ee'\cos(2g-\Gamma) - e'^2\cos(2g-2\Gamma) \\ & -\frac{5}{4}e^3\cos 3g + \frac{5}{4}e^2e'\cos(3g-\Gamma) + \frac{5}{4}ee'^2\cos(3g-2\Gamma) - \frac{5}{4}e'^3\cos(3g-3\Gamma) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}x^3 = -\frac{1}{8}e^3\cos g - \frac{1}{24}e^3\cos 3g$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2x' = {} & -\frac{1}{8}e^2e'\cos(g+\Gamma) - \frac{1}{4}e^2e'\cos(g-\Gamma) \\ & -\frac{1}{8}e^2e'\cos(3g-\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2(y-y') = {} & \frac{1}{4}e^3\sin g + \frac{1}{4}e^2e'\sin(g+\Gamma) - \frac{1}{2}e^2e'\sin(g-\Gamma) \\ & +\frac{1}{4}e^3\sin 3g - \frac{1}{4}e^2e'\sin(3g-\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}xx'^2 = {} & -\frac{1}{4}ee'^2\cos g - \frac{1}{8}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & -\frac{1}{8}ee'^2\cos(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xx'(y-y') = {} & -\frac{1}{2}e^2e'\sin(g+\Gamma) - \frac{1}{2}ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & +\frac{1}{2}e^2e'\sin(3g-\Gamma) - \frac{1}{2}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}x(y-y')^2 = -(\tfrac{1}{2}e^3+ee'^2)\cos g + e^2e'\cos(g+\Gamma) + \tfrac{1}{2}ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e^3\cos 3g - e^2e'\cos(3g-\Gamma) + \tfrac{1}{2}ee'^2\cos(3g-2\Gamma)$$
$$\tfrac{1}{6}x'^3 = -\tfrac{1}{8}e'^3\cos(g-\Gamma) - \tfrac{1}{24}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$
$$\tfrac{1}{2}x'^2(y-y') = \tfrac{1}{2}ee'^2\sin g - \tfrac{1}{4}e'^3\sin(g-\Gamma) - \tfrac{1}{4}ee'^2\sin(g-2\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) - \tfrac{1}{4}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$
$$\tfrac{1}{2}x'(y-y')^2 = \tfrac{1}{2}e^2e'\cos(g+\Gamma) - (e^2e'+\tfrac{1}{2}e'^3)\cos(g-\Gamma) + ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2e'\cos(3g-\Gamma) - ee'^2\cos(3g-2\Gamma) + \tfrac{1}{2}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$
$$\tfrac{1}{6}(y-y')^3 = (e^3+2ee'^2)\sin g - e^2e'\sin(g+\Gamma) - (2e^2e'+e'^3)\sin(g-\Gamma) + ee'^2\sin(g-2\Gamma)$$
$$-\tfrac{1}{3}e^3\sin 3g + e^2e'\sin(3g-\Gamma) - ee'^2\sin(3g-2\Gamma) + \tfrac{1}{3}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

8.

Durch die Substitution der vorstehenden Entwickelungen in die Ausdrücke der Störungsfunction der Artt. 5 und 6 nimmt diese die folgende Form an:

$$\begin{aligned}
a\Omega = \;& \Sigma\,(1)\cos(i(g-g')+iK)\\
&+(2)\cos(i(g-g')+(i+1)K)\\
&+(3)\cos(g+i(g-g')+iK)\\
&+(4)\cos(g+i(g-g')+(i+1)K)\\
&+(5)\cos(g+i(g-g')+(i-1)K)\\
&+(6)\cos(g+i(g-g')+(i+2)K)\\
&+(7)\cos(g+i(g-g')+iK+2\Pi)\\
&+(8)\cos(g+i(g-g')+(i-1)K+2\Pi)\\
&+(9)\cos(2g+i(g-g')+iK)\\
&+(10)\cos(2g+i(g-g')+(i+1)K)\\
&+(11)\cos(2g+i(g-g')+(i+2)K)\\
&+(12)\cos(2g+i(g-g')+iK+2\Pi)\\
&+(13)\cos(3g+i(g-g')+iK)\\
&+(14)\cos(3g+i(g-g')+(i+1)K)\\
&+(15)\cos(3g+i(g-g')+(i+2)K)\\
&+(16)\cos(3g+i(g-g')+(i+3)K)\\
&+(17)\cos(3g+i(g-g')+iK+2\Pi)\\
&+(18)\cos(3g+i(g-g')+(i+1)K+2\Pi)
\end{aligned}$$

und wenn man sich erlaubt, die Indices (0,0), (1,0), (0,1), etc. getrennt von den D_i und E_i zu schreiben, so ergeben sich für die Coefficienten des vorstehenden Ausdrucks die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned}
(1) = {} & m'a\,(0,0)\,D_i \\
& + \tfrac{1}{4}e^2\,m'a\{(2,0)+2\,(1,0)-4i^2(0,0)\}\,D_i \\
& + \tfrac{1}{4}e'^2 m'a\{(0,2)+2\,(0,1)-4i^2(0,0)\}\,D_i \\
& - \tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\,(0,0)\{E_{i-1}+E_{i+1}\}
\end{aligned}$$

$$(2) = \tfrac{1}{2}ee'm'a\{(1,1)+2\,(i+1)\,(1,0)+2\,(i+1)\,(0,1)+4\,(i+1)^2(0,0)\}\,D_{i+1}$$

$$\begin{aligned}
(3) = {} & -e\,m'a\{(1,0)-2i(0,0)\}\,D_i \\
& - \tfrac{1}{8}e^3\,m'a\{(3,0)-(2i-2)\,(2,0)-(4i^2+7i+3)\,(1,0)+(8i^3+10i^2+2i)\,(0,0)\}\,D_i \\
& - \tfrac{1}{4}ee'^2\,m'a\{(1,2)+2\,(1,1)-2i\,(0,2)-4i^2\,(1,0)-4i\,(0,1)+8i^3\,(0,0)\}\,D_i \\
& + \tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\{(1,0)-2i\,(0,0)\}\{E_{i-1}+E_{i+1}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) = {} & -e'm'a\{(0,1)+2\,(i+1)\,(0,0)\}\,D_{i+1} \\
& - \tfrac{1}{4}e^2\,e'm'a\{(2,1)+2\,(i+1)\,(2,0)+2\,(1,1)+4\,(i+1)\,(1,0)-4\,(i+1)^2\,(0,1)- \\
& \qquad -8\,(i+1)^3(0,0)\}\,D_{i+1} \\
& - \tfrac{1}{8}e'^3\,m'a\{(0,3)+(2i+4)\,(0,2)-(4i^2+i)\,(0,1)-(8i^3+14i^2+6i)\,(0,0)\}\,D_{i+1} \\
& + \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\{(0,1)+2\,(i+1)\,(0,0)\}\{E_i+E_{i+2}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) = {} & -\tfrac{1}{8}e^2\,e'm'a\{(2,1)-2\,(i-1)\,(2,0)-(4i-2)\,(1,1)+(8i^2-12i+4)\,(1,0)+ \\
& \qquad +(4i^2-3i-1)\,(0,1)-(8i^3-14i^2+4i+2)\,(0,0)\}\,D_{i-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) = {} & -\tfrac{1}{8}ee'^2\,m'a\{(1,2)+(4i+6)\,(1,1)+(2i+4)\,(0,2)+(4i^2+11i+6)\,(1,0)+ \\
& \qquad +(8i^2+28i+24)\,(0,1)+(8i^3+38i^2+56i+24)\,(0,0)\}\,D_{i+2}
\end{aligned}$$

$$(7) = -\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\{(1,0)+(2i+4)\,(0,0)\}\,E_{i+1}$$

$$(8) = -\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\{(0,1)-(2i-2)\,(0,0)\}\,E_i$$

$$(9) = \tfrac{1}{4}e^2\,m'a\{(2,0)-(4i+2)\,(1,0)+(4i^2+5i)\,(0,0)\}\,D_i$$

$$(10) = \tfrac{1}{2}ee'm'a\{(1,1)+2\,(i+1)\,(1,0)-2\,(i+1)\,(0,1)-4\,(i+1)^2(0,0)\}\,D_{i+1}$$

$$(11) = \tfrac{1}{4}e'^2\,m'a\{(0,2)+(4i+6)\,(0,1)+(4i^2+11i+6)\,(0,0)\}\,D_{i+2}$$

$$(12) = \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\,(0,0)\,E_{i+1}$$

$$\begin{aligned}
(13) = {} & -\tfrac{1}{24}e^3\,m'a\{(3,0)-(6i+6)\,(2,0)+(12i^2+27i+9)\,(1,0)- \\
& \qquad -(8i^3+30i^2+26i)\,(0,0)\}\,D_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(14) = {} & -\tfrac{1}{8}e^2\,e'm'a\{(2,1)+2\,(i+1)\,(2,0)-(4i+6)\,(1,1)-(8i^2+20i+12)\,(1,0)+ \\
& \qquad +(4i^2+13i+9)\,(0,1)+(8i^3+34i^2+44i+18)\,(0,0)\}\,D_{i+1}
\end{aligned}$$

$$(15) = -\tfrac{1}{8}ee'^2m'a\{(1,2)+(4i+6)(1,1)-(2i+4)(0,2)+(4i^2+11i+6)(1,0)-$$
$$-(8i^2+28i+24)(0,1)-(8i^3+38i^2+56i+24)(0,0)\}D_{i+2}$$

$$(16) = -\tfrac{1}{24}e'^3m'a\{(0,3)+(6i+12)(0,2)+(12i^2+45i+36)(0,1)+$$
$$+(8i^3+42i^2+62i+24)(0,0)\}D_{i+3}$$

$$(17) = -\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'a\{(1,0)-(2i+4)(0,0)\}E_{i+1}$$

$$(18) = -\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'a\{(0,1)+(2i+2)(0,0)\}E_{i+2}$$

9.

Um die im vorigen Artikel erhaltenen Ausdrücke zu vereinfachen, dienen die folgenden Betrachtungen. Sei

$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

dann erhalten wir aus dem Art. 5

$$\frac{\alpha}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{1}{2}}} - \alpha^2\cos G = a\sum_{-\infty}^{+\infty} D_i \cos iG$$

Setzt man aber

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_i \cos iG$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$a\sum_{-\infty}^{+\infty} D_i \cos iG = \alpha\sum_{-\infty}^{+\infty} A_i \cos iG - \alpha^2\cos G$$

oder es wird allgemein

$$aD_i = \alpha A_i$$

mit der Ausnahme, dass

$$aD_1 = \alpha A_1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2$$

wird. Wendet man nun die folgende, abgekürzte Bezeichnung an, die der schon oben eingeführten analog ist

$$A_i = (0)\,A_i$$
$$\alpha\left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha}\right) = (1)\,A_i$$
$$\alpha^2\left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial \alpha^2}\right) = (2)\,A_i$$

etc.

so erhält man aus der vorstehenden allgemeinen Relation und deren Differentialen:

$$\begin{aligned}
a\,(0{,}0)\,D_i &= \alpha\,(0)\,A_i\\
a\,(1{,}0)\,D_i &= \alpha\,(1)\,A_i\\
a\,(0{,}1)\,D_i &= -\alpha\,(1)\,A_i - \alpha\,(0)\,A_i\\
a\,(2{,}0)\,D_i &= \alpha\,(2)\,A_i\\
a\,(1{,}1)\,D_i &= -\alpha\,(2)\,A_i - 2\,\alpha\,(0)\,A_i\\
a\,(0{,}2)\,D_i &= \alpha\,(2)\,A_i + 4\,\alpha\,(1)\,A_i + 2\,\alpha\,(0)\,A_i\\
a\,(3{,}0)\,D_i &= \alpha\,(3)\,A_i\\
a\,(2{,}1)\,D_i &= -\alpha\,(3)\,A_i - 3\,\alpha\,(2)\,A_i\\
a\,(1{,}2)\,D_i &= \alpha\,(3)\,A_i + 6\,\alpha\,(2)\,A_i + 6\,\alpha\,(1)\,A_i\\
a\,(0{,}3)\,D_i &= -\alpha\,(3)\,A_i - 9\,\alpha\,(2)\,A_i - 18\,\alpha\,(1)\,A_i - 6\,\alpha\,(0)\,A_i
\end{aligned}$$

Die Differentiation der obigen Ausnahmerelation giebt zu erkennen, dass dieselbe vollständig berücksichtigt wird, wenn man überall

$$\begin{aligned}
(0)\,A_1 - \tfrac{1}{2}\alpha \quad &\text{statt} \quad (0)\,A_1\\
(1)\,A_1 - \tfrac{1}{2}\alpha \quad &\quad - \quad (1)\,A_1
\end{aligned}$$

anwendet.

Ferner bekommt man aus dem Art. 5

$$\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2-2\,\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} - \alpha^2 = a\sum_{-\infty}^{+\infty} E_i \cos iG$$

und setzt man jetzt

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\,\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos iG$$

so ergiebt sich allgemein

$$a\,E_i = \alpha^2 B_i$$

mit der Ausnahme, dass

$$a\,E_0 = \alpha^2 B_0 - \alpha^2$$

wird. Führt man ähnliche Abkürzungen in der Bezeichnung ein, wie oben, nemlich

$$\begin{aligned}
\alpha B_i &= (0)\,B_i\\
\alpha^2\left(\frac{\partial B_i}{\partial \alpha}\right) &= (1)\,B_i
\end{aligned}$$

so giebt die vorstehende allgemeine Relation:

$$\begin{aligned}
a\,(0{,}0)\,E_i &= \alpha\,(0)\,B_i\\
a\,(1{,}0)\,E_i &= \alpha\,(1)\,B_i + \alpha\,(0)\,B_i\\
a\,(0{,}1)\,E_i &= -\alpha\,(1)\,B_i - 2\,\alpha\,(0)\,B_i
\end{aligned}$$

und die Ausnahmerelation wird vollständig dadurch berücksichtigt, dass man allenthalben

$$(0)\,B_0 - \alpha \quad \text{statt} \quad (0)\,B_0$$

anwendet.

10.

Machen wir nun von den im vorigen Artikel entwickelten Umformungen Gebrauch, so gehen die Ausdrücke der Coefficienten von $a\Omega$ in die folgenden über:

$$\begin{aligned}
(1) &= m'\alpha(0)A_i + \tfrac{1}{4}(e^2+e'^2)m'\alpha\{(2)+2(1)-4i^2(0)\}A_i \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(0)\{B_{i-1}+B_{i+1}\} \\
(2) &= -\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(2)+2(1)-(4i^2+6i+2)(0)\}A_{i+1} \\
(3) &= -em'\alpha\{(1)-2i(0)\}A_i \\
&\quad - \tfrac{1}{8}e^3m'\alpha\{(3)-(2i-2)(2)-(4i^2+7i+3)(1)+(8i^3+10i^2+2i)(0)\}A_i \\
&\quad - \tfrac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(3)-(2i-4)(2)-(4i^2+4i-2)(1)+8i^3(0)\}A_i \\
&\quad + \tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-(2i-1)(0)\}\{B_{i-1}+B_{i+1}\} \\
(4) &= e'm'\alpha\{(1)-(2i+1)(0)\}A_{i+1} \\
&\quad + \tfrac{1}{4}e^2e'm'\alpha\{(3)-(2i-3)(2)-(4i^2+12i+4)(1)+(8i^3+20i^2+16i+4)(0)\}A_{i+1} \\
&\quad + \tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(3)-(2i-5)(2)-(4i^2+9i-2)(1)+(8i^3+10i^2+i-2)(0)\}A_{i+1} \\
&\quad - \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-2i(0)\}\{B_i+B_{i+2}\} \\
(5) &= \tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(3)-(2i-3)(2)-(4i^2-i+1)(1)+(8i^3-10i^2+i+1)(0)\}A_{i-1} \\
(6) &= -\tfrac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(3)-(2i-4)(2)-(4i^2+17i+8)(1)+(8i^3+30i^2+32i+8)(0)\}A_{i+2} \\
(7) &= -\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(2i+5)(0)\}B_{i+1} \\
(8) &= \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+2i(0)\}B_i \\
(9) &= \tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{(2)-(4i+2)(1)+(4i^2+5i)(0)\}A_i \\
(10) &= -\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(2)-(4i+2)(1)+(4i^2+6i+2)(0)\}A_{i+1} \\
(11) &= \tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(2)-(4i+2)(1)+(4i^2+7i+2)(0)\}A_{i+2} \\
(12) &= \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(0)B_{i+1}
\end{aligned}$$

$$(13) = -\frac{1}{24}e^3 m'\alpha\,\{(3)-(6i+6)(2)+(12i^2+27i+9)(1)-(8i^3+30i^2+26i)(0)\}A_i$$

$$(14) = \frac{1}{8}e^2 e' m'\alpha\,\{(3)-(6i+5)(2)+(12i^2+25i+9)(1)-(8i^3+30i^2+31i+9)(0)\}A_{i+1}$$

$$(15) = -\frac{1}{8}ee'^2 m'\alpha\,\{(3)-(6i+4)(2)+(12i^2+23i+8)(1)-(8i^3+30i^2+32i+8)(0)\}A_{i+2}$$

$$(16) = \frac{1}{24}e'^3 m'\alpha\,\{(3)-(6i+3)(2)+(12i^2+21i+6)(1)-(8i^3+30i^2+29i+6)(0)\}A_{i+3}$$

$$(17) = -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,\{(1)-(2i+3)(0)\}B_{i+1}$$

$$(18) = \frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,\{(1)-2i(0)\}B_{i+2}$$

11.

Ausser Ω selbst wird im Folgenden auch das mit r multiplicirte Differential von Ω nach r gebraucht werden, weshalb die Coefficienten dieses Differentials sogleich abgeleitet werden sollen. Man findet durch das Vorhergehende leicht, dass

$$r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) = \alpha\left(\frac{\partial\Omega}{\partial \alpha}\right)$$

ist, wodurch die verlangten Coefficienten ohne Mühe erhalten werden können. Da aber $a\Omega$ statt Ω entwickelt worden ist, so ist zu bemerken, dass bei der Differentiation von $a\Omega$ das α, welches in jedem Coefficienten als Factor von $m'\alpha$ vorkommt, constant gesetzt werden muss, indem dieses α dem Factor a von Ω entspricht, der unter der Differentiation nicht einbegriffen werden darf. Setzt man nun

$$\begin{aligned} ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \;& \Sigma(1)'\cos(i(g-g')+iK) \\ & +(2)'\cos(i(g-g')+(i+1)K) \\ & +(3)'\cos(g+i(g-g')+iK) \\ & +\text{etc.} \end{aligned}$$

wie oben im Ausdruck von $a\Omega$ des Art. 8, so bekommt man:

$$\begin{aligned}(1)' = \;& m'\alpha(1)A_i+\frac{1}{4}(e^2+e'^2)m'\alpha\{(3)+4(2)-(4i^2-2)(1)\}A_i \\ & -\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}\{B_{i-1}+B_{i+1}\}\end{aligned}$$

$$(2)' = -\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+4(2)-(4i^2+6i)(1)\}A_{i+1}$$

$$(3)' = -em'\alpha\{(2)-(2i-1)(1)\}A_i$$
$$-\tfrac{1}{8}e^3m'\alpha\{(4)-(2i-5)(3)-(4i^2+11i-1)(2)+(8i^3+6i^2-5i-3)(1)\}A_i$$
$$-\tfrac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)-(2i-7)(3)-(4i^2+8i-10)(2)+(8i^3-4i^2-4i+2)(1)\}A_i$$
$$+\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i-3)(1)-(2i-1)(0)\}\{B_{i-1}+B_{i+1}\}$$

$$(4)' = e'm'\alpha\{(2)-2i(1)\}A_{i+1}$$
$$+\tfrac{1}{4}e^2e'm'\alpha\{(4)-(2i-6)(3)-(4i^2+16i-2)(2)+(8i^3+16i^2+4i)(1)\}A_{i+1}$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)-(2i-8)(3)-(4i^2+13i-12)(2)+(8i^3+6i^2-8i)(1)\}A_{i+1}$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i-2)(1)-2i(0)\}\{B_i+B_{i+2}\}$$

$$(5)' = \tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)-(2i-6)(3)-(4i^2+3i-5)(2)+(8i^3-14i^2+2i)(1)\}A_{i-1}$$

$$(6)' = -\tfrac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)-(2i-7)(3)-(4i^2+21i)(2)+(8i^3+26i^2+15i)(1)\}A_{i+2}$$

$$(7)' = -\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+(2i+7)(1)+(2i+5)(0)\}B_{i+1}$$

$$(8)' = \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+(2i+2)(1)+2i(0)\}B_i$$

$$(9)' = \tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)-4i(2)+(4i^2+i-2)(1)\}A_i$$

$$(10)' = -\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-4i(2)+(4i+2i)(1)\}A_{i+1}$$

$$(11)' = \tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4i(2)+(4i^2+3i)(1)\}A_{i+2}$$

$$(12)' = \sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(1)+(0)\}B_{i+1}$$

$$(13)' = -\tfrac{1}{24}e^3m'\alpha\{(4)-(6i+3)(3)+(12i^2+15i-3)(2)-(8i^3+18i^2-i-9)(1)\}A_i$$

$$(14)' = \tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)-(6i+2)(3)+(12i^2+13i-1)(2)-(8i^3+18i^2+6i)(1)\}A_{i+1}$$

$$(15)' = -\tfrac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)-(6i+1)(3)+(12i^2+11i)(2)-(8i^3+18i^2+9i)(1)\}A_{i+2}$$

$$(16)' = \tfrac{1}{24}e'^3m'\alpha\{(4)-6i(3)+(12i^2+9i)(2)-(8i^3+18i^2+8i)(1)\}A_{i+3}$$

$$(17)' = -\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i+1)(1)-(2i+3)(0)\}B_{i+1}$$

$$(18)' = \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i-2)(1)-2i(0)\}B_{i+2}$$

12.

Zur Entwickelung der Störungen der dritten Coordinate wird der Differentialquotient der Störungsfunction nach Z erfordert. Man könnte denselben durch Differentiation von Ω nach J, Π, Π' ableiten, aber um die Grössen dritter Ordnung auch hier zu erhalten, müsste Ω um eine Ordnung weiter entwickelt werden. Ich werde indess hier weiter gehen und den genannten Differentialquotienten bis auf Grössen fünfter Ordnung vollständig entwickeln, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Breitenstörungen des Jupiters und am Ende auch die des Saturns vollständig erhalten zu können. Freilich hätten für diesen Zweck einige Glieder der vierten Ordnung ausgereicht, aber da diese Ordnung nicht ganz übergangen werden kann, so habe ich für dienlich erachtet, etwaiger anderer Anwendungen wegen, sie vollständig zu berücksichtigen.

13.

Den genannten Differentialquotienten habe ich in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten abgeleitet und den folgenden Ausdruck dafür erhalten

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) = -m'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin J r' \sin(f'+\Pi')$$

wo Δ den gegenseitigen Abstand des störenden und des gestörten Planeten bedeutet. Da dieser Ausdruck $\sin J$ zum allgemeinen Factor hat, so braucht man, um die Glieder vierter Ordnung zu erhalten, nur bis zu den Gliedern dritter Ordnung einschliesslich von e, e', $\sin\frac{1}{2}J$ zu gehen. Die erste Entwickelung giebt

$$\frac{1}{m'\sin J}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) = -\frac{r'\sin(f'+\Pi')}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{r'^2}\sin(f'+\Pi')$$
$$-\frac{3}{2}\sin^2\frac{1}{2}J r r'^2 \frac{\sin(f+2f'+\Pi+2\Pi')-2\sin(f+\Pi)-\sin(-f+2f'-\Pi+2\Pi')}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{5}{2}}}$$

und setzt man daher dem Art. 5 analog

$$\frac{a'}{(a^2+a'^2-2aa'\cos G)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{a'^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_i \cos iG$$
$$\frac{aa'^2}{(a^2+a'^2-2aa'\cos G)^{\frac{5}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_i \cos iG$$

so bekommt man zuerst bis auf die hier verlangte Genauigkeit:

$$\frac{r'}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{r'^2} =$$
$$\left\{\begin{array}{l} \quad (0,0)\,E_i \\ +\ (1,0)\,E_i x \\ +\ (0,1)\,E_i x' \end{array}\right\}\cos iG$$
$$-i\,(0,0)\,E_i(y-y')\sin iG$$

$$
\begin{aligned}
&+\left\{\begin{matrix} +\frac{1}{2}(2,0)\,E_i x^2 \\ +\;(1,1)\,E_i x x' \end{matrix}\right\}\cos iG \\
&\qquad -i\,(1,0)\,E_i x\,(y-y')\sin iG \\
&\qquad +\frac{1}{2}(0,2)\,E_i x'^2\cos iG \\
&\qquad -i\,(0,1)\,E_i x'(y-y')\sin iG \\
&+\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{2}i^2\,(0,0)\,E_i\,(y-y')^2 \\ +\frac{1}{6}(3,0)\,E_i x^3 \\ +\frac{1}{2}(2,1)\,E_i x^2 x' \end{matrix}\right\}\cos iG \\
&\qquad -\frac{1}{2}i\,(2,0)\,E_i x^2\,(y-y')\sin iG \\
&\qquad +\frac{1}{2}(1,2)\,E_i x x'^2\cos iG \\
&\qquad -i\,(1,1)\,E_i x x'(y-y')\sin iG \\
&+\left\{\begin{matrix} -\frac{1}{2}i^2\,(1,0)\,E_i x\,(y-y')^2 \\ +\frac{1}{6}(0,3)\,E_i x'^3 \end{matrix}\right\}\cos iG \\
&\qquad -\frac{1}{2}i\,(0,2)\,E_i x'^2\,(y-y')\sin iG \\
&\qquad -\frac{1}{2}i^2\,(0,1)\,E_i x'(y-y')^2\cos iG \\
&\qquad +\frac{1}{6}i^3\,(0,0)\,E_i\,(y-y')^3\sin iG
\end{aligned}
$$

$$
\frac{aa'^2}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}} =
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} (0,0)\,F_i \\ +(1,0)\,F_i x \\ +(0,1)\,F_i x' \end{matrix}\right\}\cos iG \\
&-i\,(0,0)\,F_i\,(y-y')\sin iG
\end{aligned}
$$

14.

Da ferner

$$
\begin{aligned}
\sin(f'+\Pi') &= \sin(g-G+\Pi) \\
&\quad + y'\cos(g-G+\Pi) \\
&\quad - \frac{1}{2}y'^2\sin(g-G+\Pi) \\
&\quad - \frac{1}{6}y'^3\cos(g-G+\Pi) \\
-\sin(f+\Pi) &= -\sin(g+\Pi) \\
&\quad - y\cos(g+\Pi) \\
-\sin(-f+2f'-\Pi+2\Pi') &= -\sin(g-2G+\Pi) \\
&\quad + (y-2y')\cos(g-2G+\Pi) \\
\sin(f+2f'+\Pi+2\Pi') &= \sin(3g-2G+3\Pi) \\
&\quad + (y+2y')\cos(3g-2G+3\Pi)
\end{aligned}
$$

so giebt die Multiplication mit Rücksicht auf die Sätze des Art. 4:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{m'\sin J}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = & \left\{\begin{array}{l} (0,0)\,E_{i+1} \\ +(1,0)\,E_{i+1}x \\ +(0,1)\,E_{i+1}x' \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +(i+1)(0,0)\,E_{i+1}(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{2}(2,0)\,E_{i+1}x^2 \\ +\quad(1,1)\,E_{i+1}xx' \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +(i+1)(1,0)\,E_{i+1}x(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(0,2)\,E_{i+1}x'^2\sin(g+iG+\Pi) \\
& +(i+1)(0,1)\,E_{i+1}x'(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}(i+1)^2(0,0)\,E_{i+1}(y-y')^2 \\ +\frac{1}{6}(3,0)\,E_{i+1}x^3 \\ +\frac{1}{2}(2,1)\,E_{i+1}x^2x' \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(i+1)(2,0)\,E_{i+1}x^2(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(1,2)\,E_{i+1}xx'^2\sin(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(1,1)\,E_{i+1}xx'(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}(i+1)^2(1,0)\,E_{i+1}x(y-y')^2 \\ +\frac{1}{6}(0,3)\,E_{i+1}x'^3 \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(i+1)(0,2)\,E_{i+1}x'^2(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& -\frac{1}{2}(i+1)^2(0,1)\,E_{i+1}x'(y-y')^2\sin(g+iG+\Pi) \\
& -\frac{1}{6}(i+1)^3(0,0)\,E_{i+1}(y-y')^3\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} +(0,0)\,E_{i+1}y' \\ +(1,0)\,E_{i+1}xy' \\ +(0,1)\,E_{i+1}x'y' \end{array}\right\}\cos(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(0,0)\,E_{i+1}(y-y')\,y'\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{2}(2,0)\,E_{i+1}x^2y' \\ +\quad(1,1)\,E_{i+1}xx'y' \end{array}\right\}\cos(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(1,0)\,E_{i+1}x(y-y')\,y'\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(0,2)\,E_{i+1}x'^2y'\cos(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(0,1)\,E_{i+1}x'(y-y')\,y'\sin(g+iG+\Pi) \\
& -\frac{1}{2}(i+1)^2(0,0)\,E_{i+1}(y-y')^2y'\cos(g+iG+\Pi)
\end{aligned}
$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}(0{,}0)\,E_{i+1}y'^2\\ -\frac{1}{2}(1{,}0)\,E_{i+1}xy'^2\\ -\frac{1}{2}(0{,}1)\,E_{i+1}x'y'^2\end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi)$$

$$-\frac{1}{2}(i+1)(0{,}0)\,E_{i+1}(y-y')\,y'^2\cos(g+iG+\Pi)$$

$$-\frac{1}{6}(0{,}0)\,E_{i+1}y'^3\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}0)\,F_i\\ -3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(1{,}0)\,F_ix\\ -3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}1)\,F_ix'\end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi)$$

$$-3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,i\,(0{,}0)\,F_i(y-y')\cos(g+iG+\Pi)$$

$$-3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}0)\,F_iy\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}0)\,F_{i+2}\\ -\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(1{,}0)\,F_{i+2}x\\ -\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}1)\,F_{i+2}x'\end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi)$$

$$-\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(i+2)(0{,}0)\,F_{i+2}(y-y')\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}0)\,F_{i+2}(y-2y')\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}0)\,F_{i+2}\\ +\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(1{,}0)\,F_{i+2}x\\ +\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}1)\,F_{i+2}x'\end{array}\right\}\sin(3g+iG+3\Pi)$$

$$+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(i+2)(0{,}0)\,F_{i+2}(y-y')\cos(3g+iG+3\Pi)$$

$$+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0{,}0)\,F_{i+2}(y+2y')\cos(3g+iG+3\Pi)$$

15.

Durch die Substitution der im Art. 7 gegebenen Werthe von x, x', y, y' und deren Potenzen, welchen die folgenden hinzuzufügen sind:

$$\begin{aligned} xy' = {} & ee'\sin\Gamma \\ & +\tfrac{1}{2}e^2e'\sin(g+\Gamma)+e^2e'\sin(g-\Gamma)-\tfrac{5}{8}ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & -ee'\sin(2g-\Gamma) \\ & -\tfrac{1}{2}e^2e'\sin(3g-\Gamma)-\tfrac{5}{8}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$x'y' = \tfrac{7}{8}e'^3\sin(g-\Gamma) - e'^2\sin(2g-2\Gamma) - \tfrac{9}{8}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$\begin{aligned}(y-y')\,y' = {} & -2e'^2 + 2ee'\cos\Gamma \\ & + \tfrac{5}{4}e^2e'\cos(g+\Gamma) - \tfrac{5}{2}e'^3\cos(g-\Gamma) + \tfrac{5}{4}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & - 2ee'\cos(2g-\Gamma) + 2e'^2\cos(2g-2\Gamma) \\ & - \tfrac{5}{4}e^2e'\cos(3g-\Gamma) - \tfrac{5}{4}ee'^2\cos(3g-2\Gamma) + \tfrac{5}{2}e'^3\cos(3g-3\Gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}x^2y' = {} & -\tfrac{1}{4}e^2e'\sin(g+\Gamma) + \tfrac{1}{2}e^2e'\sin(g-\Gamma) \\ & + \tfrac{1}{4}e^2e'\sin(3g-\Gamma)\end{aligned}$$

$$xx'y' = \tfrac{1}{2}ee'^2\sin(g-2\Gamma) + \tfrac{1}{2}ee'^2\sin(3g-2\Gamma)$$

$$\begin{aligned}x(y-y')\,y' = {} & 2ee'^2\cos g - e^2e'\cos(g+\Gamma) - ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & + e^2e'\cos(3g-\Gamma) - ee'^2\cos(3g-2\Gamma)\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}x'^2y' = \tfrac{1}{4}e'^3\sin(g-\Gamma) + \tfrac{1}{4}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$\begin{aligned}x'(y-y')\,y' = {} & e'^3\cos(g-\Gamma) - ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & + ee'^2\cos(3g-2\Gamma) - e'^3\cos(3g-3\Gamma)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(y-y')^2y' = {} & -4ee'^2\sin g + e^2e'\sin(g+\Gamma) + (2e^2e' + 3e'^3)\sin(g-\Gamma) - 2ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & - e^2e'\sin(3g-\Gamma) + 2ee'^2\sin(3g-2\Gamma) - e'^3\sin(3g-3\Gamma)\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}y'^2 = e'^2 + \tfrac{5}{4}e'^3\cos(g-\Gamma) - e'^2\cos(2g-2\Gamma) - \tfrac{5}{4}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}xy'^2 = {} & -ee'^2\cos g + \tfrac{1}{2}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & + \tfrac{1}{2}ee'^2\cos(3g-2\Gamma)\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}x'y'^2 = -\tfrac{1}{2}e'^3\cos(g-\Gamma) + \tfrac{1}{2}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(y-y')\,y'^2 = {} & 2ee'^2\sin g - 3e'^3\sin(g-\Gamma) + ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & - ee'^2\sin(3g-2\Gamma) + e'^3\sin(3g-3\Gamma)\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{6}y'^3 = e'^3\sin(g-\Gamma) - \tfrac{1}{3}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$y - 2y' = 2e\sin g - 4e'\sin(g-\Gamma)$$

$$y + 2y' = 2e\sin g + 4e'\sin(g-\Gamma)$$

ergiebt sich aus den Entwickelungen des vorigen Artikels:

$$
\begin{aligned}
a^2\left(\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,Z}\right) = \;& \Sigma\,(1)\sin(i(g-g') + iK + \Pi)\\
&+ (2)\sin(i(g-g') + (i-1)K + \Pi)\\
&+ (3)\sin(i(g-g') + (i+1)K + \Pi)\\
&+ (4)\sin(i(g-g') + (i-2)K + \Pi)\\
&+ (5)\sin(g + i(g-g') + iK + \Pi)\\
&+ (6)\sin(g + i(g-g') + (i+1)K + \Pi)\\
&+ (7)\sin(g + i(g-g') + (i-1)K + \Pi)\\
&+ (8)\sin(g + i(g-g') + iK - \Pi)\\
&+ (9)\sin(g + i(g-g') + (i+1)K - \Pi)\\
&+ (10)\sin(g + i(g-g') + (i+2)K - \Pi)\\
&+ (11)\sin(2g + i(g-g') + iK + \Pi)\\
&+ (12)\sin(2g + i(g-g') + (i+1)K + \Pi)\\
&+ (13)\sin(2g + i(g-g') + (i-1)K + \Pi)\\
&+ (14)\sin(2g + i(g-g') + (i+2)K + \Pi)\\
&+ (15)\sin(2g + i(g-g') + iK + 3\Pi)\\
&+ (16)\sin(2g + i(g-g') + (i-1)K + 3\Pi)\\
&+ (17)\sin(2g + i(g-g') + iK - \Pi)\\
&+ (18)\sin(2g + i(g-g') + (i+1)K - \Pi)\\
&+ (19)\sin(2g + i(g-g') + (i+2)K - \Pi)\\
&+ (20)\sin(2g + i(g-g') + (i+3)K - \Pi)\\
&+ (21)\sin(3g + i(g-g') + iK + \Pi)\\
&+ (22)\sin(3g + i(g-g') + (i+1)K + \Pi)\\
&+ (23)\sin(3g + i(g-g') + (i+2)K + \Pi)\\
&+ (24)\sin(3g + i(g-g') + iK + 3\Pi)\\
&+ (25)\sin(4g + i(g-g') + iK + \Pi)\\
&+ (26)\sin(4g + i(g-g') + (i+1)K + \Pi)\\
&+ (27)\sin(4g + i(g-g') + (i+2)K + \Pi)\\
&+ (28)\sin(4g + i(g-g') + (i+3)K + \Pi)\\
&+ (29)\sin(4g + i(g-g') + iK + 3\Pi)\\
&+ (30)\sin(4g + i(g-g') + (i+1)K + 3\Pi)
\end{aligned}
$$

16.

Die Coefficienten des vorstehenden Ausdrucks sind die folgenden:

$$
\begin{aligned}
(1) = \;& \tfrac{1}{2}\,e\,m'a^2\sin J\{(1,0) + 2(i+1)(0,0)\}E_{i+1}\\
&+ \tfrac{1}{16}\,e^3 m'a^2\sin J\{(3,0) + (2i+4)(2,0) - (4(i+1)^2 - 7i - 4)(1,0) -\\
&\qquad - (8(i+1)^3 - 10(i+1)^2 + 2(i+1))(0,0)\}E_{i+1}\\
&+ \tfrac{1}{8}\,e\,e'^2 m'a^2\sin J\{(1,2) + 2(1,1) + 2(i+1)(0,2) - (4(i+1)^2 - 8i - 4)(1,0) +\\
&\qquad + 4(i+1)(0,1) - (8(i+1)^3 - 16(i+1)^2 + 8(i+1))(0,0)\}E_{i+1}\\
&- \tfrac{3}{4}\,e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a^2\sin J\{(1,0) + 2(i+1)(0,0)\}\{2F_i + F_{i+2}\}
\end{aligned}
$$

$$(2) = \frac{1}{2} e' m' a^2 \sin J \{(0,1) - (2i-2)(0,0)\} E_i$$
$$+ \frac{1}{8} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) - (2i-2)(2,0) + 2(1,1) - (4i-4)(1,0) - 4i^2 (0,1) +$$
$$+ (8i^3 - 8i^2)(0,0)\} E_i$$
$$+ \frac{1}{16} e'^3 m' a^2 \sin J \{(0,3) - (2i-4)(0,2) - (4i^2 - i)(0,1) + (8i^3 - 14i^2 + 6i)(0,0)\} E_i$$
$$- \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' a^2 \sin J \{(0,1) - (2i-2)(0,0)\}\{2F_{i-1} + F_{i+1}\}$$

$$(3) = \frac{1}{16} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) + (2i+2)(2,0) + (4i+6)(1,1) + (8(i+2)^2 - 12(i+2) + 4)(1,0) +$$
$$+ (4(i+2)^2 - 5(i+2))(0,1) + (8(i+2)^3 - 18(i+2)^2 + 10(i+2))(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(4) = \frac{1}{16} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) - (4i-6)(1,1) - 2(i-1)(0,2) + (4(i-1)^2 - 3(i-1) - 1)(1,0) +$$
$$+ (8(i-1)^2 - 4(i-1))(0,1) - (8(i-1)^3 - 6(i-1)^2 - 2(i-1))(0,0)\} E_{i-1}$$

$$(5) = - m' a^2 \sin J\,(0,0)\, E_{i+1}$$
$$- \frac{1}{4} e^2 m' a^2 \sin J \{(2,0) + 2(1,0) - 4(i+1)^2 (0,0)\} E_{i+1}$$
$$- \frac{1}{4} e'^2 m' a^2 \sin J \{(0,2) + 2(0,1) - 4i^2 (0,0)\} E_{i+1}$$
$$+ \frac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' a^2 \sin J\,(0,0)\,\{2F_i + F_{i+2}\}$$

$$(6) = - \frac{1}{4} e e' m' a^2 \sin J \{(1,1) + (2i+2)(1,0) + (2i+4)(0,1) + (4(i+2)^2 - 4(i+2))(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(7) = - \frac{1}{4} e e' m' a^2 \sin J \{(1,1) - (2i-2)(1,0) - 2i(0,1) + (4i^2 - 4i)(0,0)\} E_i$$

$$(8) = \frac{1}{8} e^2 m' a^2 \sin J \{(2,0) - (4i-2)(1,0) + (4i^2 - 3i - 1)(0,0)\} E_{i-1}$$

$$(9) = \frac{1}{4} e e' m' a^2 \sin J \{(1,1) + (2i+2)(1,0) - 2i(0,1) - (4i^2 + 4i)(0,0)\} E_i$$

$$(10) = \frac{1}{8} e'^2 m' a^2 \sin J \{(0,2) + (4i+6)(0,1) + (4i^2 + 11i + 6)(0,0)\} E_{i+1}$$

$$(11) = \frac{1}{2} e m' a^2 \sin J \{(1,0) - (2i+2)(0,0)\} E_{i+1}$$
$$+ \frac{1}{16} e^3 m' a^2 \sin J \{(3,0) - 2i(2,0) - (4(i+1)^2 + 7(i+1) + 3)(1,0) +$$
$$+ (8(i+1)^3 + 10(i+1)^2 + 2(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$
$$+ \frac{1}{8} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) + 2(1,1) - 2(i+1)(0,2) - (4(i+1)^2 - 8(i+1) + 4)(1,0) -$$
$$- 4(i+1)(0,1) + (8(i+1)^3 - 16(i+1)^2 + 8(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$
$$- \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' a^2 \sin J \{(1,0) - 2(i+1)(0,0)\}\{2F_i + F_{i+2}\}$$

$$(12) = \frac{1}{2} e' m' a^2 \sin J \{(0,1) + 2(i+1)(0,0)\} E_{i+2}$$
$$+ \frac{1}{8} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) + (2i+2)(2,0) + 2(1,1) + (4i+4)(1,0) -$$
$$- 4(i+2)^2 (0,1) - (8(i+2)^3 - 8(i+2)^2)(0,0)\} E_{i+2}$$
$$+ \frac{1}{16} e'^3 m' a^2 \sin J \{(0,3) + 2(i+2)(0,2) - (4(i+2)^2 - 15(i+2) + 14)(0,1) -$$
$$- (8(i+2)^3 - 34(i+2)^2 + 46(i+2) - 20)(0,0)\} E_{i+2}$$
$$- \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' a^2 \sin J \{(0,1) + 2(i+1)(0,0)\}\{2F_{i+1} + F_{i+3}\}$$

$$(13) = \frac{1}{16} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) - (2i-2)(2,0) - (4i+2)(1,1) + (8i^2 - 4i - 4)(1,0) + \\ + (4i^2+5i)(0,1) - (8i^3+2i^2-10i)(0,0)\} E_i$$

$$(14) = \frac{1}{16} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) + (4i+6)(1,1) + 2(i+3)(0,2) + (4(i+3)^2 - 13(i+3)+7)(1,0) + \\ + (8(i+3)^2 - 12(i+3))(0,1) + (8(i+3)^3 - 26(i+3)^2 + 18(i+3))(0,0)\} E_{i+3}$$

$$(15) = \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(1,0) + (2i+6)(0,0)\} F_{i+2}$$

$$(16) = \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(0,1) - (2i-2)(0,0)\} F_{i+1}$$

$$(17) = -\frac{1}{48} e^3 m' a^2 \sin J \{(3,0) - 6i(2,0) + (12(i-1)^2 + 27(i-1)+9)(1,0) - \\ - (8(i-1)^3 + 30(i-1)^2 + 26(i-1))(0,0)\} E_{i-1}$$

$$(18) = -\frac{1}{16} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) + (2i+2)(2,0) - (4i+2)(1,1) - (8i^2+12i+4)(1,0) + \\ + (4i^2+5i)(0,1) + (8i^3+18i^2+10i)(0,0)\} E_i$$

$$(19) = -\frac{1}{16} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) + (4i+6)(1,1) - 2(i+1)(0,2) + (4(i+1)^2 + 3(i+1) - 1)(1,0) - \\ - (8(i+1)^2 + 4(i+1))(0,1) - (8(i+1)^3 + 6(i+1)^2 - 2(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$

$$(20) = -\frac{1}{48} e'^3 m' a \sin J \{(0,3) + 6(i+2)(0,2) + (12(i+2)^2 - 3(i+2) - 6)(0,1) + \\ + (8(i+2)^3 - 6(i+2)^2 - 10(i+2) + 4)(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(21) = -\frac{1}{8} e^2 m' a^2 \sin J \{(2,0) - (4i+6)(1,0) + (4(i+1)^2 + 5(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$

$$(22) = -\frac{1}{4} e e' m' a^2 \sin J \{(1,1) + (2i+2)(1,0) - (2i+4)(0,1) - (4(i+2)^2 - 4(i+2))(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(23) = -\frac{1}{8} e'^2 m' a^2 \sin J \{(0,2) + (4i+6)(0,1) + (4(i+3)^2 - 13(i+3)+9)(0,0)\} E_{i+3}$$

$$(24) = -\frac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J (0,0) F_{i+2}$$

$$(25) = \frac{1}{48} e^3 m' a^2 \sin J \{(3,0) - (6i+12)(2,0) + (12(i+1)^2 + 27(i+1)+9)(1,0) - \\ - (8(i+1)^3 + 30(i+1)^2 + 26(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$

$$(26) = \frac{1}{16} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) + (2i+2)(2,0) - (4i+10)(1,1) - (8(i+2)^2 - 4(i+2) - 4)(1,0) + \\ + (4(i+2)^2 + 5(i+2))(0,1) + (8(i+2)^3 + 2(i+2)^2 - 10(i+2))(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(27) = \frac{1}{16} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) + (4i+6)(1,1) - 2(i+3)(0,2) + (4(i+3)^2 - 13(i+3)+9)(1,0) - \\ - (8(i+3)^2 - 12(i+3))(0,1) - (8(i+3)^3 - 26(i+3)^2 + 18(i+3))(0,0)\} E_{i+3}$$

$$(28) = \frac{1}{48} e'^3 m' a^2 \sin J \{(0,3) + (6i+12)(0,2) + (12(i+4)^2 - 51(i+4) + 48)(0,1) + \\ + (8(i+4)^3 - 54(i+4)^2 + 110(i+4) - 64)(0,0)\} E_{i+4}$$

$$(29) = \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(1,0) - (2i+6)(0,0)\} F_{i+2}$$

$$(30) = \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(0,1) + (2i+2)(0,0)\} F_{i+3}$$

17.

Es ist dem Vorhergehenden zufolge, wenn wie oben

$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

gesetzt wird,

$$\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} - \alpha^2 = a^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} E_i \cos iG$$

Setzt man also wieder

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos iG$$

so bekommt man im Allgemeinen

$$a^2 E_i = \alpha^2 B_i$$

mit der Ausnahme, dass

$$a^2 E_0 = \alpha^2 B_0 - \alpha^2$$

wird. Mit Anwendung der im Vorhergehenden eingeführten abgekürzten Bezeichnungen ergiebt sich daher allgemein

$$\begin{aligned}
a^2(0,0)E_i &= \alpha(0)B_i \\
a^2(1,0)E_i &= \alpha(1)B_i \\
a^2(0,1)E_i &= -\alpha(1)B_i - 2\alpha(0)B_i \\
a^2(2,0)E_i &= \alpha(2)B_i \\
a^2(1,1)E_i &= -\alpha(2)B_i - 3\alpha(1)B_i \\
a^2(0,2)E_i &= \alpha(2)B_i + 6\alpha(1)B_i + 6\alpha(0)B_i \\
a^2(3,0)E_i &= \alpha(3)B_i \\
a^2(2,1)E_i &= -\alpha(3)B_i - 4\alpha(2)B_i \\
a^2(1,2)E_i &= \alpha(3)B_i + 8\alpha(2)B_i + 12\alpha(1)B_i \\
a^2(0,3)E_i &= -\alpha(3)B_i - 12\alpha(2)B_i - 36\alpha(1)B_i - 24\alpha(0)B_i
\end{aligned}$$

und der Ausnahmefall wird eben so berücksichtigt wie oben, nemlich indem man allenthalben

$$(0)B_0 - \alpha \quad \text{statt} \quad (0)B_0$$

anwendet.

Es wird ferner

$$\frac{\alpha^3}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{5}{2}}} = a^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} F_i \cos iG$$

und wenn man hierauf

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{5}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_i \cos iG$$

setzt, so erhält man ohne Ausnahme

$$a^2 F_i = \alpha^3 C_i$$

Sei nun dem Vorhergehenden analog

$$(0)\, C_i = \alpha^2 C_i$$
$$(1)\, C_i = \alpha^3 \left(\frac{\partial\, C_i}{\partial\, \alpha}\right)$$

dann giebt die vorstehende Relation

$$a^2\,(0{,}0)\,F_i = \quad \alpha\,(0)\,C_i$$
$$a^2\,(1{,}0)\,F_i = \quad \alpha\,(1)\,C_i + \alpha\,(0)\,C_i$$
$$a^2\,(0{,}1)\,F_i = -\alpha\,(1)\,C_i - 3\,\alpha\,(0)\,C_i$$

welche Werthe in den Ausdrücken der Coefficienten des vorigen Artikels anzuwenden sind.

18.

Diese Coefficienten werden somit

$$(1) = \tfrac{1}{2}\, e\, m'\alpha \sin J\{(1)+(2i+2)\,(0)\}\, B_{i+1}$$
$$+\tfrac{1}{16}\, e^3 m'\alpha \sin J\{(3)+(2i+4)\,(2)-(4i^2+i)\,(1)-(8i^3+14i^2+6i)\,(0)\}\, B_{i+1}$$
$$+\tfrac{1}{8}\, e\, e'^2 m'\alpha \sin J\{(3)+(2i+8)\,(2)-(4i^2-8i-14)\,(1)-(8i^3+8i^2-4i-4)\,(0)\}\, B_{i+1}$$
$$-\tfrac{3}{4}\, e \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \sin J\{(1)+(2i+3)\,(0)\}\{2C_i+C_{i+2}\}$$

$$(2) = -\tfrac{1}{2}\, e'm'\alpha \sin J\{(1)+2i(0)\}\, B_i$$
$$-\tfrac{1}{8}\, e^2 e' m'\alpha \sin J\{(3)+(2i+4)\,(2)-(4i^2-4i-2)\,(1)-8i^3(0)\}\, B_i$$
$$-\tfrac{1}{16}\, e'^3 m'\alpha \sin J\{(3)+(2i+8)\,(2)-(4i^2-13i-12)\,(1)-(8i^3-6i^2-8i)\,(0)\}\, B_i$$
$$+\tfrac{3}{4}\, e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \sin J\{(1)+(2i+1)\,(0)\}\{2C_{i-1}+C_{i+1}\}$$

$$(3) = -\tfrac{1}{16}\, e^2 e' m'\alpha \sin J\{(3)+(2i+8)\,(2)-(4i^2-3i-12)\,(1)-(8i^3+22i^2+12i)\,(0)\}\, B_{i+2}$$

$$(4) = \tfrac{1}{16}\, e\, e'^2 m'\alpha \sin J\{(3)+(2i+4)\,(2)-(4i^2-9i)\,(1)-(8i^3-14i^2+6i)\,(0)\}\, B_{i-1}$$

$$(5) = -\,m'\alpha \sin J\,(0)\, B_{i+1}$$
$$-\tfrac{1}{4}\, e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+2\,(1)-(4i^2+8i+4)\,(0)\}\, B_{i+1}$$
$$-\tfrac{1}{4}\, e'^2 m'\alpha \sin J\{(2)+4\,(1)-(4i^2-2)\,(0)\}\, B_{i+1}$$
$$+\tfrac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \sin J\,(0)\,\{2C_i+C_{i+2}\}$$

$$(6) = \tfrac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{(2) + 5(1) - (4i^2+8i)(0)\} B_{i+2}$$

$$(7) = \tfrac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{(2) + (1) - 4i^2(0)\} B_i$$

$$(8) = \tfrac{1}{8} e^2 m' \alpha \sin J \{(2) - (4i-2)(1) + (4i^2-3i-1)(0)\} B_{i-1}$$

$$(9) = -\tfrac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{(2) - (4i-1)(1) + 4i^2(0)\} B_i$$

$$(10) = \tfrac{1}{8} e'^2 m' \alpha \sin J \{(2) - 4i(1) + (4i^2+3i)(0)\} B_{i+1}$$

$$\begin{aligned}(11) = {} & \tfrac{1}{2} e m' \alpha \sin J \{(1) - (2i+2)(0)\} B_{i+1} \\ & + \tfrac{1}{16} e^3 m' \alpha \sin J \{(3) - 2i(2) - (4i^2+15i+14)(1) + (8i^3+34i^2+46i+20)(0)\} B_{i+1} \\ & + \tfrac{1}{8} e e'^2 m' \alpha \sin J \{(3) - (2i-4)(2) - (4i^2+8i+2)(1) + (8i^3+8i^2-4i-4)(0)\} B_{i+1} \\ & + \tfrac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J \{(1) - (2i+1)(0)\} \{2C_i + C_{i+2}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(12) = {} & -\tfrac{1}{2} e' m' \alpha \sin J \{(1) - 2i(0)\} B_{i+2} \\ & - \tfrac{1}{8} e^2 e' m' \alpha \sin J \{(3) - (2i-4)(2) - (4i^2+20i+14)(1) + (8i^3+32i^2+32i)(0)\} B_{i+2} \\ & - \tfrac{1}{16} e'^3 m' \alpha \sin J \{(3) - (2i-8)(2) - (4i^2+13i-12)(1) + (8i^3+6i^2-8i)(0)\} B_{i+2} \\ & + \tfrac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J \{(1) - (2i-1)(0)\} \{2C_{i+1} + C_{i+3}\}\end{aligned}$$

$$(13) = -\tfrac{1}{16} e^2 e' m' \alpha \sin J \{(3) - 2i(2) - (4i^2+3i+2)(1) + (8i^3+10i^2)(0)\} B_i$$

$$(14) = \tfrac{1}{16} e e'^2 m' \alpha \sin J \{(3) - (2i-8)(2) - (4i^2+25i)(1) + (8i^3+30i^2+18i)(0)\} B_{i+3}$$

$$(15) = \tfrac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J \{(1) + (2i+7)(0)\} C_{i+2}$$

$$(16) = -\tfrac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J \{(1) + (2i+1)(0)\} C_{i+1}$$

$$(17) = -\tfrac{1}{48} e^3 m' \alpha \sin J \{(3) - 6i(2) + (12i^2+3i-6)(1) - (8i^3+6i^2-10i-4)(0)\} B_{i-1}$$

$$(18) = \tfrac{1}{16} e^2 e' m' \alpha \sin J \{(3) - 6i(2) + (12i^2+5i-2)(1) - (8i^3+10i^2)(0)\} B_i$$

$$(19) = -\tfrac{1}{16} e e'^2 m' \alpha \sin J \{(3) - 6i(2) + (12i^2+7i)(1) - (8i^3+14i^2+6i)(0)\} B_{i+1}$$

$$(20) = \tfrac{1}{48} e'^3 m' \alpha \sin J \{(3) - 6i(2) + (12i^2+9i)(1) - (8i^3+18i^2+8i)(0)\} B_{i+2}$$

$$(21) = -\tfrac{1}{8} e^2 m' \alpha \sin J \{(2) - (4i+6)(1) + (4i^2+13i+9)(0)\} B_{i+1}$$

$$(22) = \tfrac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{(2) - (4i+3)(1) + (4i^2+8i)(0)\} B_{i+2}$$

$$(23) = -\tfrac{1}{8} e'^2 m' \alpha \sin J \{(2) - 4i(1) + (4i^2+3i)(0)\} B_{i+3}$$

$$(24) = -\tfrac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J (0) C_{i+2}$$

$$(25) = \frac{1}{48} e^3 m' \alpha \sin J \{(3) - (6i+12)(2) + (12i^2+51i+48)(1) - (8i^3+54i^2+110i+64)(0)\} B_{i+1}$$

$$(26) = -\frac{1}{16} e^2 e' m' \alpha \sin J \{(3) - (6i+8)(2) + (12i^2+37i+16)(1) - (8i^3+42i^2+52i)(0)\} B_{i+2}$$

$$(27) = \frac{1}{16} e e'^2 m' \alpha \sin J \{(3) - (6i+4)(2) + (12i^2+23i)(1) - (8i^3+30i^2+18i)(0)\} B_{i+3}$$

$$(28) = -\frac{1}{48} e'^3 m' \alpha \sin J \{(3) - 6i(2) + (12i^2+9i)(1) - (8i^3+18i^2+8i)(0)\} B_{i+4}$$

$$(29) = \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J \{(1) - (2i+5)(0)\} C_{i+2}$$

$$(30) = -\frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J \{(1) - (2i-1)(0)\} C_{i+3}$$

19.

Im Vorhergehenden ist stillschweigend angenommen worden, dass der störende Planet ein oberer sei, denn um die Entwickelung der Wurzelgrössen der Störungsfunction ausführen zu können, muss $\alpha < 1$ sein, und diese Bedingung setzt $a' > a$ voraus. Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall, und nehmen $a' < a$ an. Setzen wir demzufolge

$$\alpha' = \frac{a'}{a}$$

und

$$(1+\alpha'^2 - 2\alpha' \cos G)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_i \cos iG$$

$$(1+\alpha'^2 - 2\alpha' \cos G)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B'_i \cos iG$$

$$(1+\alpha'^2 - 2\alpha' \cos G)^{-\frac{5}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C'_i \cos iG$$

Da hieraus in Verbindung mit dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen entstehen:

$$(1+\alpha^2 - 2\alpha \cos G)^{-\frac{1}{2}} = \alpha' (1+\alpha'^2 - 2\alpha' \cos G)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1+\alpha^2 - 2\alpha \cos G)^{-\frac{3}{2}} = \alpha'^3 (1+\alpha'^2 - 2\alpha' \cos G)^{-\frac{3}{2}}$$

$$(1+\alpha^2 - 2\alpha \cos G)^{-\frac{5}{2}} = \alpha'^5 (1+\alpha'^2 - 2\alpha' \cos G)^{-\frac{5}{2}}$$

so ergeben sich sogleich die Relationen

$$\alpha A_i = A'_i$$
$$\alpha^2 B_i = \alpha' B'_i$$
$$\alpha^3 C_i = \alpha'^2 C'_i$$

Führt man nun, dem Vorhergehenden analog, die abgekürzten Bezeichnungen

$$(0)A'_i = A'_i, \qquad (0)B'_i = \alpha' B'_i$$
$$(1)A'_i = \alpha'\left(\frac{\partial A'_i}{\partial \alpha'}\right), \qquad (1)B'_i = \alpha'^2\left(\frac{\partial B'_i}{\partial \alpha'}\right)$$
$$(2)A'_i = \alpha'^2\left(\frac{\partial^2 A'_i}{\partial \alpha'^2}\right), \qquad (2)B'_i = \alpha'^3\left(\frac{\partial^2 B'_i}{\partial \alpha'^2}\right), \qquad (0)C'_i = \alpha'^2 C'_i$$
etc.

ein, so erhält man durch wiederholte Differentiationen, und mit Berücksichtigung der Gleichung $\alpha\alpha' = 1$, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha(0)A_i &= (0)A'_i \\
\alpha(1)A_i &= -(1)A'_i - (0)A'_i \\
\alpha(2)A_i &= (2)A'_i + 4(1)A'_i + 2(0)A'_i \\
\alpha(3)A_i &= -(3)A'_i - 9(2)A'_i - 18(1)A'_i - 6(0)A'_i \\
\alpha(4)A_i &= (4)A'_i + 16(3)A'_i + 72(2)A'_i + 96(1)A'_i + 24(0)A'_i \\
\alpha(0)B_i &= (0)B'_i \\
\alpha(1)B_i &= -(1)B'_i - 3(0)B'_i \\
\alpha(2)B_i &= (2)B'_i + 8(1)B'_i + 12(0)B'_i \\
\alpha(0)C_i &= (0)C'_i
\end{aligned}$$

20.

Die Ausdrücke des vorigen Artikels können auf zweierlei Arten angewandt werden. Man kann durch dieselben in den Ausdrücken der Coefficienten der Störungsfunction (1) bis (18), der Coefficienten des Differentials derselben nach r, (1)' bis (18)', und der Coefficienten des Differentials derselben nach Z, (1) bis (30), die A_i, B_i, C_i eliminiren und durch die A'_i, B'_i, C'_i ersetzen, wodurch alle diese Coefficienten zu Functionen der zuletzt genannten Grössen gemacht werden. Man kann aber auch, nachdem man die A'_i, B'_i, C'_i durch die bekannten Formeln gerechnet hat, die Gleichungen des vorigen Artikels anwenden, um aus ihnen die numerischen Werthe der A_i, B_i, C_i zu berechnen, und diese dann in die unveränderten Ausdrücke der oben genannten Coefficienten substituiren.

Das zweite Glied der Störungsfunction wird hierauf eben so berücksichtigt wie oben, nemlich dadurch, dass man allenthalben

$$\alpha(0)A_1 - \frac{1}{2\alpha'^2} \quad \text{statt} \quad \alpha(0)A_1$$

$$\alpha(1)A_1 - \frac{1}{2\alpha'^2} \quad - \quad \alpha(1)A_1$$

$$\alpha(0)B_0 - \frac{1}{\alpha'^2} \quad - \quad \alpha(0)B_0$$

schreibt. Will man statt dessen die Wirkung des zweiten Gliedes der Störungsfunction an den A'_i, B'_i anbringen, so geben die obigen Gleichungen durch Differentiation leicht zu erkennen, dass man allenthalben

$$(0)A'_1 - \frac{1}{2\alpha'^2} \quad \text{statt} \quad (0)A'_1$$

$$(1)A'_1 + \frac{1}{\alpha'^2} \quad - \quad (1)A'_1$$

$$(2)A'_1 - \frac{3}{\alpha'^2} \quad - \quad (2)A'_1$$

$$(3)A'_1 + \frac{12}{\alpha'^2} \quad - \quad (3)A'_1$$

$$(4)A'_1 - \frac{60}{\alpha'^2} \quad - \quad (4)A'_1$$

und

$$(0)B'_0 - \frac{1}{\alpha'^2} \quad - \quad (0)B'_0$$

$$(1)B'_0 + \frac{3}{\alpha'^2} \quad - \quad (1)B'_0$$

$$(2)B'_0 - \frac{12}{\alpha'^2} \quad - \quad (2)B'_0$$

u. s. w. setzen muss.

21.

Man kann den Fall, in welchem der störende Planet ein unterer ist, auch etwas anders behandeln. Im §. 3 der zweiten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten habe ich gezeigt, dass wenn man statt des vollständigen Werthes der Störungsfunction

$$\Omega = m'\left\{\frac{1}{r} + \left(\frac{r'}{r^2} - \frac{r}{r'^2}\right)H\right\}$$

in die Gleichungen der Bewegung eines Planeten oder Kometen setzt, diese durch endliche Ausdrücke integrabel werden. Die Integrale, die man durch diese Substitution erhält, sind die folgenden:

$$n\delta z = -\frac{m'}{a^2\sqrt{1-e^2}}rr'\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\sin(f-f'+\Pi-\Pi')+\sin^2\tfrac{1}{2}J\sin(f+f'+\Pi+\Pi')\}$$

$$\nu = \frac{1}{3}m' + \frac{m'}{a(1-e^2)}r'\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f-f'+\Pi-\Pi')+\sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f+f'+\Pi+\Pi')\}$$
$$+\frac{m'e}{a(1-e^2)}r'\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f'-\Pi+\Pi')+\sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f'+\Pi+\Pi')\}$$

$$u = -m'\sin J\frac{r'}{a}\sin(f'+\Pi')\cos i$$

Benutzt man diese Integrale, so muss man, um die übrigen Störungsglieder zu erhalten, von dem vollständigen Ausdruck der Störungsfunction den oben angeführten Theil derselben abziehen. Es wird also hierauf

$$\Omega = m'\left\{\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{r}-\frac{r'}{r^2}H\right\}$$

welcher Ausdruck den Reihenentwickelungen zu Grunde zu legen ist.

22.

Man sieht ohne Weiteres, dass die Entwickelung der aus Δ entstehenden Glieder dieselbe bleibt wie vorher, und dass nur die Berücksichtigung des zweiten und dritten Gliedes der Störungsfunction anders ausfällt wie vorher. Die A'_i, B'_i, C'_i ergeben sich wieder unmittelbar und sind in die Gleichungen des vorvorigen Artikels zu substituiren, um die A_i, B_i, C_i zu erhalten, wenn man nicht vorgezogen hat, die dort angedeutete Elimination auszuführen.

Die Berücksichtigung des zweiten und dritten Gliedes der Störungsfunction wird nun, wie sich leicht ergiebt, dadurch erlangt, dass man allenthalben

$$\begin{array}{lcl}
(0)\,A'_0 - 1 & \text{statt} & (0)\,A'_0 \\
(0)\,A'_1 - \frac{1}{2}\alpha' & - & (0)\,A'_1 \\
(1)\,A'_1 - \frac{1}{2}\alpha' & - & (1)\,A'_1 \\
(0)\,B'_0 - \alpha' & - & (0)\,B''_0
\end{array}$$

schreibt.

§. 2. Entwickelung der allgemeinen Störungsglieder der mittleren Länge und des Radius Vectors.

23.

Nachdem die Entwickelung der Störungsfunction und ihres Differentialquotienten nach r im Vorhergehenden ausgeführt worden ist, können wir zur Entwickelung der Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors schreiten. Nehmen wir fürerst nur auf die erste Potenz der störenden Kraft Rücksicht, so sind die geeignetsten Formeln die folgenden, die wohl gegenwärtig keiner besonderen Erklärung bedürfen:

$$n\delta z = n\int \overline{W} dt$$

$$\nu = -\frac{1}{2} n \int \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \gamma}\right) dt$$

für welche das Differential von W sich zuerst unter der folgenden Form darstellt

$$\frac{dW}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2\frac{\varrho}{r}\cos(f-\varphi) - 1 + \frac{2\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(f-\varphi)-1] \right\} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial f}\right)$$
$$+ 2\frac{an}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\varrho}{r}\sin(f-\varphi)\, r\left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)$$

und φ, ϱ, γ Functionen bedeuten, die aus der unbestimmten Grösse τ eben so zusammengesetzt sind, wie f, r, g aus der Zeit t. Der Strich über den Functionen bedeutet, dass man in denselben τ in t, oder γ in g verwandeln soll. Zur Controle der Entwickelungen kann man die Gleichung

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\nu = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial f}\right) dt$$

anwenden.

24.

Dieser Ausdruck für dW kann zwei andere, wesentlich von einander verschiedene, Formen annehmen. Erwägt man, dass

$$\frac{\varrho}{a(1-e^2)} = 1 - e\frac{\varrho\cos\varphi}{a(1-e^2)}$$

ist, so lehrt der Anblick sogleich, dass dW aus drei verschiedenen Theilen besteht, von welchen der eine von τ unabhängig, der andere mit $\varrho\cos\varphi$, und der dritte mit $\varrho\sin\varphi$ multiplicirt ist. Diese Umformung ist so einfach auszuführen, dass ich gleich das Resultat derselben hinschreiben kann. Setzt man

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\Xi}{dt} + \frac{dY}{dt}\left(\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e\right) + \frac{d\Psi}{dt}\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

so ergeben sich

$$\frac{d\Xi}{n\,dt} = -3\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\frac{ae\cos f}{r} + \frac{e\cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2}\right]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) + \frac{ae\sin f}{r}r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\frac{dY}{n\,dt} = \quad 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\frac{a\cos f}{r} + \frac{\cos f + e}{1-e^2}\right]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) + \frac{a\sin f}{r}r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\frac{d\Psi}{n\,dt} = \quad 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\frac{a\sin f}{r} + \frac{\sin f}{1-e^2}\right]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) - \frac{a\cos f}{r}r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} = \frac{ae\cos f}{r\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\cos f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right) = \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial e}\right) = \left\{\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right\}\sin f$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial e}\right) = -a\cos f$$

womit sogleich

$$\frac{d\Xi}{n\,dt} = -3a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)$$

$$\frac{dY}{n\,dt} = \frac{2}{e}\left\{a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right)\right\}$$

$$\frac{d\Psi}{n\,dt} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial e}\right)$$

hervorgehen. Diese sehr einfachen Ausdrücke leiden indess an dem Uebelstande, dass sie die Entwickelung der Störungsfunction um eine Ordnung mehr verlangen, als schliesslich beibehalten werden soll.

25.

Um die zweite Umformung von dW zu erhalten, bemerke ich, dass aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right)$$

in Folge der im vorigen Artikel angeführten Ausdrücke der Differentiale von f und r nach g

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$

folgt. Eliminirt man hiermit aus dem vorstehenden Ausdruck für dY das Differential von Ω nach f, so wird

$$\frac{dY}{n\,dt} = \frac{2}{1-e^2}\left\{\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e}\,a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) + \frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}\,ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

Dieselbe Elimination verwandelt den Ausdruck für $d\Psi$ zunächst in den folgenden

$$\frac{d\Psi}{n\,dt} = \frac{2}{1-e^2}\left\{\left[\frac{r}{a}\sin f + \frac{r^2\sin f}{a^2(1-e^2)}\right]a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \left[\frac{a\cos f}{r}\sqrt{1-e^2} + \frac{e\sin^2 f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{re\sin^2 f}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right]ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

Es ist aber

$$1 = \frac{r}{a(1-e^2)} + \frac{re\cos f}{a(1-e^2)}$$

und macht man hiemit im Gliede $\frac{a\cos f}{r}\sqrt{1-e^2}$ des vorstehenden Ausdruckes r zum Factor, so wird dieses ganze Glied

$$-\left[\frac{r\cos f}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{re}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right]ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$$

Nun hat man identisch

$$0 = -re\cos f - r + a(1-e^2)$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{e}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$ und addirt das Product zum vorstehenden Ausdruck, so wird dieser

$$-\left[\frac{r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}} + 2\,\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right]ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial\left[\frac{r}{a}\sin f + \frac{r^2\sin f}{a^2(1-e^2)}\right]}{\partial g} = \frac{a}{r}\cos f\sqrt{1-e^2} + \frac{\cos f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\sin^2 f}{\sqrt{1-e^2}} + 2\,\frac{re\sin^2 f}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2r\cos f + 3ae}{a\sqrt{1-e^2}}$$

nach Anwendung derselben Reductionen wie vorher. Hiermit ergiebt sich also

$$\frac{d\Psi}{n\,dt} = \frac{2}{1-e^2}\left\{\int\frac{2r\cos f + 3ae}{a\sqrt{1-e^2}}\,dg - a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \frac{r\cos f + 2ae}{a\sqrt{1-e^2}}\,ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

wo das Integral des ersten Gliedes so genommen werden muss, dass es mit g zugleich verschwindet.

26.

Substituirt man nun die im vorigen und vorvorigen Artikel erhaltenen Werthe von $d\Upsilon$, $d\Psi$ und $d\Xi$ in den Ausdruck für dW, so ergiebt sich, wenn man

$$\frac{dW}{n\,dt} = Aa\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) + Bar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$$

setzt,

$$\begin{aligned} A &= -3 \\ &\quad + \frac{1}{1-e^2}\left\{\left(2\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + 3e\right)\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} + 2\frac{\varrho\sin\varphi}{a\sqrt{1-e^2}}\int\left(2\frac{r}{a}\cos f + 3e\right)dg\right\} \\ B &= \frac{1}{1-e^2}\left\{\left(2\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + 3e\right)\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} - 2\frac{\varrho\sin\varphi}{a\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\cos f + 2e\right)\right\} \end{aligned}$$

Die Entwickelung dieser beiden Functionen ist sehr einfach, da alle Glieder derselben sich auf r^2 oder ϱ^2 und die Differentiale dieser Grössen hinführen lassen. Denn da

$$\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2 e\,\partial g}\right) = 2\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}, \qquad \left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\,\partial e}\right) = -2\frac{r}{a}\cos f$$

sind, so werden

$$\begin{aligned} A &= -3 \\ &\quad + \frac{1}{1-e^2}\left\{\left[\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2\,\partial e}\right) - 3e\right]\frac{r^2-a^2(1-e^2)}{a^2 e} - \left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2 e\,\partial\gamma}\right)\int\left[\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\,\partial e}\right) - 3e\right]dg\right\} \\ B &= \frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2 e\,\partial\gamma}\right)\left[\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\,\partial e}\right) - 4e\right] - \left[\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2\,\partial e}\right) - 3e\right]\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2 e\,\partial g}\right)\right\} \end{aligned}$$

27.

Die Entwickelung der A und B braucht sich, wie ich längst bewiesen habe, in Bezug auf g nur auf die Glieder zu erstrecken, in deren Argumenten $+\gamma$ oder $-\gamma$ vorkommen, indem sich nach der ersten Integration die Glieder, deren Argumente die Vielfachen von $\pm\gamma$ enthalten, aus jenen auf die einfachste Weise berechnen lassen. Um die hier festgesetzte Grenze der Genauigkeit zu erreichen, ist nun

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\cos g - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4\right)\cos 2g - \frac{1}{4}e^3\cos 3g - \frac{1}{6}e^4\cos 4g$$

und in Folge der vorstehenden Bemerkung braucht man, wie weit man auch die Genauigkeit treiben will, nur zu setzen

$$\frac{\varrho^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \left(2e - \frac{1}{4}e^3 \pm \ldots\right)\cos\gamma$$

Man erhält hieraus für unseren Zweck

$$\left(\frac{\partial \cdot \varrho^2}{a^2 e \partial \gamma}\right) = (2 - \tfrac{1}{4}e^2) \sin\gamma$$

$$\left(\frac{\partial \cdot \varrho^2}{a^2 \partial e}\right) - 3e = -(2 - \tfrac{3}{4}e^2) \cos\gamma$$

$$\left(\frac{\partial \cdot r^2}{a^2 e \partial g}\right) = (2 - \tfrac{1}{4}e^2) \sin g + (e - \tfrac{1}{3}e^3) \sin 2g + \tfrac{3}{4}e^2 \sin 3g + \tfrac{2}{3}e^3 \sin 4g$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial \cdot r^2}{a^2 \partial e}\right) - 3e\right] dg = -(2 - \tfrac{3}{4}e^2) \sin g - (\tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{3}e^3) \sin 2g - \tfrac{1}{4}e^2 \sin 3g - \tfrac{1}{6}e^3 \sin 4g$$

$$\frac{r^2 - a^2(1-e^2)}{a^2 e} = \tfrac{5}{2}e - (2 - \tfrac{1}{4}e^2) \cos g - (\tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{6}e^3) \cos 2g - \tfrac{1}{4}e^2 \cos 3g - \tfrac{1}{6}e^3 \cos 4g$$

$$\left(\frac{\partial \cdot r^2}{a^2 \partial e}\right) - 4e = -e - (2 - \tfrac{3}{4}e^2) \cos g - (e - \tfrac{2}{3}e^3) \cos 2g - \tfrac{3}{4}e^2 \cos 3g - \tfrac{2}{3}e^3 \cos 4g$$

und hieraus mit wenig Mühe

$$\begin{aligned}
A = &-3 + (4 + 2e^2) \cos(\gamma - g), & B = &-(2 + e^2) \sin(\gamma - g) \\
&+ (e + \tfrac{1}{4}e^3) \cos(\gamma - 2g) & &-(e + \tfrac{1}{4}e^3) \sin(\gamma - 2g) \\
&- (5e + \tfrac{25}{8}e^3) \cos\gamma & &-(e + \tfrac{7}{8}e^3) \sin\gamma \\
&+ \tfrac{1}{2}e^2 \cos(\gamma - 3g) & &-\tfrac{3}{4}e^2 \sin(\gamma - 3g) \\
&+ \tfrac{1}{3}e^3 \cos(\gamma - 4g) & &-\tfrac{2}{3}e^3 \sin(\gamma - 4g) \\
&+ \tfrac{1}{24}e^3 \cos(\gamma + 2g) & &+\tfrac{1}{24}e^3 \sin(\gamma + 2g)
\end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieses Verfahrens braucht man die Störungsfunction nur bis auf Grössen derselben Ordnung zu entwickeln, die man schliesslich beibehalten will.

28.

Um zu zeigen, wie man die im vorigen Artikel weggelassenen Glieder erhält, stelle ich die verschiedenen, in den Argumenten des Ausdrucks von W enthaltenen, von den mittleren Anomalieen g und g' abhängigen Glieder unter dem allgemeinen Zeichen βt dar, und kann demzufolge dem Ausdruck von W die folgende Form geben

$$W = \Sigma \alpha^{(\varkappa)} \frac{\sin}{\cos} (\varkappa\gamma + \beta t)$$

Setzt man hierauf

$$\frac{r^2}{a^2} = \Sigma R^{(\varkappa)} \cos \varkappa g$$

und

$$\eta^{(\varkappa)} = \frac{\left(\frac{\partial R^{(\varkappa)}}{\partial e}\right)}{2\left(\frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}\right)} + \varkappa \frac{R^{(\varkappa)}}{2R^{(1)}}$$

$$\theta^{(\varkappa)} = \frac{\left(\frac{\partial R^{(\varkappa)}}{\partial e}\right)}{2\left(\frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}\right)} - \varkappa \frac{R^{(\varkappa)}}{2R^{(1)}}$$

so wird

$$\alpha^{(\pm\varkappa)} = \eta^{(\varkappa)}\alpha^{(\pm 1)} + \theta^{(\varkappa)}\alpha^{(\mp 1)}$$

woraus alle $\alpha^{(\varkappa)}$ auf die einfachste Weise erhalten werden können, wenn $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(-1)}$ gegeben sind. Ich bemerke beiläufig, dass dieser Satz sich auf alle Potenzen der störenden Massen erstreckt. Für den gegenwärtigen Fall reichen die folgenden Werthe aus:

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{8}e^3, \quad \theta^{(2)} = -\frac{1}{48}e^3$$

$$\eta^{(3)} = \frac{3}{8}e^2$$

$$\eta^{(4)} = \frac{1}{3}e^3$$

29.

Vor der Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke wird es dienlich sein, die Störungsfunction und deren Differential nach r möglichst zusammen zu ziehen. Zu dem Ende kann nicht blos jede Gruppe von Gliedern der Störungsfunction, die dieselbe Function von g und g' enthält, in zwei Glieder zusammen gezogen werden, von welchen das eine mit dem Cosinus und das andere mit dem Sinus dieser Function multiplicirt ist, sondern es können auch die negativen Werthe des Index i auf entsprechende Weise in positive verwandelt werden, wobei jedoch vorläufig der Werth $i = 0$ ausgeschlossen werden muss. Bezeichnet man, um anzudeuten, ob in den Coefficienten (1), (2), etc. der Störungsfunction i positiv oder negativ anzunehmen ist, diese mit $(1)_i$, $(2)_i$, etc., $(1)_{-i}$, $(2)_{-i}$ etc. und setzt

$$\begin{aligned}(-3,i,c) = {} & (13)_{-i}\cos iK + (14)_{-i}\cos(i-1)K + (15)_{-i}\cos(i-2)K + (16)_{-i}\cos(i-3)K \\ & + (17)_{-i}\cos(iK-2\Pi) + (18)_{-i}\cos((i-1)K-2\Pi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-3,i,s) = {} & (13)_{-i}\sin iK + (14)_{-i}\sin(i-1)K + (15)_{-i}\sin(i-2)K + (16)_{-i}\sin(i-3)K \\ & + (17)_{-i}\sin(iK-2\Pi) + (18)_{-i}\sin((i-1)K-2\Pi)\end{aligned}$$

$$(-2,i,c) = (9)_{-i}\cos iK+(10)_{-i}\cos(i-1)K+(11)_{-i}\cos(i-2)K+(12)_{-i}\cos(iK-2\Pi)$$

$$(-2,i,s) = (9)_{-i}\sin iK+(10)_{-i}\sin(i-1)K+(11)_{-i}\sin(i-2)K+(12)_{-i}\sin(iK-2\Pi)$$

$$(-1,i,c) = (3)_{-i}\cos iK+(4)_{-i}\cos(i-1)K+(5)_{-i}\cos(i+1)K+(6)_{-i}\cos(i-2)K$$
$$+(7)_{-i}\cos(iK-2\Pi)+(8)_{-i}\cos((i+1)K-2\Pi)$$

$$(-1,i,s) = (3)_{-i}\sin iK+(4)_{-i}\sin(i-1)K+(5)_{-i}\sin(i+1)K+(6)_{-i}\sin(i-2)K$$
$$+(7)_{-i}\sin(iK-2\Pi)+(8)_{-i}\sin((i+1)K-2\Pi)$$

$$(0,i,c) = \{(1)_i+(1)_{-i}\}\cos iK+(2)_i\cos(i+1)K+(2)_{-i}\cos(i-1)K$$

$$(0,i,s) = \{(1)_i+(1)_{-i}\}\sin iK+(2)_i\sin(i+1)K+(2)_{-i}\sin(i-1)K$$

$$(1,i,c) = (3)_i\cos iK+(4)_i\cos(i+1)K+(5)_i\cos(i-1)K+(6)_i\cos(i+2)K$$
$$+(7)_i\cos(iK+2\Pi)+(8)_i\cos((i-1)K+2\Pi)$$

$$(1,i,s) = (3)_i\sin iK+(4)_i\sin(i+1)K+(5)_i\sin(i-1)K+(6)_i\sin(i+2)K$$
$$+(7)_i\sin(iK+2\Pi)+(8)_i\sin((i-1)K+2\Pi)$$

$$(2,i,c) = (9)_i\cos iK+(10)_i\cos(i+1)K+(11)_i\cos(i+2)K+(12)_i\cos(iK+2\Pi)$$

$$(2,i,s) = (9)_i\sin iK+(10)_i\sin(i+1)K+(11)_i\sin(i+2)K+(12)_i\sin(iK+2\Pi)$$

$$(3,i,c) = (13)_i\cos iK+(14)_i\cos(i+1)K+(15)_i\cos(i+2)K+(16)_i\cos(i+3)K$$
$$+(17)_i\cos(iK+2\Pi)+(18)_i\cos((i+1)K+2\Pi)$$

$$(3,i,s) = (13)_i\sin iK+(14)_i\sin(i+1)K+(15)_i\sin(i+2)K+(16)_i\sin(i+3)K$$
$$+(17)_i\sin(iK+2\Pi)+(18)_i\sin((i+1)K+2\Pi)$$

und eben so

$$(-3,i,c)' = (13)'_{-i}\cos iK+(14)'_{-i}\cos(i-1)K+(15)'_{-i}\cos(i-2)K+(16)'_{-i}\cos(i-3)K$$
$$+(17)'_{-i}\cos(iK-2\Pi)+(18)'_{-i}\cos((i-1)K-2\Pi)$$

u. s. w., wo wie früher

$$K = \Pi - \Pi',$$

so erhält man, wenn wieder

$$\Gamma = g - g'$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
a\Omega = \quad & (-3,i,c)\cos(-3g+i\Gamma) && -(-3,i,s)\sin(-3g+i\Gamma)\\
+&(-2,i,c)\cos(-2g+i\Gamma) && -(-2,i,s)\sin(-2g+i\Gamma)\\
+&(-1,i,c)\cos(-g+i\Gamma) && -(-1,i,s)\sin(-g+i\Gamma)\\
+&(0,i,c)\cos i\Gamma && -(0,i,s)\sin i\Gamma\\
+&(1,i,c)\cos(g+i\Gamma) && -(1,i,s)\sin(g+i\Gamma)\\
+&(2,i,c)\cos(2g+i\Gamma) && -(2,i,s)\sin(2g+i\Gamma)\\
+&(3,i,c)\cos(3g+i\Gamma) && -(3,i,s)\sin(3g+i\Gamma)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \quad & (-3,i,c)'\cos(-3g+i\Gamma) && -(-3,i,s)\sin(-3g+i\Gamma)\\
+ & (-2,i,c)'\cos(-2g+i\Gamma) && -(-2,i,s)\sin(-2g+i\Gamma)\\
+ & (-1,i,c)'\cos(-g+i\Gamma) && -(-1,i,s)\sin(-g+i\Gamma)\\
+ & (0,i,c)'\cos i\Gamma && -(0,i,s)\sin i\Gamma\\
+ & (1,i,c)'\cos(g+i\Gamma) && -(1,i,s)\sin(g+i\Gamma)\\
+ & (2,i,c)'\cos(2g+i\Gamma) && -(2,i,s)\sin(2g+i\Gamma)\\
+ & (3,i,c)'\cos(3g+i\Gamma) && -(3,i,s)\sin(3g+i\Gamma)
\end{aligned}
$$

woraus

$$
\begin{aligned}
a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = & -(i-3)(-3,i,c)\sin(-3g+i\Gamma) && -(i-3)(-3,i,s)\cos(-3g+i\Gamma)\\
& -(i-2)(-2,i,c)\sin(-2g+i\Gamma) && -(i-2)(-2,i,s)\cos(-2g+i\Gamma)\\
& -(i-1)(-1,i,c)\sin(-g+i\Gamma) && -(i-1)(-1,i,s)\cos(-g+i\Gamma)\\
& -i(0,i,c)\sin i\Gamma && -i(0,i,s)\cos i\Gamma\\
& -(i+1)(1,i,c)\sin(g+i\Gamma) && -(i+1)(1,i,s)\cos(g+i\Gamma)\\
& -(i+2)(2,i,c)\sin(2g+i\Gamma) && -(i+2)(2,i,s)\cos(2g+i\Gamma)\\
& -(i+3)(3,i,c)\sin(3g+i\Gamma) && -(i+3)(3,i,s)\cos(3g+i\Gamma)
\end{aligned}
$$

folgt.

30.

Multiplicirt man hierauf mit den im Art. 27 gegebenen Entwickelungen der Factoren A und B, und setzt.

$$
\begin{aligned}
(0,-3,i,s) = \quad & -3(i-3)(-3,i,c)\\
(-1,-2,i,s) = \quad & 2(i-3)(-3,i,c) && -(-3,i,c)'\\
& -\tfrac{5}{2}e(i-2)(-2,i,c) && -\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)'\\
& +\tfrac{1}{48}e^3 i(0,i,c) && +\tfrac{1}{48}e^3(0,i,c)'\\
(1,-4,i,s) = \quad & 2(i-3)(-3,i,c) && +(-3,i,c)'\\
& +\tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,c) && +\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)'\\
& +\tfrac{1}{4}e^2(i-1)(-1,i,c) && +\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,c)'\\
& +\tfrac{1}{6}e^3 i(0,i,c) && +\tfrac{1}{3}e^3(0,i,c)'\\
(0,-3,i,c) = \quad & -3(i-3)(-3,i,s)\\
(-1,-2,i,c) = \quad & 2(i-3)(-3,i,s) && -(-3,i,s)'\\
& -\tfrac{5}{2}e(i-2)(-2,i,s) && -\tfrac{1}{2}e(-2,i,s)'\\
& +\tfrac{1}{48}e^3 i(0,i,s) && +\tfrac{1}{48}e^3(0,i,s)'\\
(1,-4,i,c) = \quad & 2(i-3)(-3,i,c) && +(-3,i,c)'\\
& +\tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,c) && +\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)'\\
& +\tfrac{1}{4}e^2(i-1)(-1,i,c) && +\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,c)'\\
& +\tfrac{1}{6}e^3 i(0,i,c) && +\tfrac{1}{3}e^3(0,i,c)'
\end{aligned}
$$

$$(0,-2,i,s) = -3(i-2)(-2,i,c)$$

$$\begin{aligned}(-1,-1,i,s) = {} & 2(i-2)(-2,i,c) & -(-2,i,c)' \\ & -\tfrac{5}{2}e(i-1)(-1,i,c) & -\tfrac{1}{2}e(-1,i,c)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,-3,i,s) = {} & 2(i-2)(-2,i,c) & +(-2,i,c)' \\ & +\tfrac{1}{2}e(i-1)(-1,i,c) & +\tfrac{1}{2}e(-1,i,c)' \\ & +\tfrac{1}{4}e^2 i(0,i,c) & +\tfrac{3}{8}e^2(0,i,c)'\end{aligned}$$

$$(0,-2,i,c) = -3(i-2)(-2,i,s)$$

$$\begin{aligned}(-1,-1,i,c) = {} & 2(i-2)(-2,i,s) & -(-2,i,s)' \\ & -\tfrac{5}{2}e(i-1)(-1,i,s) & -\tfrac{1}{2}e(-1,i,s)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,-3,i,c) = {} & 2(i-2)(-2,i,s) & +(-2,i,s)' \\ & +\tfrac{1}{2}e(i-1)(-1,i,s) & +\tfrac{1}{2}e(-1,i,s)' \\ & +\tfrac{1}{4}e^2 i(0,i,s) & +\tfrac{3}{8}e^2(0,i,s)'\end{aligned}$$

$$(0,-1,i,s) = -3(i-1)(-1,i,c)$$

$$\begin{aligned}(-1,0,i,s) = {} & \tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,c) & -\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)' \\ & +(2+e^2)(i-1)(-2,i,c) & -(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,c)' \\ & -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i(0,i,c) & -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)(0,i,c)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,-2,i,s) = {} & -\tfrac{5}{2}e(i-2)(-2,i,c) & +\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)' \\ & +(2+e^2)(i-1)(-1,i,c) & +(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,c)' \\ & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i(0,i,c) & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)(0,i,c)' \\ & +\tfrac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,c) & +\tfrac{3}{8}e^2(1,i,c)'\end{aligned}$$

$$(0,-1,i,c) = -3(i-1)(-1,i,s)$$

$$\begin{aligned}(-1,0,i,c) = {} & \tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,s) & -\tfrac{1}{2}e(-2,i,s)' \\ & +(2+e^2)(i-1)(-1,i,s) & -(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,s)' \\ & -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i(0,i,s) & -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)(0,i,s)'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,-2,i,c) = {} & -\tfrac{5}{2}e(i-2)(-2,i,s) & +\tfrac{1}{2}e(-2,i,s)' \\ & +(2+e^2)(i-1)(-1,i,s) & +(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,s)' \\ & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i(0,i,s) & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)(0,i,s)' \\ & +\tfrac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,s) & +\tfrac{3}{8}e^2(1,i,s)'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(0,0,i,s) &= -3\,i\,(0,i,c)\\
(-1,1,i,s) &= \tfrac{1}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,c) && -\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,c)'\\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,c) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,c)'\\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+1)\,(1,i,c) && -\tfrac{1}{2}e\,(1,i,c)'\\
(1,-1,i,s) &= -\tfrac{5}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,c) && +\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,c)'\\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,c) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+1)\,(1,i,c) && +\tfrac{1}{2}e\,(1,i,c)'\\
(0,0,i,c) &= -3\,i\,(0,i,s)\\
(-1,1,i,c) &= \tfrac{1}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,s) && -\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,s)'\\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,s) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,s)'\\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+1)\,(1,i,s) && -\tfrac{1}{2}e\,(1,i,s)'\\
(1,-1,i,c) &= -\tfrac{5}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,s) && +\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,s)'\\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,s) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,s)'\\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+1)\,(1,i,s) && +\tfrac{1}{2}e\,(1,i,s)'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0,1,i,s) &= -3\,(i+1)\,(1,i,c)\\
(-1,2,i,s) &= \tfrac{1}{4}e^2(i-1)\,(-1,i,c) && -\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,c)'\\
&\quad +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i\,(0,i,c) && -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,(0,i,c)'\\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,c) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,c)'\\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+2)\,(2,i,c) && -\tfrac{1}{2}e\,(2,i,c)'\\
(1,0,i,s) &= -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i\,(0,i,c) && +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)\,(0,i,c)'\\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,c) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+2)\,(2,i,c) && +\tfrac{1}{2}e\,(2,i,c)'\\
(0,1,i,c) &= -3\,(i+1)\,(1,i,s)\\
(-1,2,i,c) &= \tfrac{1}{4}e^2(i-1)\,(-1,i,s) && -\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,s)'\\
&\quad +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i\,(0,i,s) && -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,(0,i,s)'\\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,s) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,s)'\\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+2)\,(2,i,s) && -\tfrac{1}{2}e\,(2,i,s)'\\
(1,0,i,c) &= -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i\,(0,i,s) && +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)\,(0,i,s)'\\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,s) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,s)'\\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+2)\,(2,i,s) && +\tfrac{1}{2}e\,(2,i,s)'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
(0,2,i,s) = & -3(i+2)(2,i,c) & & \\
(-1,3,i,s) = & \frac{1}{4}e^2 i\,(0,i,c) & -\frac{3}{8}e^2(0,i,c)' \\
& +\frac{1}{2}e\,(i+1)(1,i,c) & -\frac{1}{2}e\,(1,i,c)' \\
& +2(i+2)(2,i,c) & -(2,i,c)' \\
(1,1,i,s) = & -\frac{5}{2}e\,(i+1)(1,i,c) & +\frac{1}{2}e\,(1,i,c)' \\
& +2(i+2)(2,i,c) & +(2,i,c)' \\
(0,2,i,c) = & -3(i+2)(2,i,s) & \\
(-1,3,i,c) = & \frac{1}{4}e^2 i\,(0,i,s) & -\frac{3}{8}e^2(0,i,s)' \\
& +\frac{1}{2}e\,(i+1)(1,i,s) & -\frac{1}{2}e\,(1,i,s)' \\
& +2(i+2)(2,i,s) & -(2,i,s)' \\
(1,1,i,c) = & -\frac{5}{2}e\,(i+1)(1,i,s) & +\frac{1}{2}e\,(1,i,s)' \\
& +2(i+2)(2,i,s) & +(2,i,s)'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
(0,3,i,s) = & -3(i+3)(3,i,c) & \\
(-1,4,i,s) = & \frac{1}{6}e^3 i\,(0,i,c) & -\frac{1}{3}e^3(0,i,c)' \\
& +\frac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,c) & -\frac{3}{8}e^2(1,i,c)' \\
& +\frac{1}{2}e\,(i+2)(2,i,c) & -\frac{1}{2}e\,(2,i,c)' \\
& +2(i+3)(3,i,c) & -(3,i,c)' \\
(1,2,i,s) = & \frac{1}{48}e^3 i\,(0,i,c) & -\frac{1}{48}e^3(0,i,c)' \\
& -\frac{5}{2}e\,(i+2)(2,i,c) & +\frac{1}{2}e\,(2,i,c)' \\
& +2(i+3)(3,i,c) & +(3,i,c)' \\
(0,3,i,c) = & -3(i+3)(3,i,s) & \\
(-1,4,i,c) = & \frac{1}{6}e^3 i\,(0,i,s) & -\frac{1}{3}e^3(0,i,s)' \\
& +\frac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,s) & -\frac{3}{8}e^2(1,i,s)' \\
& +\frac{1}{2}e\,(i+2)(2,i,s) & -\frac{1}{2}e\,(2,i,s)' \\
& +2(i+3)(3,i,s) & -(3,i,s)' \\
(1,2,i,c) = & \frac{1}{48}e^3 i\,(0,i,s) & -\frac{1}{48}e^3(0,i,s)' \\
& -\frac{5}{2}e\,(i+2)(2,i,s) & +\frac{1}{2}e\,(2,i,s)' \\
& +2(i+3)(3,i,s) & +(3,i,s)'
\end{array}
$$

dann sind diese Grössen die Coefficienten von dW, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet*).

*) Die vorstehenden Ausdrücke habe ich nur entwickelt, um ihre Zusammensetzung zu zeigen, empfehle sie aber nicht zur Anwendung. Wenn man die Zusammenziehungen des vorigen Artikels ausgeführt hat, dann ist es bei Weitem vortheilhafter, die Multiplicationen mit A und B mechanisch, so wie ich es früher gezeigt habe, auszuführen. Diese gehen leicht und sicher von statten, und man kann die stets vorhandenen, unmerklichen Glieder sofort erkennen und weglassen.

Wir schreiben ferner

$$1-\frac{n'}{n}=\mu$$

wo n und n' wieder die mittleren Bewegungen bedeuten, und

$$\{0,0,i,s\}=\frac{(0,0,i,s)}{i\mu}\,, \qquad \{-1,1,i,s\}=\frac{(-1,1,i,s)}{i\mu+1}$$

u. s. w., oder überhaupt, wenn man die beiden ersten Indices durch die allgemeinen Zeichen p und q ersetzt,

$$\{p,q,i,s\}=\frac{(p,q,i,s)}{i\mu+q}$$

$$\{p,q,i,c\}=\frac{(p,q,i,c)}{i\mu+q}$$

Alsdann sind diese Grössen die Coefficienten von W, und zwar haben die mit dem Index s versehenen das wahre, die mit dem Index c das entgegengesetzte Zeichen. Stellt man dieselben zusammen, und ergänzt die im Vorhergehenden weggelassenen Glieder durch den Satz des Art. 28, so erhält man*):

$$\begin{aligned}
W = \;& \{0,-3,i,s\}\cos(-3g+i\Gamma) && -\{0,-3,i,c\}\sin(-3g+i\Gamma)\\
&+\{-1,-2,i,s\}\cos(-\gamma-2g+i\Gamma) && -\{-1,-2,i,c\}\sin(-\gamma-2g+i\Gamma)\\
&\left.\begin{array}{l}+\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,s\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,s\}\end{array}\right\}\cos(-2\gamma-g+i\Gamma) && \left.\begin{array}{l}-\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,c\}\\ +\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,c\}\end{array}\right\}\sin(-2\gamma-g+i\Gamma)\\
&+\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,s\}\cos(-3\gamma+i\Gamma) && -\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,c\}\sin(-3\gamma+i\Gamma)\\
&+\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,s\}\cos(-4\gamma+g+i\Gamma) && -\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,c\}\sin(-4\gamma+g+i\Gamma)\\
&+\{1,-4,i,s\}\cos(\gamma-4g+i\Gamma) && -\{1,-4,i,c\}\sin(\gamma-4g+i\Gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\{0,-2,i,s\}\cos(-2g+i\Gamma) && -\{0,-2,i,c\}\sin(-2g+i\Gamma)\\
&+\{-1,-1,i,s\}\cos(-\gamma-g+i\Gamma) && -\{-1,-1,i,c\}\sin(-\gamma-g+i\Gamma)\\
&+\frac{1}{2}e\{-1,0,i,s\}\cos(-2\gamma+i\Gamma) && -\frac{1}{2}e\{-1,0,i,c\}\sin(-2\gamma+i\Gamma)\\
&+\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,s\}\cos(-3\gamma+g+i\Gamma) && -\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,c\}\sin(-3\gamma+g+i\Gamma)\\
&+\{1,-3,i,s\}\cos(\gamma-3g+i\Gamma) && -\{1,-3,i,c\}\sin(\gamma-3g+i\Gamma)
\end{aligned}$$

---

*) Auch diese Integration und die einfache Berechnung der Ergänzungsglieder kann man sofort nach den oben empfohlenen mechanischen Multiplicationen vornehmen und ausführen.

$$+\{0,-1,i,s\}\cos(-g+i\Gamma) \qquad -\{0,-1,i,c\}\sin(-g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,0,i,s\}\cos(-\gamma+i\Gamma) \qquad -\{-1,0,i,c\}\sin(-\gamma+i\Gamma)$$
$$+(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,s\}\cos(-2\gamma+g+i\Gamma) \qquad -(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,c\}\sin(-2\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2\{-1,2,i,s\}\cos(-3\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{3}{8}e^2\{-1,2,i,c\}\sin(-3\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$+\{1,-2,i,s\}\cos(\gamma-2g+i\Gamma) \qquad -\{1,-2,i,c\}\sin(\gamma-2g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{1,-3,i,s\}\cos(2\gamma-3g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{1,-3,i,c\}\sin(2\gamma-3g+i\Gamma)$$

$$+\{0,0,i,s\}\cos i\Gamma \qquad -\{0,0,i,c\}\sin i\Gamma$$
$$+\{-1,1,i,s\}\cos(-\gamma+g+i\Gamma) \qquad -\{-1,1,i,c\}\sin(-\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{-1,2,i,s\}\cos(-2\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{-1,2,i,c\}\sin(-2\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$+\{1,-1,i,s\}\cos(\gamma-g+i\Gamma) \qquad -\{1,-1,i,c\}\sin(\gamma-g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{1,-2,i,s\}\cos(2\gamma-2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{1,-2,i,c\}\sin(2\gamma-2g+i\Gamma)$$

$$+\{0,1,i,s\}\cos(g+i\Gamma) \qquad -\{0,1,i,c\}\sin(g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,2,i,s\}\cos(-\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\{-1,2,i,c\}\sin(-\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{-1,3,i,s\}\cos(-2\gamma+3g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{-1,3,i,c\}\sin(-2\gamma+3g+i\Gamma)$$
$$+\{1,0,i,s\}\cos(\gamma+i\Gamma) \qquad -\{1,0,i,c\}\sin(\gamma+i\Gamma)$$
$$+(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,s\}\cos(2\gamma-g+i\Gamma) \qquad -(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,c\}\sin(2\gamma-g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2\{1,-2,i,s\}\cos(3\gamma-2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{3}{8}e^2\{1,-2,i,c\}\sin(3\gamma-2g+i\Gamma)$$

$$+\{0,2,i,s\}\cos(2g+i\Gamma) \qquad -\{0,2,i,c\}\sin(2g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,3,i,s\}\cos(-\gamma+3g+i\Gamma) \qquad -\{-1,3,i,c\}\sin(-\gamma+3g+i\Gamma)$$
$$+\{1,1,i,s\}\cos(\gamma+g+i\Gamma) \qquad -\{1,1,i,c\}\sin(\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{1,0,i,s\}\cos(2\gamma+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{1,0,i,c\}\sin(2\gamma+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2\{1,-1,i,s\}\cos(3\gamma-g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{3}{8}e^2\{1,-1,i,c\}\sin(3\gamma-g+i\Gamma)$$

$$+\{0,3,i,s\}\cos(3g+i\Gamma) \qquad -\{0,3,i,c\}\sin(3g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,4,i,s\}\cos(-\gamma+4g+i\Gamma) \qquad -\{-1,4,i,c\}\sin(-\gamma+4g+i\Gamma)$$
$$+\{1,2,i,s\}\cos(\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\{1,2,i,c\}\sin(\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}e\{1,1,i,s\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,s\}\end{matrix}\right\}\cos(2\gamma+g+i\Gamma) \qquad \left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}e\{1,1,i,c\}\\ +\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,c\}\end{matrix}\right\}\sin(2\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,s\}\cos(3\gamma+i\Gamma) \qquad -\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,c\}\sin(3\gamma+i\Gamma)$$
$$+\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,s\}\cos(4\gamma-g+i\Gamma) \qquad -\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,c\}\sin(4\gamma-g+i\Gamma)$$

31.

Verwandelt man nun γ in g, oder mit anderen Worten, addirt man die Coefficienten jeder Abtheilung von W, und integrirt von Neuem, so ergiebt sich

$$n\delta z = \frac{\left.\begin{matrix}\{0,-3,i,s\}+\{-1,-2,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,s\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,s\}+\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,s\}\\ +\{1,-4,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-3}\sin(-3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-3,i,c\}+\{-1,-2,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,c\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,c\}+\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,c\}\\ +\{1,-4,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-3}\cos(-3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-2,i,s\}+\{-1,-1,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,0,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,s\}+\{1,-3,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-2}\sin(-2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-2,i,c\}+\{-1,-1,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,0,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,c\}+\{1,-3,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-2}\cos(-2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-1,i,s\}+\{-1,0,i,s\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,2,i,s\}+\{1,-2,i,s\}+\frac{1}{2}e\{1,-3,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-1}\sin(-g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-1,i,c\}+\{-1,0,i,c\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,2,i,c\}+\{1,-2,i,c\}+\frac{1}{2}e\{1,-3,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-1}\cos(-g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,0,i,s\}+\{-1,1,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,2,i,s\}\\ +\{1,-1,i,s\}+\frac{1}{2}e\{1,-2,i,s\}\end{array}\right\}}{i\mu}\sin i\Gamma$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,0,i,c\}+\{-1,1,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,2,i,c\}\\ +\{1,-1,i,c\}+\frac{1}{2}e\{1,-2,i,c\}\end{array}\right\}}{i\mu}\cos i\Gamma$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,1,i,s\}+\{-1,2,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,3,i,s\}\\ +\{1,0,i,s\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-2,i,s\}\end{array}\right\}}{i\mu+1}\sin(g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,1,i,c\}+\{-1,2,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,3,i,c\}\\ +\{1,0,i,c\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-2,i,c\}\end{array}\right\}}{i\mu+1}\cos(g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,2,i,s\}+\{-1,3,i,s\}+\{1,1,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,0,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-1,i,s\}\end{array}\right\}}{i\mu+2}\sin(2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,2,i,c\}+\{-1,3,i,c\}+\{1,1,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,0,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-1,i,c\}\end{array}\right\}}{i\mu+2}\cos(2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,3,i,s\}+\{-1,4,i,s\}+\{1,2,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,s\}-\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,s\}\\ +\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,s\}\end{array}\right\}}{i\mu+3}\sin(3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{0,3,i,c\}+\{-1,4,i,c\}+\{1,2,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,c\}-\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,c\}\\ +\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,c\}\end{array}\right\}}{i\mu+3}\cos(3g+i\Gamma)$$

Differentiirt man W nach γ, addirt wieder die Coefficienten jeder Abtheilung, und integrirt von Neuem, so ergiebt sich, nachdem das Integral mit -2 dividirt worden ist:

$$\nu=\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,-2,i,s\}+e\{-1,-1,i,s\}-\frac{1}{24}e^3\{1,-1,i,s\}\\ +\frac{9}{8}e^2\{-1,0,i,s\}+\frac{4}{3}e^3\{-1,1,i,s\}-\{1,-4,i,s\}\end{array}\right\}}{2(i\mu-3)}\cos(-3g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,-2,i,c\}+e\{-1,-1,i,c\}-\frac{1}{24}e^3\{1,-1,i,c\}\\ +\frac{9}{8}e^2\{-1,0,i,c\}+\frac{4}{3}e^3\{-1,1,i,c\}-\{1,-4,i,c\}\end{array}\right\}}{2(i\mu-3)}\sin(-3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\{-1,-1,i,s\}+e\{-1,0,i,s\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,1,i,s\}-\{1,-3,i,s\}}{2(i\mu-2)}\cos(-2g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\{-1,-1,i,c\}+e\{-1,0,i,c\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,1,i,c\}-\{1,-3,i,c\}}{2(i\mu-2)}\sin(-2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\{-1,0,i,s\}+(e-\frac{1}{4}e^3)\{-1,1,i,s\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,2,i,s\}-\{1,-2,i,s\}-e\{1,-3,i,s\}}{2(i\mu-1)}\cos(-g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\{-1,0,i,c\}+(e-\frac{1}{4}e^3)\{-1,1,i,c\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,2,i,c\}-\{1,-2,i,c\}-e\{1,-3,i,c\}}{2(i\mu-1)}\sin(-g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\{-1,1,i,s\}+e\{-1,2,i,s\}-\{1,-1,i,s\}-e\{1,-2,i,s\}}{2i\mu}\cos i\Gamma$$

$$-\frac{\{-1,1,i,c\}+e\{-1,2,i,c\}-\{1,-1,i,c\}-e\{1,-2,i,c\}}{2i\mu}\sin i\Gamma$$

$$+\frac{\{-1,2,i,s\}+e\{-1,3,i,s\}-\{1,0,i,s\}-(e-\frac{1}{4}e^3)\{1,-1,i,s\}-\frac{9}{8}e^2\{1,-2,i,s\}}{2(i\mu+1)}\cos(g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\{-1,2,i,c\}+e\{-1,3,i,c\}-\{1,0,i,c\}-(e-\frac{1}{4}e^3)\{1,-1,i,c\}-\frac{9}{8}e^2\{1,-2,i,c\}}{2(i\mu+1)}\sin(g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\{-1,3,i,s\}-\{1,1,i,s\}-e\{1,0,i,s\}-\frac{9}{8}e^2\{1,-1,i,s\}}{2(i\mu+2)}\cos(2g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\{-1,3,i,c\}-\{1,1,i,c\}-e\{1,0,i,c\}-\frac{9}{8}e^2\{1,-1,i,c\}}{2(i\mu+2)}\sin(2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\{-1,4,i,s\}-\{1,2,i,s\}-e\{1,1,i,s\}+\frac{1}{24}e^3\{-1,1,i,s\}-\frac{9}{8}e^2\{1,0,i,s\}-\frac{4}{3}e^3\{1,-1,i,s\}}{2(i\mu+3)}\cos(3g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\{-1,4,i,c\}-\{1,2,i,c\}-e\{1,1,i,c\}+\frac{1}{24}e^3\{-1,1,i,c\}-\frac{9}{8}e^2\{1,0,i,c\}-\frac{4}{3}e^3\{1,-1,i,c\}}{2(i\mu+3)}\sin(3g+i\Gamma)$$

Ich wiederhole, dass diese Entwickelungen den Fall $i = 0$ ausschliessen, und dass man für i nur die positiven Zahlen 1, 2, 3, etc. substituiren darf. Ich bemerke ferner, dass die im Vorhergehenden erklärte Berechnung von W, $n\delta z$ und ν äusserst einfach und regelmässig wird, wenn man sie abtheilungsweise in Bezug auf die Werthe von i vornimmt, und alle Operationen, die sie verlangt, numerisch so ausführt, wie ich früher erklärt habe.

Die den Integralen hinzuzufügenden willkürlichen Constanten kommen hier nicht in Betracht, sondern finden erst weiter unten bei dem Falle $i = 0$ ihre Berücksichtigung.

---

§. 3. Entwickelung der allgemeinen Störungen der dritten Coordinate.

32.

Die Störungen der dritten Coordinate erhält man durch die Integration der Gleichung

$$\frac{du}{ndt} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}\frac{\varrho}{a}\sin(\varphi - f)\, a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)\cos i$$

nachdem im Integral τ in t oder γ in g verwandelt worden ist. Ich bemerke hier, dass in diesem Ausdruck i die Neigung der Bahnebene gegen die Fundamentalebene bedeutet, dass aber dieser Umstand nicht hindert, den in den Entwickelungen vorkommenden Index nach wie vor auch mit i zu bezeichnen, da eine Verwechselung hier nicht möglich ist.

Gleichwie oben gezeigt wurde, dass W von den Differentialen der Störungsfunction nach g, f und e abhängig gemacht werden kann, so könnte hier auch gezeigt werden, dass $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$ von den Differentialen der Störungsfunction nach J, Π, Π' abhängig gemacht werden kann. Da aber bei Anwendung dieses Verfahrens $a\Omega$ auf zwei Ordnungen weiter, als oben geschehen ist, entwickelt werden müsste, um die hier festgesetzte Genauigkeit zu erhalten, so soll die eben aufgestellte Gleichung unmittelbar angewandt werden.

33.

Sei zur Abkürzung

$$C = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} \frac{\varrho}{a} \sin(\varphi - f)$$

womit, vorbehältlich der Verwandelung von γ in g,

$$\frac{du}{\cos i\, ndt} = Ca^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)$$

wird. Der Factor C kann eben so wie die obigen Factoren A und B von ϱ^2 und r^2 nebst deren Differentialen abhängig gemacht werden, und man braucht nur die Glieder direct zu berechnen, die $\pm\gamma$ in ihren Argumenten enthalten. Die übrigen von γ abhängigen Glieder können wieder durch den Satz des Art. 28, nach der Integration, berechnet werden, und die Werthe der Coefficienten $\eta^{(\varkappa)}$ und $\theta^{(\varkappa)}$ bleiben dieselben wie a. a. O.

Man kann hier noch einen Schritt weiter gehen und auch die Glieder, deren Argumente γ nicht enthalten, aus denen, die $\pm\gamma$ enthalten, auf ähnliche Art ableiten. Um diess zu zeigen, nehme ich die Function

$$\Gamma = G\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + H\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

vor, in welcher G und H von γ unabhängig sind, und von denen angenommen wird, dass sie sich in convergirende Reihen von der Form

$$G = 2\Sigma V \sin(\alpha t + \beta), \qquad H\sqrt{1-e^2} = 2\Sigma W \cos(\alpha t + \beta)$$

entwickeln lassen. Diese Function Γ lässt sich nach der Verwandelung von γ in g mit u identificiren. Da

$$2\frac{\varrho}{a}\cos\varphi = -\frac{\partial \cdot \varrho^2}{a^2 \partial e}, \qquad 2\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = \frac{\partial \cdot \varrho^2}{a^2 e \partial \gamma}\sqrt{1-e^2}$$

sind, und

$$\frac{\varrho^2}{a^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} R^{(\varkappa)} \cos \varkappa\gamma$$

gesetzt werden kann, so geht der Ausdruck von Γ in den folgenden über

$$\Gamma = -\Sigma \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{(\varkappa)} \sin(\varkappa\gamma + \alpha t + \beta)$$

in welchem

$$\alpha^{(\varkappa)} = \frac{\partial R^{(\varkappa)}}{\partial e} V + \varkappa \frac{R^{(\varkappa)}}{e} W$$

ist. Setzt man hierin $\varkappa = 1$ und $\varkappa = -1$, so ergeben sich

$$\alpha^{(1)} = \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e} V + \frac{R^{(1)}}{e} W$$

$$\alpha^{(-1)} = \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e} V - \frac{R^{(1)}}{e} W$$

woraus man

$$V = \frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(-1)}}{2 \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}}$$

zieht. Setzt man hierauf $\varkappa = 0$ in der allgemeinen Formel, so wird

$$\alpha^{(0)} = \frac{\partial R^{(0)}}{\partial e} V$$

oder nach der Elimination von V durch den vorstehenden Ausdruck,

$$\alpha^{(0)} = \eta^{(0)} (\alpha^{(1)} + \alpha^{(-1)})$$

wenn

$$\eta^{(0)} = \frac{\frac{\partial R^{(0)}}{\partial e}}{2 \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}}$$

gesetzt wird. Da $\alpha^{(0)}$ den Gliedern entspricht, deren Argumente von γ unabhängig sind, und $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(-1)}$ den Gliedern angehören, die bez. $+\gamma$ und $-\gamma$ in ihren Argumenten enthalten, so kann man durch den eben erhaltenen Ausdruck jene aus diesen berechnen, es mögen die betreffenden Glieder mit einem Sinus oder einem Cosinus multiplicirt sein.

Die in Art. 27 angeführte Entwickelung von ϱ^2 giebt

$$\frac{\partial R^{(0)}}{\partial e} = 3e, \qquad \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e} = -(1 - \tfrac{3}{8} e^2 \pm \ldots)$$

womit, nach Ergänzung der weggelassenen Glieder des zweiten Ausdrucks, der Ausdruck für $\eta^{(0)}$ mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnet werden kann. Für unseren Zweck wird hinreichend genau

$$\eta^{(0)} = -(\tfrac{3}{2} e + \tfrac{9}{16} e^3)$$

34.

Der Ausdruck für C des vorigen Art. geht nun zuerst über in

$$C = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{\varrho}{a}\sin\varphi\,\frac{r}{a}\cos f - \frac{\varrho}{a}\cos\varphi\,\frac{r}{a}\sin f\right\}$$

welcher leicht in den folgenden verwandelt wird:

$$C = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2\,\partial\,e}\right)\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\,e\,\partial\,g}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2\,e\,\partial\,\gamma}\right)\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\,\partial\,e}\right)$$

Hieraus erhält man durch Hülfe der im Art. 27 gegebenen Entwickelungen, mit Rücksicht auf die Auseinandersetzungen des vorigen Art.

$$\begin{aligned} C = \quad & (1-\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\gamma-g) \\ & -(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{3}{8}e^3)\sin(-\gamma+2g) \\ & -(\tfrac{3}{2}e-\tfrac{3}{16}e^3)\sin\gamma \\ & -\tfrac{3}{8}e^2\sin(-\gamma+3g) \\ & -\tfrac{1}{3}e^3\sin(-\gamma+4g) \\ & -\tfrac{1}{48}e^3\sin(\gamma+2g) \end{aligned}$$

35.

Ziehen wir nun auch den Differentialquotienten der Störungsfunction nach Z möglichst zusammen, und setzen zu dem Ende

$$\begin{aligned} (-4,i,s) = & -(25)_{-i}\cos(iK-\Pi)-(26)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)-(27)_{-i}\cos((i-2)K-\Pi) \\ & -(28)_{-i}\cos((i-3)K-\Pi)-(29)_{-i}\cos(iK-3\Pi)-(30)_{-i}\cos((i-1)K-3\Pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-4,i,c) = & -(25)_{-i}\sin(iK-\Pi)-(26)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)-(27)_{-i}\sin((i-2)K-\Pi) \\ & -(28)_{-i}\sin((i-3)K-\Pi)-(29)_{-i}\sin(iK-3\Pi)-(30)_{-i}\sin((i-1)K-3\Pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3,i,s) = & -(21)_{-i}\cos(iK-\Pi)-(22)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)-(23)_{-i}\cos((i-2)K-\Pi) \\ & -(24)_{-i}\cos(iK-3\Pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3,i,c) = & -(21)_{-i}\sin(iK-\Pi)-(22)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)-(23)_{-i}\sin((i-2)K-\Pi) \\ & =(24)_{-i}\sin(iK-3\Pi) \end{aligned}$$

$$(-2,i,s) = -(11)_{-i}\cos(iK-\Pi) - (12)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi) - (13)_{-i}\cos((i+1)K-\Pi)$$
$$-(14)_{-i}\cos((i-2)K-\Pi) - (15)_{-i}\cos(iK-3\Pi) - (16)_{-i}\cos((i+1)K-3\Pi)$$
$$-(17)_{-i}\cos(iK+\Pi) - (18)_{-i}\cos((i-1)K+\Pi) - (19)_{-i}\cos((i-2)K+\Pi)$$
$$-(20)_{-i}\cos((i-3)K+\Pi)$$

$$(-2,i,c) = -(11)_{-i}\sin(iK-\Pi) - (12)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi) - (13)_{-i}\sin((i+1)K-\Pi)$$
$$-(14)_{-i}\sin((i-2)K-\Pi) - (15)_{-i}\sin(iK-3\Pi) - (16)_{-i}\sin((i+1)K-3\Pi)$$
$$-(17)_{-i}\sin(iK+\Pi) - (18)_{-i}\sin((i-1)K+\Pi) - (19)_{-i}\sin((i-2)K+\Pi)$$
$$-(20)_{-i}\sin((i-3)K+\Pi)$$

$$(-1,i,s) = -(5)_{-i}\cos(iK-\Pi) - (6)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi) - (7)_{-i}\cos((i+1)K-\Pi)$$
$$-(8)_{-i}\cos(iK+\Pi) - (9)_{-i}\cos((i-1)K+\Pi) - (10)_{-i}\cos((i-2)K+\Pi)$$

$$(-1,i,c) = -(5)_{-i}\sin(iK-\Pi) - (6)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi) - (7)_{-i}\sin((i+1)K-\Pi)$$
$$-(8)_{-i}\sin(iK+\Pi) - (9)_{-i}\sin((i-1)K+\Pi) - (10)_{-i}\sin((i-2)K+\Pi)$$

$$(0,i,s) = (1)_i\cos(iK+\Pi) + (2)_i\cos((i-1)K+\Pi) + (3)_i\cos((i+1)K+\Pi)$$
$$+(4)_i\cos((i-2)K+\Pi)$$
$$-(1)_{-i}\cos(iK-\Pi) - (2)_{-i}\cos((i+1)K-\Pi) - (3)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)$$
$$-(4)_{-i}\cos((i+2)K-\Pi)$$

$$(0,i,c) = (1)_i\sin(iK+\Pi) + (2)_i\sin((i-1)K+\Pi) + (3)_i\sin((i+1)K+\Pi)$$
$$+(4)_i\sin((i-2)K+\Pi)$$
$$-(1)_{-i}\sin(iK-\Pi) - (2)_{-i}\sin((i+1)K-\Pi) - (3)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)$$
$$-(4)_{-i}\sin((i+2)K-\Pi)$$

$$(1,i,s) = (5)_i\cos(iK+\Pi) + (6)_i\cos((i+1)K+\Pi) + (7)_i\cos((i-1)K+\Pi)$$
$$+(8)_i\cos(iK-\Pi) + (9)_i\cos((i+1)K-\Pi) + (10)_i\cos((i+2)K-\Pi)$$

$$(1,i,c) = (5)_i\sin(iK+\Pi) + (6)_i\sin((i+1)K+\Pi) + (7)_i\sin((i-1)K+\Pi)$$
$$+(8)_i\sin(iK-\Pi) + (9)_i\sin((i+1)K-\Pi) + (10)_i\sin((i+2)K-\Pi)$$

$$(2,i,s) = (11)_i\cos(iK+\Pi) + (12)_i\cos((i+1)K+\Pi) + (13)_i\cos((i-1)K+\Pi)$$
$$+(14)_i\cos((i+2)K+\Pi) + (15)_i\cos(iK+3\Pi) + (16)_i\cos((i-1)K+3\Pi)$$
$$+(17)_i\cos(iK-\Pi) + (18)_i\cos((i+1)K-\Pi) + (19)_i\cos((i+2)K-\Pi)$$
$$+(20)_i\cos((i+3)K-\Pi)$$

$$(2,i,c) = (11)_i\sin(iK+\Pi) + (12)_i\sin((i+1)K+\Pi) + (13)_i\sin((i-1)K+\Pi)$$
$$+(14)_i\sin((i+2)K+\Pi) + (15)_i\sin(iK+3\Pi) + (16)_i\sin((i-1)K+3\Pi)$$
$$+(17)_i\sin(iK-\Pi) + (18)_i\sin((i+1)K-\Pi) + (19)_i\sin((i+2)K-\Pi)$$
$$+(20)_i\sin((i+3)K-\Pi)$$

$$(3,i,s) = (21)_i\cos(iK+\Pi) + (22)_i\cos((i+1)K+\Pi) + (23)_i\cos((i+2)K+\Pi)$$
$$+(24)_i\cos(iK+3\Pi)$$

$$(3,i,c) = (21)_i\sin(iK+\Pi) + (22)_i\sin((i+1)K+\Pi) + (23)_i\sin((i+2)K+\Pi)$$
$$+(24)_i\sin(iK+3\Pi)$$

$$(4,i,s) = (25)_i \cos(iK+\Pi) + (26)_i \cos((i+1)K+\Pi) + (27)_i \cos((i+2)K+\Pi)$$
$$+ (28)_i \cos((i+3)K+\Pi) + (29)_i \cos(iK+3\Pi) + (30)_i \cos((i+1)K+3\Pi)$$
$$(4,i,c) = (25)_i \sin(iK+\Pi) + (26)_i \sin((i+1)K+\Pi) + (27)_i \sin((i+2)K+\Pi)$$
$$+ (28)_i \sin((i+3)K+\Pi) + (29)_i \sin(iK+3\Pi) + (30)_i \sin((i+1)K+3\Pi)$$

wo wie früher

$$K = \Pi - \Pi'$$

ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = \; & (-4,i,s)\sin(-4g+i\Gamma) + (-4,i,c)\cos(-4g+i\Gamma) \\
& + (-3,i,s)\sin(-3g+i\Gamma) + (-3,i,c)\cos(-3g+i\Gamma) \\
& + (-2,i,s)\sin(-2g+i\Gamma) + (-2,i,c)\cos(-2g+i\Gamma) \\
& + (-1,i,s)\sin(-g+i\Gamma) + (-1,i,c)\cos(-g+i\Gamma) \\
& + (0,i,s)\sin i\Gamma + (0,i,c)\cos i\Gamma \\
& + (1,i,s)\sin(g+i\Gamma) + (1,i,c)\cos(g+i\Gamma) \\
& + (2,i,s)\sin(2g+i\Gamma) + (2,i,c)\cos(2g+i\Gamma) \\
& + (3,i,s)\sin(3g+i\Gamma) + (3,i,c)\cos(3g+i\Gamma) \\
& + (4,i,s)\sin(4g+i\Gamma) + (4,i,c)\cos(4g+i\Gamma)
\end{aligned}$$

wo wieder

$$\Gamma = g - g'$$

gesetzt worden ist.

36.

Die Ausführung der Multiplication mit C giebt die folgenden Coefficienten des Products:

$$\begin{aligned}
(-1,-3,i,s) = \; & \tfrac{1}{2}(-4,i,s) \\
& -\tfrac{3}{4}e(-3,i,s) \\
& -\tfrac{1}{96}e^3(-1,i,s) \\
(1,-5,i,s) = \; & -\tfrac{1}{2}(-4,i,s) \\
& -\tfrac{1}{4}e(-3,i,s) \\
& -\tfrac{3}{16}e^2(-2,i,s) \\
& -\tfrac{1}{6}e^3(-1,i,s) \\
(-1,-3,i,c) = \; & \tfrac{1}{2}(-4,i,c) \\
& -\tfrac{3}{4}e(-3,i,c) \\
& -\tfrac{1}{96}e^3(-1,i,c) \\
(1,-5,i,c) = \; & -\tfrac{1}{2}(-4,i,c) \\
& -\tfrac{1}{4}e(-3,i,c) \\
& -\tfrac{3}{16}e^2(-2,i,c) \\
& -\tfrac{1}{6}e^3(-1,i,c)
\end{aligned}$$

$$(-1,-2,i,s) = \tfrac{1}{2}(-3,i,s) - \tfrac{3}{4}e\,(-2,i,s)$$

$$(1,-4,i,s) = -\tfrac{1}{2}(-3,i,s) - \tfrac{1}{4}e\,(-2,i,s) - \tfrac{3}{16}e^2(-1,i,s)$$

$$(-1,-2,i,c) = \tfrac{1}{2}(-3,i,c) - \tfrac{3}{4}e\,(-2,i,c)$$

$$(1,-4,i,c) = -\tfrac{1}{2}(-3,i,c) - \tfrac{1}{4}e\,(-2,i,c) - \tfrac{3}{16}e^2(-1,i,c)$$

$$(-1,-1,i,s) = \tfrac{1}{4}e\,(-3,i,s) + (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,s) - (\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)(-1,i,s) - \tfrac{1}{96}e^3(1,i,s)$$

$$(1,-3,i,s) = \tfrac{3}{4}e\,(-3,i,s) - (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,s) - (\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)(-1,i,s) - \tfrac{3}{16}e^2(0,i,s) - \tfrac{1}{6}e^3(1,i,s)$$

$$(-1,-1,i,c) = \tfrac{1}{4}e\,(-3,i,c) + (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,c) - (\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)(-1,i,c) - \tfrac{1}{96}e^3(1,i,c)$$

$$(1,-3,i,c) = \tfrac{3}{4}e\,(-3,i,c) - (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,c) - (\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)(-1,i,c) - \tfrac{3}{16}e^2(0,i,c) - \tfrac{1}{6}e^3(1,i,c)$$

$$\begin{aligned}
(-1,0,i,s) = {} & \tfrac{1}{4}e\,(-2,i,s) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(-1,i,s) \\
& -\tfrac{3}{4}e\,(0,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,-2,i,s) = {} & \tfrac{3}{4}e\,(-2,i,s) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(-1,i,s) \\
& -\tfrac{1}{4}e\,(0,i,s) \\
& -\tfrac{3}{16}e^2\,(1,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1,0,i,c) = {} & \tfrac{1}{4}e\,(-2,i,c) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(-1,i,c) \\
& -\tfrac{3}{4}e\,(0,i,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,-2,i,c) = {} & \tfrac{3}{4}e\,(-2,i,c) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(-1,i,c) \\
& -\tfrac{1}{4}e\,(0,i,c) \\
& -\tfrac{3}{16}e^2\,(1,i,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1,1,i,s) = {} & \tfrac{3}{16}e^2\,(-2,i,s) \\
& +(\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)\,(-1,i,s) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(0,i,s) \\
& -(\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)\,(1,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,-1,i,s) = {} & (\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)\,(-1,i,s) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(0,i,s) \\
& -(\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)\,(1,i,s) \\
& -\tfrac{3}{16}e^2\,(2,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1,1,i,c) = {} & \tfrac{3}{16}e^2\,(-2,i,c) \\
& +(\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)\,(-1,i,c) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(0,i,c) \\
& -(\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)\,(1,i,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,-1,i,c) = {} & (\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)\,(-1,i,c) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)\,(0,i,c) \\
& -(\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)\,(1,i,c) \\
& -\tfrac{3}{16}e^2\,(2,i,c)
\end{aligned}$$

$$(-1,2,i,s) = \tfrac{3}{16}e^2(-1,i,s) + \tfrac{1}{4}e(0,i,s) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(1,i,s) - \tfrac{3}{4}e(2,i,s)$$

$$(1,0,i,s) = \tfrac{3}{4}e(0,i,s) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(1,i,s) - \tfrac{1}{4}e(2,i,s)$$

$$(-1,2,i,c) = \tfrac{3}{16}e^2(-1,i,c) + \tfrac{1}{4}e(0,i,c) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(1,i,c) - \tfrac{3}{4}e(2,i,c)$$

$$(1,0,i,c) = \tfrac{3}{4}e(0,i,c) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(1,i,c) - \tfrac{1}{4}e(2,i,c)$$

$$(-1,3,i,s) = \tfrac{1}{6}e^3(-1,i,s) + \tfrac{3}{16}e^2(0,i,s) + (\tfrac{1}{4}e - \tfrac{3}{16}e^3)(1,i,s) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(2,i,s) - \tfrac{3}{4}e(3,i,s)$$

$$(1,1,i,s) = \tfrac{1}{96}e^3(-1,i,s) + (\tfrac{3}{4}e - \tfrac{3}{32}e^3)(1,i,s) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(2,i,s) - \tfrac{1}{4}e(3,i,s)$$

$$(-1,3,i,c) = \tfrac{1}{6}e^3(-1,i,c) + \tfrac{3}{16}e^2(0,i,c) + (\tfrac{1}{4}e - \tfrac{3}{16}e^3)(1,i,c) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(2,i,c) - \tfrac{3}{4}e(3,i,c)$$

$$(1,1,i,c) = \tfrac{1}{96}e^3(-1,i,c) + (\tfrac{3}{4}e - \tfrac{3}{32}e^3)(1,i,c) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(2,i,c) - \tfrac{1}{4}e(3,i,c)$$

$$
\begin{aligned}
(-1,4,i,s) &= \tfrac{3}{16}e^2(1,i,s) \\
&\quad+\tfrac{1}{4}e\,(2,i,s) \\
&\quad+\tfrac{1}{2}(3,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,2,i,s) &= \tfrac{3}{4}e\,(2,i,s) \\
&\quad-\tfrac{1}{2}(3,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1,4,i,c) &= \tfrac{3}{16}e^2(1,i,c) \\
&\quad+\tfrac{1}{4}e\,(2,i,c) \\
&\quad+\tfrac{1}{2}(3,i,c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,2,i,c) &= \tfrac{3}{4}e\,(2,i,c) \\
&\quad-\tfrac{1}{2}(3,i,c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1,5,i,s) &= \tfrac{1}{6}e^3(1,i,s) \\
&\quad+\tfrac{3}{16}e^2(2,i,s) \\
&\quad+\tfrac{1}{4}e\,(3,i,s) \\
&\quad+\tfrac{1}{2}(4,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,3,i,s) &= \tfrac{1}{96}e^3(1,i,s) \\
&\quad+\tfrac{3}{4}e\,(3,i,s) \\
&\quad-\tfrac{1}{2}(4,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1,5,i,c) &= \tfrac{1}{6}e^3(1,i,c) \\
&\quad+\tfrac{3}{16}e^2(2,i,c) \\
&\quad+\tfrac{1}{4}e\,(3,i,c) \\
&\quad+\tfrac{1}{2}(4,i,c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,3,i,c) &= \tfrac{1}{96}e^3(1,i,c) \\
&\quad+\tfrac{3}{4}e\,(3,i,c) \\
&\quad-\tfrac{1}{2}(4,i,c)
\end{aligned}
$$

---

von welchen Coefficienten aber die mit dem Index c behafteten das entgegengesetzte Zeichen haben. Ersetzt man nun wieder die beiden ersten Indices aller dieser Coefficienten durch die allgemeinen Zeichen p und q, und schreibt

$$
\{p,q,i,s\} = \frac{(p,q,i,s)}{i\mu+q}
$$

$$
\{p,q,i,c\} = \frac{(p,q,i,c)}{i\mu+q}
$$

so werden diese Grössen die Coefficienten des Integrals mit dem wahren Zeichen*).

37.

Stellen wir jetzt das Integral zusammen, ergänzen die im Vorhergehenden weggelassenen Glieder durch die Sätze der Artt. 28 und 33, und verwandeln darauf γ in g, so bekommen wir:

$$\frac{u}{\cos i} = \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-4,i,s\} \\ +\{-1,-3,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-2,i,s\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-2,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,-1,i,s\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,0,i,s\} \\ +\{1,-5,i,s\} \end{array}\right\}\sin(-4g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-4,i,c\} \\ +\{-1,-3,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-2,i,c\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-2,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,-1,i,c\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,0,i,c\} \\ +\{1,-5,i,c\} \end{array}\right\}\cos(-4g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-3,i,s\} \\ +\{-1,-2,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,s\} \\ +\{1,-4,i,s\} \end{array}\right\}\sin(-3g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-3,i,c\} \\ +\{-1,-2,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,c\} \\ +\{1,-4,i,c\} \end{array}\right\}\cos(-3g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{1,-2,i,s\} \\ -\frac{3}{2}e\{-1,-2,i,s\} \\ +\{-1,-1,i,s\} \\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,0,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,s\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,2,i,s\} \\ +\{1,-3,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,-4,i,s\} \end{array}\right\}\sin(-2g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{1,-2,i,c\} \\ -\frac{3}{2}e\{-1,-2,i,c\} \\ +\{-1,-1,i,c\} \\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,0,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,c\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,2,i,c\} \\ +\{1,-3,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,-4,i,c\} \end{array}\right\}\cos(-2g+i\Gamma)$$

*) Ich mache hier auf die Anmerkungen zum Art. 30 aufmerksam, deren Inhalt auch hier Anwendung findet.

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-1,i,s\}\\ -\frac{3}{2}e\{-1,-1,i,s\}\\ +\{-1,0,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{-1,1,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,2,i,s\}\\ +\{1,-2,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,-3,i,s\} \end{array}\right\}\sin(-g+i\Gamma) \quad + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-1,i,c\}\\ -\frac{3}{2}e\{-1,-1,i,c\}\\ +\{-1,0,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{-1,1,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,2,i,c\}\\ +\{1,-2,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,-3,i,c\} \end{array}\right\}\cos(-g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{1,0,i,s\}\\ -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{-1,0,i,s\}\\ +\{-1,1,i,s\}\\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,2,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,3,i,s\}\\ +\{1,-1,i,s\}\\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,-2,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{1,-3,i,s\} \end{array}\right\}\sin i\Gamma \quad + \left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{1,0,i,c\}\\ -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{-1,0,i,c\}\\ +\{-1,1,i,c\}\\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,2,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,3,i,c\}\\ +\{1,-1,i,c\}\\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,-2,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{1,-3,i,c\} \end{array}\right\}\cos i\Gamma$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,1,i,s\}\\ -\frac{3}{2}e\{1,1,i,s\}\\ +\{-1,2,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{-1,3,i,s\}\\ +\{1,0,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,-1,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{1,-2,i,s\} \end{array}\right\}\sin(g+i\Gamma) \quad + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,1,i,c\}\\ -\frac{3}{2}e\{1,1,i,c\}\\ +\{-1,2,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{-1,3,i,c\}\\ +\{1,0,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,-1,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{1,-2,i,c\} \end{array}\right\}\cos(g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{-1,2,i,s\}\\ -\frac{3}{2}e\{1,2,i,s\}\\ +\{-1,3,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{-1,4,i,s\}\\ +\{1,1,i,s\}\\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,0,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{1,-1,i,s\}\\ +\frac{1}{3}e^3\{1,-2,i,s\} \end{array}\right\}\sin(2g+i\Gamma) \quad + \left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{-1,2,i,c\}\\ -\frac{3}{2}e\{1,2,i,c\}\\ +\{-1,3,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{-1,4,i,c\}\\ +\{1,1,i,c\}\\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,0,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{1,-1,i,c\}\\ +\frac{1}{3}e^3\{1,-2,i,c\} \end{array}\right\}\cos(2g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,3,i,s\} \\ +\{-1,4,i,s\} \\ +\{1,2,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,s\} \end{array}\right\}\sin(3g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,3,i,c\} \\ +\{-1,4,i,c\} \\ +\{1,2,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,c\} \end{array}\right\}\cos(3g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,4,i,s\} \\ +\{-1,5,i,s\} \\ +\{1,3,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,2,i,s\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{-1,2,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,1,i,s\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{1,0,i,s\} \end{array}\right\}\sin(4g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,4,i,c\} \\ +\{-1,5,i,c\} \\ +\{1,3,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,2,i,c\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{-1,2,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,1,i,c\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{1,0,i,c\} \end{array}\right\}\cos(4g+i\Gamma)$$

Die am Ende des Art. 31 aufgestellten Bemerkungen gelten auch hier.

---

§. 4. Entwickelung der Glieder der mittleren Länge und des Radius Vectors, die dem Falle $i = 0$ in den Coefficienten der Störungsfunction und deren Differentiale entsprechen.

38.

Gehen wir zum Falle $i = 0$ über, und entwickeln zuvörderst die demselben angehörigen Glieder der mittleren Länge und des Radius Vectors. Da sich in diesem Falle die Coefficienten der Endresultate leicht und einfach unmittelbar auf die A_i, B_i und deren Differentialquotienten hinführen lassen, so soll die Zusammenziehung der Glieder erst am Schlusse der Entwickelungen vorgenommen werden. Setzt man sogleich $i = 0$ in dem Ausdruck des Art. 8 für $a\Omega$, so wird derselbe

$$
\begin{aligned}
a\Omega = \;& (1)\\
&+(2)\cos K\\
&+(3)\cos g\\
&+(4)\cos(g+K)\\
&+(5)\cos(g-K)\\
&+(6)\cos(g+2K)\\
&+(7)\cos(g+2\Pi)\\
&+(8)\cos(g+\Pi+\Pi')\\
&+(9)\cos 2g\\
&+(10)\cos(2g+K)\\
&+(11)\cos(2g+2K)\\
&+(12)\cos(2g+2\Pi)\\
&+(13)\cos 3g\\
&+(14)\cos(3g+K)\\
&+(15)\cos(3g+2K)\\
&+(16)\cos(3g+3K)\\
&+(17)\cos(3g+2\Pi)\\
&+(18)\cos(3g+K+2\Pi)
\end{aligned}
$$

woraus

$$
\begin{aligned}
a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = \;& [3]\sin g\\
&+[4]\sin(g+K)\\
&+[5]\sin(g-K)\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

folgt, wenn

$$[3] = -(3), \qquad [4] = -(4), \qquad [5] = -(5), \quad \text{etc.}$$

$$[9] = -2(9), \quad \text{etc.}, \qquad [13] = -3(13), \quad \text{etc.}$$

gesetzt werden. Eben so wird

$$
\begin{aligned}
ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \;& (1)'\\
&+(2)'\cos K\\
&+(3)'\cos g\\
&+(4)'\cos(g+K)\\
&+(5)'\cos(g-K)\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}
$$

und in den Coefficienten dieser Ausdrücke ist ebenfalls $i = 0$ zu setzen.

39.

Die Ausdrücke dieser Coefficienten werden also nach dem Art. 10

$$[3] = e\,m'\alpha\,(1)\,A_0 + \tfrac{1}{8}e^3 m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0$$
$$+\tfrac{1}{4}e\,e'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 - e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$

$$[4] = -e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 - \tfrac{1}{4}e^2 e'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1$$
$$-\tfrac{1}{8}e'^3 m'\alpha\{(3)+5(2)+2(1)-2(0)\}A_1 + \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(1)\{B_0+B_2\}$$

$$[5] = -\tfrac{1}{8}e^2 e'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1$$

$$[6] = \tfrac{1}{8}e\,e'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2$$

$$[7] = \tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1$$

$$[8] = -\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,(1)\,B_0$$

$$[9] = -\tfrac{1}{2}e^2 m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0$$

$$[10] = e\,e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$

$$[11] = -\tfrac{1}{2}e'^2 m'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_2$$

$$[12] = -2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,(0)\,B_1$$

$$[13] = \tfrac{1}{8}e^3 m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0$$

$$[14] = -\tfrac{3}{8}e^2 e'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1$$

$$[15] = \tfrac{3}{8}e\,e'^2 m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2$$

$$[16] = -\tfrac{1}{8}e'^3 m'\alpha\{(3)-3(2)+6(1)-6(0)\}A_3$$

$$[17] = \tfrac{3}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1$$

$$[18] = -\tfrac{3}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,(1)\,B_2$$

und nach dem Art. 11

$$(1)' = m'\alpha\,(1)\,A_0 + \tfrac{1}{4}(e^2+e'^2)\,m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 - \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$

$$(2)' = -\tfrac{1}{2}e\,e'm'\alpha\{(3)+4(2)\}A_1$$

$$(3)' = -e\,m'\alpha\{(2)+(1)\}A_0 - \tfrac{1}{8}e^3 m'\alpha\{(4)+5(3)+(2)-3(1)\}A_0$$
$$-\tfrac{1}{4}e\,e'^2 m'\alpha\{(4)+7(3)+10(2)+2(1)\}A_0 + e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)+(0)\}B_1$$

$$(4)' = e'm'\alpha\,(2)\,A_1 + \tfrac{1}{4}e^2 e'm'\alpha\{(4)+6(3)+2(2)\}A_1$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3 m'\alpha\{(4)+8(3)+12(2)\}A_1 - \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+2(1)\}\{B_0+B_2\}$$

$$(5)' = \frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \{(4) + 6(3) + 5(2)\} A_1$$

$$(6)' = -\frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4) + 7(3)\} A_2$$

$$(7)' = -\frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 7(1) + 5(0)\} B_1$$

$$(8)' = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 2(1)\} B_0$$

$$(9)' = \frac{1}{4} e^2 m'\alpha \{(3) \quad -2(1)\} A_0$$

$$(10)' = -\frac{1}{2} e e' m'\alpha\, (3)\, A_1$$

$$(11)' = \frac{1}{4} e'^2 m'\alpha\, (3)\, A_2$$

$$(12)' = \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(1) + (0)\} B_1$$

$$(13)' = -\frac{1}{24} e^3 m'\alpha \{(4) - 3(3) - 3(2) + 9(1)\} A_0$$

$$(14)' = \frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \{(4) - 2(3) - (2)\} A_1$$

$$(15)' = -\frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4) - (3)\} A_2$$

$$(16)' = \frac{1}{24} e'^3 m'\alpha\, (4)\, A_3$$

$$(17)' = -\frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) - (1) - 3(0)\} B_1$$

$$(18)' = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 2(1)\} B_2$$

40.

Multiplicirt man nun die betreffenden Ausdrücke des vorvorigen Artikels mit den Factoren A und B des Art. 27, und setzt

$$(1,-1,1) = -(2+e^2)(1)' + 3e[3] - e(3)'$$

$$(-1,1,2) = (2)' - \frac{5}{2} e[4] + \frac{1}{2} e(4)'$$

$$(1,-1,2) = -(2)' + \frac{1}{2} e[4] - \frac{1}{2} e(4)'$$

$$(0,1,3) = -3[3]$$

$$(-1,2,3) = (e + \tfrac{1}{4} e^3)(1)' + (2 + \tfrac{3}{4} e^2)[3] + (1 + \tfrac{7}{8} e^2)(3)' - \frac{5}{2} e[9] + \frac{1}{2} e(9)'$$

$$(1,0,3) = -(e + \tfrac{7}{8} e^3)(1)' + (2+e^2)[3] - (1 + \tfrac{1}{2} e^2)(3)' + \frac{1}{2} e[9] - \frac{1}{2} e(9)'$$

$$(0,1,4) = -3[4]$$

$$(-1,2,4) = \frac{1}{2} e(2)' + (2+e^2)[4] + (1 + \tfrac{1}{2} e^2)(4)' - \frac{5}{2} e[10] + \frac{1}{2} e(10)'$$

$$(1,0,4) = -\frac{1}{2} e(2)' + (2+e^2)[4] - (1 + \tfrac{1}{2} e^2)(4)' + \frac{1}{2} e[10] - \frac{1}{2} e(10)'$$

$$(0,1,5) = -3[5]$$

$$(-1,2,5) = \frac{1}{2}e(2)' - \frac{1}{4}e^2[4] + \frac{3}{8}e^2(4)' + 2[5] + (5)'$$

$$(1,0,5) = -\frac{1}{2}e(2)' + 2[5] - (5)'$$

$$(0,1,6) = -3[6]$$

$$(-1,2,6) = 2[6] + (6)' - \frac{5}{2}e[11] + \frac{1}{2}e(11)'$$

$$(1,0,6) = 2[6] - (6)' + \frac{1}{2}e[11] - \frac{1}{2}e(11)'$$

$$(0,1,7) = -3[7]$$

$$(-1,2,7) = 2[7] + (7)' - \frac{5}{2}e[12] + \frac{1}{2}e(12)'$$

$$(1,0,7) = 2[7] - (7)' + \frac{1}{2}e[12] - \frac{1}{2}e(12)'$$

$$(0,1,8) = -3[8]$$

$$(-1,2,8) = 2[8] + (8)'$$

$$(1,0,8) = 2[8] - (8)'$$

$$(0,2,9) = -3[9]$$

$$(-1,3,9) = \frac{3}{4}e^2(1)' + \frac{1}{2}e[3] + \frac{1}{2}e(3)' + 2[9] + (9)'$$

$$(1,1,9) = -\frac{5}{2}e[3] - \frac{1}{2}e(3)' + 2[9] - (9)'$$

$$(0,2,10) = -3[10]$$

$$(-1,3,10) = \frac{1}{2}e[4] + \frac{1}{2}e(4)' + 2[10] + (10)'$$

$$(1,1,10) = -\frac{5}{2}e[4] - \frac{1}{2}e(4)' + 2[10] - (10)'$$

$$(0,2,11) = -3[11]$$

$$(-1,3,11) = 2[11] + (11)'$$

$$(1,1,11) = 2[11] - (11)'$$

$$(0,2,12) = -3[12]$$

$$(-1,3,12) = 2[12] + (12)'$$

$$(1,1,12) = 2[12] - (12)'$$

$$(0,3,13) = -3[13]$$

$$(-1,4,13) = \frac{2}{3}e^3(1)' + \frac{1}{4}e^2[3] + \frac{3}{8}e^2(3)' + \frac{1}{2}e[9] + \frac{1}{2}e(9)' + 2[13] + (13)'$$

$$(1,2,13) = \frac{1}{24}e^3(1)' - \frac{5}{2}e[9] - \frac{1}{2}e(9)' + 2[13] - (13)'$$

$$(0,3,14) = -3[14]$$

$$(-1,4,14) = \frac{1}{4}e^2[4] + \frac{3}{8}e^2(4)' + \frac{1}{2}e[10] + \frac{1}{2}e(10)' + 2[14] + (14)'$$

$$(1,2,14) = -\frac{5}{2}e[10] - \frac{1}{2}e(10)' + 2[14] - (14)'$$

$$(0,3,15) = -3[15]$$

$$(-1,4,15) = \frac{1}{2}e[11] + \frac{1}{2}e(11)' + 2[15] + (15)'$$

$$(1,2,15) = -\frac{5}{2}e[11] - \frac{1}{2}e(11)' + 2[15] - (15)'$$

$$(0,3,16) = -3[16]$$

$$(-1,4,16) = 2[16] + (16)'$$

$$(1,2,16) = 2[16] - (16)'$$

$$(0,3,17) = -3[17]$$

$$(-1,4,17) = \frac{1}{2}e[12] + \frac{1}{2}e(12)' + 2[17] + (17)'$$

$$(1,2,17) = -\frac{5}{2}e[12] - \frac{1}{2}e(12)' + 2[17] - (17)'$$

$$(0,3,18) = -3[18]$$

$$(-1,4,18) = 2[18] + (18)'$$

$$(1,2,18) = 2[18] - (18)'$$

so wird

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{n\,dt} = \; & (1,-1,1)\sin(\gamma-g) \\
& +(-1,1,2)\sin(-\gamma+g+K) \\
& +(1,-1,2)\sin(\gamma-g+K) \\
& +(0,1,3)\sin g \\
& +(-1,2,3)\sin(-\gamma+2g) \\
& +(1,0,3)\sin\gamma \\
& +(0,1,4)\sin(g+K) \\
& +(-1,2,4)\sin(-\gamma+2g+K) \\
& +(1,0,4)\sin(\gamma+K) \\
& +(0,1,5)\sin(g-K) \\
& +(-1,2,5)\sin(-\gamma+2g-K) \\
& +(1,0,5)\sin(\gamma-K) \\
& +(0,1,6)\sin(g+2K) \\
& +(-1,2,6)\sin(-\gamma+2g+2K) \\
& +(1,0,6)\sin(\gamma+2K)
\end{aligned}$$

$$+(0,1,7)\sin(g+2\Pi)$$
$$+(-1,2,7)\sin(-\gamma+2g+2\Pi)$$
$$+(1,0,7)\sin(\gamma+2\Pi)$$
$$+(0,1,8)\sin(g+\Pi+\Pi')$$
$$+(-1,2,8)\sin(-\gamma+2g+\Pi+\Pi')$$
$$+(1,0,8)\sin(\gamma+\Pi+\Pi')$$
$$+(0,2,9)\sin 2g$$
$$+(-1,3,9)\sin(-\gamma+3g)$$
$$+(1,1,9)\sin(\gamma+g)$$
$$+(0,2,10)\sin(2g+K)$$
$$+(-1,3,10)\sin(-\gamma+3g+K)$$
$$+(1,1,10)\sin(\gamma+g+K)$$
$$+(0,2,11)\sin(2g+2K)$$
$$+(-1,3,11)\sin(-\gamma+3g+2K)$$
$$+(1,1,11)\sin(\gamma+g+2K)$$
$$+(0,2,12)\sin(2g+2\Pi)$$
$$+(-1,3,12)\sin(-\gamma+3g+2\Pi)$$
$$+(1,1,12)\sin(\gamma+g+2\Pi)$$
$$+(0,3,13)\sin 3g$$
$$+(-1,4,13)\sin(-\gamma+4g)$$
$$+(1,2,13)\sin(\gamma+2g)$$
$$+(0,3,14)\sin(3g+K)$$
$$+(-1,4,14)\sin(-\gamma+4g+K)$$
$$+(1,2,14)\sin(\gamma+2g+K)$$
$$+(0,3,15)\sin(3g+2K)$$
$$+(-1,4,15)\sin(-\gamma+4g+2K)$$
$$+(1,2,15)\sin(\gamma+2g+2K)$$
$$+(0,3,16)\sin(3g+3K)$$
$$+(-1,4,16)\sin(-\gamma+4g+3K)$$
$$+(1,2,16)\sin(\gamma+2g+3K)$$
$$+(0,3,17)\sin(3g+2\Pi)$$
$$+(-1,4,17)\sin(-\gamma+4g+2\Pi)$$
$$+(1,2,17)\sin(\gamma+2g+2\Pi)$$
$$+(0,3,18)\sin(3g+K+2\Pi)$$
$$+(-1,4,18)\sin(-\gamma+4g+K+2\Pi)$$
$$+(1,2,18)\sin(\gamma+2g+K+2\Pi)$$

41.

Die Substitution der Ausdrücke der [3], [4], etc., (1)', (2)', etc. in die Coefficienten von dW giebt

$$(1,-1,1) = -2m'\alpha(1)A_0 - \tfrac{1}{2}e^2 m'\alpha\{(3)+2(2)-4(1)\}A_0$$
$$-\tfrac{1}{2}e'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 + 2\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$

$$(-1,1,2) = -\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-5(1)+5(0)\}A_1$$

$$(1,-1,2) = \tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1$$

$$(0,1,3) = -3em'\alpha(1)A_0 - \tfrac{3}{8}e^3 m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0$$
$$-\tfrac{3}{4}ee'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 + 3e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$

$$(-1,2,3) = -em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0 - \tfrac{1}{8}e^3 m'\alpha\{(4)\quad -14(2)+20(1)\}A_0$$
$$-\tfrac{1}{4}ee'^2 m'\alpha\{(4)+4(3)-2(2)-4(1)\}A_0 + e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)\quad -2(0)\}B_1$$

$$(1,0,3) = em'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0 + \tfrac{1}{8}e^3 m'\alpha\{(4)+4(3)-(2)-2(1)\}A_0$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'^2 m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0 - e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$

$$(0,1,4) = 3e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 + \tfrac{3}{4}e^2 e'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1$$
$$+\tfrac{3}{8}e'^3 m'\alpha\{(3)+5(2)+2(1)-2(0)\}A_1 - \tfrac{3}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha(1)\{B_0+B_2\}$$

$$(-1,2,4) = e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1 + \tfrac{1}{4}e^2 e'\{(4)+2(3)-16(2)+24(1)-24(0)\}A_1$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3 m'\alpha\{(4)+6(3)+2(2)-4(1)+4(0)\}A_1 - \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha(2)\{B_0+B_2\}$$

$$(1,0,4) = -e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1 - \tfrac{1}{4}e^2 e'm'\alpha\{(4)+6(3)+4(2)\}A_1$$
$$-\tfrac{1}{8}e'^3 m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1 + \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}$$

$$(0,1,5) = \tfrac{3}{8}e^2 e'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1$$

$$(-1,2,5) = \tfrac{1}{8}e^2 e'm'\alpha\{(4)+2(3)-6(2)+4(1)-4(0)\}A_1$$

$$(1,0,5) = -\tfrac{1}{8}e^2 e'm'\alpha\{(4)+6(3)+3(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$

$$(0,1,6) = -\tfrac{3}{8}ee'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2$$

$$(-1,2,6) = -\tfrac{1}{8}ee'^2 m'\alpha\{(4)+4(3)-18(2)+36(1)-36(0)\}A_2$$

$$(1,0,6) = \tfrac{1}{8}ee'^2 m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2$$

$$(0,1,7) = -\tfrac{3}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1$$

$$(-1,2,7) = -\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)-16(0)\}B_1$$

$$(1,0,7) = \tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1$$

$$(0,1,8) = \frac{3}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha\, (1)\, B_0$$

$$(-1,2,8) = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha\, (2)\, B_0$$

$$(1,0,8) = -\frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \{(2)+4(1)\} B_0$$

$$(0,2,9) = \frac{3}{2} e^2 m'\alpha \{(2)-2(1)\} A_0$$

$$(-1,3,9) = \frac{1}{4} e^2 m'\alpha \{(3)-6(2)+9(1)\} A_0$$

$$(1,1,9) = -\frac{1}{4} e^2 m'\alpha \{(3)+2(2)-2(1)\} A_0$$

$$(0,2,10) = -3\, e e' m'\alpha \{(2)-2(1)+2(0)\} A_1$$

$$(-1,3,10) = -\frac{1}{2} e e' m'\alpha \{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\} A_1$$

$$(1,1,10) = \frac{1}{2} e e' m'\alpha \{(3)+3(2)-3(1)+3(0)\} A_1$$

$$(0,2,11) = \frac{3}{2} e'^2 m'\alpha \{(2)-2(1)+2(0)\} A_2$$

$$(-1,3,11) = \frac{1}{4} e'^2 m'\alpha \{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\} A_2$$

$$(1,1,11) = -\frac{1}{4} e'^2 m'\alpha \{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\} A_2$$

$$(0,2,12) = 6 \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha\, (0)\, B_1$$

$$(-1,3,12) = \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \{(1)-3(0)\} B_1$$

$$(1,1,12) = -\sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \{(1)+5(0)\} B_1$$

$$(0,3,13) = -\frac{3}{8} e^3 m'\alpha \{(3)-6(2)+9(1)\} A_0$$

$$(-1,4,13) = -\frac{1}{24} e^3 m'\alpha \{(4)-12(3)+48(2)-64(1)\} A_0$$

$$(1,2,13) = \frac{1}{24} e^3 m'\alpha \{(4) \quad -9(2)+10(1)\} A_0$$

$$(0,3,14) = \frac{9}{8} e^2 e' m'\alpha \{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\} A_1$$

$$(-1,4,14) = \frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \{(4)-10(3)+36(2)-64(1)+64(0)\} A_1$$

$$(1,2,14) = -\frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \{(4)+2(3)-11(2)+14(1)-14(0)\} A_1$$

$$(0,3,15) = -\frac{9}{8} e e'^2 m'\alpha \{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\} A_2$$

$$(-1,4,15) = -\frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4)-8(3)+26(2)-52(1)-52(0)\} A_2$$

$$(1,2,15) = \frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4)+4(3)-14(2)+28(1)-28(0)\} A_2$$

$$(0,3,16) = \frac{3}{8} e'^3 m'\alpha \{(3)-3(2)+6(1)-6(0)\} A_3$$

$$(-1,4,16) = \frac{1}{24} e'^3 m'\alpha \{(4)-6(3)+18(2)-36(1)+36(0)\} A_3$$

$$(1,2,16) = -\frac{1}{24} e'^3 m'\alpha \{(4)+6(3)-18(2)+36(1)-36(0)\} A_3$$

$$(0,3,17) = -\frac{9}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(1) - 3(0)\} B_1$$

$$(-1,4,17) = -\frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) - 8(1) + 16(0)\} B_1$$

$$(1,2,17) = \frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) + 4(1) - 12(0)\} B_1$$

$$(0,3,18) = \frac{9}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha (1) B_2$$

$$(-1,4,18) = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) - 4(1)\} B_2$$

$$(1,2,18) = -\frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) + 8(1)\} B_2$$

42.

Integrirt man nun den Ausdruck für dW des vorvorigen Artikels und fügt sowohl nach dem Satz des Art. 28 die weggelassenen Glieder, wie die willkührliche Constante hinzu, so wird

$$\begin{aligned}
W = \; & k_0 \\
& + (1,-1,1) \cos(\gamma - g) \\
& - \tfrac{1}{4} e (-1,2,3) \cos(2\gamma - 2g) \\
\hline
& - (-1,1,2) \cos(-\gamma + g + K) \\
& - \tfrac{1}{4} e (-1,2,4) \cos(-2\gamma + 2g + K) \\
& + (1,-1,2) \cos(\gamma - g + K) \\
\hline
& - (0,1,3) \cos g \\
& - \tfrac{1}{2} (-1,2,3) \cos(-\gamma + 2g) \\
& - \tfrac{1}{6} e (-1,3,9) \cos(-2\gamma + 3g) \\
& + (1,0,3)\, nt \sin\gamma \\
& + e k_1 \cos\gamma \\
& + (\tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{8} e^3)(1,-1,1) \cos(2\gamma - g) \\
& - \tfrac{3}{16} e^2 (-1,2,3) \cos(3\gamma - 2g) \\
\hline
& - (0,1,4) \cos(g + K) \\
& - \tfrac{1}{2} (-1,2,4) \cos(-\gamma + 2g + K) \\
& - \tfrac{1}{6} e (-1,3,10) \cos(-2\gamma + 3g + K) \\
& + (1,0,4)\, nt \sin(\gamma + K) \\
& + e' k_2 \cos(\gamma + K) \\
& + \tfrac{1}{2} e (1,-1,2) \cos(2\gamma - g + K) \\
\hline
\end{aligned}$$

$$-(0,1,5)\cos(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,5)\cos(-\gamma+2g-K)$$
$$+(1,0,5)\,nt\sin(\gamma-K)$$
$$+e^2e'k_3\cos(\gamma-K)$$
$$-\tfrac{1}{2}e(-1,1,2)\cos(2\gamma-g-K)$$
$$-\tfrac{3}{16}e^2(-1,2,4)\cos(3\gamma-2g-K)$$

$$-(0,1,6)\cos(g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,6)\cos(-\gamma+2g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{6}e(-1,3,11)\cos(-2\gamma+3g+2K)$$
$$+(1,0,6)\,nt\sin(\gamma+2K)$$
$$+ee'^2k_4\cos(\gamma+2K)$$

$$-(0,1,7)\cos(g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,7)\cos(-\gamma+2g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{6}e(-1,3,12)\cos(-2\gamma+3g+2\Pi)$$
$$+(1,0,7)\,nt\sin(\gamma+2\Pi)$$
$$+e\sin^2\tfrac{1}{2}J k_5\cos(\gamma+2\Pi)$$

$$-(0,1,8)\cos(g+\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,8)\cos(-\gamma+2g+\Pi+\Pi')$$
$$+(1,0,8)\,nt\sin(\gamma+\Pi+\Pi')$$
$$+e'\sin^2\tfrac{1}{2}J k_6\cos(\gamma+\Pi+\Pi')$$

$$-\tfrac{1}{2}(0,2,9)\cos 2g$$
$$-\tfrac{1}{3}(-1,3,9)\cos(-\gamma+3g)$$
$$-(1,1,9)\cos(\gamma+g)$$
$$+\tfrac{1}{2}e(1,0,3)\,nt\sin 2\gamma$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2k_1\cos 2\gamma$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2(1,-1,1)\cos(3\gamma-g)$$

$$-\tfrac{1}{2}(0,2,10)\cos(2g+K)$$
$$-\tfrac{1}{3}(-1,3,10)\cos(-\gamma+3g+K)$$
$$-(1,1,10)\cos(\gamma+g+K)$$
$$+\tfrac{1}{2}e(1,0,4)\,nt\sin(2\gamma+K)$$
$$+\tfrac{1}{2}ee'k_2\cos(2\gamma+K)$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}(0,2,11)\cos(2g+2K)\\
&-\tfrac{1}{3}(-1,3,11)\cos(-\gamma+3g+2K)\\
&-(1,1,11)\cos(\gamma+g+2K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}(0,2,12)\cos(2g+2\Pi)\\
&-\tfrac{1}{3}(-1,3,12)\cos(-\gamma+3g+2\Pi)\\
&-(1,1,12)\cos(\gamma+g+2\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{3}(0,3,13)\cos 3g\\
&-\tfrac{1}{4}(-1,4,13)\cos(-\gamma+4g)\\
&-\tfrac{1}{2}(1,2,13)\cos(\gamma+2g)\\
&\left.\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}e(1,1,9)\\ -\tfrac{1}{48}e^3(1,-1,1)\end{matrix}\right\}(\cos 2\gamma+g)\\
&+\tfrac{3}{8}e^2(1,0,3)\,nt\sin 3\gamma\\
&+\tfrac{3}{8}e^3k_1\cos 3\gamma\\
&+\tfrac{1}{3}e^3(1,-1,1)\cos(4\gamma-g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{3}(0,3,14)\cos(3g+K)\\
&-\tfrac{1}{4}(-1,4,14)\cos(-\gamma+4g+K)\\
&-\tfrac{1}{2}(1,2,14)\cos(\gamma+2g+K)\\
&-\tfrac{1}{2}e(1,1,10)\cos(2\gamma+g+K)\\
&+\tfrac{3}{8}e^2(1,0,4)\,nt\sin(3\gamma+K)\\
&+\tfrac{3}{8}e^2e'k_2\cos(3\gamma+K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{3}(0,3,15)\cos(3g+2K)\\
&-\tfrac{1}{4}(-1,4,15)\cos(-\gamma+4g+2K)\\
&-\tfrac{1}{2}(1,2,15)\cos(\gamma+2g+2K)\\
&-\tfrac{1}{2}e(1,1,11)\cos(2\gamma+g+2K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{3}(0,3,16)\cos(3g+3K)\\
&-\tfrac{1}{4}(-1,4,16)\cos(-\gamma+4g+3K)\\
&-\tfrac{1}{2}(1,2,16)\cos(\gamma+2g+3K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{3}(0,3,17)\cos(3g+2\Pi)\\
&-\tfrac{1}{4}(-1,4,17)\cos(-\gamma+4g+2\Pi)\\
&-\tfrac{1}{2}(1,2,17)\cos(\gamma+2g+2\Pi)\\
&-\tfrac{1}{2}e(1,1,12)\cos(2\gamma+g+2\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{3}(0,3,18)\cos(3g+K+2\Pi)\\
&-\tfrac{1}{4}(-1,4,18)\cos(-\gamma+4g+K+2\Pi)\\
&-\tfrac{1}{2}(1,2,18)\cos(\gamma+2g+K+2\Pi)
\end{aligned}
$$

---

wo der willkührlichen Constante die Form

$$k_0 + e k_1 \cos\gamma + e' k_2 \cos(\gamma + K) + e^2 e' k_3 \cos(\gamma - K) + e e'^2 k_4 \cos(\gamma + 2K)$$
$$+ e \sin^2 \tfrac{1}{2} J k_5 \cos(\gamma + 2\Pi) + e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J k_6 \cos(\gamma + \Pi + \Pi')$$

gegeben worden ist, deren Glieder ebenfalls dem Satze des Art. 28 unterworfen sind.

43.

Die Verwandelung von γ in g, und die darauf auszuführende Integration giebt nun:

$$n\delta z = \left\{ \begin{array}{l} k_0 + (1,-1,1) - \frac{1}{4} e (-1,2,3) \\ - [(-1,1,2) + \frac{1}{4} e (-1,2,4) - (1,-1,2)] \cos K \end{array} \right\} nt$$
$$- (1,0,3)\, nt \cos g$$
$$- (1,0,4)\, nt \cos (g+K)$$
$$- (1,0,5)\, nt \cos (g-K)$$
$$- (1,0,6)\, nt \cos (g+2K)$$
$$- (1,0,7)\, nt \cos (g+2\Pi)$$
$$- (1,0,8)\, nt \cos (g+\Pi+\Pi')$$
$$- \tfrac{1}{4} e (1,0,3)\, nt \cos 2g$$
$$- \tfrac{1}{4} e (1,0,4)\, nt \cos (2g+K)$$
$$- \tfrac{1}{8} e^2 (1,0,3)\, nt \cos 3g$$
$$- \tfrac{1}{8} e^2 (1,0,3)\, nt \cos (3g+K)$$
$$+ \left\{ \begin{array}{r} -(0,1,3) \\ - \frac{1}{2} (-1,2,3) \\ - \frac{1}{6} e (-1,3,9) \\ + (1,0,3) \\ + e k_1 \\ + (\frac{1}{2} e - \frac{1}{8} e^3)(1,-1,1) \\ - \frac{3}{16} e^2 (-1,2,3) \end{array} \right\} \sin g$$
$$+ \left\{ \begin{array}{r} -(0,1,4) \\ - \frac{1}{2} (-1,2,4) \\ - \frac{1}{6} e (-1,3,10) \\ + (1,0,4) \\ + e' k_2 \\ + \frac{1}{2} e (1,-1,2) \end{array} \right\} \sin (g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-(0,1,5)\\-\frac{1}{2}(-1,2,5)\\+(1,0,5)\\+e^2e'k_3\\-\frac{1}{2}e(-1,1,2)\\-\frac{3}{16}e^2(-1,2,4)\end{array}\right\}\sin(g-K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-(0,1,6)\\-\frac{1}{2}(-1,2,6)\\-\frac{1}{6}e(-1,3,11)\\+(1,0,6)\\+ee'^2k_4\end{array}\right\}\sin(g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-(0,1,7)\\-\frac{1}{2}(-1,2,7)\\-\frac{1}{6}e(-1,3,12)\\+(1,0,7)\\+e\sin^2\frac{1}{2}Jk_5\end{array}\right\}\sin(g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-(0,1,8)\\-\frac{1}{2}(-1,2,8)\\+(1,0,8)\\+e'\sin^2\frac{1}{2}Jk_6\end{array}\right\}\sin(g+\Pi+\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{4}(0,2,9)\\-\frac{1}{6}(-1,3,9)\\-\frac{1}{2}(1,1,9)\\+\frac{1}{8}e(1,0,3)\\+\frac{1}{4}e^2k_1\\+\frac{3}{16}e^2(1,-1,1)\end{array}\right\}\sin 2g$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{4}(0,2,10)\\-\frac{1}{6}(-1,3,10)\\-\frac{1}{2}(1,1,10)\\+\frac{1}{8}e(1,0,4)\\+\frac{1}{4}ee'k\end{array}\right\}\sin(2g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{4}(0,2,11) \\ -\frac{1}{6}(-1,3,11) \\ -\frac{1}{2}(1,1,11) \end{array}\right\}\sin(2g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{4}(0,2,12) \\ -\frac{1}{6}(-1,3,12) \\ -\frac{1}{2}(1,1,12) \end{array}\right\}\sin(2g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{9}(0,3,13) \\ -\frac{1}{12}(-1,4,13) \\ -\frac{1}{6}(1,2,13) \\ -\frac{1}{6}e(1,1,9) \\ +\frac{1}{24}e^2(1,0,3) \\ +\frac{1}{8}e^3k_1 \\ +\frac{5}{48}e^3(1,-1,1) \end{array}\right\}\sin 3g$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{9}(0,3,14) \\ -\frac{1}{12}(-1,4,14) \\ -\frac{1}{6}(1,2,14) \\ -\frac{1}{6}e(1,1,10) \\ +\frac{1}{24}e^2(1,0,4) \\ +\frac{1}{8}e^2e'k_2 \end{array}\right\}\sin(3g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{9}(0,3,15) \\ -\frac{1}{12}(-1,4,15) \\ -\frac{1}{6}(1,2,15) \\ -\frac{1}{6}e(1,1,11) \end{array}\right\}\sin(3g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{9}(0,3,16) \\ -\frac{1}{12}(-1,4,16) \\ -\frac{1}{6}(1,2,16) \end{array}\right\}\sin(3g+3K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{9}(0,3,17) \\ -\frac{1}{12}(-1,4,17) \\ -\frac{1}{6}(1,2,17) \\ -\frac{1}{6}e(1,1,12) \end{array}\right\}\sin(3g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{9}(0,3,18) \\ -\frac{1}{12}(-1,4,18) \\ -\frac{1}{6}(1,2,18) \end{array}\right\}\sin(3g+K+2\Pi)$$

44.

Nach der Differentiation von W nach γ, der Verwandelung von γ in g, und der erneueten Integration bekommt man für die Störungen des Radius Vectors den folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
2\nu = 2C + \{(-1,1,2) + \tfrac{1}{2}e(-1,2,4) + (1,-1,2)\}\, nt \sin K & \\
- (1,0,3)\, nt \sin g & \\
- (1,0,4)\, nt \sin (g+K) & \\
- (1,0,5)\, nt \sin (g-K) & \\
- (1,0,6)\, nt \sin (g+2K) & \\
- (1,0,7)\, nt \sin (g+2\Pi) & \\
- (1,0,8)\, nt \sin (g+\Pi+\Pi') & \\
- \tfrac{1}{2}e\,(1,0,3)\, nt \sin 2g & \\
- \tfrac{1}{2}e\,(1,0,4)\, nt \sin (2g+K) & \\
- \tfrac{3}{8}e^2\,(1,0,3)\, nt \sin 3g & \\
- \tfrac{3}{8}e^2\,(1,0,4)\, nt \sin (3g+K) &
\end{aligned}
$$

$$
+\left\{\begin{array}{r}
-\tfrac{1}{2}(-1,2,3) \\
-\tfrac{1}{3}e(-1,3,9) \\
-(1,0,3) \\
-e k_1 \\
-(e-\tfrac{1}{4}e^3)(1,-1,1) \\
+\tfrac{9}{16}e^2(-1,2,3)
\end{array}\right\}\cos g
$$

$$
+\left\{\begin{array}{r}
-\tfrac{1}{2}(-1,2,4) \\
-\tfrac{1}{3}e(-1,3,10) \\
-(1,0,4) \\
-e' k_2 \\
-e(1,-1,2)
\end{array}\right\}\cos (g+K)
$$

$$
+\left\{\begin{array}{r}
-\tfrac{1}{2}(-1,2,5) \\
-(1,0,5) \\
-e^2 e' k_3 \\
+e(-1,1,2) \\
+\tfrac{9}{16}e^2(-1,2,4)
\end{array}\right\}\cos (g-K)
$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{2}(-1,2,6) \\ -\frac{1}{3}e(-1,3,11) \\ -(1,0,6) \\ -ee'^2k_4 \end{array}\right\}\cos(g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{2}(-1,2,7) \\ -\frac{1}{3}e(-1,3,12) \\ -(1,0,7) \\ -e\sin^2\frac{1}{2}Jk_5 \end{array}\right\}\cos(g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{2}(-1,2,8) \\ -(1,0,8) \\ -e'\sin^2\frac{1}{2}Jk_6 \end{array}\right\}\cos(g+\Pi+\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{6}(-1,3,9) \\ +\frac{1}{2}(1,1,9) \\ -\frac{1}{4}e(1,0,3) \\ -\frac{1}{2}e^2k_1 \\ -\frac{9}{16}e^2(1,-1,1) \end{array}\right\}\cos 2g$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{6}(-1,3,10) \\ +\frac{1}{2}(1,1,10) \\ -\frac{1}{4}e(1,0,4) \\ -\frac{1}{2}ee'k_2 \end{array}\right\}\cos(2g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{6}(-1,3,11) \\ +\frac{1}{2}(1,1,11) \end{array}\right\}\cos(2g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{6}(-1,3,12) \\ +\frac{1}{2}(1,1,12) \end{array}\right\}\cos(2g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,13) \\ +\frac{1}{6}(1,2,13) \\ +\frac{1}{3}e(1,1,9) \\ -\frac{1}{8}e^2(1,0,3) \\ -\frac{3}{8}e^3k_1 \\ -\frac{31}{72}e^3(1,-1,1) \end{array}\right\}\cos 3g$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,14) \\ +\frac{1}{6}(1,2,14) \\ +\frac{1}{3}e\,(1,1,10) \\ -\frac{1}{8}e^2\,(1,0,4) \\ -\frac{3}{8}e^2e'k_2 \end{array}\right\}\cos(3g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,15) \\ +\frac{1}{6}(1,2,15) \\ +\frac{1}{3}e\,(1,1,11) \end{array}\right\}\cos(3g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,16) \\ +\frac{1}{6}(1,2,16) \end{array}\right\}\cos(3g+3K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,17) \\ +\frac{1}{6}(1,2,17) \\ +\frac{1}{3}e\,(1,1,12) \end{array}\right\}\cos(3g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,18) \\ +\frac{1}{6}(1,2,18) \end{array}\right\}\cos(3g+K+2\Pi)$$

wo $2C$ die dem Integral hinzugefügte willkührliche Constante ist, die

$$C = -\frac{1}{6}k_0 - \frac{1}{4}e^2k_1 - \frac{1}{4}ee'k_2\cos K$$

zum Ausdruck hat.

45.

Es soll jetzt angenommen werden, dass der Berechnung der Störungen die mittleren Elemente des gestörten Planeten zu Grunde gelegt werden, wodurch die willkührlichen Constanten völlig bestimmt werden. Die Bestimmung derselben muss bewirken, dass in dem Ausdruck für $n\delta z$ weder ein der Zeit proportionales Glied, noch Glieder vorkommen, die mit $\sin g$ und $\cos g$ multiplicirt sind. Die Anwendung hiervon auf den Ausdruck von $n\delta z$ in Art. 43 giebt

$$
\begin{aligned}
k_0 &= -(1,-1,1) + \tfrac{1}{4}e(-1,2,3) \\
&\quad + \{(-1,1,2) + \tfrac{1}{4}e(-1,2,4) - (1,-1,2)\}\cos K \\
e k_1 &= (0,1,3) + \tfrac{1}{2}(-1,2,3) + \tfrac{1}{6}e(-1,3,9) - (1,0,3) \\
&\quad - (\tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{8}e^3)(1,-1,1) + \tfrac{3}{16}e^2(-1,2,3) \\
e' k_2 &= (0,1,4) + \tfrac{1}{2}(-1,2,4) + \tfrac{1}{6}e(-1,3,10) \\
&\quad - (1,0,4) - \tfrac{1}{2}e(1,-1,2) \\
e^2 e' k_3 &= (0,1,5) + \tfrac{1}{2}(-1,2,5) - (1,0,5) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}e(-1,1,2) + \tfrac{3}{16}e^2(-1,2,4) \\
e e'^2 k_4 &= (0,1,6) + \tfrac{1}{2}(-1,2,6) + \tfrac{1}{6}e(-1,3,11) - (1,0,6) \\
e\sin^2\tfrac{1}{2}J k_5 &= (0,1,7) + \tfrac{1}{2}(-1,2,7) + \tfrac{1}{6}e(-1,3,12) - (1,0,7) \\
e'\sin^2\tfrac{1}{2}J k_6 &= (0,1,8) + \tfrac{1}{2}(-1,2,8) - (1,0,8)
\end{aligned}
$$

welche Ausdrücke zu substituiren sind.

46.

Zugleich mit der Substitution der Werthe der Constanten sollen die Coefficienten in $n\delta z$ und ν auf die A_i und B_i hingeführt und zusammengezogen werden. Fangen wir mit den Constanten an, so bekommen wir durch die Ausdrücke des Art. 41

$$
\begin{aligned}
k_0 &= 2m'\alpha(1)A_0 + \tfrac{1}{4}e^2 m'\alpha\{2(3)+3(2)-6(1)\}A_0 \\
&\quad + \tfrac{1}{2}e'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1 \\
&\quad - \tfrac{1}{4}e e' m'\alpha\{4(3)+11(2)-10(1)+10(0)\}A_1\cos K \\[1ex]
k_1 &= -\tfrac{3}{2}m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0 - \tfrac{1}{48}e^2 m'\alpha\{9(4)+28(3)-15(2)+18(1)\}A_0 \\
&\quad - \tfrac{3}{8}e'^2 m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0 + \tfrac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 \\[1ex]
k_2 &= \tfrac{1}{2}m'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1 + \tfrac{1}{24}e^2 m'\alpha\{9(4)+52(3)+22(2)-12(1)+12(0)\}A_1 \\
&\quad + \tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\{3(4)+32(3)+76(2)+16(1)-16(0)\}A_1 - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{3(2)+14(1)\}\{B_0+B_2\}
\end{aligned}
$$

$$k_3 = \frac{1}{16} m'\alpha \{3(4) + 16(3) + 9(2) + 8(1) - 8(0)\} A_1$$

$$k_4 = -\frac{1}{48} m'\alpha \{9(4) + 76(3) + 62(2) - 124(1) + 124(0)\} A_2$$

$$k_5 = -\frac{1}{12} m'\alpha \{9(2) + 76(1) + 120(0)\} B_1$$

$$k_6 = \frac{1}{4} m'\alpha \{3(2) + 14(1)\} B_0$$

Setzt man hierauf*)

$$\begin{aligned} K = -e' \Big\{ & m'\alpha \{(2) + 2(1) - 2(0)\} A_1 + \tfrac{1}{8} e^2 m'\alpha \{(4) + 6(3) + 5(2) + 2(1) - 2(0)\} A_1 + \\ & + \tfrac{1}{8} e'^2 m'\alpha \{(4) + 10(3) + 22(2) + 4(1) - 4(0)\} A_1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 4(1)\} \{B_0 + B_2\} \Big\} \sin K \\ & + \tfrac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4) + 8(3) + 6(2) - 12(1) + 12(0)\} A_2 \sin 2K \\ & + \tfrac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 8(1) + 12(0)\} B_1 \sin 2\Pi \\ & - \tfrac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 4(1)\} B_0 \sin(\Pi + \Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = -e \Big\{ & m'\alpha \{(2) + 2(1)\} A_0 + \tfrac{1}{8} e^2 m'\alpha \{(4) + 4(3) - (2) - 2(1)\} A_0 + \\ & + \tfrac{1}{4} e'^2 m'\alpha \{(4) + 8(3) + 14(2) + 4(1)\} A_0 - \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 4(1) + 2(0)\} B_1 \Big\} \\ & + e' \Big\{ m'\alpha \{(2) + 2(1) - 2(0)\} A_1 + \tfrac{1}{8} e^2 m'\alpha \{3(4) + 18(3) + 11(2) - 2(1) + 2(0)\} A_1 + \\ & + \tfrac{1}{8} e'^2 m'\alpha \{(4) + 10(3) + 22(2) + 4(1) - 4(0)\} A_1 - \tfrac{1}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 4(1)\} \{B_0 + B_2\} \Big\} \cos K \\ & - \tfrac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4) + 8(3) + 6(2) - 12(1) + 12(0)\} A_2 \cos 2K \\ & - \tfrac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 8(1) + 12(0)\} B_1 \cos 2\Pi \\ & + \tfrac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 4(1)\} B_0 \cos(\Pi + \Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2,s) = & \tfrac{1}{24} e^2 m'\alpha \{2(3) - 3(2) - 18(1)\} A_0 \\ & - \tfrac{1}{12} e e' m'\alpha \{2(3) + 2(2) - 9(1) + 9(0)\} A_1 \cos K \\ & + \tfrac{1}{24} e'^2 m'\alpha \{2(3) + 7(2) - 14(1) + 14(0)\} A_2 \cos 2K \\ & + \tfrac{1}{6} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{2(1) + 9(0)\} B_1 \cos 2\Pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2,c) = & -\tfrac{1}{12} e e' m'\alpha \{2(3) + 2(2) - 9(1) + 9(0)\} A_1 \sin K \\ & + \tfrac{1}{24} e'^2 m'\alpha \{2(3) + 7(2) - 14(1) + 14(0)\} A_2 \sin 2K \\ & + \tfrac{1}{6} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{2(1) + 9(0)\} B_1 \sin 2\Pi \end{aligned}$$

*) Die Bezeichnung dieser Constante wird zur Verwechselung mit dem Winkel K keinen Anlass geben.

$$(3,s) = -\frac{1}{288}e^3 m'\alpha\{(4)-12(3)+24(2)+144(1)\}A_0$$
$$+\frac{1}{96}e^2 e'm'\alpha\{(4)-6(3)-8(2)+48(1)-48(0)\}A_1\cos K$$
$$-\frac{1}{96}ee'^2 m'\alpha\{(4)\quad -22(2)+44(1)-44(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+\frac{1}{288}e'^3 m'\alpha\{(4)+6(3)-18(2)+36(1)-36(0)\}A_3\cos 3K$$
$$-\frac{1}{24}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)\quad -24(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$+\frac{1}{24}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)\}B_2\cos(K+2\Pi)$$

$$(3,c) = \frac{1}{96}e^2 e'm'\alpha\{(4)-6(3)-8(2)+48(1)-48(0)\}A_1\sin K$$
$$-\frac{1}{96}ee'^2 m'\alpha\{(4)\quad -22(2)+44(1)-44(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\frac{1}{288}e'^3 m'\alpha\{(4)+6(3)-18(2)+36(1)-36(0)\}A_3\sin 3K$$
$$-\frac{1}{24}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)\quad -24(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\frac{1}{24}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)\}B_2\sin(K+2\Pi)$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} n\delta z = &\ Knt\sin g && + Lnt\cos g \\ &+\tfrac{1}{4}eKnt\sin 2g && +\tfrac{1}{4}eLnt\cos 2g \\ &+\tfrac{1}{8}e^2 Knt\sin 3g && +\tfrac{1}{8}e^2 Lnt\cos 3g \\ &+(2,s)\sin 2g && +(2,c)\cos 2g \\ &+(3,s)\sin 3g && +(3,c)\cos 3g \end{aligned}$$

47.

Die Ausdrücke des vorigen Artikels für die willkührlichen Constanten geben ferner

$$C = -\frac{1}{3}m'\alpha(1)A_0 - \frac{1}{12}e^2 m'\alpha\{(3)-3(2)-12(1)\}A_0$$
$$-\frac{1}{12}e'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 + \frac{1}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$
$$+\frac{1}{12}ee'm'\alpha\{2(3)+(2)-17(1)+17(0)\}A_1\cos K$$

Seien ausserdem

$$
\begin{aligned}
(1,c) = & \; e\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0+\tfrac{1}{16}e^2m'\alpha\{(4)+4(3)-(2)-2(1)\}A_0+\\
& +\tfrac{1}{8}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0-\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\Big\}\\
& -e'\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1+\tfrac{1}{16}e^2m'\alpha\{3(4)+17(3)+8(2)+(1)-(0)\}A_1+\\
& +\tfrac{1}{16}e'^2m'\alpha\{(4)+9(3)+17(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\cos K\\
& +\tfrac{1}{16}ee'^2m'\alpha\{(4)+6(3)-2(2)+4(1)-4(0)\}A_2\cos 2K\\
& +\tfrac{1}{4}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+6(1)+2(0)\}B_1\cos 2\Pi\\
& -\tfrac{1}{4}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,s) = & \; e'\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1+\tfrac{1}{16}e^2m'\alpha\{(4)+3(3)-4(2)+7(1)-7(0)\}A_1+\\
& +\tfrac{1}{16}e'^2m'\alpha\{(4)+9(3)+17(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\sin K\\
& -\tfrac{1}{16}ee'^2m'\alpha\{(4)+6(3)-2(2)+4(1)-4(0)\}A_2\sin 2K\\
& -\tfrac{1}{4}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+6(1)+2(0)\}B_1\sin 2\Pi\\
& +\tfrac{1}{4}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2,c) = & -\tfrac{1}{12}e^2m'\alpha\{(3)-3(2)-12(1)\}A_0\\
& +\tfrac{1}{12}ee'm'\alpha\{2(3)-(2)-9(1)+9(0)\}A_1\cos K\\
& -\tfrac{1}{12}e'^2m'\alpha\{(3)+2(2)-4(1)+4(0)\}A_2\cos 2K\\
& -\tfrac{1}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+3(0)\}B_1\cos 2\Pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2,s) = & -\tfrac{1}{12}ee'm'\alpha\{2(3)-(2)-9(1)+9(0)\}A_1\sin K\\
& +\tfrac{1}{12}e'^2m'\alpha\{(3)+2(2)-4(1)+4(0)\}A_2\sin 2K\\
& +\tfrac{1}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+3(0)\}B_1\sin 2\Pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3,c) = & \; \tfrac{1}{192}e^3m'\alpha\{(4)-12(3)+36(2)+168(1)\}A_0\\
& -\tfrac{1}{192}e^2e'm'\alpha\{3(4)-22(3)+8(2)+132(1)-132(0)\}A_1\cos K\\
& +\tfrac{1}{192}ee'^2m'\alpha\{3(4)-8(3)-34(2)+68(1)-68(0)\}A_2\cos 2K\\
& -\tfrac{1}{192}e'^3m'\alpha\{(4)+2(3)-6(2)+12(1)-12(0)\}A_3\cos 3K\\
& +\tfrac{1}{48}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{3(2)-8(1)-48(0)\}B_1\cos 2\Pi\\
& -\tfrac{1}{16}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\cos(K+2\Pi)
\end{aligned}
$$

$$(3,s) = \frac{1}{192}e^2e'm'\alpha\{3(4)-22(3)+8(2)+132(1)-132(0)\}A_1\sin K$$
$$-\frac{1}{192}ee'^2m'\alpha\{3(4)-8(3)-34(2)+68(1)-68(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\frac{1}{192}e'^3m'\alpha\{(4)+2(3)-6(2)+12(1)-12(0)\}A_3\sin 3K$$
$$-\frac{1}{48}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{3(2)-8(1)-48(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\frac{1}{16}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\sin(K+2\Pi)$$

dann erhält man

$$
\begin{aligned}
\nu = & -\tfrac{1}{4}eKnt \\
& -\tfrac{1}{2}Knt\cos g \qquad +\tfrac{1}{2}Lnt\sin g \\
& -\tfrac{1}{4}eKnt\cos 2g \qquad +\tfrac{1}{4}eLnt\sin 2g \\
& -\tfrac{3}{16}e^2Knt\cos 3g \qquad +\tfrac{3}{16}e^2Lnt\sin 3g \\
& +C \\
& +(1,c)\cos g \qquad +(1,s)\sin g \\
& +(2,c)\cos 2g \qquad +(2,s)\sin 2g \\
& +(3,c)\cos 3g \qquad +(3,s)\sin 3g
\end{aligned}
$$

§. 5. Entwickelung der Glieder der dritten Coordinate, die dem Falle $i = 0$ in den Coefficienten des Differentials der Störungsfunction nach Z entsprechen.

48.

Die Störungen der dritten Coordinate, die dem Falle $i = 0$ angehören, sollen eben so behandelt werden, wie im Vorhergehenden die der Länge und des Radius Vectors behandelt worden sind, nur werde ich hier die Glieder vierter Ordnung weglassen, die in den Fällen, in denen die hier ausgeführten Entwickelungen überhaupt anwendbar sind, nie Merkliches werden geben können.

Es wird zu dem Ende

$$
\begin{aligned}
a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right) = \quad & (1)\sin \Pi \\
& +(2)\sin(-K+\Pi) \\
& +(5)\sin(g+\Pi) \\
& +(6)\sin(g+K+\Pi) \\
& +(7)\sin(g-K+\Pi) \\
& +(8)\sin(g-\Pi) \\
& +(9)\sin(g+K-\Pi) \\
& +(10)\sin(g+2K-\Pi) \\
& +(11)\sin(2g+\Pi) \\
& +(12)\sin(2g+K+\Pi) \\
& +(21)\sin(3g+\Pi) \\
& +(22)\sin(3g+K+\Pi) \\
& +(23)\sin(3g+2K+\Pi) \\
& +(24)\sin(3g+3\Pi)
\end{aligned}
$$

in welchem Ausdruck die Coefficienten die folgenden Werthe haben:

$$
\begin{aligned}
(1) &= \tfrac{1}{2} e m' \alpha \sin J\{(1)+2(0)\} B_1 \\
(2) &= -\tfrac{1}{2} e' m' \alpha \sin J\,(1) B_0 \\
(5) &= -m'\alpha \sin J\,(0) B_1 - \tfrac{1}{4} e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+2(1)-4(0)\} B_1 \\
&\quad -\tfrac{1}{4} e'^2 m'\alpha \sin J\{(2)+4(1)+2(0)\} B_1 + \tfrac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha \sin J\,(0)\{2C_0+C_2\} \\
(6) &= \tfrac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)+5(1)\} B_2 \\
(7) &= \tfrac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)+(1)\} B_0 \\
(8) &= \tfrac{1}{8} e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+2(1)-(0)\} B_1 \\
(9) &= -\tfrac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)+(1)\} B_0 \\
(10) &= \tfrac{1}{8} e'^2 m'\alpha \sin J\,(2) B_1 \\
(11) &= \tfrac{1}{2} e m'\alpha \sin J\{(1)-2(0)\} B_1 \\
(12) &= -\tfrac{1}{2} e' m'\alpha \sin J\,(1) B_2 \\
(21) &= -\tfrac{1}{8} e^2 m'\alpha \sin J\{(2)-6(1)+9(0)\} B_1 \\
(22) &= \tfrac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)-3(1)\} B_2 \\
(23) &= -\tfrac{1}{8} e'^2 m'\alpha \sin J\,(2) B_3 \\
(24) &= -\tfrac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha \sin J\,(0)\, C_2
\end{aligned}
$$

49.

Multiplicirt man nun mit dem Ausdrucke des Factors C in Art. 34, und führt darauf die Integration aus, so wird das Integral =

$$
\begin{aligned}
&(-1,1,1)\sin(-\gamma+g+\Pi)\\
&+(1,-1,1)\sin(\gamma-g+\Pi)\\
\hline
&+(-1,1,2)\sin(-\gamma+g+\Pi')\\
&+(1,-1,2)\sin(\gamma-g+\Pi')\\
\hline
&+(-1,2,5)\sin(-\gamma+2g+\Pi)\\
&+(1,0,5)\,nt\cos(\gamma+\Pi)\\
&+l_1\sin(\gamma+\Pi)\\
\hline
&+(-1,2,6)\sin(-\gamma+2g+2\Pi-\Pi')\\
&+(1,0,6)\,nt\cos(\gamma+2\Pi-\Pi')\\
&+ee'l_2\sin(\gamma+2\Pi-\Pi')\\
\hline
&+(-1,2,7)\sin(-\gamma+2g+\Pi')\\
&+(1,0,7)\,nt\cos(\gamma+\Pi')\\
&+ee'l_3\sin(\gamma+\Pi')\\
\hline
&+(-1,2,8)\sin(-\gamma+2g-\Pi)\\
&+(1,0,8)\,nt\cos(\gamma-\Pi)\\
&+e^2l_4\sin(\gamma-\Pi)\\
\hline
&+(-1,2,9)\sin(-\gamma+2g-\Pi')\\
&+(1,0,9)\,nt\cos(\gamma-\Pi')\\
&+ee'l_5\sin(\gamma-\Pi')\\
\hline
&+(-1,2,10)\sin(-\gamma+2g+\Pi-2\Pi')\\
&+(1,0,10)\,nt\cos(\gamma+\Pi-2\Pi')\\
&+e'^2l_6\sin(\gamma+\Pi-2\Pi')\\
\hline
&+(-1,3,11)\sin(-\gamma+3g+\Pi)\\
&+(1,1,11)\sin(\gamma+g+\Pi)\\
\hline
&+(-1,3,12)\sin(-\gamma+3g+2\Pi-\Pi')\\
&+(1,1,12)\sin(\gamma+g+2\Pi-\Pi')\\
\hline
\end{aligned}
$$

$$+(-1,4,21)\sin(-\gamma+4g+\Pi)$$
$$+(1,2,21)\sin(\gamma+2g+\Pi)$$

$$+(-1,4,22)\sin(-\gamma+4g+2\Pi-\Pi')$$
$$+(1,2,22)\sin(\gamma+2g+2\Pi-\Pi')$$

$$+(-1,4,23)\sin(-\gamma+4g+3\Pi-2\Pi')$$
$$+(1,2,23)\sin(\gamma+2g+3\Pi-2\Pi')$$

$$+(-1,4,24)\sin(-\gamma+4g+3\Pi)$$
$$+(1,2,24)\sin(\gamma+2g+3\Pi)$$

wo die mit l_1, l_2, etc. multiplicirten Glieder die Theile der Integrationsconstante sind, und die Coefficienten die folgenden Ausdrücke haben:

$$(-1,1,1) = \tfrac{1}{2}(1) - \tfrac{3}{4}e(5)$$
$$(1,-1,1) = \tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{4}e(5)$$
$$(-1,1,2) = \tfrac{1}{2}(2)$$
$$(1,-1,2) = \tfrac{1}{2}(2)$$
$$(-1,2,5) = \tfrac{1}{8}e(1) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}e^2)(5) - \tfrac{3}{8}e(11)$$
$$(1,0,5) = \tfrac{3}{4}e(1) - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(5) - \tfrac{1}{4}e(11)$$
$$(-1,2,6) = \tfrac{1}{4}(6) - \tfrac{3}{8}e(12)$$
$$(1,0,6) = -\tfrac{1}{2}(6) - \tfrac{1}{4}e(12)$$
$$(-1,2,7) = \tfrac{1}{8}e(2) + \tfrac{1}{4}(7)$$
$$(1,0,7) = \tfrac{3}{4}e(2) - \tfrac{1}{2}(7)$$
$$(-1,2,8) = -\tfrac{1}{8}e(1) - \tfrac{3}{32}e^2(5) + \tfrac{1}{4}(8)$$
$$(1,0,8) = -\tfrac{3}{4}e(1) - \tfrac{1}{2}(8)$$
$$(-1,2,9) = -\tfrac{1}{8}e(2) + \tfrac{1}{4}(9)$$
$$(1,0,9) = -\tfrac{3}{4}e(2) - \tfrac{1}{2}(9)$$
$$(-1,2,10) = \tfrac{1}{4}(10)$$
$$(1,0,10) = -\tfrac{1}{2}(10)$$
$$(-1,3,11) = \tfrac{1}{12}e(5) + \tfrac{1}{6}(11)$$
$$(1,1,11) = \tfrac{3}{4}e(5) - \tfrac{1}{2}(11)$$

$$(-1,3,12) = \frac{1}{6}(12)$$
$$(1,1,12) = -\frac{1}{2}(12)$$
$$(-1,4,21) = \frac{3}{64}e^2(5) + \frac{1}{16}e(11) + \frac{1}{8}(21)$$
$$(1,2,21) = \frac{3}{8}e(11) - \frac{1}{4}(21)$$
$$(-1,4,22) = \frac{1}{16}e(12) + \frac{1}{8}(22)$$
$$(1,2,22) = \frac{3}{8}e(12) - \frac{1}{4}(22)$$
$$(-1,4,23) = \frac{1}{8}(23)$$
$$(1,2,23) = -\frac{1}{4}(23)$$
$$(-1,4,24) = \frac{1}{8}(24)$$
$$(1,2,24) = -\frac{1}{4}(24)$$

50.

Drückt man diese Coefficienten durch die B_i und C_i aus, so geben die Ausdrücke des Art. 48

$$(-1,1,1) = \frac{1}{4}e\,m'\alpha\sin J\{(1)+5(0)\}B_1$$
$$(1,-1,1) = \frac{1}{4}e\,m'\alpha\sin J\{(1)+(0)\}B_1$$
$$(-1,1,2) = -\frac{1}{4}e'm'\alpha\sin J\,(1)B_0$$
$$(1,-1,2) = -\frac{1}{4}e'm'\alpha\sin J\,(1)B_0$$
$$(-1,2,5) = -\frac{1}{4}m'\alpha\sin J\,(0)B_1 - \frac{1}{16}e^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)-14(0)\}B_1$$
$$-\frac{1}{16}e'^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\} + \frac{3}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J\,(0)\,\{2C_0+C_2\}$$
$$(1,0,5) = \frac{1}{2}m'\alpha\sin J\,(0)B_1 + \frac{1}{8}e^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$
$$+\frac{1}{8}e'^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \frac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J\,(0)\,\{2C_0+C_2\}$$
$$(-1,2,6) = \frac{1}{16}e\,e'm'\alpha\sin J\{(2)+8(1)\}B_2$$
$$(1,0,6) = -\frac{1}{8}e\,e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2$$
$$(-1,2,7) = \frac{1}{16}e\,e'm'\alpha\sin J\,(2)B_0$$
$$(1,0,7) = -\frac{1}{8}e\,e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0$$
$$(-1,2,8) = \frac{1}{32}e^2m'\alpha\sin J\{(2)\quad -2(0)\}B_1$$
$$(1,0,8) = -\frac{1}{16}e^2m'\alpha\sin J\{(2)+8(1)+11(0)\}B_1$$

$$
\begin{aligned}
(-1,2,9) &= -\tfrac{1}{16} e e' m' \alpha \sin J\,(2)\, B_0 \\
(1,0,9) &= \tfrac{1}{8} e e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4\,(1)\}\, B_0 \\
(-1,2,10) &= \tfrac{1}{32} e'^2 m' \alpha \sin J\,(2)\, B_1 \\
(1,0,10) &= -\tfrac{1}{16} e'^2 m' \alpha \sin J\,(2)\, B_1 \\
(-1,3,11) &= \tfrac{1}{12} e m' \alpha \sin J \{(1) - 3\,(0)\}\, B_1 \\
(1,1,11) &= -\tfrac{1}{4} e m' \alpha \sin J \{(1) + (0)\}\, B_1 \\
(-1,3,12) &= -\tfrac{1}{12} e' m' \alpha \sin J\,(1)\, B_2 \\
(1,1,12) &= \tfrac{1}{4} e' m' \alpha \sin J\,(1)\, B_2 \\
(-1,4,21) &= -\tfrac{1}{64} e^2 m' \alpha \sin J \{(2) - 8\,(1) + 16\,(0)\}\, B_1 \\
(1,2,21) &= \tfrac{1}{32} e^2 m' \alpha \sin J \{(2) \quad - 3\,(0)\}\, B_1 \\
(-1,4,22) &= \tfrac{1}{32} e e' m' \alpha \sin J \{(2) - 4\,(1)\}\, B_2 \\
(1,2,22) &= -\tfrac{1}{16} e e' m' \alpha \sin J\,(2)\, B_2 \\
(-1,4,23) &= -\tfrac{1}{64} e'^2 m' \alpha \sin J\,(2)\, B_3 \\
(1,2,23) &= \tfrac{1}{32} e' m' \alpha \sin J\,(2)\, B_3 \\
(-1,4,24) &= -\tfrac{3}{16} \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' \alpha \sin J\,(0)\, C_2 \\
(1,2,24) &= \tfrac{3}{8} \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' \alpha \sin J\,(0)\, C_2
\end{aligned}
$$

51.

Es sind jetzt dem Integral des Art. 49 die weggelassenen Glieder durch die Sätze der Artt. 28 und 33 zuzufügen, wodurch

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = &-\tfrac{3}{2} e\,(1,0,5)\, nt \cos \Pi + (1,0,5)\, nt \cos (g + \Pi) \\
&+ (1,0,6)\, nt \cos (g + 2\Pi - \Pi') + (1,0,7)\, nt \cos (g + \Pi') \\
&+ (1,0,8)\, nt \cos (g - \Pi) + (1,0,9)\, nt \cos (g - \Pi') \\
&+ (1,0,10)\, nt \cos (g + \Pi - 2\Pi') \\
&+ \tfrac{1}{2} e\,(1,0,5)\, nt \cos (2g + \Pi) + \tfrac{3}{8} e^2\,(1,0,5)\, nt \cos (3g + \Pi) \\
&+ \left\{\begin{array}{r} -\tfrac{3}{2} e l_1 \\ +(-1,1,1) \\ +\tfrac{1}{2} e\,(-1,2,5) \\ +(1,-1,1) \end{array}\right\} \sin \Pi \\
&+ \left\{\begin{array}{r} (-1,1,2) \\ +(1,-1,2) \end{array}\right\} \sin \Pi'
\end{aligned}
$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e(-1,1,1) \\ -\frac{3}{2}e(1,1,11) \\ +(-1,2,5) \\ +\frac{1}{2}e(-1,3,11) \\ +l_1 \\ +\frac{1}{2}e(1,-1,1) \end{array}\right\}\sin(g+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e(1,1,12) \\ +(-1,2,6) \\ +\frac{1}{2}e(-1,3,12) \\ +ee'l_2 \end{array}\right\}\sin(g+2\Pi-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e(-1,1,2) \\ +(-1,2,7) \\ +ee'l_3 \\ +\frac{1}{2}e(1,-1,2) \end{array}\right\}\sin(g+\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} \frac{3}{2}e(1,-1,1) \\ +(-1,2,8) \\ +e^2l_4 \\ -\frac{1}{2}e(-1,1,1) \\ -\frac{3}{8}e^2(-1,2,5) \end{array}\right\}\sin(g-\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} \frac{3}{2}e(1,-1,2) \\ +(-1,2,9) \\ +ee'l_5 \\ -\frac{1}{2}e(-1,1,2) \end{array}\right\}\sin(g-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} (-1,2,10) \\ +e'^2l_6 \end{array}\right\}\sin(g+\Pi-2\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e(-1,2,5) \\ +(-1,3,11) \\ +(1,1,11) \\ +\frac{1}{2}el_1 \end{array}\right\}\sin(2g+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} (-1,3,12) \\ +(1,1,12) \end{array}\right\}\sin(2g+2\Pi-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{aligned}&-\tfrac{3}{2}e(-1,3,11)\\&\quad+(-1,4,21)\\&\quad\quad+(1,2,21)\\&\quad+\tfrac{1}{2}e(1,1,11)\\&\quad\quad+\tfrac{3}{8}e^2 l_1\end{aligned}\right\}\sin(3g+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{aligned}&-\tfrac{3}{2}e(-1,3,12)\\&\quad+(-1,4,22)\\&\quad\quad+(1,2,22)\\&+\tfrac{1}{2}e(1,1,12)\end{aligned}\right\}\sin(3g+2\Pi-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{aligned}&(-1,4,23)\\&+(1,2,23)\end{aligned}\right\}\sin(3g+3\Pi-2\Pi')$$

$$+\left\{\begin{aligned}&(-1,4,24)\\&+(1,2,24)\end{aligned}\right\}\sin(3g+3\Pi)$$

erhalten wird. Die in Art. 45 eingeführte Bedingung in Betreff der angewandten elliptischen Elemente verlangt auch hier, dass die mit $\sin g$ und $\cos g$ multiplicirten Glieder Null werden, und hiermit bekommen die willkührlichen Constanten die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \tfrac{3}{2}e(-1,1,1)+\tfrac{3}{2}e(1,1,11)-(-1,2,5)\\
&\quad -\tfrac{1}{2}e(-1,3,11)-\tfrac{1}{2}e(1,-1,1)\\
ee'l_2 &= \tfrac{3}{2}(1,1,12)-(-1,2,6)-\tfrac{1}{2}e(-1,3,12)\\
ee'l_3 &= \tfrac{3}{2}(-1,1,2)-(-1,2,7)-\tfrac{1}{2}e(1,-1,2)\\
e^2 l_4 &= -\tfrac{3}{2}e(1,-1,1)-(-1,2,8)+\tfrac{1}{2}e(-1,1,1)+\tfrac{3}{8}e^2(-1,2,5)\\
ee'l_5 &= -\tfrac{3}{2}e(1,-1,2)-(-1,2,9)+\tfrac{1}{2}e(-1,1,2)\\
e'^2 l_6 &= -(-1,2,10)
\end{aligned}$$

von welchen nur der erste weiter entwickelt zu werden braucht.

52.

Durch die Substitution der Ausdrücke des Art. 50 bekommt man zuerst mit ausreichender Genauigkeit

$$l_1 = \tfrac{1}{4}m'\alpha\sin J(0)B_1$$

und hierauf, nachdem

$$M = -\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J\,(0)\,B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{3\,(2)+16\,(1)+15\,(0)\Big\}B_1 +$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)+2\,(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J\,(0)\,\{2C_0+C_2\}\Big\}\sin\Pi$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)\}B_0\sin\Pi'$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$N = \Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J\,(0)\,B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)\quad -7\,(0)\}B_1 +$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)+2\,(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J\,(0)\,\{2C_0+C_2\}\Big\}\cos\Pi$$
$$-\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$(0,c) = \tfrac{1}{2}em'\alpha\sin J\{(1)+2\,(0)\}B_1\sin\Pi - \tfrac{1}{2}e'm'\alpha\sin J\,(1)\,B_0\sin\Pi'$$

$$(2,s) = -\tfrac{1}{6}em'\alpha\sin J\,(1)\,B_1\cos\Pi + \tfrac{1}{6}e'm'\alpha\sin J\,(1)\,B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$

$$(2,c) = -\tfrac{1}{6}em'\alpha\sin J\,(1)\,B_1\sin\Pi + \tfrac{1}{6}e'm'\alpha\sin\,(1)\,B_2\sin J\,(2\Pi-\Pi')$$

$$(3,s) = \tfrac{1}{64}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)-8\,(1)\}B_1\cos\Pi - \tfrac{1}{32}ee'm'\alpha\sin J\{(2)-4\,(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{64}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_3\cos(3\Pi-2\Pi') + \tfrac{3}{16}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J\,(0)\,C_2\cos 3\Pi$$

$$(3,c) = \tfrac{1}{64}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)-8\,(1)\}B_1\sin\Pi - \tfrac{1}{32}ee'm'\alpha\sin J\{(2)-4\,(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{64}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_3\sin(3\Pi-2\Pi') + \tfrac{3}{16}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J\,(0)\,C_2\sin 3\Pi$$

gesetzt worden sind:

$$\begin{array}{rll}
\dfrac{u}{\cos i} = & & -\tfrac{3}{2}eNnt \\
& +Mnt\sin g & +Nnt\cos g \\
& +\tfrac{1}{2}eMnt\sin 2g & +\tfrac{1}{2}eNnt\cos 2g \\
& +\tfrac{3}{8}e^2Mnt\sin 3g & +\tfrac{3}{8}e^2Nnt\cos 3g \\
& & +(0,c) \\
& +(2,s)\sin 2g & +(2,c)\cos 2g \\
& +(3,s)\sin 3g & +(3,c)\cos 3g
\end{array}$$

§. 6. Allgemeine Entwickelung der von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen, und mit t^2 multiplicirten Glieder.

53.

Die mit t^2 multiplicirten Glieder sind von der Ordnung der Quadrate und der Producte der störenden Massen, und um ihre analytischen Ausdrücke zu entwickeln, muss man sich deshalb der strengen Differentialgleichungen bedienen. Sie können nur aus den Gliedern hervorgehen, die mit blosser Rücksicht auf die ersten Potenzen der störenden Massen schon mit t multiplicirt sind, und dieser Umstand trägt wesentlich zur Einfachheit ihrer Ausdrücke bei. Auch hier, wie im Vorhergehenden, braucht man nur Einen störenden Planeten zu betrachten, da mehrere solcher ähnliche Glieder hinzufügen.

Wir könnten jetzt wieder dieselben Differentialgleichungen anwenden, die uns im Vorhergehenden gedient haben, aber da ich mich überzeugt habe, dass ihre Anwendung in diesem Falle auf Weitläufigkeiten führt, so werde ich lieber andere anwenden, die auf einfachere Entwickelungen führen.

Die Uebersicht über die Entwickelungen kann man sich dadurch erleichtern, dass man die zu entwickelnden Glieder in verschiedene Abtheilungen bringt, und jede Abtheilung für sich entwickelt. Es bieten sich zuerst zwei Hauptabtheilungen dar, von welchen die eine die Glieder behandelt, die durch die Aenderungen der Coordinaten des gestörten, und die andere diejenigen, die durch die Aenderungen der Coordinaten des störenden Planeten entstehen. Jede dieser Abtheilungen kann für sich in zwei Unterabtheilungen zerlegt werden, deren eine die Glieder behandelt, die aus den Aenderungen der Länge und des Radius Vectors, und deren andere diejenigen in sich begreift, die aus den Aenderungen der dritten Coordinate hervorgehen. Jede dieser Abtheilungen soll im Folgenden für sich betrachtet werden.

α) Störungen der Länge und des Radius Vectors, die mit t^2 multiplicirt sind, und aus $n\delta z$ und ν entstehen.

54.

Die Gleichungen, die ich anwenden werde, sind die längst bekannten folgenden:

$$n\delta z = n\int\left\{\overline{W} + \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \gamma}\right) n\delta z + \nu^2\right\} dt$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2} n \int\left\{\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \gamma}\right) + \left(\frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial \gamma^2}\right) n\delta z\right\} dt$$

und von den zwei Ausdrücken der Function W, die ich gegeben habe, werde ich hier den nachstehenden benutzen

$$W = \Xi + \Upsilon\left(\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \tfrac{3}{2}e\right) + \Psi\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

Hierdurch wird

$$\overline{W} = \Xi + \Upsilon\left(\frac{r}{a}\cos f + \tfrac{3}{2}e\right) + \Psi\frac{r}{a}\sin f$$

Die strengen Ausdrücke der Differentiale von Υ und Ψ sind ferner

$$\frac{d\Upsilon}{n\,dt} = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}\cos f + \frac{h^2}{h_0^2}\,\frac{\cos f + e}{1-e^2}\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) + \frac{a}{r}\sin f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\frac{d\Psi}{n\,dt} = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}\sin f + \frac{h^2}{h_0^2}\,\frac{\sin f}{1-e^2}\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) - \frac{a}{r}\cos f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

und das Element Ξ kann aus diesen durch die Gleichung

$$\Xi = -\tfrac{3}{2}e\Upsilon + 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1$$

erhalten werden. Endlich ist

$$\frac{h_0}{h} = h_0\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) dt$$

wofür, wie ich schon früher gethan habe,

$$\frac{h_0}{h} = 1 + S$$

geschrieben werden soll.

Nach der Entwickelung hat man, mit hier ausreichender Genauigkeit, zu setzen

$$\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \tfrac{3}{2}e = (1 - \tfrac{3}{8}e^2)\cos\gamma + \tfrac{1}{2}e\cos 2\gamma + \tfrac{3}{8}e^2\cos 3\gamma$$

$$\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = (1 - \tfrac{5}{8}e^2)\sin\gamma + \tfrac{1}{2}e\sin 2\gamma + \tfrac{3}{8}e^2\sin 3\gamma$$

Endlich ist noch zu bemerken, dass in diesen Ausdrücken a, n, e, h_0 Constanten sind, f blos Function von nz ist, r und die Differentialquotienten von Ω aber Functionen von nz und ν sind. Im Allgemeinen wird, wenn F irgend eine Function dieser beiden Grössen ist, wegen

$$nz = g + n\delta z$$
$$r = r(1+\nu)$$

der Zuwachs von F, welcher von $n\delta z$ und ν herrührt

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right) n\delta z + r\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)\nu$$

Die obigen Gleichungen sollen nun auf ähnliche Art behandelt werden, wie im § 1 der dritten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten gezeigt worden ist.

55.

In den vorstehenden Ausdrücken ist, wie man weiss, Ein Element eliminirt, welches jetzt eingeführt werden muss, wobei jedoch nur auf die ersten Potenzen der Massen Rücksicht genommen zu werden braucht. Die erste Gleichung des vorigen Artikels giebt unter dieser Beschränkung

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Xi + \Upsilon\left(\frac{r}{a}\cos f + \frac{3}{2}e\right) + \Psi\frac{r}{a}\sin f$$

Man findet nun durch ein directes Verfahren, dass

$$\int\left\{\frac{r}{a}\cos f + \frac{3}{2}e\right\} n\,dt = \left\{\frac{r\sqrt{1-e^2}}{2a} + \frac{r^2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\right\}\sin f$$

$$\int\frac{r}{a}\sin f\, n\,dt = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)$$

sind, und kann sich jedenfalls leicht durch die Rückdifferentiation von der Richtigkeit dieser Gleichungen überzeugen. Diese Integrale unterliegen der Bedingung, dass sie gleichwie ihre Differentiale nur periodische Glieder enthalten dürfen, und demgemäss ist dem zweiten Integral eine entsprechende Constante hinzugefügt worden. Integrirt man nun die Gleichung für $d\delta z$ theilweise, so ergiebt sich

$$n\delta z = X + \Upsilon\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f + \Psi\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)$$

wo

$$X = n\int\left\{\Xi - \frac{d\Upsilon}{n\,dt}\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - \frac{d\Psi}{n\,dt}\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)\right\}dt$$

geschrieben und X das verlangte vierte Element ist.

Die Störungen des Radius Vectors können auf die drei Elemente Ξ, Υ, Ψ hingeführt werden. Die Gleichung des vor. Art. für Ξ ergiebt, wenn blos die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt werden,

$$S = -\tfrac{1}{3}\Xi - \tfrac{1}{2}e\Upsilon$$

und aus der Gleichung des Art. 23 für das Differential der Längenstörungen folgt

$$\nu = \tfrac{1}{2}S - \tfrac{1}{2}\frac{d\delta z}{dt}$$

Substituirt man hierin die vorstehenden Ausdrücke für S und $d\delta z$, so wird

$$\nu = -\tfrac{2}{3}\Xi - \tfrac{1}{2}\Upsilon\left(\tfrac{r}{a}\cos f + 2e\right) - \tfrac{1}{2}\Psi\tfrac{r}{a}\sin f$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen kann man umgekehrt die Elemente X, Ξ, Υ, Ψ durch $n\delta z$, $\frac{d\delta z}{dt}$, ν, S ausdrücken, welches aber erst weiter unten geschehen soll.

56.

Nehmen wir jetzt die Ausdrücke des vorvor. Art. für die Differentiale von Υ und Ψ vor, und suchen den Zuwachs derselben, der durch die Quadrate der störenden Kräfte bewirkt wird und durch ein denselben vorgesetztes δ bezeichnet werden soll. Bezeichnet man mit Γ und Θ die Ausdrücke von $d\Upsilon$ und $d\Psi$, wenn blos die ersten Potenzen der störenden Kräfte berücksichtigt werden, so erhält man

$$\Gamma = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}\cos f + \frac{\cos f + e}{1-e^2}\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) + \frac{a}{r}\sin f r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$
$$\Theta = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right)\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) - \frac{a}{r}\cos f r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

und es ist leicht zu finden, dass diese sich in die Gleichungen

$$\Gamma = 2\frac{a}{e}\left\{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)\right\}$$
$$\Theta = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial e}\right)$$

verwandeln lassen, welche schon im Art. 24 angegeben wurden. In dieser letzteren Form ist ihre Entwickelung, nachdem die von Ω gegeben ist, sehr einfach, aber wenn man bis zu Grössen von der p^{ten} Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten gehen will, so verlangen sie, dass Ω bis auf Grössen der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung entwickelt sei. Auch kann man dieselben Grössen aus dem Ausdruck von dW erhalten, wie weiter unten gezeigt werden wird.

57.

Da für die ersten Potenzen der Massen aus dem Vorhergehenden

$$\frac{h^2}{h_0^2} = 1 - 2S$$

folgt, so geben die strengen Ausdrücke sogleich

$$\frac{d\delta\Upsilon}{n\,dt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) n\delta z + r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\nu - 4\frac{a}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\cos f + e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) S$$

$$\frac{d\delta\Psi}{n\,dt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) n\delta z + r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\nu - 4\frac{a}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) S$$

und die Gleichung des Art. 54 für Ξ giebt

$$\delta\Xi = -\tfrac{3}{2} e\delta\Upsilon - 3\delta S + 2S^2$$

In Bezug auf die Differentialquotienten nach r ist zu bemerken, dass

$$r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)$$

ist, woraus leicht

$$r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\right) - 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{a}{r}\cos f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) + \frac{a}{r}\sin f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Theta}{\partial a}\right) - 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{a}{r}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) - \frac{a}{r}\cos f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

folgen. Eliminirt man nun $n\delta z$, ν, S durch die Ausdrücke des Art. 55, so bekommt man

$$\frac{d\delta\Upsilon}{n\,dt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) X + \frac{2}{3}\left\{\Gamma - a\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\right)\right\}\Xi + M\Upsilon + N\Psi$$

$$\frac{d\delta\Psi}{n\,dt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) X + \frac{2}{3}\left\{\Theta - a\left(\frac{\partial\Theta}{\partial a}\right)\right\}\Xi + P\Upsilon + Q\Psi$$

wo

$$M = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{2a}\cos f + e\right)$$
$$+ 2\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\cos f + e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

$$N = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right) - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{r}{2a}\sin f$$

$$P = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{2a}\cos f + e\right)$$
$$+ 2\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

$$Q = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2+3e^2}{2}\right) - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{r}{2a}\sin f$$

58.

Die eben erhaltenen Ausdrücke für M, N, P, Q lassen sich durch die Einführung der Differentialquotienten von Γ und Θ nach e bedeutend vereinfachen. Um diese Vereinfachung auszuführen bemerke ich, dass, abgesehen von a, welche Grösse hierbei nicht in Betracht kommt, Γ und Θ in der Form, in welcher sie oben aufgestellt worden sind, sich als Functionen von f, r, Π, e darstellen, und dass f und Π mit einander verbunden sind. Ferner dass zwar

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

ist, dass aber diese Gleichung in Bezug auf die vollständigen Ausdrücke von Γ und Θ nicht stattfindet. Die Argumente f und r sind ihrerseits Functionen von g und e, und zwar so, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial e}\right) = \left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f$$
$$\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right) = \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial e}\right) = -a\cos f$$

sind. Da g blos in f und r enthalten ist, so finden jedenfalls die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right)$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right)$$

statt, aus denen man durch Substitution der vorstehenden Ausdrücke der Differentialquotienten von f und r nach g die folgenden

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$

erhält. Differentiirt man nun die Ausdrücke des Art. 56 für Γ und Θ nach e, so erhält man zuerst

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right)\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{a}{r}\cos f$$
$$+\frac{1}{1-e^2}\left\{e\Gamma+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)\right\}+4\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}(\cos f+e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right)\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{a}{r}\cos f$$
$$+\frac{e}{1-e^2}\Theta+4\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

die sich durch Hülfe der beiden vorstehenden Gleichungen, und wegen

$$e\Gamma = 2a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)-2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

leicht in die folgenden verwandeln lassen:

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\left(\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{r\cos f+2ae}{a(1-e^2)}$$
$$+\frac{2a}{1-e^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)+4\frac{ane}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}(\cos f+e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\left(\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{r\cos f+2ae}{a(1-e^2)}$$
$$+\frac{e}{1-e^2}\Theta+4\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

Differentiirt man ferner dieselben Ausdrücke für Γ und Θ nach Π, so erhält man

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right)+2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)-\frac{a}{r}\cos f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right)-2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\cos f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)+\frac{a}{r}\sin f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

die man leicht auf ähnliche Art wie vorher in die folgenden verwandelt:

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}+\Theta$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}-\frac{1}{1-e^2}\Gamma+2\frac{ae}{1-e^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)$$

Vergleicht man diese mit den Ausdrücken von M, N, P, Q des vor. Art., so zeigt sich ohne Weiteres, dass

$$M = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right)-a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)$$
$$N = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right)-\frac{1-e^2}{2e}\Theta-\frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)$$
$$P = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right)-\frac{e}{2}\Theta$$
$$Q = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right)+\frac{1}{2e}\Gamma-a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)-\frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)$$

sind.

59.

Geht man nun die Ausdrücke durch, die zur Erreichung unseres Zweckes erforderlich sind, so findet man leicht, dass nur die Glieder gebraucht werden, in welchen $i = 0$ ist, und dass man in Γ und Θ die constanten Glieder bis auf Grössen der vierten, die veränderlichen aber nur bis auf Grössen der dritten Ordnung braucht. Diese erhält man leicht aus dem Ausdruck für dW des Art. 40. Dem Vorhergehenden zufolge kann man dieses Differential auf die folgende Form bringen

$$\frac{dW}{ndt} = \Xi + \Gamma\left(\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e\right) + \Theta\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

Setzt man hierauf

$$\Gamma = \Sigma a_m \sin(\alpha t + \beta)$$
$$\Theta = \Sigma b_m \cos(\alpha t + \beta)$$

und

$$\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e = (1 - \tfrac{3}{8}e^2)\cos\gamma$$
$$\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = (1 - \tfrac{5}{8}e^2)\sin\gamma$$

so bekommt man

$$\frac{dW}{ndt} = \Xi + \{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{16}e^2)\,a_m - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{16}e^2)\,b_m\}\sin(-\gamma + \alpha t + \beta)$$
$$+ \{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{16}e^2)\,a_m + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{16}e^2)\,b_m\}\sin(\gamma + \alpha t + \beta)$$

Die Vergleichung mit dem Ausdruck von dW in Art. 40 giebt

$$(-1, 1, m) = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{16}e^2)\,a_m - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{16}e^2)\,b_m$$
$$(1, -1, m) = (\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{16}e^2)\,a_m + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{16}e^2)\,b_m$$

woraus

$$a_m = (1 + \tfrac{3}{8}e^2)\{(1, -1, m) + (-1, 1, m)\}$$
$$b_m = (1 + \tfrac{5}{8}e^2)\{(1, -1, m) - (-1, 1, m)\}$$

folgen. Durch die Anwendung dieser Ausdrücke ergiebt sich leicht:

$$
\begin{aligned}
\Gamma = \; & (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(1,0,4)-(1,0,5)\}\sin K \\
& + (1,0,6)\sin 2K \\
& + (1,0,7)\sin 2\Pi \\
& + (1,0,8)\sin(\Pi+\Pi') \\
& + (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(1,1,9)-(1,-1,1)\sin g \\
& + (1,1,10)+(-1,1,2)\sin(g+K) \\
& - (1,-1,2)\sin(g-K) \\
& + (1,1,11)\sin(g+2K) \\
& + (1,1,12)\sin(g+2\Pi) \\
& + (-1,2,3)\sin 2g \\
& + (-1,2,4)\sin(2g+K) \\
& + (-1,3,9)\sin 3g \\
& + (-1,3,10)\sin(3g+K) \\
& + (-1,3,11)\sin(3g+2K) \\
& + (-1,3,12)\sin(3g+2\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta = \; & (1+\tfrac{5}{8}e^2)(1,0,3) \\
& + (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{(1,0,4)+(1,0,5)\}\cos K \\
& + (1,0,6)\cos 2K \\
& + (1,0,7)\cos 2\Pi \\
& + (1,0,8)\cos(\Pi+\Pi') \\
& + (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{(1,1,9)+(1,-1,1)\}\cos g \\
& + \{(1,1,10)-(-1,1,2)\}\cos(g+K) \\
& + (1,-1,2)\cos(g-K) \\
& + (1,1,11)\cos(g+2K) \\
& + (1,1,12)\cos(g+2\Pi) \\
& - (-1,2,3)\cos 2g \\
& - (-1,2,4)\cos(2g+K) \\
& - (-1,3,9)\cos 3g \\
& - (-1,3,10)\cos(3g+K) \\
& - (-1,3,11)\cos(3g+2K) \\
& - (-1,3,12)\cos(3g+2\Pi)
\end{aligned}
$$

wo wie früher

$$K = \Pi - \Pi'$$

ist.

60.

Die Substitution der im Art. 41 gegebenen Ausdrücke der eben angewandten Coefficienten giebt ferner

$$\Gamma = -\Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1+$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\sin K$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')$$
$$+\Big\{2m'\alpha(1)A_0+\tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0+$$
$$+\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0-2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\sin g$$
$$+ee'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin(g+K)$$
$$-\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\sin(g+2K)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)$$
$$-e\,m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\sin 2g$$
$$+e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\sin(2g+K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\sin 3g$$
$$-\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\sin(3g+2K)$$
$$+\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\sin(3g+2\Pi)$$

$$\Theta = \Big\{e\,m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0+\tfrac{1}{8}e^3m'\alpha\{(4)+4(3)+4(2)+8(1)\}A_0+$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0-e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\Big\}$$
$$-\Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1+$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\cos K$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\Big\{2m'\alpha(1)A_0+\tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{3(3)+6(2)-5(1)\}A_0+$$
$$+\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0-2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\cos g$$
$$+ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\cos(g+K)$$

$$+\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\cos(g+2K)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)$$
$$+em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\cos 2g$$
$$-e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\cos(2g+K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\cos 3g$$
$$+\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\cos(3g+2K)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\cos(3g+2\Pi)$$

und hieraus folgt

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right)=-\tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1\sin K$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{2}em'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0\sin g$$
$$+e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin(g+K)$$
$$-\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$
$$-m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\sin 2g$$
$$+\tfrac{1}{2}em'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\sin 3g$$
$$-\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right)=-\Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1+$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\cos K$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')$$
$$+ee'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos(g+K)$$
$$+\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\cos(g+2K)$$

$$- 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)$$
$$+ e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\cos(2g+K)$$
$$- \tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$
$$+ \tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\cos(3g+2K)$$
$$+ 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\cos(3g+2\Pi)$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) = \Big\{2m'\alpha(1)A_0 + \tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\cos g$$
$$+ ee'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos(g+K)$$
$$- \tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$- \tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\cos(g+2K)$$
$$- \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)$$
$$- 2em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\cos 2g$$
$$+ 2e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\cos(2g+K)$$
$$+ \tfrac{3}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\cos 3g$$
$$- \tfrac{3}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$
$$+ \tfrac{3}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\cos(3g+2K)$$
$$+ 3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\cos(3g+2\Pi)$$

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right) = \Big\{m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0 + \tfrac{3}{8}e^2m'\alpha\{(4)+4(3)+4(2)+8(1)\}A_0 +$$
$$+ \tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0 - \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\Big\}$$
$$- \tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1\cos K$$
$$+ \tfrac{1}{8}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$- \tfrac{1}{2}em'\alpha\{3(3)+6(2)-5(1)\}A_0\cos g$$
$$+ e'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\cos(g+K)$$
$$+ \tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$+ m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\cos 2g$$
$$- \tfrac{1}{2}em'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\cos 3g$$
$$+ \tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right) = \Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1+$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-$$
$$-\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\sin K$$
$$-\tfrac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\sin 2K$$
$$-e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')$$
$$-ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\sin(g+K)$$
$$+\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$
$$+\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\sin(g+2K)$$
$$+2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)$$
$$+e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\sin(2g+K)$$
$$-\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$
$$+\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\sin(3g+2K)$$
$$+2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\sin(3g+2\Pi)$$

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) = \Big\{2m'\alpha(1)A_0+\tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{3(3)+6(2)-5(1)\}A_0+$$
$$+\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0-2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\sin g$$
$$-ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\sin(g+K)$$
$$-\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\sin(g+2K)$$
$$+\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)$$
$$-2em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\sin 2g$$
$$+2e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\sin(2g+K)$$
$$+\tfrac{3}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\sin 3g$$
$$-\tfrac{3}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$
$$+\tfrac{3}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\sin(3g+2K)$$
$$+3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\sin(3g+2\Pi)$$

$$a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = em'\alpha(1)A_0\sin g$$
$$-e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin(g+K)$$

Die im Art. 58 entwickelten Ausdrücke geben nun leicht:

$$M = -\tfrac{1}{8}ee'((5))\sin K$$
$$+\tfrac{1}{16}e'^2((6))\sin 2K$$
$$+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{4}e((8))\sin g$$
$$+\tfrac{3}{2}e'((9))\sin(g+K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e'((10))\sin(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{2}((11))\sin 2g$$
$$+\tfrac{1}{4}e((12))\sin 3g$$
$$-\tfrac{1}{4}e'((13))\sin(3g+K)$$

$$N = -\{\tfrac{1}{2}((1))+\tfrac{1}{16}e^2((2))+\tfrac{1}{8}e'^2((3))-\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\}$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'((5))'\cos K$$
$$+\tfrac{1}{16}e'^2((6))\cos 2K$$
$$+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{4}e((8))'\cos g$$
$$-\tfrac{1}{2}e'((9))'\cos(g+K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e'((10))\cos(g-K)$$
$$+\tfrac{1}{2}((11))\cos 2g$$
$$-\tfrac{1}{4}e((12))\cos 3g$$
$$+\tfrac{1}{4}e'((13))\cos(3g+K)$$

$$P = \{\tfrac{1}{2}((1))+\tfrac{1}{16}e^2((2))'+\tfrac{1}{8}e'^2((3))-\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\}$$
$$-\tfrac{3}{8}ee'((5))'\cos K$$
$$+\tfrac{1}{16}e'^2((6))\cos 2K$$
$$+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi$$
$$-\tfrac{3}{4}e((8))''\cos g$$
$$+\tfrac{1}{2}e'((9))'\cos(g+K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e'((10))\cos(g-K)$$
$$+\tfrac{1}{2}((11))\cos 2g$$
$$-\tfrac{1}{4}e((12))\cos 3g$$
$$+\tfrac{1}{4}e'((13))\cos(3g+K)$$

$$
\begin{aligned}
Q = {} & \tfrac{1}{8} e e'((5))'' \sin K \\
& - \tfrac{1}{16} e'^2 ((6)) \sin 2K \\
& - \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} J ((7)) \sin 2\Pi \\
& - \tfrac{1}{4} e ((8))''' \sin g \\
& + \tfrac{3}{2} e' ((9)) \sin (g+K) \\
& + \tfrac{1}{4} e' ((10)) \sin (g-K) \\
& + \tfrac{1}{2} ((11)) \sin 2g \\
& - \tfrac{1}{4} e ((12)) \sin 3g \\
& + \tfrac{1}{4} e' ((13)) \sin (3g+K)
\end{aligned}
$$

wo zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
((1)) &= m'\alpha \{(2)+2(1)\} A_0 \\
((2)) &= m'\alpha \{(4)+4(3)-4(2)-8(1)\} A_0 \\
((2))' &= m'\alpha \{3(4)+12(3)-4(2)-8(1)\} A_0 \\
((3)) &= m'\alpha \{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\} A_0 \\
((4)) &= m'\alpha \{(2)+4(1)+2(0)\} B_1 \\
((5)) &= m'\alpha \{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\} A_1 \\
((5))' &= m'\alpha \{(4)+6(3)+4(2)\} A_1 \\
((5))'' &= m'\alpha \{(4)+6(3) \quad -8(1)+8(0)\} A_1 \\
((6)) &= m'\alpha \{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\} A_2 \\
((7)) &= m'\alpha \{(2)+8(1)+12(0)\} B_1 \\
((8)) &= m'\alpha \{(3)+2(2)-7(1)\} A_0 \\
((8))' &= m'\alpha \{(3)+2(2)-9(1)\} A_0 \\
((8))'' &= m'\alpha \{(3)+2(2)-3(1)\} A_0 \\
((8))''' &= m'\alpha \{(3)+2(2)+7(1)\} A_0 \\
((9)) &= m'\alpha \{(1)-(0)\} A_1 \\
((9))' &= m'\alpha \{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\} A_1 \\
((10)) &= m'\alpha \{(3)+3(2)-(1)+(0)\} A_1 \\
((11)) &= m'\alpha \{(2)-2(1)\} A_0 \\
((12)) &= m'\alpha \{(3)-6(2)+9(1)\} A_0 \\
((13)) &= m'\alpha \{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\} A_1
\end{aligned}
$$

gesetzt worden sind.

Es wird hierauf für die hier zu entwickelnden Glieder

$$\frac{d\delta\Upsilon}{n\,dt} = M\Upsilon + N\Psi$$

$$\frac{d\delta\Psi}{n\,dt} = P\Upsilon + Q\Psi$$

da sich weiter unten zeigen wird, dass die in diesen Ausdrücken mit X und Ξ multiplicirten Glieder hier Nichts geben können.

61.

Es sind jetzt die Ausdrücke für X, Ξ, Υ, Ψ abzuleiten, und diese sollen bis zu den im zunächst Vorhergehenden beibehaltenen Ordnungen vollständig entwickelt werden, obgleich sie in dieser Vollständigkeit nicht alle gebraucht werden. Ich entnehme zuerst aus den Artt. 46 und 47 die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} n\delta z = {} & Knt\sin g + Lnt\cos g \\ & + \tfrac{1}{4}eKnt\sin 2g + \tfrac{1}{4}eLnt\cos 2g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = {} & -\tfrac{1}{4}eKnt \\ & -\tfrac{1}{2}eKnt\cos g + \tfrac{1}{2}Lnt\sin g \\ & -\tfrac{1}{4}eKnt\cos 2g + \tfrac{1}{4}eLnt\sin 2g \\ & -\tfrac{1}{3}m'\alpha\,(1)A_0 \\ & +\tfrac{1}{2}em'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0\cos g \\ & -\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1\cos(g+K) \end{aligned}$$

womit durch die Gleichung

$$S = \frac{d\delta z}{dt} + 2\nu$$

erhalten wird:

$$\begin{aligned} S = {} & -\tfrac{1}{2}eKnt \\ & -\tfrac{2}{3}m'\alpha\,(1)A_0 \\ & + e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos(g+K) \end{aligned}$$

62.

Den Ausdrücken von $n\delta z$, ν, S, die eben aufgestellt worden sind, müssen jetzt die des Art. 55 gegenüber gestellt werden. Da hier mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{r}{a}\cos f + \frac{3}{2}e = (1 - \frac{3}{8}e^2)\cos g + \frac{1}{2}e\cos 2g$$
$$\frac{r}{a}\sin f = (1 - \frac{5}{8}e^2)\sin g + \frac{1}{2}e\sin 2g$$

angesetzt werden dürfen, so werden

$$\int(\frac{r}{a}\cos f + \frac{3}{2}e)\,dg = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)$$
$$= (1 - \frac{3}{8}e^2)\sin g + \frac{1}{4}e\sin 2g$$

$$\int\frac{r}{a}\sin f\,dg = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)$$
$$= -(1 - \frac{5}{8}e^2)\cos g - \frac{1}{4}e\cos 2g$$

und die angezogenen Gleichungen des Art. 55 stellen sich unter folgender Form dar:

$$n\delta z = X + \Upsilon\{(1 - \frac{3}{8}e^2)\sin g + \frac{1}{4}e\sin 2g\}$$
$$-\Psi\{(1 - \frac{5}{8}e^2)\cos g + \frac{1}{4}e\cos 2g\}$$

$$\nu = -\frac{2}{3}\Xi - \Upsilon\{\frac{1}{4}e + \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{8}e^2)\cos g + \frac{1}{4}e\cos 2g\}$$
$$-\Psi\{\frac{1}{2}(1 - \frac{5}{8}e^2)\sin g + \frac{1}{4}e\sin 2g\}$$

$$S = -\frac{1}{3}\Xi - \frac{1}{2}e\Upsilon$$

$$\frac{dX}{ndt} = \Xi - \frac{d\Upsilon}{ndt}\{(1 - \frac{3}{8}e^2)\sin g + \frac{1}{4}e\sin 2g\}$$
$$+\frac{d\Psi}{ndt}\{(1 - \frac{5}{8}e^2)\cos g + \frac{1}{4}e\cos 2g\}$$

Durch Vergleichung mit den Ausdrücken des vor. Art. gehen die folgenden Werthe hervor:

$$X = \frac{1}{2}em'\alpha\{4(2) + 5(1)\}A_0\sin g$$
$$-e'm'\alpha\{2(2) + 3(1) - 3(0)\}A_1\sin(g+K)$$

$$\Xi = 2m'\alpha(1)A_0$$
$$+3em'\alpha(1)A_0\cos g$$
$$-3e'm'\alpha\{(1) - (0)\}A_1\cos(g+K)$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon = & \left(1+\tfrac{3}{8}e^2\right) Knt \\
& -\tfrac{3}{2} e m'\alpha \{(2)+2(1)\} A_0 \\
& +\tfrac{1}{2} e' m'\alpha \{3(2)+8(1)-8(0)\} A_1 \cos K \\
& -2 m'\alpha (1) A_0 \cos g \\
& +\tfrac{1}{2} e m'\alpha \{(2)-2(1)\} A_0 \cos 2g \\
& -\tfrac{1}{2} e' m'\alpha \{(2)-2(1)+2(0)\} A_1 \cos (2g+K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi = & -\left(1+\tfrac{5}{8}e^2\right) Lnt \\
& -\tfrac{1}{2} e' m'\alpha \{3(2)+8(1)-8(0)\} A_1 \sin K \\
& -2 m'\alpha (1) A_0 \sin g \\
& +\tfrac{1}{2} e m'\alpha \{(2)-2(1)\} A_0 \sin 2g \\
& -\tfrac{1}{2} e' m'\alpha \{(2)-2(1)+2(0)\} A_1 \sin (2g+K)
\end{aligned}$$

von deren Richtigkeit man sich jedenfalls durch die Rücksubstitution überzeugen kann.

63.

Da in den Ausdrücken von $\delta\Upsilon$ und $\delta\Psi$ hier blos die mit t^2 und t multiplicirten Glieder verlangt werden, so braucht man in den Differentialen derselben blos die in den Ausdrücken des vor. Art. schon mit t multiplicirten Glieder zu substituiren, und es fallen also X und Ξ weg, wie schon am Ende des Art. 60 angemerkt wurde. Die Ausführung der Substitution in die Differentialgleichungen, die am Ende des Art. 60 angeführt worden sind, und die Integration, bei welcher auch die Glieder wegzulassen sind, die den Factor t nicht enthalten, giebt ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}
\delta\Upsilon = & \left(1+\tfrac{3}{8}e^2\right) C K n^2 t^2 + \left(1+\tfrac{5}{8}e^2\right) D' L n^2 t^2 \\
& -\tfrac{1}{4} e((8)) Knt \cos g \\
& -\tfrac{3}{2} e'((9)) Knt \cos (g+K) \\
& +\tfrac{1}{4} e'((10)) Knt \cos (g-K)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{4}((11))Knt\cos 2g\\
&-\tfrac{1}{12}e((12))Knt\cos 3g\\
&+\tfrac{1}{12}e'((13))Knt\cos(3g+K)\\
&-\tfrac{1}{4}e((8))'Lnt\sin g\\
&+\tfrac{1}{2}e'((9))'Lnt\sin(g+K)\\
&-\tfrac{1}{4}e'((10))Lnt\sin(g-K)\\
&-\tfrac{1}{4}((11))Lnt\sin 2g\\
&+\tfrac{1}{12}e((12))Lnt\sin 3g\\
&-\tfrac{1}{12}e'((13))Lnt\sin(3g+K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Psi = -(1+\tfrac{3}{8}e^2)E'Kn^2t^2 - (1+\tfrac{5}{8}e^2)FLn^2t^2&\\
-\tfrac{3}{4}e((8))''Knt\sin g&\\
+\tfrac{1}{2}e'((9))'Knt\sin(g+K)&\\
+\tfrac{1}{4}e'((10))Knt\sin(g-K)&\\
+\tfrac{1}{4}((11))Knt\sin 2g&\\
-\tfrac{1}{12}e((12))Knt\sin 3g&\\
+\tfrac{1}{12}e'((13))Knt\sin(3g+K)&\\
-\tfrac{1}{4}e((8))'''Lnt\cos g&\\
+\tfrac{3}{2}e'((9))Lnt\cos(g+K)&\\
+\tfrac{1}{4}e'((10))Lnt\cos(g-K)&\\
+\tfrac{1}{4}((11))Lnt\cos 2g&\\
-\tfrac{1}{12}e((12))Lnt\cos 3g&\\
+\tfrac{1}{12}e'((13))Lnt\cos(3g+K)&
\end{aligned}
$$

wo

$$C = -\tfrac{1}{16}ee'((5))\sin K + \tfrac{1}{32}e'^2((6))\sin 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin 2\Pi$$

$$
\begin{aligned}
D' = \{&\tfrac{1}{4}((1)) + \tfrac{1}{32}e^2((2)) + \tfrac{1}{16}e'^2((3)) - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\}\\
&-\tfrac{1}{16}ee'((5))'\cos K - \tfrac{1}{32}e'^2((6))\cos 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi
\end{aligned}
$$

$$E' = -\{\tfrac{1}{4}((1)) + \tfrac{1}{32}e^2((2))' - \tfrac{1}{16}e'^2((3)) - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\}$$
$$+ \tfrac{3}{16}ee'((5))'\cos K - \tfrac{1}{32}e'^2((6))\cos 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi$$

$$F = \tfrac{1}{16}ee'((5))''\sin K - \tfrac{1}{32}e'((6))\sin 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin 2\Pi$$

gesetzt worden sind.

64.

Zur Entwickelung von $\delta\Xi$ könnte man die Gleichung

$$\delta\Xi = -\tfrac{3}{2}e\delta\Upsilon - 3\delta S + 2S^2$$

anwenden, die im Art. 57 abgeleitet worden ist, aber man verfährt einfacher, eine Gleichung zu benutzen, die ich schon vor vielen Jahren gegeben habe, und aus welcher im gegenwärtigen Falle $\delta\Xi$ ohne neue Integration folgt. Diese Gleichung ist

$$\frac{a_0}{a} = 1 + \tfrac{2}{3}\Xi + \tfrac{2}{3}\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)\Xi - \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^2 - \tfrac{1}{4}(1-e^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2)$$

deren Ableitung man unter Anderem im § 2 der dritten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten findet. Da hier in $\delta\Xi$ nur die der Zeit t und t^2 proportionalen Glieder verlangt werden, und solche in der grossen Halbachse a nicht vorhanden sind, so wird hier

$$\frac{a_0}{a} = 1$$

mithin

$$\delta\Xi = -\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)\Xi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^2 + \tfrac{3}{8}(1-e^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2)$$

oder wegen

$$\frac{h}{h_0} - 1 = -S = \tfrac{1}{3}\Xi + \tfrac{1}{2}e\Upsilon$$

$$\delta\Xi = -\tfrac{1}{3}e\Xi\Upsilon + \tfrac{1}{8}e^2\Upsilon^2 + \tfrac{3}{8}(1-e^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2)$$

indem die weggelassenen Glieder hier nichts Merkliches geben können. Die Ausdrücke des Art. 62 geben nun

$$\Xi\Upsilon = 2m'\alpha(1)A_0 Knt$$
$$\Upsilon^2 = K^2n^2t^2 - 3em'\alpha\{(2)+3(1)\}A_0 Knt$$
$$+ e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1 Knt\cos K$$
$$\Psi^2 = L^2n^2t^2 + e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1 Lnt\sin K$$

womit sogleich *)

$$
\begin{aligned}
\delta\Xi = & \tfrac{3}{8}(K^2+L^2)\,n^2t^2 \\
& -\tfrac{1}{24}e\,m'\alpha\{27(2)+70(1)\}A_0\,Knt \\
& +\tfrac{3}{8}e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1\,Knt\cos K \\
& +\tfrac{3}{8}e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1\,Lnt\sin K
\end{aligned}
$$

erhalten wird. Man kann die Coefficienten dieses Ausdrucks vereinfachen. Durch Hülfe der Ausdrücke des Art. 46 für K und L findet man leicht bis auf Grössen vierter Ordnung identisch

$$
\begin{aligned}
0 = & \quad e\,m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0\,K \\
& -e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\,K\cos K \\
& -e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\,L\sin K
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{9}{8}nt$, und addirt das Product zum Ausdruck für $\delta\Xi$, so wird derselbe

$$
\begin{aligned}
\delta\Xi = & \tfrac{3}{8}(K^2+L^2)\,n^2t^2 \\
& -\tfrac{2}{3}e\,m'\alpha(1)A_0\,Knt \\
& +\tfrac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\,Knt\cos K \\
& +\tfrac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\,Lnt\sin K
\end{aligned}
$$

65.

Die Substitution der vorstehenden Ausdrücke für $\delta\Xi$, $\delta\Upsilon$, $\delta\Psi$ in

$$
\begin{aligned}
\delta W = \delta\Xi & +\delta\Upsilon\{(1-\tfrac{3}{8}e^2)\cos\gamma+\tfrac{1}{2}e\cos 2\gamma+\tfrac{3}{8}e^2\cos 3\gamma\} \\
& +\delta\Psi\{(1-\tfrac{5}{8}e^2)\sin\gamma+\tfrac{1}{2}e\sin 2\gamma+\tfrac{3}{8}e^2\sin 3\gamma\}
\end{aligned}
$$

giebt nun

$$
\begin{aligned}
\delta W = & \quad \tfrac{3}{8}(K^2+L^2)\,n^2t^2 \\
& +\{CK+DL\}n^2t^2\cos\gamma \qquad -\{EK+FL\}n^2t^2\sin\gamma \\
& +\tfrac{1}{2}e\{CK+DL\}n^2t^2\cos 2\gamma -\tfrac{1}{2}e\{EK+FL\}n^2t^2\sin 2\gamma \\
& +\tfrac{3}{8}e^2\{CK+DL\}n^2t^2\cos 3\gamma -\tfrac{3}{8}e^2\{EK+FL\}n^2t^2\sin 3\gamma
\end{aligned}
$$

*) Wir erinnern an die Anmerkung zu Art. 46, S. 353.

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{2}{3} e m' \alpha (1) A_0 K n t \\
&+\tfrac{3}{4} e' m' \alpha \{(1)-(0)\} A_1 K n t \cos K \\
&+\tfrac{3}{4} e' m' \alpha \{(1)-(0)\} A_1 L n t \sin K \\
&-\tfrac{1}{8} e \{((8))+3((8))''\} K n t \cos(-\gamma+g) \\
&-\tfrac{1}{8} e \{((8))'-((8))'''\} L n t \sin(-\gamma+g) \\
&-\tfrac{1}{4} e' \{3((9))-((9))'\} K n t \cos(-\gamma+g+K) \\
&+\tfrac{1}{4} e' \{((9))'-3((9))\} L n t \sin(-\gamma+g+K) \\
&+\tfrac{1}{4} e' ((10)) K n t \cos(-\gamma+g-K) \\
&-\tfrac{1}{4} e' ((10)) L n t \sin(-\gamma+g-K) \\
&+\tfrac{1}{8} e ((11)) K n t \cos(-2\gamma+2g) \\
&-\tfrac{1}{8} e ((11)) L n t \sin(-2\gamma+2g)
\end{aligned}
$$

wo die Glieder weggelassen worden sind, die hier nichts Merkliches geben können. Die Coefficienten C und F sind dieselben wie in Art. 63, während

$$
\begin{aligned}
D &= (1+\tfrac{1}{4}e^2)\, D' \\
E &= (1-\tfrac{1}{4}e^2)\, E'
\end{aligned}
$$

Aus dem vorstehenden Ausdrucke bekommt man nun auf bekannte Art

$$
\begin{aligned}
\delta \overline{W} = \; & \tfrac{3}{8}(K^2+L^2) n^2 t^2 \\
&+\{CK+DL\} n^2 t^2 \cos g \qquad -\{EK+FL\} n^2 t^2 \sin g \\
&+\tfrac{1}{2} e \{CK+DL\} n^2 t^2 \cos 2g - \tfrac{1}{2} e \{EK+FL\} n^2 t^2 \sin 2g \\
&+\tfrac{3}{8} e^2 \{CK+DL\} n^2 t^2 \cos 3g - \tfrac{3}{8} e^2 \{EK+FL\} n^2 t^2 \sin 3g \\
&+\{A'K+B'L\} n t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\frac{\delta \overline{W}}{\delta \gamma}\right) = \; & -\{CK+DL\} n^2 t^2 \sin g \qquad -\{EK+FL\} n^2 t^2 \cos g \\
&- e\{CK+DL\} n^2 t^2 \sin 2g \quad - e\{EK+FL\} n^2 t^2 \cos 2g \\
&-\tfrac{9}{8} e^2 \{CK+DL\} n^2 t^2 \sin 3g - \tfrac{9}{8} e^2 \{EK+FL\} n^2 t^2 \cos 3g \\
&+\{A''K+B''L\} n t
\end{aligned}
$$

wo

$$A' = -\frac{2}{3}e\,m'\alpha\,(1)A_0 - \frac{1}{8}e\{((8))+3((8))''\} + \frac{1}{8}e((11))$$
$$+\left\{\frac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 - \frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} + \frac{1}{4}e'((10))\right\}\cos K$$

$$B' = \left\{\frac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 - \frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} + \frac{1}{4}e'((10))\right\}\sin K$$

$$A'' = \left\{-\frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} - \frac{1}{4}e'((10))\right\}\sin K$$

$$B'' = \left\{\frac{1}{8}e\{((8))'-((8))'''\} + \frac{1}{4}e((11))\right\}$$
$$+\left\{\frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} + \frac{1}{4}e'((10))\right\}\cos K$$

oder, wenn man die Coefficienten durch ihre im Art. 60 gegebenen Werthe auf die A_i hinführt:

$$A' = -\frac{1}{24}e\,m'\alpha\{12(3)+21(2)-26(1)\}A_0$$
$$+\frac{1}{4}e'm'\alpha\{2(3)+6(2)-5(1)+5(0)\}A_1\cos K$$

$$B' = \frac{1}{4}e'm'\alpha\{2(3)+6(2)-5(1)+5(0)\}A_1\sin K$$

$$A'' = -\frac{3}{2}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin K$$

$$B'' = \frac{1}{4}e\,m'\alpha\{(2)-10(1)\}A_0$$
$$+\frac{3}{2}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos K$$

66.

Die Gleichungen

$$\left(\frac{\overline{\partial W}}{\partial\gamma}\right) = -\Upsilon(\sin g + e\sin 2g) + \Psi(\cos g + e\cos 2g)$$
$$\left(\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial\gamma^2}\right) = -\Upsilon(\cos g + 2e\cos 2g) - \Psi(\sin g + 2e\sin 2g)$$

gehen durch die Substitution der Ausdrücke des Art. 62 für Υ und Ψ in die folgenden über

$$\left(\frac{\overline{\partial W}}{\partial\gamma}\right) = -Knt\sin g - Lnt\cos g$$
$$-eKnt\sin 2g - eLnt\cos 2g$$
$$+2\,e\,m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0\sin g$$
$$-e'm'\alpha\{2(2)+3(1)-3(0)\}A_1\sin(g+K)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2}\right) = -Knt\cos g + Lnt\sin g$$
$$-2eKnt\cos 2g + 2eLnt\sin 2g$$
$$+2m'\alpha(1)A_0$$
$$+em'\alpha\{(2)+8(1)\}A_0\cos g$$
$$-e'm'\alpha\{(2)+5(1)-5(0)\}A_1\cos(g+K)$$

Durch Multiplication mit

$$n\delta z = Knt\sin g + Lnt\cos g$$
$$+\frac{1}{4}eKnt\sin 2g + \frac{1}{4}eLnt\cos 2g$$

erhält man:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \gamma}\right)n\delta z = -\frac{1}{2}(K^2+L^2)n^2t^2$$
$$-\frac{5}{8}e(K^2+L^2)n^2t^2\cos g$$
$$+\frac{1}{2}(K^2-L^2)n^2t^2\cos 2g \quad -KLn^2t^2\sin 2g$$
$$+\frac{5}{8}e(K^2-L^2)n^2t^2\cos 3g - \frac{5}{4}eKLn^2t^2\sin 3g$$
$$+em'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0Knt$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{2(2)+3(1)-3(0)\}A_1Knt\cos K$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{2(2)+3(1)-3(0)\}A_1Lnt\sin K$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2}\right)n\delta z = \frac{7}{8}e(K^2+L^2)n^2t^2\sin g$$
$$-\frac{1}{2}(K^2-L^2)n^2t^2\sin 2g \quad -KLn^2t^2\cos 2g$$
$$-\frac{9}{8}e(K^2-L^2)n^2t^2\sin 3g - \frac{9}{4}eKLn^2t^2\cos 3g$$
$$+\frac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)+5(1)-5(0)\}A_1Knt\sin K$$
$$+\frac{1}{2}em'\alpha\{(2)+8(1)\}A_0Lnt$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)+5(1)-5(0)\}A_1Lnt\cos K$$

wenn von den mit t multiplicirten Gliedern nur die aufgenommen werden, die im Uebrigen constant sind. Der Ausdruck für ν im Art. 61 giebt mit derselben Beschränkung

$$
\begin{aligned}
\nu^2 = \;& \tfrac{1}{8}(K^2+L^2)\,n^2t^2 \\
&+\tfrac{1}{8}e\,(3K^2+L^2)\,n^2t^2\cos g - \tfrac{1}{4}e\,KL\,n^2t^2\sin g \\
&+\tfrac{1}{8}(K^2-L^2)\,n^2t^2\cos 2g - \tfrac{1}{4}KL\,n^2t^2\sin 2g \\
&+\tfrac{1}{8}e\,(K^2-L^2)\,n^2t^2\cos 3g - \tfrac{1}{4}e\,KL\,n^2t^2\sin 3g \\
&-\tfrac{1}{12}e\,m'\alpha\{3(2)+4(1)\}A_0\,Knt \\
&+\tfrac{1}{4}e'm'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1\,Knt\cos K \\
&+\tfrac{1}{4}e'm'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1\,Lnt\sin K
\end{aligned}
$$

67.

Da nun die im Art. 54 angeführten allgemeinen Ausdrücke, mit blosser Rücksicht auf das Quadrat der störenden Kraft

$$
\begin{aligned}
n\delta z &= n\int\Big\{\delta\overline{W}+\delta\Big(\frac{\overline{\partial W}}{\partial\gamma}\Big).n\delta z+\nu^2\Big\}dt \\
\nu &= -\tfrac{1}{2}n\int\Big\{\delta\Big(\frac{\overline{\partial W}}{\partial\gamma}\Big)+\delta\Big(\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial\gamma^2}\Big).n\delta z\Big\}dt
\end{aligned}
$$

geben, so erhält man aus den vorstehenden Entwickelungen leicht:

$$
\begin{aligned}
n\delta z = \;& \{AK+BL\}\,n^2t^2 \\
&+\{(CK+DL)-\tfrac{1}{4}e\,(K^2+2L^2)\}\,n^2t^2\sin g \\
&+\{(EK+FL)+\tfrac{1}{4}e\,KL\}\,n^2t^2\cos g \\
&+\{\tfrac{1}{4}e\,(CK+DL)+\tfrac{5}{16}(K^2-L^2)\}\,n^2t^2\sin 2g \\
&+\{\tfrac{1}{4}e\,(EK+FL)+\tfrac{5}{8}KL\}\,n^2t^2\cos 2g \\
&+\{\tfrac{1}{8}e^2(CK+DL)+\tfrac{1}{4}e\,(K^2-L^2)\}\,n^2t^2\sin 3g \\
&+\{\tfrac{1}{8}e^2(EK+FL)+\tfrac{1}{2}e\,KL\}\,n^2t^2\cos 3g
\end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}A'+\tfrac{1}{24}e\,m'\alpha\{9(2)+20(1)\}A_0 \\
&\quad -\tfrac{1}{8}e'm'\alpha\{3(2)+5(1)-5(0)\}A_1\cos K \\
B &= \tfrac{1}{2}B'-\tfrac{1}{8}e'm'\alpha\{3(2)+5(1)-5(0)\}A_1\sin K
\end{aligned}
$$

ferner

$$\begin{aligned}
\nu = \quad & \{\tfrac{1}{8}(K^2+L^2) - GL\} n^2 t^2 \\
& + \{-\tfrac{1}{2}(CK+DL) + \tfrac{7}{16}e(K^2+L^2)\} n^2 t^2 \cos g \\
& + \{\tfrac{1}{2}(EK+FL) \qquad\qquad\qquad \} n^2 t^2 \sin g \\
& + \{-\tfrac{1}{4}e(CK+DL) - \tfrac{1}{8}(K^2-L^2)\} n^2 t^2 \cos 2g \\
& + \{\tfrac{1}{4}e(EK+FL) + \tfrac{1}{4}KL\} n^2 t^2 \sin 2g \\
& + \{-\tfrac{3}{16}e^2(CK+DL) - \tfrac{3}{16}e(K^2-L^2)\} n^2 t^2 \cos 3g \\
& + \{\tfrac{3}{16}e^2(EK+FL) + \tfrac{3}{8}eKL\} n^2 t^2 \sin 3g
\end{aligned}$$

nebst

$$G = \tfrac{1}{16} e m'\alpha \{(2) + (1)\} A_0$$

68.

Führt man nun alle Coefficienten der beiden eben erhaltenen Ausdrücke für $n\delta z$ und ν auf die A_i und B_i hin, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= -\tfrac{1}{16}e\{1\} + \tfrac{1}{8}e'\{2\}\cos K \\
B &= \qquad\qquad\quad \tfrac{1}{8}e'\{2\}\sin K \\
C &= -\tfrac{1}{16}ee'\{7\}\sin K + \tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\sin 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\sin 2\Pi \\
D &= \left\{\tfrac{1}{4}\{3\} + \tfrac{1}{32}e^2\{4\} + \tfrac{1}{16}e'^2\{5\} - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{6\}\right\} \\
&\quad - \left\{\tfrac{1}{16}ee'\{7\}'\cos K + \tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\cos 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\cos 2\Pi\right\} \\
E &= -\left\{\tfrac{1}{4}\{3\} + \tfrac{3}{32}e^2\{4\} + \tfrac{1}{16}e'^2\{5\} - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{6\}\right\} \\
&\quad + \left\{\tfrac{3}{16}ee'\{7\}'\cos K - \tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\cos 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\cos 2\Pi\right\} \\
F &= \tfrac{1}{16}ee'\{7\}''\sin K - \tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\sin 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\sin 2\Pi \\
G &= \tfrac{1}{16}e\{3\}
\end{aligned}$$

in welchen

$$\begin{aligned}
\{1\} &= m'\alpha\{4(3) + (2) - 22(1)\}A_0 \\
\{2\} &= m'\alpha\{2(3) + 3(2) - 10(1) + 10(0)\}A_1 \\
\{3\} &= m'\alpha\{(2) + 2(1)\}A_0 \\
\{4\} &= m'\alpha\{(4) + 4(3) - 2(2) - 4(1)\}A_0
\end{aligned}$$

$$\{5\} = m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0$$
$$\{6\} = m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$
$$\{7\} = m'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1$$
$$\{7\}' = m'\alpha\{(4)+6(3)+4(2)\}A_1$$
$$\{7\}'' = m'\alpha\{(4)+6(3) \quad -8(1)+8(0)\}A_1$$
$$\{8\} = m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2$$
$$\{9\} = m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1$$

gesetzt worden sind. Um Alles beisammen zu haben, werde ich auch, nach dem Art. 46, die Ausdrücke für K und L in derselben Form hier anführen:

$$K = -\left\{e'[5]+\frac{1}{8}e^2e'[6]+\frac{1}{8}e'^3[7]-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[8]\right\}\sin K$$
$$+\frac{1}{8}ee'^2[9]\sin 2K+\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J[10]\sin 2\Pi-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[11]\sin(\Pi+\Pi')$$
$$L = -\left\{e[1]+\frac{1}{8}e^3[2]+\frac{1}{4}ee'^2[3]-e\sin^2\tfrac{1}{2}J[4]\right\}$$
$$+\left\{e'[5]+\frac{1}{8}e^2e'[6]'+\frac{1}{8}e'^3[7]-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[8]\right\}\cos K$$
$$-\frac{1}{8}ee'^2[9]\cos 2K-\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J[10]\cos 2\Pi+\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[11]\cos(\Pi+\Pi')$$

wo die Coefficienten die folgende Zusammensetzung haben:

$$[1] = \{3\}$$
$$[2] = m'\alpha\{(4)+4(3)-(2)-2(1)\}A_0$$
$$[3] = \{5\}$$
$$[4] = \{6\}$$
$$[5] = m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1$$
$$[6] = m'\alpha\{(4)+6(3)+5(2)+2(1)-2(0)\}A_1$$
$$[6]' = m'\alpha\{3(4)+18(3)+11(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$
$$[7] = m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1$$
$$[8] = m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}$$
$$[9] = \{8\}$$
$$[10] = \{9\}$$
$$[11] = m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0$$

β) Störungen der dritten Coordinate, die mit t^2 multiplicirt sind, und aus $n\delta z$ und ν entstehen.

69.

Bei der Entwickelung der in der Ueberschrift genannten Glieder werde ich von der Gleichung

$$\frac{du}{dt} = h\frac{\varrho r}{a}\sin(\varphi - f)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$

ausgehen, in welcher ϱ, φ, f blos als Functionen von $n\delta z$ (ϱ und φ nach der Verwandelung von γ in g) zu betrachten sind. Setzt man

$$\frac{dR}{dt} = h\frac{\varrho r}{a}\sin(\varphi - f)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$

wo ϱ und φ blos als Functionen von γ zu betrachten sind, so wird, wie ich früher gezeigt habe

$$u = \bar{R} + \left(\overline{\frac{\partial R}{\partial\gamma}}\right) n\delta z$$

Man findet leicht, dass R zwei elliptische Elemente in sich fasst, die man auf verschiedene Arten aufstellen kann. Nennt man dieselben P und Q, so kann man sie durch die folgenden Gleichungen definiren:

$$\frac{dP}{dt} = hr\cos f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$

$$\frac{dQ}{dt} = -hr\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$

$$R = P\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + Q\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$

von deren letzter das Differential nach t mit dem obigen Ausdruck für $\frac{dR}{dt}$ identisch wird. Nach der Entwickelung der Factoren wird

$$\begin{aligned} R = \;& P\{\qquad\qquad \sin\gamma + \tfrac{1}{2}e\sin 2\gamma\} \\ &+ Q\{-\tfrac{3}{2}e + \cos\gamma + \tfrac{1}{2}e\cos 2\gamma\} \end{aligned}$$

mit hier ausreichender Genauigkeit.

70.

Bezeichnet man den Theil der Differentiale von P und Q, welcher die Glieder der ersten Ordnung in Bezug auf die störenden Massen enthält, mit M und N, so werden

$$M = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}\cos f\, a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$$
$$N = -\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}\sin f\, a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$$

und die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den strengen Formeln des vor. Art. giebt sogleich

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)n\delta z + r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\nu - MS$$
$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial N}{\partial g}\right)n\delta z + r\left(\frac{\partial N}{\partial r}\right)\nu - NS$$

indem

$$h = h_0 - h_0 S$$

ist. Eliminirt man $n\delta z$, ν, S durch ihre im Art. 55 gegebenen Werthe, so entstehen

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)X + \frac{1}{3}\left\{M - 2r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\right\}\Xi + A\Upsilon + B\Psi$$
$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial N}{\partial g}\right)X + \frac{1}{3}\left\{N - 2r\left(\frac{\partial N}{\partial r}\right)\right\}\Xi + C\Upsilon + D\Psi$$

wo

$$A = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{2a}\cos f + e\right) + \frac{1}{2}eM$$
$$B = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right) - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{r}{2a}\sin f$$

und C und D aus N eben so zusammen gesetzt sind, wie bez. A und B aus M.

71.

Die eben erhaltenen Ausdrücke können auf ähnliche Weise umgeformt werden, wie die Functionen von Γ und Θ. Zufolge des Art. 58 bekommt man hier

$$\left(\frac{\partial M}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial f}\right)\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{a}{r}\cos f + \frac{e}{1-e^2}M$$

Diese Formel lässt sich mit Hülfe der Gleichung

$$\left(\frac{\partial M}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$

in die folgende verwandeln

$$\left(\frac{\partial M}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{r\cos f + 2ae}{a(1-e^2)} + \frac{e}{1-e^2}M$$

Es wird ferner

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial f}\right) - N$$

oder

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)} - N$$

Hiermit ergiebt sich sogleich

$$A = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial e}\right)$$

$$B = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right) + \frac{1-e^2}{2e}N - \frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)$$

und auf dieselbe Weise erhält man

$$C = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial e}\right)$$

$$D = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right) - \frac{1-e^2}{2e}M - \frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial N}{\partial g}\right)$$

womit diese Entwickelungen beendigt sind, da die Coefficienten von X und Ξ wieder nicht gebraucht werden.

72.

Die Functionen M und N kann man auf mehr wie eine Weise entwickeln. Man kann sie aus dem Differential des im Art. 49 enthaltenen Integrals auf ähnliche Weise ableiten, wie durch die Analyse des Art. 59 Γ und Θ aus dW erhalten wurden. Man kann sie ferner dadurch ableiten, dass man die Entwickelung von $a^2\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)$ in Art. 48 mit den Entwickelungen von $\frac{r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}}$ und $-\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt, und man kann sie endlich durch Differentiationen der Störungsfunction nach J, Π, Π' erhalten. Da hier in M und N nur die constanten Glieder verlangt werden, so führt das zweite Verfahren auf einfache Weise zum Ziele, und dieses soll daher angewandt werden. Zu diesem Zweck bekommt man aus dem Vorhergehenden

$$\frac{r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}} = -\frac{3}{2}e + (1+\frac{1}{8}e^2)\cos g + \frac{1}{2}e\cos 2g$$

$$\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} = \qquad (1-\frac{1}{8}e^2)\sin g + \frac{1}{2}e\sin 2g$$

und die Multiplication giebt

$$\begin{aligned} M = & \{-\tfrac{3}{2}e\,(1) + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{16}e^2)\,(5) - \tfrac{1}{2}\,(8) + \tfrac{1}{4}\,(11)\}\sin\Pi \\ & + \{-\tfrac{3}{2}e\,(2) + \tfrac{1}{2}\,(7) - \tfrac{1}{2}\,(9)\}\sin\Pi' \\ & + \{\tfrac{1}{2}\,(6) + \tfrac{1}{4}e\,(12)\}\sin(2\Pi-\Pi') \\ & + \tfrac{1}{2}\,(10)\sin(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = & -\{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{16}e^2)\,(5) + \tfrac{1}{2}\,(8) + \tfrac{1}{4}e\,(11)\}\cos\Pi \\ & - \{\tfrac{1}{2}\,(7) + \tfrac{1}{2}\,(9)\}\cos\Pi' \\ & - \{\tfrac{1}{2}\,(6) + \tfrac{1}{4}e\,(12)\}\cos(2\Pi-\Pi') \\ & - \tfrac{1}{2}\,(10)\cos(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

oder wenn man die B_i einführt:

$$\begin{aligned} M = & -\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J\,(0)\,B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{3\,(2)+16\,(1)+20\,(0)\}\,B_1 + \\ & \quad + \tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)+2\,(0)\}\,B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\sin J\,(0)\,\{2C_0+C_2\}\Big\}\sin\Pi \\ & + \tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)\}\,B_0\sin\Pi' \\ & + \tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)\}\,B_2\sin(2\Pi-\Pi') \\ & + \tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_1\sin(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = & \Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J\,(0)\,B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{(2) \quad -4\,(0)\}\,B_1 + \\ & \quad + \tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)+2\,(0)\}\,B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\sin J\,(0)\,\{2C_0+C_2\}\Big\}\cos\Pi \\ & - \tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4\,(1)\}\,B_2\cos(2\Pi-\Pi') \\ & - \tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_1\cos(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

73.

Die vorstehenden Entwickelungen geben nun die folgenden Ausdrücke der Coefficienten A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
A = & -\tfrac{1}{16} e m' \alpha \sin J \{3(2) + 16(1) + 20(0)\} B_1 \sin \Pi \\
& + \tfrac{1}{8} e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4(1)\} B_0 \sin \Pi' \\
& + \tfrac{1}{16} e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4(1)\} B_2 \sin (2\Pi - \Pi')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & -\tfrac{1}{16} e m' \alpha \sin J \{(2) + 8(1) + 12(0)\} B_1 \cos \Pi \\
& + \tfrac{1}{16} e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4(1)\} B_2 \cos (2\Pi - \Pi')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C = & \tfrac{1}{16} e m' \alpha \sin J \{(2) \quad - 4(0)\} B_1 \cos \Pi \\
& - \tfrac{1}{16} e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4(1)\} B_2 \cos (2\Pi - \Pi')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & \tfrac{1}{16} e m' \alpha \sin J \{(2) + 8(1) + 12(0)\} B_1 \sin \Pi \\
& - \tfrac{1}{8} e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4(1)\} B_0 \sin \Pi' \\
& + \tfrac{1}{16} e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4(1)\} B_2 \sin (2\Pi - \Pi')
\end{aligned}$$

Da nun hier

$$\Upsilon = Knt, \qquad \Psi = -Lnt$$

gesetzt werden darf, so erhält man, nachdem damit multiplicirt und integrirt worden ist:

$$\frac{\delta P}{\cos i} = \tfrac{1}{2}\{AK - BL\} n^2 t^2$$

$$\frac{\delta Q}{\cos i} = \tfrac{1}{2}\{CK - DL\} n^2 t^2$$

woraus

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \bar{R}}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{3}{4} e \{CK - DL\} n^2 t^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\{AK - BL\} n^2 t^2 \sin g \quad + \tfrac{1}{2}\{CK - DL\} n^2 t^2 \cos g \\
& + \tfrac{1}{4} e \{AK - BL\} n^2 t^2 \sin 2g + \tfrac{1}{4} e \{CK - DL\} n^2 t^2 \cos 2g
\end{aligned}$$

folgt. In diesem Ausdruck hätten das erste und die beiden letzten Glieder weggelassen werden können, da sie von der vierten Ordnung sind; ihre Mitnahme kann aber der Genauigkeit keinen Abbruch thun.

74.

Multiplicirt man die Glieder erster Ordnung der Werthe für M und N in Art. 72 mit ndt, integrirt und substituirt die Integrale in den Ausdruck des Art. 69 für R, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{R}{\cos i} = \qquad\qquad & \qquad\qquad -\tfrac{3}{2} e\, Ent \cos \Pi \\ & - Ent \sin \Pi \sin \gamma \quad + Ent \cos \Pi \cos \gamma \\ & - \tfrac{1}{2} e\, Ent \sin \Pi \sin 2\gamma + \tfrac{1}{2} e\, Ent \cos \Pi \cos 2\gamma\end{aligned}$$

wo

$$E = \tfrac{1}{2} m'\alpha \sin J(0) B_1$$

ist. Es folgt hieraus

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial R}{\partial \gamma}\right) \sec i = & - Ent \sin \Pi \cos g \quad - Ent \cos \Pi \sin g \\ & - e\, Ent \sin \Pi \cos 2g - e\, Ent \cos \Pi \sin 2g\end{aligned}$$

welcher Ausdruck mit dem des Art. 61 für $n\delta z$ zu multipliciren ist. Fügt man dieses Product dem im vor. Art. erhaltenen Ausdruck für $\delta \overline{R}$ hinzu, so wird

$$\begin{aligned}\frac{u}{\cos i} = & -\{\tfrac{3}{4} e (CK - DL) + \tfrac{1}{2} (GK + FL)\} n^2 t^2 \\ & + \{\tfrac{1}{2} (AK - BL) + \tfrac{3}{8} e (FK - GL)\} n^2 t^2 \sin g \\ & + \{\tfrac{1}{2} (CK - DL) - \tfrac{5}{8} e (GK + FL)\} n^2 t^2 \cos g \\ & + \{\tfrac{1}{4} e (AK - BL) - \tfrac{1}{2} (FK + GL)\} n^2 t^2 \sin 2g \\ & + \{\tfrac{1}{4} e (CK - DL) + \tfrac{1}{2} (GK - FL)\} n^2 t^2 \cos 2g \\ & \qquad\qquad - \tfrac{5}{8} e (FK + GL) n^2 t^2 \sin 3g \\ & \qquad\qquad + \tfrac{5}{8} e (GK - FL) n^2 t^2 \cos 3g\end{aligned}$$

Wir stellen die Werthe der Coefficienten dieses Ausdrucks in folgender Form zusammen:

$$\begin{aligned}A &= -\tfrac{1}{16} e \{10\} \sin \Pi + \tfrac{1}{16} e' \{11\} \sin (2\Pi - \Pi') + \tfrac{1}{8} e' \{12\} \sin \Pi' \\ B &= -\tfrac{1}{16} e \{10\}' \cos \Pi + \tfrac{1}{16} e' \{11\} \cos (2\Pi - \Pi') \\ C &= \tfrac{1}{16} e \{10\}'' \cos \Pi - \tfrac{1}{16} e' \{11\} \cos (2\Pi - \Pi') \\ D &= \tfrac{1}{16} e \{10\}' \sin \Pi + \tfrac{1}{16} e' \{11\} \sin (2\Pi - \Pi') - \tfrac{1}{8} e' \{12\} \sin \Pi' \\ F &= \tfrac{1}{2} m'\alpha \sin J(0) B_1 \sin \Pi \\ G &= \tfrac{1}{2} m'\alpha \sin J(0) B_1 \cos \Pi\end{aligned}$$

wo

$$\{10\} = m'\alpha \sin J\{3(2)+16(1)+20(0)\} B_1$$
$$\{10\}' = \{9\}\sin J$$
$$\{10\}'' = m'\alpha \sin J\{(2) \quad -4(0)\} B_1$$
$$\{11\} = \{[8]-[11]\}\sin J$$
$$\{12\} = [11]\sin J$$

und die Ausdrücke der $\{9\}$, $[8]$, $[11]$ aus dem Art. 68 zu entnehmen sind.

Der Cosinus der Neigung i der Planetenbahn gegen die Fundamentalebene ist hier als constant zu betrachten, da dessen Ungleichheiten nicht von den hier betrachteten Veränderlichen abhängen, sondern erst weiter unten in Betracht zu ziehen sind.

γ) Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors, die mit t^2 multiplicirt sind, und von den Aenderungen der dritten Coordinate des gestörten Planeten herrühren.

75.

Um die in der Ueberschrift genannten Störungen zu erhalten, wollen wir uns nicht unmittelbar der Störungen der dritten Coordinate, sondern der der Elemente bedienen, die in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten p_1 und q_1 genannt worden sind, hier aber mit k und l bezeichnet werden sollen. Die Relationen, die zwischen diesen Elementen und der dritten Coordinate stattfinden, sind durch die Gleichungen (54) der angezogenen Abhandlung, nemlich durch

$$k = \frac{u}{1-e^2}\{\cos(f+\Pi) + e\cos\Pi\} - \frac{\frac{du}{ndt}}{\sqrt{1-e^2}} r\sin(f+\Pi)$$

$$l = \frac{u}{1-e^2}\{\sin(f+\Pi) + e\sin\Pi\} + \frac{\frac{du}{ndt}}{\sqrt{1-e^2}} r\cos(f+\Pi)$$

gegeben, und es werden hierauf

$$\delta J = \frac{l}{\cos i} - \frac{l'}{\cos i'}$$
$$\delta\Pi = \operatorname{cotg} J\frac{k}{\cos i} - \operatorname{cosec} J\frac{k'}{\cos i'}$$
$$\delta\Pi' = \operatorname{cosec} J\frac{k}{\cos i} - \operatorname{cotg} J\frac{k'}{\cos i'}$$

(Gl. (53) ders. Abh.) wo k', l', i' sich auf den störenden Planeten eben so beziehen, wie k, l, i auf den gestörten. Da die vorhergehenden Entwickelungen J, Π, Π' ausdrücklich enthalten, so lassen sich die gewünschten Glieder auf diese Weise leicht berechnen.

76.

Sehen wir hier von k' und l' ab, die erst weiter unten berücksichtigt werden sollen, so bekommen wir zuerst zur Erlangung von k und l die folgenden, leicht zu erhaltenden Entwickelungen:

$$\frac{\cos(f+\Pi)+e\cos\Pi}{1-e^2} = -\frac{1}{8}e^2\cos(-g+\Pi)+\cos(g+\Pi)$$
$$+e\cos(2g+\Pi)+\frac{9}{8}e^2\cos(3g+\Pi)$$

$$\frac{\sin(f+\Pi)+e\sin\Pi}{1-e^2} = -\frac{1}{8}e^2\sin(-g+\Pi)+\sin(g+\Pi)$$
$$+e\sin(2g+\Pi)+\frac{9}{8}e^2\sin(3g+\Pi)$$

$$\frac{r\sin(f+\Pi)}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{8}e^2\sin(-g+\Pi)-\frac{3}{2}e\sin\Pi+\sin(g+\Pi)$$
$$+\frac{1}{2}e\sin(2g+\Pi)+\frac{3}{8}e^2\sin(3g+\Pi)$$

$$\frac{r\cos(f+\Pi)}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{8}e^2\cos(-g+\Pi)-\frac{3}{2}e\cos\Pi+\cos(g+\Pi)$$
$$+\frac{1}{2}e\cos(2g+\Pi)+\frac{3}{8}e^2\cos(3g+\Pi)$$

Multiplicirt man diese mit den Ausdrücken von u und $\frac{du}{ndt}$, die aus dem Art. 52 zu entnehmen sind, und behält nur die mit t multiplicirten, übrigens constanten, Glieder bei, so bekommt man

$$\frac{k}{\cos i} = -\left(1+\frac{5}{8}e^2\right)Mnt\sin\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)Nnt\cos\Pi$$

$$\frac{l}{\cos i} = \left(1+\frac{5}{8}e^2\right)Mnt\cos\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)Nnt\sin\Pi$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\frac{k}{\cos i} = Tnt, \qquad \frac{l}{\cos i} = Unt$$

so werden

$$T = -\left(1+\frac{5}{8}e^2\right)M\sin\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)N\cos\Pi$$

$$U = \left(1+\frac{5}{8}e^2\right)M\cos\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)N\sin\Pi$$

oder, nachdem die Ausdrücke des angeführten Art. für M und N substituirt worden sind:

$$T = \Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J\,(0)\,B_1 + \tfrac{1}{8}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+4(0)\}\,B_1 + $$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}\,B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J\,(0)\{2C_0+C_2\}\Big\}$$
$$-\tfrac{1}{8}e e' m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\cos(\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)+8(1)+12(0)\}\,B_1\cos 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}e e' m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}\,B_0\cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_1\cos 2\Pi'$$

$$U = -\tfrac{1}{8}e e' m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}\{B_0-B_2\}\sin(\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)+8(1)+12(0)\}\,B_1\sin 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}e e' m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}\,B_0\sin(\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J\,(2)\,B_1\sin 2\Pi'$$

Man kann bemerken, dass zwar T von der ersten, aber U nur von der dritten Ordnung ist, und weiter unten wird man sehen, dass im gegenwärtigen Falle von diesen Grössen nur die Glieder erster Ordnung gebraucht werden. Da jedoch in zweien der folgenden Abschnitte auch die Glieder dritter Ordnung nicht entbehrt werden können, so habe ich sie sogleich mit aufgenommen.

77.

Es wird nun im gegenwärtigen Falle

$$\delta\Pi = \operatorname{cotg} J . Tnt$$
$$\delta\Pi' = \operatorname{cosec} J . Tnt$$
$$\delta J = Unt$$

und da J, Π, Π' nur in den Differentialquotienten von Ω enthalten sind, so erhält man

$$\frac{d\delta\Upsilon}{ndt} = \Big\{\Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\Big)\operatorname{cotg} J + \Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\Big)\operatorname{cosec} J\Big\}\,Tnt + \Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial J}\Big)\,Unt$$
$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = \Big\{\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\Big)\operatorname{cotg} J + \Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi'}\Big)\operatorname{cosec} J\Big\}\,Tnt + \Big(\frac{\partial\Theta}{\partial J}\Big)\,Unt$$

Hier sind die Entwickelungen des Art. 60 für Γ und Θ anzuwenden. Diese geben soweit wie hier erforderlich ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right)\operatorname{cotg}J+\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right)\operatorname{cosec}J = {} & e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos K\\ & +\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi\\ & -\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')\\ & -\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right)\operatorname{cotg}J+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi'}\right)\operatorname{cosec}J = {} & -e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin K\\ & -\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi\\ & +\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')\\ & +\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)\end{aligned}$$

und da U von der dritten Ordnung ist, so sind hier

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial J}\right)=0\,,\qquad \left(\frac{\partial\Theta}{\partial J}\right)=0$$

zu setzen.

78.

Die Substitution der eben erhaltenen Ausdrücke in die Werthe der Differentiale von $\delta\Upsilon$ und $\delta\Psi$, und deren Integration giebt nun

$$\delta\Upsilon=\left.\begin{cases}\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos(\Pi-\Pi')\\ +\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi\\ -\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')\end{cases}\right\}Tn^2t^2$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\,Tnt\sin(g+2\Pi)$$

$$\delta\Psi=\left.\begin{cases}-\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin(\Pi-\Pi')\\ -\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi\\ +\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')\end{cases}\right\}Tn^2t^2$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\,Tnt\cos(g+2\Pi)$$

Eine leichte Entwickelung zeigt, dass die Variation $\delta\Xi$ gar keine, aus der gegenwärtig betrachteten Quelle entspringenden Glieder der Form enthält, die hier gebraucht wird. Letzeres geht auch schon aus der Integralgleichung hervor, die im Art. 64 angewandt wurde. Denn diese Gleichung, die strenge stattfindet, enthält weder Variationen der dritten Coordinate, noch Variationen der Elemente des störenden Planeten. Es ist daher nicht nur hier, sondern auch in allen folgenden Abschnitten

$$\delta \Xi = 0$$

zu setzen.

79.

Die eben erhaltenen Ausdrücke geben

$$\begin{aligned}\delta W &= C T n^2 t^2 \cos\gamma - D T n^2 t^2 \sin\gamma \\ &\quad - \sin\tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(1)+5(0)\} B_1 T n t \sin(\gamma+g+2\Pi)\end{aligned}$$

Da nun hier die Gleichungen

$$n\delta z = n\int \delta W\, dt$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2} n \int \delta\left(\overline{\frac{\delta W}{\delta\gamma}}\right) dt$$

statt finden, und der Anblick lehrt, dass das letzte Glied von δW kein mit t^2 multiplicirtes Glied hervorbringen kann, so bekommt man ohne Mühe

$$n\delta z = C T n^2 t^2 \sin g + D T n^2 t^2 \cos g$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2} C T n^2 t^2 \cos g + \tfrac{1}{2} D T n^2 t^2 \sin g$$

in welchen Ausdrücken

$$C = \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2} J\{13\} \cos(\Pi-\Pi') + \tfrac{1}{4} e \sin\tfrac{1}{2} J\{14\} \cos 2\Pi - \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2} J\{15\} \cos(\Pi+\Pi')$$

$$D = \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2} J\{13\} \sin(\Pi-\Pi') + \tfrac{1}{4} e \sin\tfrac{1}{2} J\{14\} \sin 2\Pi - \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2} J\{15\} \sin(\Pi+\Pi')$$

sind. Wegen der bekannten Gleichung

$$2(0)A_1 = (0)B_0 - (0)B_2$$

woraus

$$2\{(2)+2(1)-(0)\}A_1 = \{(2)+4(1)\}\{B_0 - B_2\}$$

folgt, ergeben sich

$$\{13\} = 2[11] - [8]$$
$$\{14\} = \{9\}$$
$$\{15\} = [11]$$

und man kann hier

$$T = \tfrac{1}{2}m'\alpha \sin J(0)\,B_1$$

setzen. Es darf indess auch der genauere Werth von T angewandt werden.

δ) Störungen der dritten Coordinate, die mit t^2 multiplicirt sind, und von den Aenderungen der dritten Coordinate des gestörten Planeten abhängen.

80.

Erwägt man, dass den Artt. 69 und 70 zufolge

$$\frac{dP}{ndt}\sec i = M, \qquad \frac{dQ}{ndt}\sec i = N$$

sind, so bekommt man sogleich in Bezug auf den ersten Theil der hier zu entwickelnden Glieder

$$\frac{d\delta P}{ndt}\sec i = \left\{\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cosec} J\right\} Tnt + \left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) Unt$$
$$\frac{d\delta Q}{ndt}\sec i = \left\{\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cosec} J\right\} Tnt + \left(\frac{\partial N}{\partial J}\right) Unt$$

wo T und U dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Abschnitt.

81.

Die Entwickelungen der hier mit M und N bezeichneten Functionen sind im Art. 72 gegeben, und man erhält daraus

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cosec} J = 2C_1 =$$
$$-\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2m'\alpha\{3(2)+16(1)+20(0)\}B_1 +$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(0)\{6C_0+3C_2+4B_1\}\Big\}\cos\Pi$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos\Pi'$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'^2m'\alpha(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cosec} J = 2E_1 =$$

$$-\left\{\tfrac{1}{2}m'\alpha(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\{(2) \quad -4(0)\}B_1 + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J(0)\{6C_0+3C_2+4B_1\}\right\}\sin\Pi$$

$$+\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$

$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) = -\tfrac{1}{2}m'\alpha(0)B_1\sin\Pi = 2D$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial J}\right) = -\tfrac{1}{2}m'\alpha(0)B_1\cos\Pi = 2F$$

letztere weil U von der dritten Ordnung ist.

82.

Man bekommt hieraus sogleich

$$\frac{\delta P}{\cos i} = (C_1 T + DU)\,n^2 t^2$$

$$\frac{\delta Q}{\cos i} = (E_1 T + FU)\,n^2 t^2$$

und da hier wie im Folgenden

$$\left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma}\right) n\,\delta z = 0$$

ist, also

$$u = \delta P\frac{r}{a}\sin f + \delta Q\frac{r}{a}\cos f$$

wird, so geht durch die Multiplication mit

$$\frac{r}{a}\sin f = \qquad (1-\tfrac{5}{8}e^2)\sin g + \tfrac{1}{2}e\sin 2g + \tfrac{3}{8}e^2\sin 3g$$

$$\frac{r}{a}\cos f = -\tfrac{3}{2}e + (1-\tfrac{3}{8}e^2)\cos g + \tfrac{1}{2}e\cos 2g + \tfrac{3}{8}e^2\cos 3g$$

das Resultat

$$\begin{aligned}\frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\tfrac{3}{2}e(ET+FU)\,n^2t^2 \\ & +(CT+DU)\,n^2t^2\sin g \qquad + (ET+FU)\,n^2t^2\cos g \\ & +\tfrac{1}{2}e(CT+DU)\,n^2t^2\sin 2g + \tfrac{1}{2}e(ET+FU)\,n^2t^2\cos 2g \\ & +\tfrac{3}{8}e^2(CT+DU)\,n^2t^2\sin 3g + \tfrac{3}{8}e^2(ET+FU)\,n^2t^2\cos 3g\end{aligned}$$

hervor, wo

$$C = (1-\tfrac{5}{8}e^2)\,C_1$$

$$E = (1-\tfrac{3}{8}e^2)\,E_1$$

sind.

83.

Der zweite Theil der zu diesem Abschnitt gehörigen Glieder besteht aus denen, die die Veränderlichkeit von $\cos i$ hervorbringt. Bezeichnet man diese mit δu, so findet man im §. 8 der zweiten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten einen Ausdruck dafür, der sich mit einer kleinen Veränderung in der äusseren Form so schreiben lässt:

$$\delta u = -\frac{u^2}{2\cos^2 i}\cdot\frac{\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)}{1-e^2}\sin i$$
$$-\left\{\frac{u\dfrac{du}{ndt}}{2\cos^2 i}-\Gamma\right\}\frac{r\cos(f+\pi-\theta)}{a\sqrt{1-e^2}}\sin i$$

wo

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int\frac{u}{\cos i}\,a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)dt$$

ist.

84.

Der im Art. 52 erhaltene Ausdruck für u stellt sich, wenn blos die Glieder desselben berücksichtigt werden, die hier erforderlich sind, wie folgt:

$$\frac{u}{\cos i} = -\frac{3}{2}e\,Vnt\cos\Pi$$
$$+\,Vnt\cos(g+\Pi)$$
$$+\frac{1}{2}e\,Vnt\cos(2g+\Pi)$$

wo zur Abkürzung

$$V = \frac{1}{2}m'\alpha\sin J(0)\,B_1$$

geschrieben worden ist. Durch die Quadrirung erhält man hieraus

$$\frac{u^2}{2\cos^2 i} = \frac{1}{4} V^2 n^2 t^2$$
$$- \frac{1}{2} e V^2 n^2 t^2 \cos g$$
$$- \frac{3}{4} e V^2 n^2 t^2 \cos(g+2\Pi)$$
$$+ \frac{1}{4} V^2 n^2 t^2 \cos(2g+2\Pi)$$
$$+ \frac{1}{4} e V^2 n^2 t^2 \cos(3g+2\Pi)$$

und durch Differentiation

$$\frac{u\dfrac{du}{ndt}}{2\cos^2 i} = \frac{1}{4} e V^2 n^2 t^2 \sin g$$
$$+ \frac{3}{8} e V^2 n^2 t^2 \sin(g+2\Pi)$$
$$- \frac{1}{4} V^2 n^2 t^2 \sin(2g+2\Pi)$$
$$- \frac{3}{8} e V^2 n^2 t^2 \sin(3g+2\Pi)$$

Geht man den im Art. 48 gegebenen Ausdruck von $a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$ durch, so findet man leicht, dass die Glieder des Products desselben mit u, welche die hier verlangte Form haben, mindestens von der vierten Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und die Neigung sind, und wir haben demzufolge hier

$$\Gamma = 0$$

zu setzen.

85.

Aus dem Art. 1 ergiebt sich, dass

$$\pi - \theta = \Pi + \Phi$$

ist, und die betreffenden Ausdrücke des Art. 76 geben daher

$$\frac{\sin(f+\pi-\theta) + e\sin(\pi-\theta)}{1-e^2} = \sin(g+\Pi+\Phi)$$
$$+ e\sin(2g+\Pi+\Phi)$$

$$\frac{r\cos(f+\pi-\theta)}{a\sqrt{1-e^2}} = -\frac{3}{2} e\cos(\Pi+\Phi)$$
$$+ \cos(g+\Pi+\Phi)$$
$$+ \frac{1}{2} e\cos(2g+\Pi+\Phi)$$

Hiermit erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{u^2}{2\cos^2 i}\cdot\frac{\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)}{1-e^2} = -\tfrac{1}{4}e\,V^2n^2t^2\sin(\Pi+\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{4}e\,V^2n^2t^2\sin(\Pi-\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{4}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi+\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi-\Phi)$$
$$-\tfrac{3}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(2g+3\Pi+\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(2g+\Pi-\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(3g+3\Pi+\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{4}e\,V^2n^2t^2\sin(4g+3\Pi+\Phi)$$

$$\frac{u\dfrac{du}{ndt}}{2\cos^2 i}\cdot\frac{r\cos(f+\pi-\theta)}{a\sqrt{1-e^2}} = -\tfrac{1}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(\Pi+\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(\Pi-\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi-\Phi)$$
$$+\tfrac{3}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(2g+3\Pi+\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(2g+\Pi+\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(3g+3\Pi+\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{4}e\,V^2n^2t^2\sin(4g+3\Pi+\Phi)$$

durch deren Summirung

$$\frac{\delta u}{\sin i} = \tfrac{3}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(\Pi+\Phi)$$
$$-\tfrac{3}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(\Pi-\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{4}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi+\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{4}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi-\Phi)$$
$$-\tfrac{1}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(2g+\Pi+\Phi)$$
$$+\tfrac{1}{8}e\,V^2n^2t^2\sin(2g+\Pi-\Phi)$$

oder, wenn man möglichst zusammen zieht,

$$\frac{\delta u}{\sin i} = \tfrac{3}{4}e\,V^2\cos\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2$$
$$+\tfrac{1}{2}V^2\sin\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\sin g \quad -\tfrac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\cos g$$
$$+\tfrac{1}{4}e\,V^2\sin\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\sin 2g - \tfrac{1}{4}e\,V^2\cos\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\cos 2g$$

hervorgeht.

86.

Fügt man nun dem eben erhaltenen Resultat das des Art. 82 hinzu, so wird das vollständige Resultat dieses Abschnittes

$$\begin{aligned} u = & -\tfrac{3}{2}e\{(ET+FU)\cos i - \tfrac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\sin i\}\,n^2t^2 \\ & +\{(CT+DU)\cos i + \tfrac{1}{2}V^2\sin\Pi\sin\Phi\sin i\}\,n^2t^2\sin g \\ & +\{(ET+FU)\cos i - \tfrac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\sin i\}\,n^2t^2\cos g \\ & +\tfrac{1}{2}e\{(CT+DU)\cos i + \tfrac{1}{2}V^2\sin\Pi\sin\Phi\sin i\}\,n^2t^2\sin 2g \\ & +\tfrac{1}{2}e\{(ET+FU)\cos i - \tfrac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\sin i\}\,n^2t^2\cos 2g \\ & +\tfrac{3}{8}e^2(CT+DU)\cos i\,.\,n^2t^2\sin 3g \\ & +\tfrac{3}{8}e^2(ET+FU)\cos i\,.\,n^2t^2\cos 3g \end{aligned}$$

in welchem die Coefficienten folgendermassen stehen:

$$\begin{aligned} C = & -\left\{\tfrac{1}{4}\{16\}+\tfrac{1}{32}e^2\{17\}+\tfrac{1}{16}e'^2\{18\}-\tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{19\}\right\}\cos\Pi \\ & +\tfrac{1}{8}ee'\{20\}\cos\Pi'+\tfrac{1}{16}ee'\{21\}\cos(2\Pi-\Pi')-\tfrac{1}{32}e'^2\{22\}\cos(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

$$D = -\tfrac{1}{4}\{16\}\sin\Pi$$

$$\begin{aligned} E = & -\left\{\tfrac{1}{4}\{16\}+\tfrac{1}{32}e^2\{17\}'+\tfrac{1}{16}e'^2\{18\}-\tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{19\}\right\}\sin\Pi \\ & +\tfrac{1}{16}ee'\{21\}\sin(2\Pi-\Pi')-\tfrac{1}{32}e'^2\{22\}\sin(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

$$F = \tfrac{1}{4}\{16\}\cos\Pi$$

$$V = \tfrac{1}{2}\{16\}\sin J$$

nebst

$$\begin{aligned} \{16\} &= m'\alpha\,(0)B_1 \\ \{17\} &= m'\alpha\,\{3(2)+16(1)+15(0)\}B_1 \\ \{17\}' &= m'\alpha\,\{(2)\quad-7(0)\}B_1 \\ \{18\} &= \{6\} \\ \{19\} &= m'\alpha\,(0)\{6C_0+3C_2+4B_1\} \\ \{20\} &= [11] \\ \{21\} &= [8]-[11] \\ \{22\} &= m'\alpha\,(2)B_1 \end{aligned}$$

Die im Art. 76 gegebenen Ausdrücke für T und U lassen sich wie folgt stellen:

$$T = \left\{\tfrac{1}{2}[12] + \tfrac{1}{8}e^2[13] + \tfrac{1}{8}e'^2[14] - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J[15]\right\}$$
$$-\tfrac{1}{8}ee'[16]\cos(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{16}e^2[17]\cos 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'[18]\cos(\Pi+\Pi') - \tfrac{1}{16}e'^2[19]\cos 2\Pi'$$

$$U = -\tfrac{1}{8}ee'[16]'\sin(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{16}e^2[17]\sin 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'[18]\sin(\Pi+\Pi') - \tfrac{1}{16}e'^2[19]\sin 2\Pi'$$

wo

$$\begin{aligned}
[12] &= \{16\}\sin J \\
[13] &= m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+4(0)\}B_1 \\
[14] &= m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 \\
[15] &= m'\alpha\sin J\,(0)\{6C_0+3C_2\} \\
[16] &= [8]\sin J \\
[16]' &= \{2[11]-[8]\}\sin J \\
[17] &= [10]\sin J \\
[18] &= [11]\sin J \\
[19] &= \{22\}\sin J
\end{aligned}$$

Statt dessen kann man auch

$$T = -\left(1+\tfrac{5}{8}e^2\right)M\sin\Pi + \left(1+\tfrac{3}{8}e^2\right)N\cos\Pi$$

$$U = \left(1+\tfrac{5}{8}e^2\right)M\cos\Pi + \left(1+\tfrac{3}{8}e^2\right)N\sin\Pi$$

anwenden, wenn M und N vorher berechnet worden sind.

87.

Bevor wir zur Entwickelung der Wirkung der Aenderungen der Coordinaten des störenden Planeten übergehen, muss angegeben werden, wie die bis jetzt entwickelten Ausdrücke zu behandeln sind, wenn mehr wie Ein störender Planet vorhanden ist.

Da in diesem Falle jeder vorhandene störende Planet einen Beitrag liefert, sowohl zu den mit A, B, C, D, E, F, G, V bezeichneten Coefficienten, wie zu denen, welchen die Bezeichnung K, L, T, U gegeben worden ist, so müssen diese Beiträge zu jedem einzelnen Coefficienten vor allem Anderen addirt, und erst darauf die Multiplicationen vorgenommen werden. Man kann daher in allen bis jetzt erhaltenen Resultaten jeden Coefficienten mit dem auf alle vorhandenen, störenden Planeten sich beziehenden Summenzeichen Σ versehen, und z. B. für das Resultat des Abschnittes α) oder des Art. 67 schreiben:

$$\begin{aligned} n\delta z = \; & \{\Sigma A.\Sigma K + \Sigma B.\Sigma L\} n^2 t^2 \\ & + \{(\Sigma C.\Sigma K + \Sigma D.\Sigma L) - \tfrac{1}{4} e((\Sigma K)^2 + 2(\Sigma L)^2)\} n^2 t^2 \sin g \\ & \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art müssen alle bis jetzt erhaltenen Resultate behandelt werden, wenn mehr wie Ein störender Planet Einfluss auf sie ausübt.

ε) Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors, die mit t^2 multiplicirt sind, und von den Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors des störenden Planeten herrühren.

88.

Nehmen wir wieder die Elemente Υ und Ψ vor, und betrachten sie als Functionen von $n'\delta z'$ und ν', die dem störenden Planeten angehören. Hiermit ergeben sich zuerst

$$\frac{d\delta\Upsilon}{ndt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right) n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\nu'$$

$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g'}\right) n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r'}\right)\nu'$$

Aber da man in Bezug auf den störenden Planeten setzen kann

$$n'\delta z' = X' + \Upsilon'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{2}\left(\frac{r'}{a'} + \frac{r'^2}{a'^2(1-e'^2)}\right) + \Psi'\frac{\sqrt{1-e'^2}}{2e'}\left(\frac{r'^2}{a'^2} - \frac{2+3e'^2}{2}\right)$$

$$\nu' = -\frac{2}{3}\Xi' - \frac{1}{2}\Upsilon'\left(\frac{r'}{a'}\cos f' + 2e'\right) - \frac{1}{2}\Psi'\frac{r'}{a'}\sin f'$$

so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{d\delta\Upsilon}{ndt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right) X' - \frac{2}{3} r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\Xi' + M'\Upsilon' + N'\Psi'$$

$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g'}\right) X' - \frac{2}{3} r'\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r'}\right)\Xi' + P'\Upsilon' + Q'\Psi'$$

wo

$$M' = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\frac{\sqrt{1-e'^2}}{2}\left(\frac{r'}{a'}+\frac{r'^2}{a'^2(1-e'^2)}\right)-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\left(\frac{r'}{2a'}\cos f'+e'\right)$$
$$N' = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\frac{\sqrt{1-e'^2}}{2e'}\left(\frac{r'^2}{a'^2}-\frac{2+3e'^2}{2}\right)-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\frac{r'}{2a'}\sin f'$$

und P' und Q' eben so aus Θ zusammengesetzt sind. Die Differentiale des Art. 58 geben, wenn man sie auf den störenden Planeten anwendet, durch dieselbe Analyse, die dort angewendet wurde:

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e'}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\left(\frac{r'}{a'}+\frac{r'^2}{a'^2(1-e'^2)}\right)\frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}}-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\frac{r'\cos f'+2a'e'}{a'(1-e'^2)}$$
$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\frac{r'^2}{a'^2\sqrt{1-e'^2}}-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\frac{r'e'\sin f'}{a'(1-e'^2)}$$

wodurch

$$M' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e'}\right)$$
$$N' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right)-\frac{2+3e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)$$

werden, und eben so erhält man

$$P' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e'}\right)$$
$$Q' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right)-\frac{2+3e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g'}\right)$$

Die Factoren, womit diese Ausdrücke zu multipliciren sind, bestimmen sich wie in den Artt. 62 und 63, nemlich

$$X' = 0, \quad \Xi' = 0, \quad \Upsilon' = (1+\tfrac{3}{8}e'^2)K'n't, \quad \Psi' = -(1+\tfrac{5}{8}e'^2)L'n't$$

wo K' und L' in der Theorie des störenden Planeten den K und L in der Theorie des gestörten völlig analog sind.

89.

Die Entwickelungen des Art. 60 geben nun ohne Mühe

$$\begin{aligned}M' = &-\left\{\tfrac{1}{2}((2))+\tfrac{1}{16}e^2((3))+\tfrac{1}{16}e'^2((4))-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K\\
&+\tfrac{1}{8}ee'((6))\sin 2K\\
&-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')\\
&+\tfrac{1}{2}e'((8))\sin g\\
&+\tfrac{1}{2}e((9))\sin(g+K)\\
&-\tfrac{1}{4}e((10))\sin(g-K)\\
&-\tfrac{1}{4}e'((11))\sin(g+2K)\\
&+\tfrac{1}{2}((12))\sin(2g+K)\end{aligned}$$

$$N' = \left\{\tfrac{1}{2}((2)) + \tfrac{1}{16}e^2((3)) + \tfrac{1}{16}e'^2((4))' - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$-\tfrac{1}{8}ee'((6))\cos 2K$$
$$-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{2}e((9))\cos(g+K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e((10))\cos(g-K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e'((11))\cos(g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{2}((12))\cos(2g+K)$$

$$P' = \tfrac{1}{4}ee'((1))$$
$$-\left\{\tfrac{1}{2}((2)) + \tfrac{1}{16}e^2((3))' + \tfrac{1}{16}e'^2((4)) - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'((6))\cos 2K$$
$$-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{2}e'((8))\cos g$$
$$+\tfrac{1}{2}e((9))'\cos(g+K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e((10))\cos(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e'((11))\cos(g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{2}((12))\cos(2g+K)$$

$$Q' = -\left\{\tfrac{1}{2}((2)) + \tfrac{1}{16}e^2((3))' + \tfrac{1}{16}e'^2((4))' - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K$$
$$+\tfrac{1}{8}((6))\sin 2K$$
$$+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{2}e((9))'\sin(g+K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e((10))\sin(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{4}e'((11))\sin(g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{2}((12))\sin(2g+K)$$

wo zur Abkürzung

$$((1)) = m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0$$
$$((2)) = m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1$$
$$((3)) = m'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1$$

$$((3))' = m'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1$$
$$((4)) = m'\alpha\{3(4)+30(3)+58(2)-4(1)+4(0)\}A_1$$
$$((4))' = m'\alpha\{(4)+10(3)+14(2)-12(1)+12(0)\}A_1$$
$$((5)) = m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}$$
$$((6)) = m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2$$
$$((7)) = m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0$$
$$((8)) = m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0$$
$$((9)) = m'\alpha\{(1)-(0)\}A_1$$
$$((9))' = m'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1$$
$$((10)) = m'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1$$
$$((11)) = m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2$$
$$((12)) = m'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$

gesetzt worden sind.

90.

Die Multiplication der eben erhaltenen Entwickelungen mit den oben gegebenen Ausdrücken für Υ' und Ψ', nebst der darauf folgenden Integration giebt

$$\begin{aligned}
\delta\Upsilon = {} & C_1' K' n n' t^2 + D_1' L' n n' t^2 \\
& - \Big\{\tfrac{1}{2} e'((8)) \cos g + \tfrac{1}{2} e((9)) \cos(g+K) - \tfrac{1}{4} e((10)) \cos(g-K) - \\
& \qquad - \tfrac{1}{4} e'((11)) \cos(g+2K) + \tfrac{1}{4}((12)) \cos(2g+K)\Big\} K' n' t \\
& + \Big\{\tfrac{1}{2} e((9)) \sin(g+K) + \tfrac{1}{4} e((10)) \sin(g-K) - \\
& \qquad - \tfrac{1}{4} e'((11)) \sin(g+2K) + \tfrac{1}{4}(12)) \sin(2g+K)\Big\} L' n' t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\Psi = {} & - E_1' K' n n' t^2 - F_1' L' n n' t^2 \\
& - \Big\{\tfrac{1}{2} e'((8)) \sin g - \tfrac{1}{2} e((9))' \sin(g+K) - \tfrac{1}{4} e((10)) \sin(g-K) + \\
& \qquad + \tfrac{1}{4} e'((11)) \sin(g+2K) + \tfrac{1}{4}((12)) \sin(2g+K)\Big\} K' n' t \\
& + \Big\{\tfrac{1}{2} e((9))' \cos(g+K) - \tfrac{1}{4} e((10)) \cos(g-K) - \\
& \qquad - \tfrac{1}{4} e'((11)) \cos(g+2K) - \tfrac{1}{4}((12)) \cos(2g+K)\Big\} L' n' t
\end{aligned}$$

wo

$$C_1' = -\left\{\tfrac{1}{4}((2)) + \tfrac{1}{32}e^2((3)) + \tfrac{1}{32}e'^2\{((4)) + 3((2))\} - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K$$
$$+ \tfrac{1}{16}ee'((6))\sin 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')$$

$$D_1' = -\left\{\tfrac{1}{4}((2)) + \tfrac{1}{32}e^2((3)) + \tfrac{1}{32}e'^2\{((4))' + 5((2))\} - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$+ \tfrac{1}{16}ee'((6))\cos 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$

$$E_1' = -\tfrac{1}{8}ee'((1))$$
$$+ \left\{\tfrac{1}{4}((2)) + \tfrac{1}{32}e^2((3))' + \tfrac{1}{32}e'^2\{((4)) + 3((2))\} - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$- \tfrac{1}{16}ee'((6))\cos 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$

$$F_1' = -\left\{\tfrac{1}{4}((2)) + \tfrac{1}{32}e^2((3))' + \tfrac{1}{32}e'^2\{((4))' + 5((2))\} - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K$$
$$+ \tfrac{1}{16}ee'((6))\sin 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')$$

91.

Hieraus ergiebt sich durch dasselbe Verfahren wie oben

$$\begin{aligned}
\delta W = {} & (C'K' + D'L')\,nn't^2\cos\gamma - (E'K' + F'L')\,nn't^2\sin\gamma \\
& + \tfrac{1}{2}e\,(C'K' + D'L')\,nn't^2\cos 2\gamma - \tfrac{1}{2}e\,(E'K' + F'L')\,nn't^2\sin 2\gamma \\
& + \tfrac{3}{8}e^2\,(C'K' + D'L')\,nn't^2\cos 3\gamma - \tfrac{3}{8}e^2\,(E'K' + F'L')\,nn't^2\sin 3\gamma \\
& + \left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{2}e'((8))\cos(-\gamma+g) \\ +\tfrac{1}{4}e\{((9))' - ((9))\}\cos(-\gamma+g+K) \\ +\tfrac{1}{4}e((10))\cos(-\gamma+g-K) \\ -\tfrac{1}{8}e((12))\cos(-2\gamma+2g+K) \end{array}\right\} K'n't \\
& + \left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{4}e\{((9))' - ((9))\}\sin(-\gamma+g+K) \\ +\tfrac{1}{4}e((10))\sin(-\gamma+g-K) \\ +\tfrac{1}{8}e((12))\sin(-2\gamma+2g+K) \end{array}\right\} L'n't
\end{aligned}$$

nebst

$$C' = (1 - \tfrac{3}{8}e^2)C_1', \qquad D' = (1 - \tfrac{3}{8}e^2)D_1'$$
$$E' = (1 - \tfrac{5}{8}e^2)E_1', \qquad F' = (1 - \tfrac{5}{8}e^2)F_1'$$

Damit folgen weiter

$$n\delta z = (A'K'+B'L')\,nn't^2$$
$$+(C'K'+D'L')\,nn't^2\sin g \quad +(E'K'+F'L')\,nn't^2\cos g$$
$$+\tfrac{1}{4}e\,(C'K'+D'L')\,nn't^2\sin 2g \quad +\tfrac{1}{4}e\,(E'K'+F'L')\,nn't^2\cos 2g$$
$$+\tfrac{1}{8}e^2\,(C'K'+D'L')\,nn't^2\sin 3g +\tfrac{1}{8}e^2\,(E'K'+F'L')\,nn't^2\cos 3g$$

$$\nu = -\tfrac{1}{4}e\,(C'K'+D'L')\,nn't^2$$
$$-\tfrac{1}{2}(C'K'+D'L')\,nn't^2\cos g \quad +\tfrac{1}{2}(E'K'+F'L')\,nn't^2\sin g$$
$$-\tfrac{1}{4}e\,(C'K'+D'L')\,nn't^2\cos 2g \quad +\tfrac{1}{4}e\,(E'K'+F'L')\,nn't^2\sin 2g$$
$$-\tfrac{3}{16}e^2\,(C'K'+D'L')\,nn't^2\cos 3g +\tfrac{3}{16}e^2\,(E'K'+F'L')\,nn't^2\sin 3g$$

wo

$$A' = -\tfrac{1}{4}e'((8)) + e\left\{\tfrac{1}{8}((9))' - \tfrac{1}{8}((9)) + \tfrac{1}{8}((10)) - \tfrac{1}{16}((12))\right\}\cos K$$
$$B' = \qquad -e\left\{\tfrac{1}{8}((9))' - \tfrac{1}{8}((9)) + \tfrac{1}{8}((10)) - \tfrac{1}{16}((12))\right\}\sin K$$

gesetzt worden sind. Führt man nun alle Coefficienten auf die A_i und B_i hin, so bekommt man

$$A' = -\tfrac{1}{4}e'\{23\} + \tfrac{1}{16}e\{24\}\cos K$$
$$B' = \qquad -\tfrac{1}{16}e\{24\}\sin K$$

$$C' = -\left\{\tfrac{1}{4}\{26\} + \tfrac{1}{32}e^2\{27\} + \tfrac{1}{32}e'^2\{28\} - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\sin K$$
$$+\tfrac{1}{16}ee'\{30\}\sin 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\sin(\Pi+\Pi')$$

$$D' = -\left\{\tfrac{1}{4}\{26\} + \tfrac{1}{32}e^2\{27\} + \tfrac{1}{32}e'^2\{28\}' - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\cos K$$
$$+\tfrac{1}{16}ee'\{30\}\cos 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\cos(\Pi+\Pi')$$

$$E' = -\tfrac{1}{8}ee'\{25\}$$
$$+\left\{\tfrac{1}{4}\{26\} + \tfrac{1}{32}e^2\{27\}' + \tfrac{1}{32}e'^2\{28\} - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\cos K$$
$$-\tfrac{1}{16}ee'\{30\}\cos 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\cos(\Pi+\Pi')$$

$$F' = -\left\{\tfrac{1}{4}\{26\} + \tfrac{1}{32}e^2\{27\}' + \tfrac{1}{32}e'^2\{28\}' - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\sin K$$
$$+\tfrac{1}{16}ee'\{30\}\sin 2K + \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\sin(\Pi+\Pi')$$

wo

$$\{23\} = m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0$$
$$\{24\} = m'\alpha\{4(3)+11(2)-10(1)+10(0)\}A_1$$
$$\{25\} = \{5\}$$
$$\{26\} = [5]$$
$$\{27\} = [6]$$
$$\{27\}' = [6]'$$
$$\{28\} = m'\alpha\{3(4)+30(3)+61(2)+2(1)-2(0)\}A_1$$
$$\{28\}' = m'\alpha\{(4)+10(3)+19(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$
$$\{29\} = [8]$$
$$\{30\} = \{8\}$$
$$\{31\} = [11]$$

ζ) Störungen der dritten Coordinate, die mit t^2 multiplicirt sind, und von $n'\delta z'$ und ν' herrühren.

92.

Es ergeben sich hier, zufolge der Artt. 69 und 70, zuerst

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial M}{\partial g'}\right)n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial M}{\partial r'}\right)\nu'$$
$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial N}{\partial g'}\right)n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial N}{\partial r'}\right)\nu'$$

und setzt man, mit Weglassung der mit X' und Ξ' multiplicirten Glieder, die auch hier Nichts geben können,

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = A'\Upsilon' + B'\Psi'$$
$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = C'\Upsilon' + D'\Psi'$$

so bekommt man auf die nemliche Art wie im vorigen Abschnitt:

$$A' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial e'}\right)$$
$$B' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right) - \frac{2+3e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial M}{\partial g'}\right)$$
$$C' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial e'}\right)$$
$$D' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right) - \frac{2+3e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial N}{\partial g'}\right)$$

Mit hinreichender Genauigkeit werden hier

$$\Upsilon' = K'n't, \qquad \Psi' = -L'n't$$

93.

Die Entwickelungen des Art. 72 geben nun

$$A' = -\tfrac{1}{8}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\sin\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\sin\Pi'$$
$$+\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$B' = \tfrac{1}{8}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\cos\Pi'$$
$$-\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$C' = \tfrac{1}{8}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\cos\Pi$$
$$-\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$D' = -\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

94.

Multiplicirt man hierauf mit den oben angegebenen Werthen von Υ' und Ψ', und integrirt, so bekommt man

$$\frac{\delta P}{\cos i} = \tfrac{1}{2}(A'K'-B'L')\,nn't^2$$
$$\frac{\delta Q}{\cos i} = \tfrac{1}{2}(C'K'-D'L')\,nn't^2$$

woraus, da hier wieder

$$\left(\frac{\overline{\delta R}}{\delta\gamma}\right)n\delta z = 0$$

ist, zufolge des Art. 73 hervorgeht:

$$\frac{u}{\cos i} = \qquad -\tfrac{3}{4}e(C'K'-D'L')\,nn't^2$$
$$+\tfrac{1}{2}(A'K'-B'L')\,nn't^2\sin g \quad +\tfrac{1}{2}(C'K'-D'L')\,nn't^2\cos g$$
$$+\tfrac{1}{4}e(A'K'-B'L')\,nn't^2\sin 2g+\tfrac{1}{4}e(C'K'-D'L')\,nn't^2\cos 2g$$

Wie in dem angeführten Art. hätten auch hier das erste und die beiden letzten Glieder weggelassen werden können, da sie von der vierten Ordnung sind.

Bringt man die Coefficienten auf die im Vorhergehenden eingeführte Form, so werden

$$A' = -\frac{1}{8}e'\{32\}\sin\Pi + \frac{1}{8}e\{33\}\sin\Pi' + \frac{1}{16}e\{34\}\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\frac{1}{16}e'\{35\}\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$B' = \frac{1}{8}e\{33\}\cos\Pi' - \frac{1}{16}e\{34\}\cos(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{16}e'\{35\}\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$C' = \frac{1}{8}e'\{32\}\cos\Pi - \frac{1}{16}e\{34\}\cos(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{16}e'\{35\}\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$D' = -\frac{1}{16}e\{34\}\sin(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{16}e'\{35\}\sin(\Pi-2\Pi')$$

wo

$$\{32\} = [14]$$
$$\{33\} = [18]$$
$$\{34\} = [16]-[18]$$
$$\{35\} = [19]$$

η) Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors, die mit t^2 multiplicirt sind, und von der dritten Coordinate des störenden Planeten herrühren.

95.

Vor allen Dingen müssen wir jetzt die Functionen T' und U' einführen, die dem störenden Planeten zukommen, und den T und U der Artt. 76 oder 86 völlig analog sind. Es werden hiermit in den Bezeichnungen des Art. 75

$$\frac{k'}{\cos i'} = T'n't, \qquad \frac{l'}{\cos i'} = U'n't$$

und

$$\delta J = -U'n't$$
$$\delta\Pi = -\operatorname{cosec} J.T'n't$$
$$\delta\Pi' = -\operatorname{cotg} J.T'n't$$

Ferner sind jetzt

$$\frac{d\,\delta\Upsilon}{n\,dt} = -\left\{\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial J}\right) U'n't$$

$$\frac{d\,\delta\Psi}{n\,dt} = -\left\{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial J}\right) U'n't$$

96.

Aus dem Art. 60 bekommt man hierauf

$$\begin{aligned}
-\left\{\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = \quad & e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos(\Pi-\Pi') \\
& -\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi \\
& +\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi') \\
& +\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\left\{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = \quad & -e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin(\Pi-\Pi') \\
& +\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi \\
& -\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi') \\
& -\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)
\end{aligned}$$

und es sind wieder

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial J}\right) = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial\Theta}{\partial J}\right) = 0$$

zu setzen.

97.

Substituirt und integrirt man, so erhält man, da wieder die Glieder, die g enthalten, Nichts geben können:

$$\delta\Upsilon = \left\{\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos(\Pi-\Pi') \\
& -\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi \\
& +\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')
\end{aligned}\right\} T'nn't^2$$

$$\delta\Psi = \left\{\begin{aligned}
& -\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin(\Pi-\Pi') \\
& +\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi \\
& -\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')
\end{aligned}\right\} T'nn't^2$$

und hiermit auf dieselbe Weise wie früher

$$n\delta z = C'T'nn't^2\sin g + D'T'nn't^2\cos g$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2}C'T'nn't^2\cos g + \tfrac{1}{2}D'T'nn't^2\sin g$$

Die Coefficienten haben hier die folgenden Ausdrücke:

$$C' = \tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\{36\}\cos(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J\{37\}\cos 2\Pi + \tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\{38\}\cos(\Pi+\Pi')$$

$$D' = \tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\{36\}\sin(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J\{37\}\sin 2\Pi + \tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\{38\}\sin(\Pi+\Pi')$$

in welchen die Coefficienten dieselben sind, wie im Art. 79, nemlich

$$\{36\} = 2[11] - [8]$$
$$\{37\} = \{9\}$$
$$\{38\} = [11]$$

θ) Störungen der dritten Coordinate, die mit t^2 multiplicirt sind, und von den Störungen der dritten Coordinate des störenden Planeten herrühren.

98.

Dem Vorhergehenden analog sind jetzt die Functionen

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = -\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\partial M}{\partial J}\right)U'n't$$

$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = -\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\partial N}{\partial J}\right)U'n't$$

zu entwickeln. Zu dem Ende giebt der Art. 72

$$\begin{aligned}
-\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = 2C_1' = \\
\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\,(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\{3(2)+16(1)+20(0)\}B_1 + \\
+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,(0)\{2C_0+C_2\}\Big\}\cos\Pi \\
-\tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos\Pi' \\
-\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi') \\
+\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\,(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')
\end{aligned}$$

$$-\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = 2E_1' =$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}m'\alpha(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\{(2) \quad -4(0)\}B_1 + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha(0)\{2C_0 + C_2\}\right\}\sin\Pi$$

$$-\tfrac{1}{8}e e' m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2 \sin(2\Pi - \Pi')$$

$$+\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha(2)B_1\sin(\Pi - 2\Pi')$$

$$-\left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) = \tfrac{1}{2}m'\alpha(0)B_1\sin\Pi = 2D'$$

$$-\left(\frac{\partial N}{\partial J}\right) = \tfrac{1}{2}m'\alpha(0)B_1\cos\Pi = 2F'$$

woraus

$$\frac{\delta P}{\cos i} = (C_1'T' + D'U')\,nn't^2$$

$$\frac{\delta Q}{\cos i} = (E_1'T' + F'U')\,nn't^2$$

folgen.

99.

Auf dieselbe Weise wie im Art. 82 geht hieraus hervor

$$\frac{u}{\cos i} = \qquad -\tfrac{3}{2}e(E'T'+F'U')\,nn't^2$$

$$+(C'T'+D'U')\,nn't^2\sin g \quad + (E'T'+F'U')\,nn't^2\cos g$$

$$+\tfrac{1}{2}e(C'T'+D'U')\,nn't^2\sin 2g \quad + \tfrac{1}{2}e(E'T'+F'U')\,nn't^2\cos 2g$$

$$+\tfrac{3}{8}e^2(C'T'+D'U')\,nn't^2\sin 3g + \tfrac{3}{8}e^2(E'T'+F'U')\,nn't^2\cos 3g$$

in welchem Ausdruck die Coefficienten wie folgt zusammen gesetzt sind:

$$C' = \left\{\tfrac{1}{4}\{39\} + \tfrac{1}{32}e^2\{40\} + \tfrac{1}{16}e'^2\{41\} - \tfrac{3}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{42\}\right\}\cos\Pi$$

$$-\tfrac{1}{8}ee'\{43\}\cos\Pi' - \tfrac{1}{16}ee'\{44\}\cos(2\Pi - \Pi') + \tfrac{1}{32}e'^2\{45\}\cos(\Pi - 2\Pi')$$

$$D' = \tfrac{1}{4}\{39\}\sin\Pi$$

$$E' = \left\{\tfrac{1}{4}\{39\} + \tfrac{1}{32}e^2\{40\}' + \tfrac{1}{16}e'^2\{41\} - \tfrac{3}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{42\}\right\}\sin\Pi$$

$$-\tfrac{1}{16}ee'\{44\}\sin(2\Pi - \Pi') + \tfrac{1}{32}e'^2\{45\}\sin(\Pi - 2\Pi')$$

$$F' = -\tfrac{1}{4}\{39\}\cos\Pi$$

wo

$$\begin{aligned}
\{39\} &= \{16\}\\
\{40\} &= \{17\}\\
\{40\}' &= \{17\}'\\
\{41\} &= \{18\}\\
\{42\} &= m'\alpha\,(0)\{2C_0+C_2\}\\
\{43\} &= \{20\}\\
\{44\} &= \{21\}\\
\{45\} &= \{22\}
\end{aligned}$$

Hiemit sind alle mit t^2 multiplicirten Glieder entwickelt.

100.

Die Behandlung der von den Coordinaten des störenden Planeten abhängigen Glieder ist in dem Falle, in welchem mehr wie ein störender Planet vorhanden ist, etwas anders wie die im Art. 87 erklärte Behandlung der Glieder, die von den Coordinaten des gestörten Planeten herrühren. In Bezug auf die erstgenannten Glieder ist Nichts weiter zu bemerken, als dass jeder störende Planet, welcher Einfluss äussert, Glieder hinzufügt, die den hier entwickelten völlig ähnlich sind, und dass von allen diesen Gliedern schliesslich die Summe zu bilden ist. Selbstverständlich ist, dass man in den mit K', L', T', U' bezeichneten Functionen alle Glieder aufnehmen muss, die auf den betreffenden störenden Planeten merkliche Wirkung äussern.

---

§. 7. Anwendung der vorhergehenden Entwickelungen auf den Jupiter.

Berechnung der vom Saturn bewirkten Breitenstörungen des Jupiters.

101.

Die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Störungen der Länge und des Radius Vectors auf die vom Saturn bewirkten

Störungen des Jupiters würde nur ein unvollkommenes Resultat geben. Für diesen Zweck hätten noch viele Glieder höherer Ordnungen entwickelt werden müssen, auch hat auf diese Störungen das Quadrat der störenden Kraft nicht unmerklichen Einfluss. Die Fortsetzung des hier angewandten Verfahrens würde aber auf unübersehbare Weitläufigkeiten führen, und es ist daher am zweckmässigsten, diese Störungen so zu berechnen, wie ich es früher in meiner Berliner Preisschrift angegeben habe, wobei die Vereinfachungen, die ich später veröffentlicht habe, mit benutzt werden können. Die Entwickelung der Störungsglieder nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der excentrischen Anomalie, die für die kleinen Planeten von wesentlichem Nutzen ist, braucht der Kleinheit der betreffenden Excentricitäten wegen beim Jupiter nicht in Anwendung gebracht zu werden, sondern man kann hier statt dessen die mittleren Anomalien anwenden.

Obgleich nun zwar die hier entwickelten Ausdrücke auf die vom Saturn in der Länge und dem Radius Vector des Jupiters bewirkten Störungen nicht anwendbar sind, so ist doch bei den übrigen Störungen des Jupiters das Verhältniss ein anderes. Alle übrigen Störungen dieses Planeten, die vom Saturn bewirkten Breitenstörungen eingeschlossen, können durch die hier entwickelten Ausdrücke mit wünschenswerther Genauigkeit berechnet werden.

102.

Die elliptischen Elemente, die den Rechnungen zu Grunde gelegt werden sollen, sind die folgenden:

Jupiter	Saturn
$m = \frac{1}{1050}$	$m' = \frac{1}{3500}$
$n = 109256''.72$	$n' = 43996''.127$
$e = 0.0481621$	$e' = 0.0561505$
$\pi = 11^0\ 7'\ 38''$	$\pi' = 89^0\ 8'\ 20''$
$i = 1\ 18\ 51.6$	$i' = 2\ 29\ 35.9$
$\theta = 98\ 25\ 45$	$\theta' = 111\ 56\ 7$
$\lg a = 0.7162371$	$\lg a' = 0.9794963$

Sie sind auf den Anfang des Jahres 1800 bezogen, und die Einheit der Zeit ist Ein Julianisches Jahr. Durch die Ausdrücke des Art. 1 erhielt ich hieraus

$$J = 1^{0}15'12''5$$

$$\Phi = 207^{0}40'\,28''4\,, \qquad \Psi = 194^{0}10'\,30''2$$

$$\Pi = 65\;\;1\;\;25\;\;, \qquad \Pi' = 143\;\;1\;\;43$$

103.

Die Entwickelungscoefficienten A_i, B_i, C_i habe ich nach den in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten, und die Differentialquotienten derselben nach den von Legendre in den »Exercices« gegebenen Formeln berechnet, und die folgenden Werthe gefunden:

$$(0)A_0 = 1.090165\,, \qquad (1)A_0 = 0.22067$$
$$(0)A_1 = 0.31041\,, \qquad (1)A_1 = 0.40456$$
$$(0)A_2 = 0.12889\,, \qquad (1)A_2 = 0.30151$$

$$(2)A_0 = 0.42790\,, \qquad (3)A_0 = 0.9848$$
$$(2)A_1 = 0.37995\,, \qquad (3)A_1 = 1.0457$$
$$(2)A_2 = 0.52397\,, \qquad (3)A_2 = 1.0163$$

$$(4)A_0 = 3.7383$$
$$(4)A_1 = 3.7169$$
$$(4)A_2 = 3.9953$$

$$(0)B_0 = 1.18907 \qquad (1)B_0 = 2.18551$$
$$(0)B_1 = 0.86922 \qquad (1)B_1 = 2.26850$$
$$(0)B_2 = 0.56825 \qquad (1)B_2 = 1.99721$$
$$(0)B_3 = 0.35368 \qquad (1)B_3 = 1.57801$$
$$(0)B_4 = 0.21406 \qquad (1)B_4 = 1.16192$$
$$(0)B_5 = 0.12724 \qquad (1)B_5 = 0.81483$$
$$(0)B_6 = 0.07467 \qquad (1)B_6 = 0.55165$$
$$(0)B_7 = 0.04341 \qquad (1)B_7 = 0.3635$$
$$(0)B_8 = 0.02506 \qquad (1)B_8 = 0.210\,^{*)}$$

---

*) Durch Induction aus den vorhergehenden berechnet.

$(2)B_0 = 7.89952$	$(3)B_0 = 36.7145$
$(2)B_1 = 7.67757$	$(3)B_1 = 36.7265$
$(2)B_2 = 7.51623$	$(3)B_2 = 35.773$
$(2)B_3 = 6.96268$	$(3)B_3 = 34.806$
$(2)B_4 = 6.03106$	$(3)B_4 = 32.70$
$(2)B_5 = 4.94174$	$(3)B_5 = 29.71$
$(2)B_6 = 3.8221$	$(3)B_6 = 27.70$ *)
$(2)B_7 = 2.874$	$(3)B_7 = 25.7$ *)
$(2)B_8 = 1.97$ *)	
$(0)C_0 = 2.055$	$(1)C_0 = 8.657$
$(0)C_1 = 1.849$	$(1)C_1 = 8.476$
$(0)C_2 = 1.475$	$(1)C_2 = 7.724$
$(0)C_3 = 1.091$	$(1)C_3 = 6.571$
$(0)C_4 = 0.768$	$(1)C_4 = 5.275$
$(0)C_5 = 0.521$	$(1)C_5 = 4.180$
$(0)C_6 = 0.344$	

Diese Werthe stimmen, soweit die Vergleichung möglich ist, mit denen der Méc. cél. nahe überein. Zur Berücksichtigung des zweiten Gliedes der Störungsfunction geben die obigen Elemente

$$\alpha = 0.54543$$

und zufolge des Art. 9 sind es also die Werthe

$$(0)A_1 = 0.03769\,, \qquad (1)A_1 = 0.13184$$
$$(0)B_0 = 0.64364$$

die statt der oben angesetzten in den Rechnungen angewandt werden müssen.

104.

Die obigen Elemente geben, wenn die Secunde zur Einheit gemacht wird

$$\lg m'\alpha \sin J = 9.84706$$

und die Substitution sowohl dieses Werthes, wie der des vor. Art. in die Ausdrücke des Art. 18 gab die folgenden Zahlen, von welchen die in Klammern eingeschlossenen die Logarithmen bedeuten:

---

*) S. die vor. Anm.

für $i = -1$		für $i = 1$	
(1) =	(8.5683)	(1) =	(8.8591)
(2) =	(8.0209 n)	(2) =	(8.8983 n)
(5) =	$-0''.4654$	(5) =	$-0''.4047$
(6) =	(8.0292)	(6) =	(7.703)
(7) =	(7.4879)	(7) =	(7.488)
(8) =	(7.6692)	(8) =	(6.857)
(9) =	(8.0293 n)	(9) =	(7.346 n)
(10) =	(7.6804)	(10) =	(6.987)
(11) =	(8.5683)	(11) =	(7.6696 n)
(12) =	(8.8983 n)	(12) =	(8.2355 n)
(21) =	(6.857 n)		
(22) =	(7.488)		
(23) =	(7.649 n)		
(24) =	(6.368 n)		

für $i = -2$		für $i = 2$	
(1) =	(7.954)	(1) =	(8.7969)
(2) =	(7.736)	(2) =	(8.9259 n)
(5) =	$-0''.6168$	(5) =	$-0''.2517$
(6) =	(7.952)	(6) =	(7.376)
(7) =	(6.299)	(7) =	(6.300)
(8) =	(7.789)	(8) =	(6.586)
(9) =	(8.216 n)	(9) =	(7.097 n)
(10) =	(7.981)	(10) =	(6.769)
(11) =	(8.8315)	(11) =	(7.964 n)
(12) =	(8.9731 n)	(12) =	(7.781 n)
(21) =	(7.364 n)		
(22) =	(7.952)		
(23) =	(7.981 n)		
(24) =	(6.414 n)		

für $i = -3$		für $i = 3$	
(1) =	(7.670 n)	(1) =	(8.6872)
(2) =	(8.0311)	(2) =	(8.8637 n)
(5) =	$-0''.3979$	(5) =	$-0''.1499$
(6) =	(7.611)	(6) =	(6.818)
(7) =	(7.299 n)	(7) =	(7.300 n)
(8) =	(7.811)	(8) =	(6.674)

(9) = (8.281 n)	(9) = (7.046 n)
(10) = (8.113)	(10) = (6.679)
(11) = (8.8591)	(11) = (7.969 n)
(12) = (9.1696 n)	(12) = (7.011 n)
(21) = (7.669 n)	
(22) = (8.263)	
(23) = (8.144 n)	
(24) = (6.368 n)	

für $i = -4$	für $i = 4$
(1) = (7.964 n)	(1) = (8.5482)
(2) = (8.036)	(2) = (8.7540 n)
(5) = $-0''.2424$	(5) = $-0''.0869$
(6) = (6.512 n)	(6) = (6.447 n)
(7) = (7.491 n)	(7) = (7.491 n)
(8) = (7.774 n)	(8) = (6.773)
(9) = (8.274 n)	(9) = (7.040 n)
(10) = (8.147)	(10) = (6.639)
(11) = (8.7969)	(11) = (7.855 n)
(12) = (9.1113 n)	(12) = (6.949)
(21) = (7.789 n)	
(22) = (8.3903)	
(23) = (8.3930 n)	
(24) = (6.270 n)	

für $i = -5$	für $i = 5$
(1) = (7.969 n)	(1) = (8.3892)
(2) = (7.955)	(2) = (8.6150 n)
(5) = $-0''.1423$	(5) = $-0''.0492$
(6) = (7.481 n)	(6) = (6.820 n)
(7) = (7.520 n)	(7) = (7.520 n)
(8) = (7.698)	(8) = (6.700)
(9) = (8.219 n)	(9) = (7.016 n)
(10) = (8.119)	(10) = (6.086)
(11) = $+0''.04678$	(11) = (7.764 n)
(12) = $-0''.09935$	(12) = (7.141)
(13) = (6.698)	
(14) = (6.682 n)	
(15) = (5.001)	

(16) = (4.764)
(17) = (6.766 n)
(18) = (7.4529)
(19) = (7.6486 n)
(20) = (7.3460)
(21) = (7.8104 n)
(22) = (8.4176)
(23) = (8.4241 n)
(24) = (6.139 n)
(25) = (6.658)
(26) = (7.4288 n)
(27) = (7.7241)
(28) = (7.5470 n)
(29) = (5.563)
(30) = (5.929 n)

für $i = -6$

(1) = (7.888 n)
(2) = (7.832)
(5) = $-0''.0813$
(6) = (7.617 n)
(7) = (7.483 n)
(8) = (7.579)
(9) = (8.130 n)
(10) = (8.051)
(11) = (8.5482)
(12) = (8.8672 n)
(21) = (7.773 n)
(22) = (8.385)
(23) = (8.394 n)
(24) = (5.986 n)

für $i = 6$

(1) = (8.2164)
(2) = (8.4563 n)
(5) = (8.4847 n)
(11) = (7.616 n)
(12) = (7.254)

für $i = -7$

(1) = (7.765 n)
(2) = (7.683)
(5) = $-0''.0453$
(6) = (7.622 n)
(7) = (7.401 n)
(8) = (7.446)

für $i = 7$

(1) = (8.0140)
(2) = (8.2832 n)
(5) = (8.2460 n)

$(9) = (8.017\,n)$
$(10) = (7.953)$
$(11) = (8.3895)$ $(11) = (7.508\,n)$
$(12) = (8.7099\,n)$ $(12) = (7.269)$
$(21) = (7.698\,n)$
$(22) = (8.311)$
$(23) = (8.324\,n)$
$(24) = (5.818\,n)$
$(25) = (6.765)$
$(26) = (7.546\,n)$
$(27) = (7.850)$
$(28) = (7.680\,n)$
$(29) = (5.43)$
$(30) = (5.77\,n)$

Ich habe diese Grössen einzeln angeführt, damit man erkennen könne, welche Glieder ich aufgenommen, und welche ich übergangen habe. Die wichtigeren derselben habe ich zweimal, die unwichtigen aber nur einmal gerechnet.

Zur Ermittelung des Grades der Genauigkeit, die in den Coefficienten der verschiedenen Abtheilungen erforderlich ist, dienten die folgenden, vorher berechneten Werthe:

$$1 - \frac{n'}{n} = \mu = 0.59731$$
$$2\mu = 1.1946$$
$$3\mu = 1.7919$$
$$4\mu = 2.3893$$
$$5\mu = 2.9866$$
$$6\mu = 3.5839$$
$$7\mu = 4.1812$$

welche die Integrationsdivisoren geben.

105.

Zieht man nun die im vor. Art. berechneten Coefficienten nach den Angaben des Art. 35 zusammen, so bekommt man das folgende Resultat, welches in tabellarischer Form zusammen gestellt ist:

$$a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$$

g, Γ	sin	cos
−3,1	+0″002	+0″003
−2,1	+0.063	−0.049
−1,1	−0.370	−0.264
0,1	+0.059	−0.069
1,1	−0.395	+0.089
2,1	−0.009	+0.018
−3,2	+0.009	−0.002
−2,2	−0.0239	−0.1010
−1,2	−0.446	+0.404
0,2	−0.0791	−0.0545
1,2	−0.001	+0.250
2,2	+0.006	+0.010
−3,3	+0.0050	−0.0159
−2,3	−0.147	+0.034
−1,3	+0.1915	+0.3297
0,3	−0.055	+0.071
1,3	+0.146	+0.031
2,3	+0.010	+0.001
−3,4	−0.025	−0.007
−2,4	+0.003	+0.131
−1,4	+0.216	−0.069
0,4	+0.052	+0.051
1,4	+0.037	−0.079
2,4	+0.004	−0.006

g, Γ	sin	cos
−4,5	−0″00266	−0″00274
−3,5	−0.01280	+0.02455
−2,5	+0.09701	+0.01703
−1,5	−0.0099	−0.1282
0,5	+0.044	−0.032
1,5	−0.039	−0.031
2,5	−0.004	−0.004
−3,6	+0.020	+0.016
−2,6	+0.029	−0.069
−1,6	−0.070	−0.011
0,6	−0.017	−0.035
1,6	−0.022	+0.021
2,6	−0.004	+0.001
−4,7	+0.002	+0.005
−3,7	+0.0168	−0.0138
−2,7	−0.043	−0.029
−1,7	−0.015	+0.034
0,7	−0.025	+0.007
1,7	+0.009	+0.015
2,7	0.000	+0.003

Der Factor C des Art. 34 erhält den Werth

$$\begin{aligned} C = \; & 2\,(9.6985)\sin(\gamma-g) \\ & +2\,(8.0798)\sin(\gamma-2g) \\ & +2\,(8.5576\,n)\sin\gamma \\ & +2\,(6.6383)\sin(\gamma-3g) \\ & +2\,(5.2696)\sin(\gamma-4g) \\ & +2\,(4.065\,n)\sin(\gamma-2g) \end{aligned}$$

und die Coefficienten der Artt. 28 und 33 haben die folgenden Werthe:

$$\eta^{(2)} = (8.3813) \qquad \theta^{(2)} = (4.366\,n)$$
$$\eta^{(3)} = (6.939)$$
$$\eta^{(4)} = (5.571)$$
$$\eta^{(0)} = (8.8590\,n)$$

wo wieder die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind. Die vorstehenden Glieder sind zwar vollständig angeführt, aber man braucht viele davon ihrer Kleinheit wegen im gegenwärtigen Falle nicht.

106.

Die Multiplication und die Integration gab nun das in folgender Tafel zusammengestellte Resultat:

$\gamma,\ g, \Gamma$	sin	cos
0, −3, 1	−0″001	+0″001
−1, −2, 1	+0.001	−0.002
−2, −1, 1	−0.003	+0.001
1, −4, 1	+0.001	0.000
0, −2, 1	+0.010	+0.007
−1, −1, 1	−0.112	+0.037
−2, 0, 1	−0.007	−0.005
1, −3, 1	+0.011	−0.011
0, −1, 1	+0.001	+0.001
−1, 0, 1	−0.312	−0.217
−2, 1, 1	0.000	−0.001
1, −2, 1	−0.133	−0.093
0, 0, 1	−0.001	+0.022
−1, 1, 1	+0.025	−0.025
−2, 2, 1	−0.002	0.000
1, −1, 1	+0.095	−0.059
2, −2, 1	−0.003	−0.002
0, 1, 1	0.000	+0.002
−1, 2, 1	−0.076	+0.017
1, 0, 1	+0.334	−0.079
2, −1, 1	+0.002	0.000
0, 2, 1	+0.005	−0.001
−1, 3, 1	−0.002	+0.003
1, 1, 1	−0.006	−0.004
2, 0, 1	+0.008	−0.002
0, −3, 2	+0.001	+0.002
−1, −2, 2	−0.007	−0.003
−2, −1, 2	0.000	−0.008
1, −4, 2	+0.001	−0.001
0, −2, 2	+0.020	−0.018
−1, −1, 2	+0.022	−0.334
−2, 0, 2	−0.004	+0.004
1, −3, 2	−0.010	−0.025
0, −1, 2	−0.011	+0.010
−1, 0, 2	−0.184	+0.170
1, −2, 2	−0.277	+0.254
0, 0, 2	+0″013	−0″004
−1, 1, 2	−0.020	−0.014
−2, 2, 2	0.000	+0.001
1, −1, 2	+0.120	+0.200
2, −2, 2	−0.007	+0.006
0, 1, 2	+0.001	+0.001
−1, 2, 2	−0.001	+0.039
1, 0, 2	−0.002	−0.107
2, −1, 2	+0.003	+0.005
0, −3, 3	+0.004	−0.001
−1, −2, 3	−0.037	+0.044
−2, −1, 3	−0.002	0.000
1, −4, 3	0.000	−0.003
0, −2, 3	−0.032	−0.060
−1, −1, 3	−0.101	+0.006
−2, 0, 3	+0.001	+0.002
1, −3, 3	−0.059	+0.018
0, −1, 3	+0.004	+0.002
−1, 0, 3	+0.054	+0.091
1, −2, 3	+0.482	+0.790
2, −3, 3	−0.001	0.000
0, 0, 3	−0.001	−0.006
−1, 1, 3	−0.011	+0.014
1, −1, 3	+0.043	−0.030
2, −2, 3	+0.012	+0.019
0, 1, 3	+0.001	−0.001
−1, 2, 3	+0.019	+0.004
1, 0, 3	−0.043	−0.007
2, −1, 3	+0.001	−0.001
0, −3, 4	−0.001	−0.008
−1, −2, 4	−0.032	−0.021
−2, −1, 4	0.000	+0.001
1, −4, 4	−0.008	−0.001
0, −2, 4	+0.022	−0.005
−1, −1, 4	−0.005	+0.049
−2, 0, 4	+0.001	0.000
1, −3, 4	+0.008	+0.106

$\gamma,\ g, \Gamma$	sin	cos
0, −1,4	+ 0″001	− 0″003
−1, 0,4	+ 0.044	− 0.015
1, −2,4	− 0.279	+ 0.099
2, −3,4	0.000	+ 0.003
0, 0,4	− 0.002	0.000
−1, 1,4	+ 0.008	+ 0.008
1, −1,4	− 0.013	− 0.019
2, −2,4	− 0.007	+ 0.002
0, 1,4	− 0.001	− 0.001
−1, 2,4	+ 0.004	− 0.009
1, 0,4	− 0.007	+ 0.017
0, −1,5	0.000	− 0.001
−1, −3,5	+ 0.065	+ 0.168
1, −5,5	− 0.001	− 0.001
0, −3,5	− 0.268	− 0.045
−1, −2,5	− 0.010	+ 0.013
−2, −1,5	+ 0.001	0.000
1, −4,5	− 0.005	+ 0.012
0, −2,5	0.000	− 0.006
−1, −1,5	+ 0.025	+ 0.007
1, −3,5	+ 3.635	+ 0.452
0, −1,5	− 0.001	0.000
−1, 0,5	− 0.002	− 0.021
1, −2,5	+ 0.008	+ 0.066
2, −3,5	+ 0.087	+ 0.011
0, 0,5	− 0.001	+ 0.002
−1, 1,5	+ 0.006	− 0.004
1, −1,5	− 0.011	+ 0.006
2, −2,5	0.000	+ 0.002
3, −3,5	+ 0.003	0.000
0, 1,5	0.000	0.000
−1, 2,5	− 0.004	− 0.003
1, 0,5	+ 0.007	+ 0.005

$\gamma,\ g, \Gamma$	sin	cos
0, −3,6	+ 0″002	− 0″004
−1, −2,6	+ 0.006	+ 0.007
1, −4,6	+ 0.025	+ 0.017
0, −2,6	− 0.002	0.000
−1, −1,6	+ 0.007	− 0.013
1, −3,6	− 0.022	+ 0.060
2, −4,6	+ 0.001	0.000
0, −1,6	0.000	+ 0.001
−1, 0,6	− 0.010	− 0.001
1, −2,6	+ 0.023	+ 0.002
2, −3,6	− 0.001	+ 0.001
0, 0,6	+ 0.001	0.000
−1, 1,6	− 0.002	− 0.004
1, −1,6	+ 0.002	+ 0.007
2, −2,6	+ 0.001	0.000
0, −4,7	+ 0.003	− 0.003
−1, −3,7	0.000	+ 0.003
1, −5,7	+ 0.001	+ 0.003
0, −3,7	− 0.001	− 0.001
−1, −2,7	+ 0.005	− 0.003
1, −4,7	− 0.043	+ 0.041
0, −2,7	0.000	+ 0.001
−1, −1,7	− 0.007	− 0.005
1, −3,7	+ 0.019	+ 0.012
2, −4,7	− 0.001	+ 0.001
0, −1,7	0.000	0.000
−1, 0,7	− 0.002	+ 0.004
1, −2,7	+ 0.003	− 0.008
0, 0,7	0.000	0.000
−1, 1,7	− 0.003	+ 0.001
1, −1,7	+ 0.004	− 0.001

Die Summen der Coefficienten einer jeden Abtheilung dieser Tafel sind die Coefficienten von $u : \cos i$. Ehe ich dieselben anführe, will ich als Beispiel der Rechnung, die die vorstehende Tafel gegeben hat, die der Abtheilung, welche die grössten Coefficienten enthält, ausführlich und genau in der Form, wie ich sie geführt habe, angeben. Es ist dies die Sinusabtheilung für 5Γ.

Die Logarithmen der betreffenden Integrationsfactoren sind die folgenden,

−5,5	−4,5	−3,5	−2,5	−1,5	0,5	1,5	2,5
9.6932n,	9.9945n,	1.8719n,	0.0059,	9.7018,	9.5248,	9.3993,	9.3022

die gleichwie die Coefficienten von C auf den unteren Rand eines Blattes Papier geschrieben worden waren. Die vollständige Rechnung steht nun so:

sin

	−4,5	−3,5	−2,5	−1,5	0,5	1,5
γ, g	7.425n	8.1072n	8.9868	7.996n	8.643	8.591n
1, −1	7.124n	7.8057n	8.6853	7.695n	8.342	8 290n
1, −2		6.187n	7.066	6.075n	6.723	6.671n
1, 0	5.98	6.665	7.544n	6.554	7.201n	7.149
1, −3					5.281	
	−1, −3,5	−1, −2,5	−1, −1,5	−1, 0,5	−1, 1,5	−1, 2,5
	−0.00133	−0.0064	+0.0485	−0.0049	+0.0220	−0.0195
			− 2	+ 12	− 1	+ 5
	+ 46	− 35	+ 4	− 16	+ 14	
	−0.00087	−0.0099	+0.0487	−0.0053	+0.0233	−0.0190
	6.940n	7.996n	8.688	7.724n	8.367	8.279n
	8.812	8.002n	8.390	7.249n	7.766	7.581n
$\eta^{(2)}$	7.193	—	6.77	—	—	—
$\eta^{(0)}$	7.671n	6.86	7.249n	—	—	—
	1, −5,5	1, −4,5	1, −3,5	1, −2,5	1, −1,5	1, 0,5
	+0.0013	+0.0064	−0.04846	+0.0049	−0.0220	+0.0195
	+ 2	− 12	+ 12	− 5	+ 5	
		− 1	− 46	+ 35	− 4	+ 16
			− 2			
	+0.0015	+0.0051	−0.04882	+0.0079	−0.0219	+0.0211
	7.176	7.708	8.6886n	7.898	8.340n	8.324
	6.869n	7.703n	0.5605	7.904	8.042n	7.849
$\eta^{(2)}$	—	—	8.942	—	—	—
$\eta^{(3)}$	—	—	7.500	—	—	—
$\eta^{(0)}$	—	—	9.420n	6.76n	6.90	6.708n
	0, −4,5	0, −3,5	0, −2,5	0, −1,5	0, 0,5	0, 1,5
{	—	−0.005	+0.001	−0.002	—	—
{	—	−0.263	−0.001	+0.001	−0.001	—

Zuerst stehen die Logarithmen der betreff. Coefficienten von $a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$ mit darüber geschriebenen Indices. Hierauf folgen die Logg. der einzelnen Producte derselben mit den Coefficienten von C, deren Indices in der ersten Columne angegeben sind. Es schliessen sich an die Zahlen dieser einzelnen Producte, und zwar zuerst für die Glieder, die $-\gamma$ haben, wie die darüber stehenden Indices anzeigen. Hierauf kommen die Summen dieser Producte, die Logarithmen derselben und ihrer Producte mit den Integrationsfactoren, nebst den Producten dieser letzteren mit den $\eta^{(2)}$ und $\eta^{(1)}$. Es folgt darauf dasselbe für die Glieder, die $+\gamma$ in ihren Argumenten haben, wie durch die Ueberschriften angezeigt wird. Endlich enthält die letzte Abtheilung die Zahlen der Producte der Coefficienten der Integrale mit $\eta^{(0)}$, woraus die Glieder hervorgehen, in deren Argumenten γ nicht vorhanden ist. Nimmt man die Zahlen aller vorstehenden Integralcoefficienten, so wird man sie mit den betr. Zahlen der vorstehenden Tafel übereinstimmend finden. Es ist z. B. die zum log = 8.812 gehörige Zahl der Coefficient von $-1,-3,5$, die zum log = 7.193 gehörige der von $-2,3,5$, u. s. w., die zum log = 0.5605 gehörige der von $1,-3,5$, die Zahl des darunter stehenden log = 8.942 der Coefficient von $2,-3,5$, die des log = 7.500 der von $3,-3,5$, u. s. w.

107.

Man erhält jetzt aus der Tafel des vor. Art. durch die erklärten Additionen

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & -0''098 \sin(-g-g') & +0''028 \cos(-g-g') \\
& -0.444 \sin(-g') & -0.310 \cos(-g') \\
& +0.114 \sin(g-g') & -0.064 \cos(g-g') \\
& +0.260 \sin(2g-g') & -0.060 \cos(2g-g') \\
& +0.005 \sin(3g-g') & -0.004 \cos(3g-g') \\
& -0.005 \sin(-g-2g') & -0.010 \cos(-g-2g') \\
& +0.028 \sin(-2g') & -0.373 \cos(-2g') \\
& -0.472 \sin(g-2g') & +0.434 \cos(g-2g') \\
& +0.106 \sin(2g-2g') & +0.189 \cos(2g-2g') \\
& +0.001 \sin(3g-2g') & -0.062 \cos(3g-2g')
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
-0.035 \sin(-3g') & +0.040 \cos(-3g') \\
-0''191 \sin(g-3g') & -0''034 \cos(g-3g') \\
+0.539 \sin(2g-3g') & +0.883 \cos(2g-3g') \\
+0.043 \sin(3g-3g') & -0.003 \cos(3g-3g') \\
-0.022 \sin(4g-3g') & -0.005 \cos(4g-3g') \\
-0.041 \sin(g-4g') & -0.029 \cos(g-4g') \\
+0.026 \sin(2g-4g') & +0.150 \cos(2g-4g') \\
-0.234 \sin(3g-4g') & +0.084 \cos(3g-4g') \\
-0.014 \sin(4g-4g') & -0.009 \cos(4g-4g') \\
-0.004 \sin(5g-4g') & +0.007 \cos(5g-4g') \\
+0.064 \sin(g-5g') & +0.166 \cos(g-5g') \\
-0.282 \sin(2g-5g') & -0.020 \cos(2g-5g') \\
+3.660 \sin(3g-5g') & +0.453 \cos(3g-5g') \\
+0.092 \sin(4g-5g') & +0.056 \cos(4g-5g') \\
-0.003 \sin(5g-5g') & +0.006 \cos(5g-5g') \\
+0.033 \sin(3g-6g') & +0.020 \cos(3g-6g') \\
-0.016 \sin(4g-6g') & +0.047 \cos(4g-6g') \\
+0.012 \sin(5g-6g') & +0.003 \cos(5g-6g') \\
-0.039 \sin(4g-7g') & +0.037 \cos(4g-7g') \\
+0.011 \sin(5g-7g') & +0.009 \cos(5g-7g')
\end{array}
$$

wo indess die ganz kleinen Glieder weggelassen worden sind. Die Vergleichung dieses Resultats mit demjenigen, welches ich in meiner Berliner Preisschrift erhalten habe, giebt ein befriedigendes Resultat. Die kleinen Unterschiede, die in einigen Gliedern vorhanden sind, erreichen nicht den Betrag von 0''03.

Man braucht, um diese Vergleichung auszuführen, nicht aus den in der genannten Schrift mit p und q bezeichneten Grössen u zu berechnen, sondern kann folgenden kürzeren Weg einschlagen. Man findet aus der genannten Preisschrift leicht, dass

$$\frac{u}{\cos i} = q\frac{r}{a}\sin(f+\Pi+180^0) - p\frac{r}{a}\cos(f+\Pi+180^0)$$

indem dort allenthalben der aufsteigende Knoten der Saturnbahn auf der Jupiterbahn zu Grunde gelegt ist, während hier der aufsteigende Knoten der letzteren auf jener angewandt worden ist. Statt des vorstehenden Ausdrucks kann man auch setzen

$$\frac{u}{\cos i} = P\frac{r}{a}\sin f + Q\frac{r}{a}\cos f$$

und hieraus folgen die Gleichungen

$$P = q\cos(180^0+\Pi) + p\sin(180^0+\Pi)$$
$$Q = q\sin(180^0+\Pi) - p\cos(180^0+\Pi)$$

die abgesondert, sowohl auf die Sinus- wie auf die Cosinus-coefficienten von p und q angewandt werden müssen. Setzt man aber

$$P = \Sigma(a,c)_m \cos mt + \Sigma(a,s)_m \sin mt$$
$$Q = \Sigma(b,s)_m \sin mt + \Sigma(b,c)_m \cos mt$$

so findet man durch die Analyse des Art. 59

$$(a,c)_m = (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{-(-1,s)_m + (1,s)_m\}$$

$$(b,s)_m = (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(-1,s)_m + (1,s)_m\}$$

$$(a,s)_m = (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{(-1,c)_m - (1,c)_m\}$$

$$(b,c)_m = (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(-1,c)_m + (1,c)_m\}$$

wo $(-1,s)_m$ und $(1,s)_m$ die Coefficienten der Tafel des vor. Art. bedeuten, die mit einem Sinus multiplicirt sind, und in dem Argument, dessen Coefficienten verglichen werden sollen, bez. $-\gamma$ und $+\gamma$ haben. Die Bezeichnungen $(-1,c)_m$ und $(1,c)_m$ haben für die Coefficienten der Cosinus dieselbe Bedeutung. Es ist hierbei noch zu erwägen, dass in der Preisschrift die Saturnmasse $= \frac{1}{3512}$ angenommen, während sie hier $= \frac{1}{3500}$ gesetzt worden ist. Die Störungsglieder jener Abhandlung müssen daher, um sie mit den hier berechneten vergleichen zu können, mit

$$1.00343$$

multiplicirt werden.

Um die Vergleichung anschaulicher zu machen, werde ich sie hier für die Coefficienten der beiden grössten Glieder durchführen. Aus S. 78 und 79 der Preisschrift entnehme ich zuerst die folgenden Glieder

$$p = +0''.858\sin(-2g+3(g-g')) - 0''.117\cos(-2g+3(g-g'))$$
$$q = -0.091\sin(-2g+3(g-g')) - 0.973\cos(-2g+3(g-g'))$$

Hiermit und mit dem Werthe

$$180^0 + \Pi = 245^0 1' 25''$$

des Art. 102 ergeben sich

$$(a,c)_m = \begin{cases}+0''517\\+0.002\end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases}-0''740\\-0.002\end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases}+0.444\\+0.001\end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases}+0.833\\+0.003\end{cases}$$

wo die unten stehenden Zahlen die Verbesserungen wegen der Masse sind. Die zur Vergleichung dienenden Glieder der Tafel sind nun die, deren Argumente mit $(\mp 1, -2{,}3)$ bezeichnet sind, und geben

$$(-1,s)_m = -0''037, \qquad (-1,c)_m = +0''044$$
$$(1,s)_m = +0.482, \qquad (1,c)_m = +0.790$$

$$(a,c)_m = \begin{cases}+0''519\\+0.001\end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases}-0''746\\-0.001\end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases}+0.445\\+0.001\end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases}+0.834\\+0.001\end{cases}$$

wo die untenstehenden Zahlen die Wirkungen der Factoren $\frac{5}{8}e^2$ und $\frac{3}{8}e^2$ der obigen Formeln ausdrücken. Die Unterschiede sind hier

$$0''001, \qquad 0''005$$
$$0.001, \qquad 0.001$$

Ferner entnehme ich dem a. O.

$$p = +1''794 \sin(-3g+5(g-g')) - 2''960 \cos(-3g+5(g-g'))$$
$$q = -3.220 \sin(-3g+5(g-g')) - 2.036 \cos(-3g+5(g-g'))$$

woraus

$$(a,c)_m = \begin{cases}+3''545\\+0.012\end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases}-0''267\\-0.001\end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases}+3.677\\+0.012\end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases}+0.596\\+0.002\end{cases}$$

sich ergeben. Es sind hier die Coefficienten der Tafel, die zu den Argumenten $(\mp 1, +3{,}5)$ gehören, anzuwenden, und diese geben

$$(-1,s)_m = +0''065, \qquad (-1,c)_m = +0''168$$
$$(1,s)_m = +3.635, \qquad (1,c)_m = +0.452$$

$$(a,c)_m = \begin{cases}+3''575\\+0.005\end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases}-0''284\\0\end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases}+3.700\\+0.003\end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases}+0.620\\0\end{cases}$$

Die Unterschiede werden hier

$$\begin{array}{ll} 0''.018\,, & 0''.016 \\ 0.014\,, & 0.022 \end{array}$$

fast die grössten, die überhaupt vorkommen.

108.

Es sind noch die Glieder, welche $i = 0$ entsprechen, zu berechnen. Die Ausdrücke des Art. 52 geben zuerst

$$\begin{aligned}
M &= -0''.31763 \sin \Pi + (7.8981) \sin \Pi' + (7.5665) \sin (2\Pi - \Pi') \\
&\qquad + (7.0276) \sin (\Pi - 2\Pi') \\
N &= +0.31042 \cos \Pi - (7.5665) \cos (2\Pi - \Pi') - (7.0276) \cos (\Pi - 2\Pi') \\
(0,c) &= +(8.8315) \sin \Pi - (8.6351) \sin \Pi' \\
(2,s) &= -(8.1072) \cos \Pi + (8.1188) \cos (2\Pi - \Pi') \\
(2,c) &= -(8.1072) \sin \Pi + (8.1188) \sin (2\Pi - \Pi')
\end{aligned}$$

woraus man nach den Multiplicationen

$$M = -0''.28329\,, \qquad N = +0''.12829$$

$$(0,c) = +0.036$$

$$(2,s) = +0.007\,, \qquad (2,c) = -0.015$$

erhält. Es folgt hiermit

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad -0''.00927\, nt \\
& -0''.28329\, nt \sin g + 0.12829\, nt \cos g \\
& -0.00682\, nt \sin 2g + 0.00309\, nt \cos 2g \\
& -0.00025\, nt \sin 3g + 0.00011\, nt \cos 3g \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad +0''.036 \\
& +0''.007 \sin 2g - 0.015 \cos 2g
\end{aligned}$$

welche Glieder dem Ausdruck des vor. Art. hinzuzufügen sind.

Zur Vergleichung dieser Säcularänderungen mit denen der Preisschrift entnehme ich aus letzterer

$$p = +0''.31024\, nt\,, \qquad q = +0''.00346\, nt$$

und damit durch die Ausdrücke des vor. Art.

$$(a,c)_m = \begin{cases} -0''.28266 \\ -0.00098 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0''.12785 \\ +0.00043 \end{cases}$$

Hingegen giebt der obige Ausdruck für $\frac{u}{\cos i}$

$$(a,c)_m = \begin{cases} -0''.28329 \\ -0.00041 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0''.12829 \\ +0.00011 \end{cases}$$

und die Unterschiede werden

$$0''.00006\,, \qquad 0''.00012$$

die ganz befriedigend sind. Die in dem obigen Ausdrucke mit der Zeit nicht multiplicirten Glieder können selbstverständlich nicht mit den analogen der Preisschrift verglichen werden, da ich dort den betreffenden Integralen keine Constanten hinzugefügt habe.

---

§. 8. Berechnung der Störungen des Jupiters, die vom Uranus bewirkt werden.

109.

Die Elemente des Uranus, die ich angewandt habe, sind die folgenden:

Uranus

$$m' = \frac{1}{20470}$$
$$n' = 15425''.030$$
$$e' = 0.0467100$$
$$\pi' = 166^0\,50'\,36''$$
$$i' = 0\;\;46\;\;28.4$$
$$\theta' = 73\;\;\;\;2\;\;16$$
$$\log a' = 1.2829207$$

Durch die Gleichungen des Art. 1 ergaben sich hieraus die Winkel

$$J = 0^0\,41'\,55''.0$$

$$\Phi = 28^0\,23'\,14'', \qquad \Psi = 53^0\,46'\,30''$$

$$\Pi = 244\;\;18\;\;39\;, \qquad \Pi' = 40\;\;\;1\;\;50$$

welchen ich sogleich die Werthe der Vielfachen von μ hinzufüge:

$$\mu = 0.858818$$
$$2\mu = 1.717636$$
$$3\mu = 2.576454$$
$$4\mu = 3.435272$$
$$5\mu = 4.294090$$
$$6\mu = 5.152908$$
$$7\mu = 6.011726$$

110.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha = 9.4333164$$

ergeben sich die folgenden Grössen:

$$(0)A_0 = 1.01919 \qquad (1)A_0 = 0.04007$$
$$(0)A_1 = 0.00392 \qquad (1)A_1 = 0.01215$$
$$(0)A_2 = 0.02847 \qquad (1)A_2 = 0.05881$$
$$(0)A_3 = 0.00645 \qquad (1)A_3 = 0.01979$$
$$(0)A_4 = 0.00153 \qquad (1)A_4 = 0.00623$$
$$(0)A_5 = 0.00037 \qquad (1)A_5 = 0.00190$$
$$(0)A_6 = 0.00009 \qquad (1)A_6 = 0.00056$$

$$(2)A_0 = 0.04720 \qquad (3)A_0 = 0.0237$$
$$(2)A_1 = 0.02630 \qquad (3)A_1 = 0.0350$$
$$(2)A_2 = 0.06668 \qquad (3)A_2 = 0.0261$$
$$(2)A_3 = 0.04188 \qquad (3)A_3 = 0.0519$$
$$(2)A_4 = 0.01937 \qquad (3)A_4 = 0.0123$$
$$(2)A_5 = 0.00778 \qquad (3)A_5 = 0.0246$$
$$(2)A_6 = 0.00288 \qquad (3)A_6 = 0.0119$$

$$(4)A_0 = 0.0367$$
$$(4)A_1 = 0.0303$$
$$(4)A_2 = 0.0394$$

$$(0)B_0 = 0.0506 \qquad (1)B_0 = 0.1139$$
$$(0)B_1 = 0.1273 \qquad (1)B_1 = 0.1654$$
$$(0)B_2 = 0.0428 \qquad (1)B_2 = 0.0975$$
$$(0)B_3 = 0.0135 \qquad (1)B_3 = 0.0440$$
$$(0)B_4 = 0.0041 \qquad (1)B_4 = 0.0175$$

$(2)B_0 = 0.1701$	$(0)C_0 = 0.1168$
$(2)B_1 = 0.1314$	$(0)C_1 = 0.0698$
$(2)B_2 = 0.1505$	$(0)C_2 = 0.0316$
$(2)B_3 = 0.1077$	

in welchen das zweite Glied der Störungsfunction schon berücksichtigt ist.

111.

Die Ausdrücke der Artt. 10 und 11 geben hiermit

für $i = -1$		für $i = 1$	
$(1) = 0''.0107$,	$(1)' = 0''.0333$	$(1) = 0''.0107$,	$(1)' = 0''.0333$
$(2) = (6.592n)$,	$(2)' = (6.955n)$	$(2) = (6.684)$,	$(2)' = (6.958)$
$(3) = (7.407n)$,	$(3)' = (7.915n)$	$(3) = (6.752n)$,	$(3)' = (7.274n)$
$(4) = (9.1308)$,	$(4)' = (8.2143)$	$(4) = (7.531n)$,	$(4)' = (7.813n)$
$(9) = (5.868)$,	$(9)' = (6.382)$	$(9) = (5.229n)$,	$(9)' = (5.732n)$
$(10) = (6.592n)$,	$(10)' = (6.955n)$	$(10) = (6.232n)$,	$(10)' = (6.537n)$
$(11) = (5.841)$,	$(11)' = (6.355)$	$(11) = (5.024)$,	$(11)' = (5.533)$

für $i = -2$		für $i = 2$	
$(1) = 0''.0771$,	$(1)' = 0''.1591$	$(1) = 0''.0771$,	$(1)' = 0''.1591$
$(2) = (5.918n)$,	$(2)' = (6.452n)$	$(2) = (6.537)$,	$(2)' = (7.012)$
$(3) = (8.3564n)$,	$(3)' = (8.6764n)$	$(3) = (7.860)$,	$(3)' = (8.1593)$
$(4) = (7.484)$,	$(4)' = (7.978)$	$(4) = (7.203n)$,	$(4)' = (7.443n)$
$(9) = (6.971)$,	$(9)' = (7.302)$	$(9) = (6.540)$,	$(9)' = (6.838)$
$(10) = (6.574n)$,	$(10)' = (7.079n)$	$(10) = (6.066n)$,	$(10)' = (6.862n)$
$(11) = (7.813)$,	$(11)' = (7.078)$	$(11) = (4.958)$,	$(11)' = (5.470n)$

für $i = -3$		für $i = 3$	
$(1) = 0''.0171$,	$(1)' = 0''.0527$	$(1) = 0''.0171$,	$(1)' = 0''.0527$
$(2) = (7.074)$,	$(2)' = (7.372)$	$(2) = (6.211)$,	$(2)' = (6.825)$
$(3) = (7.886n)$,	$(3)' = (8.3741n)$	$(3) = (7.396)$,	$(3)' = (7.874)$
$(4) = (8.4095)$,	$(4)' = (8.7287)$	$(4) = (6.759n)$,	$(4)' = (7.356n)$
$(9) = (6.774)$,	$(9)' = (7.268)$	$(9) = (6.173)$,	$(9)' = (6.649)$
$(10) = (7.575n)$,	$(10)' = (7.901n)$	$(10) = (5.741n)$,	$(10)' = (6.343n)$
$(11) = (6.501)$,	$(11)' = (7.003)$	$(11) = (4.650)$,	$(11)' = (5.396)$

für $i = -4$		für $i = 4$	
$(1) = 0''.0042$,	$(1)' = 0''.0162$	$(1) = 0''.0042$,	$(1)' = 0''.0162$
$(2) = (6.765)$,	$(2)' = (7.245)$	$(2) = (5.830)$,	$(2)' = (6.535)$
$(3) = (7.384\,n)$,	$(3)' = (7.997\,n)$	$(3) = (6.897)$,	$(3)' = (7.503)$
$(4) = (7.919)$,	$(4)' = (8.407)$	$(4) = (6.282\,n)$,	$(4)' = (6.975\,n)$
$(9) = (6.441)$,	$(9)' = (7.053)$		
$(10) = (7.266\,n)$,	$(10)' = (7.751\,n)$		
$(11) = (7.468)$,	$(11)' = (7.791)$		

von welchen Grössen die meisten so klein sind, dass sie auch hätten weggelassen werden können. Durch die Ausdrücke des Art. 29 ergeben sich hiemit die Coefficienten, die die folgende Tafel enthält.

	$a\Omega$		$ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$	
g, Γ	cos	− sin	cos	− sin
−2,1	$-0''.0006$	$0''.0000$	$-0''.0013$	$0''.0000$
−1,1	+0.1375	+0.0011	+0.0237	+0.0034
0,1	−0.0196	−0.0086	−0.0610	−0.0267
1,1	−0.0018	−0.0023	−0.0026	−0.0041
2,1	−0.0001	−0.0001	−0.0002	−0.0004
−2,2	+0.0074	+0.0009	+0.0036	+0.0020
−1,2	−0.0178	−0.0183	−0.0401	−0.0395
0,2	+0.1021	+0.1153	+0.2106	+0.2376
1,2	+0.0053	+0.0069	+0.0104	+0.0134
2,2	+0.0003	+0.0004	+0.0006	+0.0008
−2,3	−0.0030	−0.0035	−0.0067	−0.0078
−1,3	+0.0193	+0.0266	+0.0424	+0.0627
0,3	−0.0093	−0.0316	−0.0296	−0.0998
1,3	−0.0006	−0.0030	−0.0019	−0.0109
2,3	0.0000	−0.0002	−0.0001	−0.0006
−2,4	+0.0023	+0.0043	+0.0057	+0.0111
−1,4	−0.0022	−0.0104	−0.0063	−0.0343
0,4	−0.0012	+0.0076	−0.0045	+0.0319
1,4	−0.0002	+0.0010	−0.0009	+0.0040

112.

Die Factoren A und B des Art. 27 bekommen die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned} A = & -3 \\ & +2\,(0.3015)\cos(\gamma-g) \\ & +2\,(8.3819)\cos(\gamma-2g) \\ & -2\,(9.0813)\cos\gamma \\ & +2\,(6.763)\;\;\cos(\gamma-3g) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B = & -2\,(0.0005)\sin(\gamma-g) \\ & -2\,(8.3818)\sin(\gamma-2g) \\ & -2\,(8.3826)\sin\gamma \\ & -2\,(6.939)\;\sin(\gamma-3g) \end{aligned}$$

Die mechanische Multiplication dieser Factoren mit den Angaben der vorhergehenden Tafel, und die darauf folgende Integration gab nun den nachstehenden Werth von **W**:

W und $\overline{W}$

$\gamma,\ g, \Gamma$	cos	− sin	$\gamma,\ g, \Gamma$	sin	− sin
0, −2, 1	+ 0″.002	0″.000	0, 0, 2	− 0″.356	− 0″.403
−1, −1, 1	− 0.013	+ 0.001	−1, 1, 2	+ 0.073	+ 0.082
−2, 0, 1	− 0.001	0.000	1, −1, 2	+ 0.865	+ 0.978
1, −3, 1	0.000	0.000	2, −2, 2	+ 0.006	+ 0.006
	− 0.012	+ 0.001		+ 0.588	+ 0.663
0, −1, 1	0	0	0, 1, 2	− 0.018	− 0.023
−1, 0, 1	− 0.0231	− 0.0021	−1, 2, 2	+ 0.006	+ 0.007
−2, 1, 1	+ 0.0005	+ 0.0001	1, 0, 2	+ 0.013	+ 0.019
1, −2, 1	− 0.0191	− 0.0024	2, −1, 2	+ 0.021	+ 0.024
	− 0.0417	− 0.0044		+ 0.022	+ 0.027
0, 0, 1	+ 0.068	+ 0.030	0, −2, 3	+ 0.016	+ 0.018
−1, 1, 1	+ 0.012	+ 0.005	−1, −1, 3	− 0.004	− 0.005
1, −1, 1	+ 0.708	+ 0.310	1, −3, 3	+ 0.026	+ 0.028
	+ 0.788	+ 0.345		+ 0.038	+ 0.041
0, 1, 1	+ 0.006	+ 0.006	0, −1, 3	− 0.074	− 0.101
−1, 2, 1	− 0.001	− 0.001	−1, 0, 3	+ 0.015	+ 0.023
1, 0, 1	− 0.010	− 0.015	1, −2, 3	+ 0.206	+ 0.286
2, −1, 1	+ 0.017	+ 0.008			
				+ 0.147	+ 0.208
	+ 0.012	− 0.002			
			0, 0, 3	+ 0.033	+ 0.111
0, −2, 2	0	0	−1, 1, 3	− 0.007	− 0.025
−1, −1, 2	− 0.004	+ 0.002	1, −1, 3	− 0.058	− 0.187
1, −3, 2	− 0.002	− 0.001	2, −2, 3	+ 0.005	+ 0.007
	− 0.003	+ 0.001		− 0.027	− 0.094
0, −1, 2	+ 0.074	+ 0.077	0, 1, 3	+ 0″.002	+ 0.010
−1, 0, 2	− 0.015	− 0.018	−1, 2, 3	− 0.001	− 0.003
−2, 1, 2	+ 0.002	+ 0.002	1, 0, 3	− 0.002	− 0.010
1, −2, 2	+ 0.232	+ 0.230	2, −1, 3	− 0.001	− 0.005
	+ 0.293	+ 0.291		− 0.002	− 0.008

$\gamma,\ g,\Gamma$	cos	− sin	$\gamma,\ g,\Gamma$	cos	− sin
0, −2,4	−0''.010	−0''.018	0, 0,4	+0''.004	−0''.027
−1, −1,4	+0.002	+0.004	−1, 1,4	−0.001	+0.006
1, −3,4	+0.033	+0.062	1, −1,4	−0.006	+0.039
			2, −2,4	0.000	−0.002
	+0.025	+0.048			
				−0.003	+0.016
0, −1,4	+0.008	+0.038			
−1, 0,4	−0.001	−0.010	0, 1,4	+0.001	−0.003
1, −2,4	−0.014	−0.067	−1, 2,4	0.000	+0.001
2, −3,4	0.000	+0.001	1, 0,4	−0.001	+0.003
			2, −1,4	0.000	+0.001
	−0.007	−0.038			
				0.000	+0.002

Die beiden untersten Zahlen einer jeden Abtheilung dieser Tafel sind die Summen aller Zahlen derselben Abtheilung, und folglich die Coefficienten von $\overline{W}$.

Aus den vorstehenden Angaben ergiebt sich nun ohne Mühe

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &+0''.009 \sin(-g-g') &&-0''.001 \cos(-g-g')\\
&+0.295 \sin(-g') &&+0.031 \cos(-g')\\
&+0.918 \sin(g-g') &&+0.402 \cos(g-g')\\
&+0.006 \sin(2g-g') &&-0.001 \cos(2g-g')\\
&+0.011 \sin(-2g') &&-0.004 \cos(-2g')\\
&+0.408 \sin(g-2g') &&+0.406 \cos(g-2g')\\
&+0.342 \sin(2g-2g') &&+0.386 \cos(2g-2g')\\
&+0.008 \sin(3g-2g') &&+0.010 \cos(3g-2g')\\
&+0.066 \sin(g-3g') &&+0.071 \cos(g-3g')\\
&+0.093 \sin(2g-3g') &&+0.132 \cos(2g-3g')\\
&-0.010 \sin(3g-3g') &&-0.038 \cos(3g-3g')\\
&-0.001 \sin(4g-3g') &&-0.002 \cos(4g-3g')\\
&+0.017 \sin(2g-4g') &&+0.033 \cos(2g-4g')\\
&-0.003 \sin(3g-4g') &&-0.016 \cos(3g-4g')\\
&-0.001 \sin(4g-4g') &&+0.005 \cos(4g-4g')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu = &+0''.011 \cos(-g') &&+0''.002 \sin(-g')\\
&-0.405 \cos(g-g') &&+0.178 \sin(g-g')\\
&-0.007 \cos(2g-g') &&+0.001 \sin(2g-g')\\
&-0.002 \cos(-2g') &&+0.006 \sin(-2g')\\
&-0.169 \cos(g-2g') &&+0.170 \sin(g-2g')\\
&-0.234 \cos(2g-2g') &&+0.264 \sin(2g-2g')\\
&-0.008 \cos(3g-2g') &&+0.011 \sin(3g-2g')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-0''.024 \cos(g-3g') &&+0''.029 \sin(g-3g')\\
&-0.064 \cos(2g-3g') &&+0.084 \sin(2g-3g')\\
&+0.008 \cos(3g-3g') &&-0.030 \sin(3g-3g')\\
&-0.014 \cos(2g-4g') &&+0.020 \sin(2g-4g')\\
&+0.003 \cos(3g-4g') &&-0.014 \sin(3g-4g')
\end{aligned}
$$

Die am Ende des Art. 109 gegebene Zusammenstellung der Werthe der Vielfachen von μ zeigt, dass bei dem Argument $g-7g'$ der kleine Integrationsdivisor 0.0117 vorkommt; eine genäherte Berechnung der Coefficienten dieses Arguments hat indess gelehrt, dass sie unmerklich sind.

113.

Den periodischen Breitenstörungen muss einige Aufmerksamkeit geschenkt werden, obgleich sich voraussehen lässt, dass sie unmerklich sind. Durch die Ausdrücke des Art. 18 erhielt ich

für $i=-1$	für $i=1$
$(1) = (5.961)$	$(1) = (6.333)$
$(2) = (5.842)$	$(2) = (6.514n)$
$(5) = (7.2268n)$	$(5) = (7.1538n)$
$(11) = (5.961)$	$(11) = (5.772n)$
$(12) = (6.514n)$	$(12) = (5.121n)$
für $i=-2$	**für $i=2$**
$(1) = (5.855n)$	$(1) = (6.001)$
$(2) = (5.758)$	$(2) = (6.320n)$
$(5) = (7.6274n)$	$(5) = (6.653n)$
$(11) = (6.527)$	$(11) = (5.472n)$
$(12) = (6.391)$	$(12) = (3.932n)$

und hieraus

$$a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$

g,Γ	sin	cos	g,Γ	sin	cos
−2,1	−0″0002	+0″0004	−2,2	+0″0002	+0″0002
−1,1	+0.0013	−0.0011	−1,2	−0.0041	+0.0012
0,1	+0.0001	+0.0004	0,2	−0.0001	−0.0003
1,1	0.0000	−0.0014	1,2	−0.0002	+0.0004

Das grösste Glied, welches hieraus entsteht, ist

$$\frac{u}{\cos i} = -0''008 \sin(g-2g') + 0''002 \cos(g-2g')$$

114.

Es sind noch die Glieder zu berechnen, die von $i = 0$ abhängen. Die Berechnung von K und L werde ich in der Form ausführen, die diesen Grössen im Art. 68 gegeben worden ist, und bekomme zu dem Ende

$$\begin{array}{ll} [1] = (9.5415) & [6]' = (0.4337) \\ [2] = (8.099) & [7] = (0.4338) \\ [3] = (0.4570) & [8] = (0.5033) \\ [4] = (0.4570) & [9] = (9.8748) \\ [5] = (9.0676) & [10] = (0.9411) \\ [6] = (0.0256) & [11] = (0.2329) \end{array}$$

wodurch man

$$K = +0''00227, \qquad L = -0''02181$$

erhält. Aus dem Art. 47 ergeben sich ferner

$$C = -0''037, \qquad (1,c) = +0''010, \qquad (1,s) = -0''001$$

während die übrigen Glieder dieser Gattung ganz unmerklich sind. Der Art. 52 giebt endlich

$$M = +0''00193, \qquad N = -0''00093$$

und hiemit haben wir erhalten:

$$\begin{aligned} n\delta z = & +0''00227\, nt \sin g \quad -0''02185\, nt \cos g \\ & +0.00003\, nt \sin 2g \quad -0.00026\, nt \cos 2g \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad -0.00001\, nt \cos 3g \\ \nu = & -0''00003\, nt \\ & -0.00114\, nt \cos g \quad -0''01090\, nt \sin g \\ & -0.00003\, nt \cos 2g \quad -0.00026\, nt \sin 2g \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad -0.00001\, nt \sin 3g \\ & -0''037 \\ & +0.010 \cos g \quad -0''001 \sin g \\ \frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad +0''00007\, nt \\ & +0''00193\, nt \sin g \quad -0.00093\, nt \cos g \\ & +0.00005\, nt \sin 2g \quad -0.00002\, nt \cos 2g \end{aligned}$$

womit alle vom Uranus bewirkten Störungen gegeben sind.

§. 9. Störungen des Jupiters, die vom Neptun bewirkt werden.

115.

Die angewandten Elemente sind die folgenden:

Neptun.

$$m' = \frac{1}{14446}$$
$$n' = 7864''935$$
$$e' = 0.008490$$
$$\pi' = 42^0 14' 53''$$
$$i' = 1\ 47\ 18.0$$
$$\theta' = 129\ 14\ 32$$
$$\log a' = 1.47794$$

woraus sich

$$J = 0^0 56' 32''6$$
$$\Phi = 256^0 23' 42'', \qquad \Psi = 225^0 35' 33''$$
$$\Pi = 16\ 18\ 11, \qquad \Pi' = 47\ 24\ 48$$
$$\mu = 0.9280$$
$$2\mu = 1.8560$$
$$3\mu = 2.7840$$
etc.

ergeben.

116.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha = 9.23830$$

erhält man

$$(0)A_0 = 1.00762, \quad (1)A_0 = 0.01551, \quad (2)A_0 = 0.01659$$
$$(0)A_1 = 0.00099, \quad (1)A_1 = 0.00301, \quad (2)A_1 = 0.00622$$
$$(0)A_2 = 0.01138, \quad (1)A_2 = 0.02306, \quad (2)A_2 = 0.02425$$
$$(3)A_0 = 0.00337, \quad (0)B_1 = 0.04759$$
$$(3)A_1 = 0.00702$$

wo das zweite Glied der Störungsfunction schon berücksichtigt ist.

147.

Bei der Untersuchung der periodischen Längenstörungen sind vor Allem die Glieder zu beachten, die den kleinen Integrationsdivisor

$$1-\mu = 0.0720$$

bekommen. Es sind dies die Glieder mit den Argumenten $g-g'$, $-g'$, $-g-g'$, von welchen aber wenigstens vorläufig das letztgenannte übergangen werden kann, da es einer höheren Ordnung angehört. Es ergaben sich zu dem Ende

für $i = -1$

$$(1) = (7.389)\,, \qquad (1)' = (7.8716)$$
$$(3)' = (7.2589\,n)$$
$$(4)' = (6.999)$$

und hiemit nach und nach

	$a\Omega$		$ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$	
g, Γ	cos	sin	cos	sin
0, 1	+0″.0042	+0″.0025	+0″.0127	+0″.0077
−1, 1			−0.0006	−0.0010

W und $\overline{W}$

$\gamma,\ g, \Gamma$	cos	sin
0, −1, 1	0	0
−1, 0, 1	0″.0002	+0″.0006
1, −2, 1	+0.0004	+0.0008
	+0.0002	+0.0014
0, 0, 1	−0.0136	−0.0081
−1, 1, 1	−0.0022	−0.0014
1, −1, 1	−0.2931	−0.1764
	−0.3089	−0.1859
2, −1, 1	−0.007	−0.004

$$\begin{aligned}
n\delta z = & -0''003\sin(-g') && +0''019\cos(-g') \\
& -0.330\sin(g-g') && +0.200\cos(g-g') \\
& -0.004\sin(2g-g') && +0.002\cos(2g-g')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = & +0''004\cos(-g') && +0''001\sin(-g') \\
& +0.156\cos(g-g') && +0.095\sin(g-g') \\
& +0.004\cos(2g-g') && +0.002\sin(2g-g')
\end{aligned}$$

Diese sind jedenfalls die grössten Glieder, die der Neptun in der Bewegung des Jupiters hervorbringt. Dass die Störungen der dritten Coordinate völlig unmerklich sind, zeigt sich ohne Weiteres.

118.

Für die Säcularänderungen bekommt man mit blosser Berücksichtigung der Glieder der niedrigsten Ordnung, da die höheren jedenfalls unmerklich sind:

$$K = +0''00011\,, \qquad L = -0''00548$$
$$M = -0.00027\,, \qquad N = +0.00093$$

also

$$\begin{aligned}
n\delta z = & +0''00011\,nt\sin g && -0''00548\,nt\cos g \\
& && -0.00006\,nt\cos 2g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = & -0''00001\,nt \\
& -0''00006\,nt\cos g && -0.00274\,nt\sin g \\
& && -0.00006\,nt\sin 2g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & && -0''00007\,nt \\
& -0''00027\,nt\sin g && +0.00093\,nt\cos g \\
& && +0.00002\,nt\cos 2g
\end{aligned}$$

§. 10. Störungen des Jupiters durch den Mars.

119.

Die angewandten Marselemente sind die folgenden:

Mars.

$$m' = \frac{1}{3200900}$$
$$n' = 689050''.83$$
$$e' = 0.093213$$
$$\pi' = 332^0\ 22'\ 41''.2$$
$$i' = \quad 1\ \ 51\ \ \ 3.5$$
$$\theta' = \quad 48\ \ \ 0\ 33.4$$
$$\log a' = 0.18290$$

und hieraus ergab sich zuerst

$$J = 1^0\ 25'\ 58''.3$$
$$\Phi = \ 84^0\ 36'\ 22'', \qquad \Psi = 135^0\ \ \ 0'\ 35''$$
$$\Pi = 188\ \ \ 5\ \ 31\ , \qquad \Pi' = 149\ \ 21\ \ 33$$
$$\mu = -\ \ 5.3067$$
$$2\mu = -10.6134$$
$$3\mu = -15.9201$$
etc.

120.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha' = 9.46666$$

bekam ich in der Bedeutung des Art. 19

$(0)A'_0 = 0.02254$, $(1)A'_0 = 0.04743$, $(2)A'_0 = 0.05736$
$(0)A'_1 = 0.00498$, $(1)A'_1 = 0.01551$, $(2)A'_1 = 0.03405$
$(0)A'_2 = 0.03338$, $(1)A'_2 = 0.06934$, $(2)A'_2 = 0.08032$

$(3)A'_0 = 0.0335$, $(4)A'_0 = 0.0558$, $(0)B'_0 = 0.0651$
$(3)A'_1 = 0.0474$, $(4)A'_1 = 0.0477$, $(0)B'_1 = 0.1523$
$(3)A'_2 = 0.0370$, $(4)A'_2 = 0.0594$, $(0)B'_2 = 0.0551$

$(1)B'_0 = 0.1494$, $(2)B'_0 = 0.237$, $(0)C'_0 = 0.147$
$(1)B'_1 = 0.2059$, $(2)B'_1 = 0.191$,
$(1)B'_2 = 0.1284$, $(2)B'_2 = 0.211$, $(0)C'_2 = 0.045$

wo die Zusatzglieder, die im Art. 20 erklärt wurden, schon berücksichtigt sind.

Durch die Verwandelungsformeln des Art. 19 ergaben sich hieraus

$$\begin{array}{lll}
\alpha(0)A_0 = 0.02254\,, & \alpha(1)A_0 = -0.06997\,, & \alpha(2)A_0 = 0.29216 \\
\alpha(0)A_1 = 0.00498\,, & \alpha(1)A_1 = -0.02049\,, & \alpha(2)A_1 = 0.10605 \\
\alpha(0)A_2 = 0.03338\,, & \alpha(1)A_2 = -0.10272\,, & \alpha(2)A_2 = 0.42444 \\
\\
\alpha(3)A_0 = -1.5386\,, & \alpha(4)A_0 = 9.815\,, & \alpha(0)B_0 = 0.0651 \\
\alpha(3)A_1 = -0.6630\,, & \alpha(4)A_1 = 4.867\,, & \alpha(0)B_1 = 0.1523 \\
\alpha(3)A_2 = -2.2083\,, & \alpha(4)A_2 = 13.893\,, & \alpha(0)B_2 = 0.0551 \\
\\
\alpha(1)B_0 = -0.3446\,, & \alpha(2)B_0 = 2.213\,, & \alpha(0)C_0 = 0.147 \\
\alpha(1)B_1 = -0.6626\,, & \alpha(2)B_1 = 3.665\,, & \\
\alpha(1)B_2 = -0.2937\,, & \alpha(2)B_2 = 1.900\,, & \alpha(0)C_2 = 0.045
\end{array}$$

121.

Indem wir nun fortfahren werden, das in den Artt. 21 und 22 erklärte Verfahren anzuwenden, dem die vorstehenden Vorbereitungen entsprechen, rechnen wir zuerst die Ausdrücke des Art. 21 für $n\delta z$ und ν, die gemeiniglich in diesem Falle die grössten Glieder geben. Da in Secunden ausgedrückt hier

$$\log m' = 8.8092$$

ist, so geben diese Formeln, wenn nur die grössten Glieder derselben berücksichtigt werden,

$$n\delta z = -0''\!.019 \sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''\!.022 + 0''\!.019 \cos(g-g'+\Pi+\Pi')$$

und der Werth von u ist ganz unmerklich. Diese sind die grössten periodischen Glieder, die der Mars in der Bewegung des Jupiters hervorbringt, und wir haben uns daher im Folgenden nur an die Säcularänderungen zu halten.

122.

Um Nichts zu übergehen, werde ich wieder alle im Vorhergehenden entwickelten Glieder angeben, obgleich der Erfolg zeigt, dass diejenigen, welche der dritten Ordnung angehören, hätten weggelassen werden können. Ich werde die Form derselben anwenden, die im Art. 68 angegeben ist, und bekomme demzufolge

$$[1] = (7.9916), \qquad [6]' = (9.3985)$$
$$[2] = (9.3544), \qquad [7] = (8.4794)$$
$$[3] = (8.9288), \qquad [8] = (9.0023)$$
$$[4] = (8.9298), \qquad [9] = (8.4177)$$
$$[5] = (7.5505), \qquad [10] = (8.0925)$$
$$[6] = (8.9453), \qquad [11] = (8.7309)$$

woraus

$$K = -0''.00021, \qquad L = -0''.00022$$

folgen. Mit blosser Rücksichtnahme auf die Glieder niedrigster Ordnung geben die Ausdrücke des Art. 52

$$M = +0''.00002, \qquad N = -0''.00012$$

und wir erhalten also schliesslich:

$$n\delta z = -0''.00021\, nt \sin g - 0''.00022\, nt \cos g$$
$$\nu = +0.00011\, nt \cos g - 0.00011\, nt \sin g$$
$$\frac{u}{\cos i} = +0.00002\, nt \sin g - 0.00012\, nt \cos g$$

---

§. 11. Störungen des Jupiters durch die Erde, die Venus und den Merkur.

123.

Die angewandten Elemente sind

	Erde	Venus	Merkur
m'	$= \frac{1}{354936}$	$= \frac{1}{408134}$	$= \frac{1}{3000000}$
n'	$= 1295977''.44$	$= 2106641''.42$	$= 5381016''.3$
e'	$= 0.016792$	$= 0.006870$	$= 0.2056$
π'	$= 99^\circ 30' 21''$	$= 128^\circ 46' 1''$	$= 74^\circ 20' 38''$
i'		$=$ 3 23 32.6	$=$ 7 0 4.6
θ'		$=$ 74 52 28	$=$ 45 57 37
$\log a'$	$= 0$	$= 9.85934$	$= 9.58783$

woraus man

$J =$	$1^0 18' 51''.6$	$= 2^0 14' 58''.8$	$= 6^0 17' 13''.8$
$\Phi =$	0	$= 142\ 57\ 24$	$= 118\ \ 2\ \ 1$
Ψ		$= 166\ 29\ 46$	$= 170\ 26\ 20$
$\Pi =$	$272\ 41\ 53$	$= 129\ 44\ 29$	$= 154\ 39\ 52$
$\Pi' =$	$1\ \ 4\ 36$	$= 247\ 23\ 48$	$= 217\ 56\ 41$

erhält.

124.

Da die Wirkung der jetzt in Betracht zu ziehenden Planeten auf den Jupiter so geringe ist, so sollen nur die Glieder niedrigster Ordnung berücksichtigt werden.

Erde.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha' = 9.28376$$

fand sich

$$(0)A'_0 = 0.00943\,, \quad (1)A'_0 = 0.01927\,, \quad (2)A'_0 = 0.0209$$
$$(0)A'_1 = 0.00136\,, \quad (1)A'_1 = 0.00415\,, \quad (2)A'_1 = 0.0086$$
$$(0)A'_2 = 0.01407\,, \quad (1)A'_2 = 0.02859\,, \quad (2)A'_2 = 0.0304$$
$$(3)A'_0 = 0.0052\,, \quad (0)B'_0 = 0.0169\,, \quad (1)B'_0 = 0.0359$$
$$(3)A'_1 = 0.0100\,, \quad (0)B'_1 = 0.0595\,, \quad (1)B'_1 = 0.0680$$
$$(3)A'_2 = 0.0058$$

und hieraus

$$\alpha(0)A_0 = 0.00943\,, \quad \alpha(1)A_0 = -0.02870\,, \quad \alpha(2)A_0 = 0.1169$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.00136\,, \quad \alpha(1)A_1 = -0.00551\,, \quad \alpha(2)A_1 = 0.0279$$
$$\alpha(0)A_2 = 0.00415\,, \quad \alpha(1)A_2 = -0.04266\,, \quad \alpha(2)A_2 = 0.1729$$
$$\alpha(3)A_0 = -0.5968\,, \quad \alpha(0)B_0 = 0.0169\,, \quad \alpha(1)B_0 = -0.0866$$
$$\alpha(3)A_1 = -0.1703\,, \quad \alpha(0)B_1 = 0.0595\,, \quad \alpha(1)B_1 = -0.2465$$
$$\alpha(3)A_2 = -0.8784$$

125.

Berechnet man wieder zuerst die grössten periodischen Glieder nach den Ausdrücken des Art. 21, so findet man

$$n\delta z = -0''\!.112 \sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''\!.194 + 0''\!.112 \cos(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\frac{u}{\cos i} = -0''\!.003 \sin(g'+\Pi')$$

und alle übrigen periodischen Glieder sind ganz unmerklich. Man erhält ferner

$$K = +0''\!.00014\,, \qquad L = -0''\!.00167$$
$$M = +0.00040\,, \qquad N = +0.00002$$

also

$$n\delta z = +0''\!.00014\,nt\sin g - 0''\!.00167\,nt\cos g$$
$$-\,0.00002\,nt\cos 2g$$
$$\nu = -0''\!.00007\,nt\cos g - 0''\!.00084\,nt\sin g$$
$$-\,0.00002\,nt\sin 2g$$
$$\frac{u}{\cos i} = +0''\!.00040\,nt\sin g + 0''\!.00002\,nt\cos g$$

126.

Venus.

Mit dem Werthe

$$\log\alpha' = 9.14310$$

fand sich

$(0)A'_0 = 0.00488\,,\quad (1)A'_0 = 0.00988\,,\quad (2)A'_0 = 0.01032$
$(0)A'_1 = 0.00051\,,\quad (1)A'_1 = 0.00154\,,\quad (2)A'_1 = 0.00315$
$(3)A'_0 = 0.0014$
$(3)A'_1 = 0.0036\,,\quad (0)B'_1 = 0.03008$

und hieraus

$\alpha(0)A_0 = 0.00488\,,\quad \alpha(1)A_0 = -0.01476\,,\quad \alpha(2)A_0 = 0.05960$
$\alpha(0)A_1 = 0.00051\,,\quad \alpha(1)A_1 = -0.00205\,,\quad \alpha(2)A_1 = 0.01033$
$\alpha(3)A_0 = -0.3014$
$\alpha(3)A_1 = -0.0628\,,\quad \alpha(0)B_1 = 0.03008$

127.

Die Ausdrücke des Art. 24 geben hier

$$n\delta z = -0''\!.070 \sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''\!.168 + 0''\!.070 \cos(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\frac{u}{\cos i} = -0''\!.003 \sin(g'+\Pi')$$

und man erhält ferner

$$K = +0''00002\,, \qquad L = -0''00074$$
$$M = -0.00023\,, \qquad N = -0.00019$$

folglich

$$n\delta z = +0''00002\,nt\sin g - 0''00074\,nt\cos g - 0.00001\,nt\cos 2g$$

$$\nu = -0''00001\,nt\cos g - 0''00037\,nt\sin g - 0.00001\,nt\sin 2g$$

$$\frac{u}{\cos i} = +0''00001\,nt - 0''00023\,nt\sin g - 0.00019\,nt\cos g$$

128.

Merkur.

Mit dem Werthe

$$\log\alpha' = 8.87159$$

fand sich

$$(0)A'_0 = 0.001388\,, \quad (1)A'_0 = 0.002786\,, \quad (2)A'_0 = 0.002821$$
$$(0)A'_1 = 0.000077\,, \quad (1)A'_1 = 0.000233\,, \quad (2)A'_1 = 0.000469$$
$$(0)B'_1 = 0.008391$$

und hieraus

$$\alpha(0)A_0 = 0.001388\,, \quad \alpha(1)A_0 = -0.004174\,, \quad \alpha(2)A_0 = 0.01674$$
$$\alpha(1)A_1 = 0.000077\,, \quad \alpha(1)A_1 = -0.000310\,, \quad \alpha(2)A_1 = 0.00156$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.008391$$

129.

Die Ausdrücke des Art. 21 geben

$$n\delta z = -0''005\sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''023 + 0''005\cos(g-g'+\Pi-\Pi')$$

und man erhält ferner

$$K = +0''00001\,, \qquad L = -0''00002$$
$$M = -0.00001\,, \qquad N = -0.00003$$

also

$$n\delta z = +0''.00001\, nt \sin g - 0''.00002\, nt \cos g$$
$$\nu = -0.00001\, nt \cos g - 0.00001\, nt \sin g$$
$$\frac{u}{\cos i} = -0.00001\, nt \sin g - 0.00003\, nt \cos g$$

130.

Bei der Zusammenstellung der im Vorhergehenden berechneten Jupiterstörungen brauchen wir die periodischen Glieder nicht wieder anzuführen; denn da diese alle von verschiedenen Argumenten abhängen, so ist eine Zusammenziehung derselben nicht möglich, es wäre denn, dass man je zwei Glieder in Eines zusammenzöge, was jedoch unwesentlich ist. Die Säcularänderungen aber, oder die mit nt multiplicirten Glieder hängen alle von denselben Argumenten ab, und können also wesentlich zusammengezogen werden.

Da hier die vom Saturn bewirkten Glieder der Länge und des Radius Vectors nicht berechnet worden sind, so entnehme ich sie aus meiner mehrmals angezogenen Preisschrift*), und reducire sie auf die hier angewandte Saturnmasse. A. a. O. S. 76 findet man

$$K = +1''.01786\,, \qquad L = -1''.13539$$
$$\text{Red.} = +0.00351\,, \qquad = -0.00391$$

wobei aber zu bemerken ist, dass die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen, von welchen sich voraussetzen lässt, dass sie nicht unmerklich sein werden, aus dem Grunde fehlen, weil ihre Berechnung noch nicht beendigt ist. Wir erhalten nun

$K =$	$+0''.00001$,	$L = -0''.00002$	. . . . Merkur
	$+0.00002$,	-0.00074	. . . . Venus
	$+0.00014$,	-0.00167	. . . . Erde
	-0.00021,	-0.00022	. . . . Mars
	$+1.02137$,	-1.13930	. . . Saturn
	$+0.00227$,	-0.02181	. . . Uranus
	$+0.00011$,	-0.00548	. . . . Neptun
$K =$	$+1''.02371$,	$L = -1''.16924$	

und mit der eben angeführten Beschränkung:

*) Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Berlin 1831.

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &+ 1''.02371\, nt \sin g - 1''.16928\, nt \cos g \\
&+ 0.01232\, nt \sin 2g - 0.01407\, nt \cos 2g \\
&+ 0.00030\, nt \sin 3g - 0.00034\, nt \sin 3g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu = &- 0''.01232\, nt \\
&- 0.51186\, nt \cos g - 0''.58462\, nt \sin g \\
&- 0.01232\, nt \cos 2g - 0.01407\, nt \sin 2g \\
&- 0.00045\, nt \cos 3g - 0.00051\, nt \sin 3g
\end{aligned}
$$

Für die Breitenstörungen des Jupiters erhalten wir aus dem Vorhergehenden

$$
\begin{array}{rlrl}
M = & -0''.00001, & N = & -0''.00003 \ldots \text{Merkur} \\
 & -0.00023, & & -0.00019 \ldots \text{Venus} \\
 & +0.00040, & & +0.00002 \ldots \text{Erde} \\
 & +0.00002, & & -0.00012 \ldots \text{Mars} \\
 & -0.28329, & & +0.12829 \ldots \text{Saturn} \\
 & +0.00193, & & -0.00093 \ldots \text{Uranus} \\
 & -0.00027, & & +0.00093 \ldots \text{Neptun} \\
\hline
M = & -0''.28145, & N = & +0''.12797
\end{array}
$$

wobei zu bemerken ist, dass die vom Saturn herrührenden Glieder auch wohl durch die Betrachtung der Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen merkliche Zusätze bekommen werden, die aber erst später untersucht werden können. Aus den vorstehenden Werthen folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = &\qquad\qquad - 0''.00924\, nt \\
&- 0''.28145\, nt \sin g + 0.12797\, nt \cos g \\
&- 0''.00678\, nt \sin 2g + 0.00308\, nt \cos 2g \\
&- 0.00024\, nt \sin 3g + 0.00011\, nt \cos 3g
\end{aligned}
$$

§. 12. Berechnung des Theils der mit t^2 multiplicirten Glieder der Jupiterstörungen, welcher von den Aenderungen der Coordinaten des Jupiters abhängt.

131.

Die im vor. Art. erhaltenen Gesammtwerthe von K und L sind gerade diejenigen, die in den folgenden Rechnungen angewandt werden müssen, wenn in den daraus hervorgehenden Werthen der mit t^2 multiplicirten Glieder blos die von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen aufgenommen werden sollen. Freilich ist es etwas genauer, die Glieder dritter Ordnung mit aufzunehmen, die aus den in K und L enthaltenen Gliedern zweiter Ordnung entstehen, aber da diese, wie oben bemerkt wurde, gegenwärtig noch nicht fertig berechnet worden sind, so müssen wir uns jedenfalls mit den genannten Werthen von K und L begnügen.

132.

Es sind nun zuerst, um die Glieder zu erhalten, die in § 6, α) entwickelt worden sind, durch die Ausdrücke des Art. 68 die A, B, C, etc. für jeden störenden Planeten besonders zu berechnen, und in Theilen des Kreisradius auszudrücken. Um die Anzahl von Nullen linker Hand zu vermindern, sollen sie ausserdem mit $(100)^2$ multiplicirt werden, wodurch bewirkt wird, dass in den Endresultaten die Einheit von t hundert Julianische Jahre beträgt. Es fanden sich

$A =$	$+ 0.0001$,	$B =$	0.0000	.... Neptun
	$+ 0.0003$,		0.0000	.... Uranus
	$+ 0.0075$,		$- 0.0245$	.... Saturn
	0.0000 ,		0.0000	.... Mars
	$+ 0.0001$,		0.0000	.... Erde
	$+ 0.0001$,		0.0000	.... Venus
	0.0000 ,		0.0000	.... Merkur
$A =$	$+ 0.0081$,	$B =$	$- 0.0245$	

$C =$ 0.0000,	$D = +0.0010$	. . . .	Neptun
0.0000,	$+0.0042$	. . . .	Uranus
$+0.0033$,	$+0.3460$	. . . .	Saturn
0.0000,	$+0.0001$	. . . .	Mars
0.0000,	$+0.0004$	. . . .	Erde
0.0000,	$+0.0002$	. . . .	Venus
0.0000,	0.0000	. . . .	Merkur
$C = +0.0033$,	$D = +0.3519$		

$E = -0.0010$,	$F =$ 0.0000	. . . .	Neptun
-0.0042,	0.0000	. . . .	Uranus
-0.3411,	-0.0021	. . . .	Saturn
-0.0001,	0.0000	. . . .	Mars
-0.0004,	0.0000	. . . .	Erde
-0.0002,	0.0000	. . . .	Venus
0.0000,	0.0000	. . . .	Merkur
$E = -0.3470$,	$F = -0.0021$		

$G = +0.0001$	. . .	Uranus
$+0.0041$	. . . .	Saturn
$G = +0.0042$		

während die Wirkung der übrigen Planeten völlig unmerklich ist.

133.

Aus dem Vorstehenden fand sich

$$AK+BL = +0''0369\,, \qquad CK+DL = -0''4079$$
$$EK+FL = -0.3527\,, \qquad GL = -0.0049$$
$$K^2 = +0.0508\,, \qquad KL = -0.0580$$
$$L^2 = +0.0663$$

und hiermit geben die Ausdrücke des Art. 67

$$\begin{aligned} n\delta z = \quad & \qquad\qquad\qquad\qquad + 0''0369\,n^2t^2 \\ & - 0''4101\,n^2t^2\sin g \;-\; 0.3534\,n^2t^2\cos g \\ & - 0.0097\,n^2t^2\sin 2g - 0.0405\,n^2t^2\cos 2g \\ & - 0.0003\,n^2t^2\sin 3g - 0.0015\,n^2t^2\cos 3g \end{aligned}$$

$$\nu = +\,0''.0195\,n^2t^2$$
$$+\,0.2065\,n^2t^2\cos g \;-\; 0''.1763\,n^2t^2\sin g$$
$$+\,0.0069\,n^2t^2\cos 2g \;-\; 0.0188\,n^2t^2\sin 2g$$
$$+\,0.0003\,n^2t^2\cos 3g \;-\; 0.0012\,n^2t^2\sin 3g$$

welches die Werthe der im § 6, α) entwickelten Glieder sind.

134.

Wenden wir uns jetzt zum § 6, β) so geben die Ausdrücke des Art. 74

$$A = -\,0.0052\,,\qquad B = +\,0.0002\,,\qquad C = -\,0.0016$$
$$D = +\,0.0006\,,\qquad F = +\,0.0135\,,\qquad G = +\,0.0063$$

die vom Saturn bewirkt sind, während die übrigen Planeten hier nichts Merkliches geben. Hieraus

$$AK - BL = -\,0''.0050\,,\qquad CK - DL = -\,0''.0010$$
$$FK = +\,0.0109\,,\qquad GK = +\,0.0064$$
$$GL = -\,0.0073\,,\qquad FL = -\,0.0156$$

und schliesslich

$$\frac{u}{\cos i} = \qquad +\,0''.0047\,n^2t^2$$
$$-\,0''.0026\,n^2t^2\sin g \;-\; 0.0002\,n^2t^2\cos g$$
$$-\,0.0019\,n^2t^2\sin 2g \;+\; 0.0110\,n^2t^2\cos 2g$$
$$-\,0.0001\,n^2t^2\sin 3g \;+\; 0.0007\,n^2t^2\cos 3g$$

135.

Zu den unter § 6, γ) entwickelten Gliedern übergehend, sind zuerst die T und U zu berechnen, wozu ich die letzten Ausdrücke des Art. 86 anwenden werde, da im Vorhergehenden schon alle M und N berechnet worden sind. Es ergeben sich

$T = +\,0''.0010\,,$	$U =$	$0''.0000$	Neptun
$0.0021\,,$		0	Uranus
$0.3114\,,$	$=$	$-\,0.0034$	Saturn
$0.0001\,,$		0	Mars
$0.0004\,,$		0	Erde
$0.0003\,,$		0	Venus
$0\,,$		0	Merkur
$T = 0''.3153\,,$	$U =$	$-\,0''.0034$	

136.

Nach Art. 79 fand sich ferner

$$C = -0.0012\,, \qquad D = +0.0073 \ldots \text{Saturn}$$

während die übrigen Planeten nichts Merkliches geben. Hiemit werden

$$n\delta z = -0''0004\,n^2t^2\sin g + 0''0023\,n^2t^2\cos g$$
$$\nu = +0.0002\,n^2t^2\cos g + 0.0012\,n^2t^2\sin g$$

137.

Schliesslich geben die unter § 6, δ) enthaltenen Entwickelungen zuerst (Art. 86)

$$\begin{array}{rrl}
C = -0.0014\,, & D = -0.0004 & \ldots\text{Neptun} \\
+0.0018\,, & +0.0038 & \ldots\text{Uranus} \\
-0.1508\,, & -0.3192 & \ldots\text{Saturn} \\
+0.0001\,, & 0 & \ldots\text{Mars} \\
0\,, & +0.0004 & \ldots\text{Erde} \\
+0.0001\,, & -0.0001 & \ldots\text{Venus} \\
0\,, & 0 & \ldots\text{Merkur} \\
\hline
C = -0.1502\,, & D = -0.3155 & \\
E = -0.0004\,, & F = +0.0014 & \ldots\text{Neptun} \\
+0.0038\,, & -0.0018 & \ldots\text{Uranus} \\
-0.3135\,, & +0.1452 & \ldots\text{Saturn} \\
0\,, & -0.0001 & \ldots\text{Mars} \\
+0.0004\,, & 0 & \ldots\text{Erde} \\
-0.0001\,, & -0.0001 & \ldots\text{Venus} \\
0\,, & 0 & \ldots\text{Merkur} \\
\hline
E = -0.3098\,, & F = +0.1446 &
\end{array}$$

woraus

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = \qquad\qquad\qquad\qquad & +0''0071\,n^2t^2 \\
-0''0464\,n^2t^2\sin g & -0.0982\,n^2t^2\cos g \\
-0.0011\,n^2t^2\sin 2g & -0.0024\,n^2t^2\cos 2g \\
& -0.0001\,n^2t^2\cos 3g
\end{aligned}$$

folgt. Die mit $\sin i$ multiplicirten Glieder des Art. 86 geben im gegenwärtigen Falle kaum 0''0001, weshalb sie zu übergehen sind.

138.

Addirt man jetzt die Einzelresultate, die im Vorhergehenden erhalten worden sind, so werden die vollständigen, von den Aenderungen der Coordinaten des Jupiters herrührenden, und mit t^2 multiplicirten Glieder in der Bewegung des Jupiters

$$\begin{aligned}
n\delta z = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 0''.0369\,n^2t^2 \\
& - 0''.4105\,n^2t^2\sin g \;\; - 0.3511\,n^2t^2\cos g \\
& - 0.0097\,n^2t^2\sin 2g - 0.0405\,n^2t^2\cos 2g \\
& - 0.0003\,n^2t^2\sin 3g - 0.0015\,n^2t^2\cos 3g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = & + 0''.0195\,n^2t^2 \\
& + 0.2067\,n^2t^2\cos g \;\; - 0''.1751\,n^2t^2\sin g \\
& + 0.0069\,n^2t^2\cos 2g - 0.0188\,n^2t^2\sin 2g \\
& + 0.0003\,n^2t^2\cos 3g - 0.0012\,n^2t^2\sin 3g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 0''.0118\,n^2t^2 \\
& - 0''.0490\,n^2t^2\sin g \;\; - 0.0984\,n^2t^2\cos g \\
& - 0.0030\,n^2t^2\sin 2g + 0.0086\,n^2t^2\cos 2g \\
& - 0.0001\,n^2t^2\sin 3g + 0.0006\,n^2t^2\cos 3g
\end{aligned}$$

§. 13. Berechnung derjenigen Säcularänderungen der übrigen Planeten, die erforderlich sind, um den Theil der mit t^2 multiplicirten Jupiterstörungen zu erhalten, welcher von den Aenderungen der Coordinaten der störenden Planeten herrührt.

139.

Um die in der Ueberschrift genannten Glieder der Jupiterstörungen erhalten zu können, müssen erst die Säcularänderungen aller einwirkenden Planeten, oder vielmehr die im Vorhergehenden mit K', L', T', U' bezeichneten Grössen für jeden dieser Planeten berechnet werden. Ich werde nun diese nicht blos anführen, sondern auch einige der dazu erforderlichen Hülfsgrössen angeben.

140.

Neptun vom Uranus gestört.

Da hier die Glieder dritter Ordnung mit aufgenommen werden müssen, so sind die folgenden Vorbereitungen zu treffen.

$$J = 1^0\ 30'\ 8''\!.4$$

$$\Pi = 247^0\ 38'\ 3'', \qquad \Pi' = 12^0\ 14'\ 22''$$

$\alpha(0)A_0 = 1.1349,\quad \alpha(1)A_0 = -1.4994,\quad \alpha(2)A_0 = 4.6446$

$\alpha(0)A_1 = 0.3858,\quad \alpha(1)A_1 = -0.9569,\quad \alpha(2)A_1 = 3.9244$

$\alpha(0)A_2 = 0.1888,\quad \alpha(1)A_2 = -0.6682,\quad \alpha(2)A_2 = 3.3598$

$\alpha(3)A_0 = -24.84,\quad \alpha(4)A_0 = 197.35$

$\alpha(3)A_1 = -23.70,\quad \alpha(4)A_1 = 197.06$

$\alpha(3)A_2 = -22.70,\quad \alpha(4)A_2 = 198.92$

$\alpha(0)B_0 = 1.3692,\quad \alpha(1)B_0 = -10.02,\quad \alpha(2)B_0 = 94.61$

$\alpha(0)B_1 = 1.6458,\quad \alpha(1)B_1 = -10.91,\quad \alpha(2)B_1 = 98.00$

$\alpha(0)B_2 = 1.2359,\quad \alpha(1)B_2 = -\ 9.25,\quad \alpha(2)B_2 = 89.06$

$\alpha(0)C_0 = 6.43$

$\alpha(0)C_2 = 5.31$

Es ist hierbei auf das zweite Glied der Störungsfunction keine Rücksicht genommen worden, da bekannt ist, dass dasselbe zu den Säcularänderungen Nichts beitragen kann. Die obigen Data gaben mir

$$K' = +0''\!.48322, \qquad L' = -0''\!.47397$$

$$T' = \ \ 0.2186, \qquad U' = -0.0022$$

141.

Neptun vom Saturn gestört.

$$J = 0^0\ 56'\ 56''\!.3$$

$$\Pi = 144^0\ 23'\ 42'', \qquad \Pi' = 191^0\ 17'\ 53''$$

$\alpha(0)A_0 = 1.02672,\quad \alpha(1)A_0 = -1.08345,\quad \alpha(2)A_0 = 2.35134$

$\alpha(0)A_1 = 0.16508,\quad \alpha(1)A_1 = -0.34385,\quad \alpha(2)A_1 = 1.09007$

$\alpha(0)A_2 = 0.03947,\quad \alpha(1)A_2 = -0.12205,\quad \alpha(2)A_2 = 0.50746$

$\alpha(3)A_0 = -\ 7.869,\quad \alpha(4)A_0 = 36.037$

$\alpha(3)A_1 = -4.678,\quad \alpha(4)A_1 = 25.481$

$\alpha(3)A_2 = -2.661,\quad \alpha(4)A_2 = 16.900$

$\alpha(0)B_0 = 0.0850$, $\alpha(1)B_0 = -0.4553$, $\alpha(2)B_0 = 2.962$
$\alpha(0)B_1 = 0.1844$, $\alpha(1)B_1 = -0.8155$, $\alpha(2)B_1 = 4.595$
$\alpha(0)B_2 = 0.0722$, $\alpha(1)B_2 = -0.3896$, $\alpha(2)B_2 = 2.555$
$\alpha(0)C_0 = 0.189$
$\alpha(0)C_2 = 0.066$

womit

$$K' = +0''.1750, \qquad L' = +0''.0710$$
$$T' = 0.0900, \qquad U' = -0.0005$$

erhalten wurden.

142.

Neptun durch Jupiter gestört.

Da die Grössen dritter Ordnung im vorhergehenden Falle nur höchst Unbedeutendes gegeben haben, so können sie im gegenwärtigen ganz übergangen werden. Aus dem Art. 115 bekommt man

$$J' = 0^0\, 56'\, 32''.6, \qquad \Pi - \Pi' = 31^0\, 6'\, 37''$$

und da in Folge der vorstehenden Bemerkung jetzt die A_i und B_i des Art. 116 ohne Weiteres angewandt werden dürfen:

$\alpha(1)A_0 = 0.01551$, $\alpha(2)A_0 = 0.01659$
$\alpha(0)A_1 = 0.00099$, $\alpha(1)A_1 = 0.00301$, $\alpha(2)A_1 = 0.00622$
$\alpha(0)B_1 = 0.04759$

Hiermit ergeben sich

$$K' = -0''.0501, \qquad L' = +0''.0037$$
$$T' = 0.0769, \qquad U' = 0$$

Die übrigen Planeten können auf den Neptun keine merkliche Wirkung äussern.

143.

Die Addition der im Vorhergehenden erhaltenen Einzelnwerthe giebt für den

Neptun

$$K' = +0''.6081, \qquad L' = -0''.3993$$
$$T' = 0.3855, \qquad U' = -0.0027$$

oder wenn man mit dem Werthe von n' für den Neptun multiplicirt:

$$n'K' = +0''.02318\,, \qquad n'L' = -0''.01523$$
$$n'T' = \quad 0.01470\,, \qquad n'U' = -0.00010$$

144.

Gehen wir zum Uranus über.

Uranus vom Neptun gestört.

Es ergeben sich hier

$$J = 1^0\, 30'\, 8''.4$$

$$\Pi = 192^0\, 14'\, 22''\,, \qquad \Pi' = 67^0\, 38'\, 3''$$

$$(0)A_0 = 1.1349\,, \qquad (1)A_0 = 0.3645\,, \qquad (2)A_0 = 0.9166$$
$$(0)A_1 = 0.3858\,, \qquad (1)A_1 = 0.5711\,, \qquad (2)A_1 = 0.8649$$
$$(0)A_2 = 0.1888\,, \qquad (1)A_2 = 0.4794\,, \qquad (2)A_2 = 1.0645$$

$$(3)A_0 = 3.220\,, \qquad (4)A_0 = 17.590$$
$$(3)A_1 = 3.316\,, \qquad (4)A_1 = 17.616$$
$$(3)A_2 = 3.357\,, \qquad (4)A_2 = 18.007$$
$$(0)B_0 = 1.3692\,, \qquad (1)B_0 = 5.9111\,, \qquad (2)B_0 = 30.886$$
$$(0)B_1 = 1.6458\,, \qquad (1)B_1 = 5.9714\,, \qquad (2)B_1 = 30.476$$
$$(0)B_2 = 1.2359\,, \qquad (1)B_2 = 5.5112\,, \qquad (2)B_2 = 29.895$$
$$(0)C_0 = 6.427$$
$$(0)C_2 = 5.310$$

und hiermit

$$K' = -0''.07717\,, \qquad L' = -0''.75885$$
$$T' = \quad 0.19788\,, \qquad U' = -0.00200$$

145.

Uranus vom Saturn gestört.

$$J = 1^0\, 57'\, 7''.2$$

$$\Pi = 220^0\, 29'\, 18''\,, \qquad \Pi' = 142^0\, 46'\, 24''$$

$$\alpha(0)A_0 = 1.07224\,, \qquad \alpha(1)A_0 = -1.24210\,, \qquad \alpha(2)A_0 = 3.11784$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.27604\,, \qquad \alpha(1)A_1 = -0.61762\,, \qquad \alpha(2)A_1 = 2.16795$$
$$\alpha(0)A_2 = 0.10418\,, \qquad \alpha(1)A_2 = -0.34019\,, \qquad \alpha(2)A_2 = 1.52240$$

$\alpha(3)A_0 = 12.678$, $\alpha(4)A_0 = 73.590$
$\alpha(3)A_1 = -10.640$, $\alpha(4)A_1 = 68.508$
$\alpha(3)A_2 = -8.780$, $\alpha(4)A_2 = 62.817$

$\alpha(0)B_0 = 0.43546$, $\alpha(1)B_0 = -2.6441$, $\alpha(2)B_0 = 19.983$
$\alpha(0)B_1 = 0.63365$, $\alpha(1)B_1 = -3.3238$, $\alpha(2)B_1 = 22.875$
$\alpha(0)B_2 = 0.3806$, $\alpha(1)B_2 = -2.3486$, $\alpha(2)B_2 = 18.041$

$\alpha(0)C_0 = 1.205$
$\alpha(0)C_2 = 0.782$

$K' = -1''.23737$, $L' = -1''.49815$
$T' = 0.65090$, $U' = +0.00753$

146.

Uranus vom Jupiter gestört.

$J = 0^0\,41'\,55''.0$

$\Pi = 220^0\,1'\,50''$, $\Pi' = 64^0\,18'\,39''$

$\alpha(0)A_0 = 1.01919$, $\alpha(1)A_0 = -1.05926$, $\alpha(2)A_0 = 2.24586$
$\alpha(0)A_1 = 0.13953$, $\alpha(1)A_1 = -0.28729$, $\alpha(2)A_1 = 0.89640$
$\alpha(0)A_2 = 0.02847$, $\alpha(1)A_2 = -0.08728$, $\alpha(2)A_2 = 0.35886$

$\alpha(3)A_0 = -7.285$, $\alpha(4)A_0 = 32.122$
$\alpha(3)A_1 = -3.769$, $\alpha(4)A_1 = 20.018$
$\alpha(3)A_2 = -1.856$, $\alpha(4)A_2 = 11.587$

$\alpha(0)B_0 = 0.0506$, $\alpha(1)B_0 = -0.2657$, $\alpha(2)B_0 = 1.689$
$\alpha(0)B_1 = 0.12734$, $\alpha(1)B_1 = -0.5473$, $\alpha(2)B_1 = 2.983$
$\alpha(0)B_2 = 0.0428$, $\alpha(1)B_2 = -0.2259$, $\alpha(2)B_2 = 1.444$

$\alpha(0)C_0 = 0.117$
$\alpha(0)C_2 = 0.032$

$K' = -0''.16818$, $L' = -1''.55762$
$T' = 0.15553$, $U' = -0.00130$

147.

Uranus vom Mars gestört.

Hier brauchen wieder nur die Glieder erster Ordnung aufgenommen zu werden.

$$J = 1^0\ 11'\ 42'', \qquad \Pi - \Pi' = 194^0\ 28'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00317, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.00322$$

$$\alpha(0)A_1 = 0.03981, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.04000, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00057$$

$$\alpha(0)B_1 = 0.009577$$

$$K' = 0''.00000, \qquad L' = -0''.00004$$

$$T' = 0.00001, \qquad U' = 0$$

148.

Uranus von der Erde gestört.

$$J = 0^0\ 46'\ 28''.4, \qquad \Pi - \Pi' = 67^0\ 20'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00136, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.0137$$

$$\alpha(0)A_1 = 0.02610, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.02615, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00016$$

$$\alpha(0)B_1 = 0.00410$$

$$K' = 0''.00000, \qquad L' = -0''.00011$$

$$T' = 0.00002, \qquad U' = 0$$

149.

Uranus von der Venus gestört.

$$J = 2^0\ 37'\ 6''$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.000712, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.000714, \qquad \alpha(0)B_1 = 0.002138$$

$$K' = 0''.00000, \qquad L' = -0''.00005$$

$$T' = 0.00002, \qquad U' = 0$$

150.

Die Addition aller Einzelwerthe giebt für den

Uranus

$$K' = -1''.48272, \qquad L' = -3''.81482$$

$$T' = 1.00436, \qquad U' = +0.00423$$

und nach der Multiplication mit dem Werthe von n' für den Uranus:

$$n'K' = -0''.11088, \qquad n'L' = -0''.28528$$

$$n'T' = 0.07511, \qquad n'U' = +0.00032$$

151.

Gehen wir zum Saturn über.

Saturn vom Neptun gestört.

Die Glieder erster Ordnung reichen aus.

$$J = 0^0\,56'\,56''\!.4\,, \qquad \Pi - \Pi' = 46^0\,54'\!.2$$

$$\begin{array}{lll} & (1)A_0 = 0.05673\,, & (2)A_0 = 0.07097 \\ (0)A_1 = 0.16508\,, & (1)A_1 = 0.17876\,, & (2)A_1 = 0.04485 \\ & (0)B_1 = 0.1844 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} K' = -0''\!.00203\,, & L' = -0''\!.04502 \\ T' = 0.00693\,, & U' = 0 \end{array}$$

152.

Saturn vom Uranus gestört.

$$J = 1^0\,57'\,7''\!.0$$

$$\Pi = 322^0\,46'\,24''\,, \qquad \Pi' = 40^0\,29'\,17''$$

$$\begin{array}{lll} (0)A_0 = 1.07224\,, & (1)A_0 = 0.16986\,, & (2)A_0 = 0.29394 \\ (0)A_1 = 0.27604\,, & (1)A_1 = 0.34159\,, & (2)A_1 = 0.24953 \\ (0)A_2 = 0.10418\,, & (1)A_2 = 0.23601\,, & (2)A_2 = 0.37000 \\ (3)A_0 = 0.541\,, & (4)A_0 = 1.724 & \\ (3)A_1 = 0.589\,, & (4)A_1 = 1.700 & \\ (3)A_2 = 0.577\,, & (4)A_2 = 1.795 & \\ (0)B_0 = 0.43546\,, & (1)B_0 = 1.3377\,, & (2)B_0 = 4.056 \\ (0)B_1 = 0.63365\,, & (1)B_1 = 1.4229\,, & (2)B_1 = 3.888 \\ (0)B_2 = 0.3806\,, & (1)B_2 = 1.2066\,, & (2)B_2 = 3.819 \\ (0)C_0 = 1.205 & & \\ (0)C_2 = 0.782 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} K' = +0''\!.08675\,, & L' = -0''\!.15948 \\ T' = 0.05537\,, & U' = +0.00072 \end{array}$$

153.

Saturn vom Jupiter gestört.

Die betreffenden Grössen habe ich aus meiner oft angezogenen Preisschrift entnommen, und dabei, um in das Resultat keine Glieder dritter Ordnung in Bezug auf die Massen hineinzubringen, mich blos an die Glieder erster Ordnung in Bezug auf die Massen gehalten. S. 73 u. f. dieser Schrift findet man, nachdem die Angaben auf die hier angewandte Jupitermasse reducirt worden sind:

$$K' = -5''34012, \qquad L' = -8''63296$$
$$T' = \quad 1.90452, \qquad U' = -0.02450$$

letztere weil der Coefficient des ersten Gliedes im dortigen p' mit T' und der des dortigen q' mit $-U'$ identisch ist, wie man leicht findet.

154.

Saturn vom Mars gestört.

Hier reicht man wieder mit den Gliedern erster Ordnung aus.

$$J = 2^0\,21'.8, \qquad \Pi - \Pi' = 116^0\,43'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.01314, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.01391$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.08065, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.08221, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00484$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.04017$$

$$K' = -0''00004, \qquad L' = -0''00017$$
$$T' = \quad 0.00005, \qquad U' = \quad 0$$

155.

Saturn von der Erde gestört.

$$J = 2^0\,29'.6, \qquad \Pi - \Pi' = -10^0\,22'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00556, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.00570$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.05264, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.05306, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00133$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.01683,$$

$$K' = 0''00000, \qquad L' = -0''00053$$
$$T' = 0.00021, \qquad U' = \quad 0$$

156.

Saturn von der Venus gestört.

$$J = 2^0\,3'\!.3\,,\qquad \Pi - \Pi' = -\,39^0\,40'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00290\,,\qquad \alpha(2)A_0 = 0.00293$$

$$\alpha(0)A_1 = 0.03802\,,\qquad \alpha(1)A_1 = 0.03846\,,\qquad \alpha(2)A_1 = 0.00050$$

$$\alpha(0)B_1 = 0.00872$$

$$K' = 0''\!.00000\,,\qquad L' = -\,0''\!.00025$$

$$T' = 0.00008\,,\qquad U' = 0$$

Der Merkur braucht seiner geringen Einwirkung wegen hier nicht berücksichtigt zu werden.

157.

Die Addition der Einzelresultate giebt für den

Saturn

$$K' = -\,5''\!.25544\,,\qquad L' = -\,8''\!.83844$$

$$T' = 1.96716\,,\qquad U' = -\,0.02378$$

und nachdem mit dem Werthe von n' für den Saturn multiplicirt worden ist:

$$n'K' = -\,1''\!.12098\,,\qquad n'L' = -\,1''\!.88523$$

$$n'T' = 0.41959\,,\qquad n'U' = -\,0.00507$$

158.

Da die übrigen Planeten nur höchst Unbedeutendes dem Resultat hinzufügen können, so habe ich sie auf einfachere Art behandelt. Die K' und L' habe ich aus den Tafeln entnommen, und durch die Ausdrücke

$$n'K' = 2\,\delta e'\,(1 + \tfrac{5}{8}e'^2)$$

$$n'L' = -\,2e'\,\delta\pi'\,(1 + \tfrac{3}{8}e'^2)$$

berechnet. Da die T' und U' nur aus den einzelnen Theilen, aus welchen $\delta i'$ und $\delta\theta'$ bestehen, berechnet werden können, so habe ich sie unabhängig von den Tafeln berechnet, aber nur auf das Glied erster Ordnung in T' Rücksicht genommen. Die U' werden demzufolge Null. Ich erhielt

Mars.

$n'K' = +0''.374\,, \qquad n'L' = -2''.947\,, \qquad n'T' = 0''.495$

Erde.

$n'K' = -0''.171\,, \qquad n'L' = -0''.382\,, \qquad n'T' = 0''.494$

Venus.

$n'K' = -0''.223\,, \qquad n'L' = +0''.010\,, \qquad n'T' = 0''.599$

Merkur.

$n'K' = +0''.082\,, \qquad n'L' = -2''.168\,, \qquad n'T' = 0''.546$

§. 14. Berechnung des Theils der mit t^2 multiplicirten Jupiterstörungen, welcher von den Aenderungen der Coordinaten der störenden Planeten abhängt.

159.

Die unter § 6, ε) entwickelten Glieder geben

$n'(A'K' + B'L') = +0''.0034$ . . . . vom Saturn

$n'(C'K' + D'L') = -0.0004$ . . . . vom Uranus
$\qquad -0.1566$ . . . . vom Saturn
$\qquad +0.0001$ . . . . vom Mars
Summe $= -0''.1569$

$n'(E'K' + F'L') = \quad 0''.0000$ . . . . vom Uranus
$\qquad -0.4662$ . . . . vom Saturn
$\qquad +0.0001$ . . . . vom Mars
Summe $= -0''.4661$

Ferner erhält man für die unter § 6, ζ) entwickelten Glieder:

$n'(A'K' - B'L') = -0''.0017$ . . . . vom Saturn

$n'(C'K' - D'L') = +0.0049$ . . . . vom Saturn während alle übrigen Planeten nichts Merkliches liefern. Die unter § 6, η) entwickelten Glieder werden alle unmerklich. Endlich geben die unter § 6, θ) entwickelten Glieder

$$
\begin{aligned}
n'(C'T' + D'U') &= -0''.0001 \;\ldots\text{ vom Uranus}\\
&\; +0.0615 \;\ldots\text{ vom Saturn}\\
&\;0.0000 \;\ldots\text{ von der Erde}\\
&\; -0.0001 \;\ldots\text{ von der Venus}\\
\text{Summe} &= +0''.0613
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n'(E'T' + F'U') &= -0''.0003 \;\ldots\text{ vom Uranus}\\
&\; +0.1323 \;\ldots\text{ vom Saturn}\\
&\; -0.0002 \;\ldots\text{ von der Erde}\\
&\; +0.0001 \;\ldots\text{ von der Venus}\\
\text{Summe} &= +0''.1319
\end{aligned}
$$

Die Summen aller dieser Glieder ergeben

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &\qquad\qquad + 0''.0034\, n t^2\\
&- 0''.1569\, n t^2 \sin g - 0''.4661\, n t^2 \cos g\\
&- \text{etc.}\\
\nu = &+ 0''.0785\, n t^2 \cos g - 0''.2331\, n t^2 \sin g\\
&+ \text{etc.}\\
\frac{u}{\cos i} = &+ 0''.0596\, n t^2 \sin g + 0''.1368\, n t^2 \cos g\\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}
$$

160.

Multiplicirt man nun die eben erhaltenen Glieder mit n, und dehnt sie auf die Vielfachen von g aus; multiplicirt man ferner die im Art. 138 zusammengestellten Glieder mit n^2, und addirt beide Producte, so erhält man das Endresultat

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &\qquad\qquad\qquad + 0''.0122\left(\tfrac{t}{100}\right)^2\\
&- 0''.1983\left(\tfrac{t}{100}\right)^2 \sin g - 0.3454\left(\tfrac{t}{100}\right)^2 \cos g\\
&- 0.0037\left(\tfrac{t}{100}\right)^2 \sin 2g - 0.0144\left(\tfrac{t}{100}\right)^2 \cos 2g\\
&- 0.0001\left(\tfrac{t}{100}\right)^2 \sin 3g - 0.0005\left(\tfrac{t}{100}\right)^2 \cos 3g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu = {} & + 0''.0065\left(\frac{t}{100}\right)^2 \\
& + 0.0996\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos g - 0''.1726\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin g \\
& + 0.0029\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 2g - 0.0083\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin 2g \\
& + 0.0001\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 3g - 0.0004\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin 3g \\
\frac{u}{\cos i} = {} & \qquad\qquad - 0''.0019\left(\frac{t}{100}\right)^2 \\
& + 0''.0179\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin g + 0.0448\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos g \\
& \qquad\qquad + 0.0041\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 2g \\
& \qquad\qquad + 0.0003\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 3g
\end{aligned}
$$

Nachschrift.

Die vorstehende Abhandlung ist von ihrem am 28. März 1874 verstorbenen Verfasser bereits längere Zeit vor seinem Ableben niedergeschrieben worden, doch wünschte er dieselbe erst nach Hinzufügung gewisser Ergänzungen zu veröffentlichen. Da der Tod die Ausführung dieser Absicht vereitelt hat, so hat man geglaubt, die hinterlassene Abhandlung, obschon sie nicht ihrem definitiven Ziele entgegenführt worden ist, in unveränderter Gestalt publiciren zu sollen. Vor Allem wird man den Mangel eines einleitenden Vorworts aus dem Umstande zu erklären haben, dass der Verfasser nicht die letzte Hand an die Redaction seiner Arbeit legen konnte. Im Uebrigen sollten die beabsichtigten Ergänzungen hauptsächlich den zweiten Theil der Abhandlung betreffen, welcher von § 7 an die Anwendung der im ersten Theile gegebenen theoretischen Entwickelungen auf die numerische Berechnung der Jupiterstörungen enthält.

Die in der Abhandlung gelehrte Methode bezieht sich überhaupt auf diejenigen Fälle, in denen man die planetaren Störungen mit aller wünschenswerthen Genauigkeit erhält, indem man nur die ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung berücksichtigt. Zu diesen Fällen gehören die Störungen des Jupiter, mit Ausschluss der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radiusvectors. Für die Berechnung der letzteren hat der Verfasser in seinen früheren Arbeiten die erforderlichen Vorschriften gegeben, und einen grossen Theil der numerischen Rechnungen in seiner von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift aus dem Jahre 1830 ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden, so dass von den durch den Saturn bewirkten Jupiterstörungen zur Zeit der Abfassung der gegenwärtigen Abhandlung nur der Betrag der Glieder erster Ordnung bekannt war. Wie im Art. 130 angeführt, ist jedoch zur vollständigen Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radiusvector, als in Bezug auf die Breite, die Kenntniss der Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen erforderlich, so dass die a. a. Orte berechneten, der Zeit t proportionalen Störungsglieder in $n\delta z$ ν und u nicht als die vollständigen Werthe dieser Säcularänderungen angesehen werden können. Aehnliches gilt, wie im Art. 131 ausdrücklich hervorgehoben, von den in n^2t^2 multiplicirten Gliedern, welche von den Aenderungen der Coordinaten des Jupiters abhängen. Endlich ist Art. 153 darauf hingewiesen, dass auch die Glieder höherer Ordnung in den Säcularänderungen des Saturn durch den Jupiter von Einfluss werden können auf die in $nn't^2$ multiplicirten Glieder der Jupiterstörungen, welche von den Aenderungen der Coordinaten des störenden Planeten abhängen. Infolge dieser Einflüsse werden auch die in den Artt. 138 und 159 entwickelten und Art. 160 zusammengezogenen Störungsglieder noch Modificationen zu erleiden haben.

Da der Verfasser definitive Resultate zu publiciren wünschte, und Hr. von Glasenapp sich unter seiner Leitung mit der vollständigen Berechnung der Störungen der Länge und des Radiusvectors des Jupiter durch den Saturn nach den dafür geeigneten Methoden beschäftigte, so sollte das Ergebniss dieser Berechnung abgewartet werden, um auf Grund desselben die oben berührten Ergänzungen vorzunehmen. Hr. v. Glasenapp, der die Resultate seiner Rechnungen dem Verfasser noch kurze Zeit vor dessen Ableben mittheilen konnte, beabsichtigt sich auch der Ausführung dieser ergänzenden Rechnungen zu unterziehen, so dass gegründete Aussicht vorhanden ist, bald in den Besitz der vollständigen, nach Hansen's Methoden berechneten Jupiterstörungen zu gelangen. Es ist hier der Ort zu erwähnen, dass von Art. 109 an die sämmtlichen in den §§. 8—14 enthaltenen numerischen Rechnungen, zu deren Revision der Verfasser keine Zeit gefunden, unter den Augen des Letzteren von Hrn. v. Glasenapp mit grosser Sorgfalt revidirt und wo nöthig emendirt worden sind.

Die Thätigkeit des Unterzeichneten hat sich darauf beschränken müssen den Druck des Manuscripts zu überwachen, und nach Möglichkeit auf die Beseitigung von Schreib- und Druckfehlern bedacht zu sein. Er kann nicht erwarten, dass ihm bei der grossen Menge von Formeln und Zahlen diess allenthalben gelungen sei, doch darf er versichern, dass er in seinen auf die Herstellung eines möglichst fehlerfreien Druckes gerichteten Bemühungen seitens der Breitkopf-Härtel'schen Druckerei die bereitwilligste Unterstützung gefunden hat. Zu nachträglichen Berichtigungen haben ihm bloss zwei Stellen Anlass gegeben:

S. 307 und 308 ist statt Υ der lateinische Buchstabe Y gedruckt;

S. 472 und 473 scheint bei den aus §. 6, ζ) entspringenden Gliedern in $\frac{u}{\cos i}$ der Factor $\frac{1}{2}$ weggefallen zu sein. Unter dieser Voraussetzung erhält man, wenn zugleich die von der Excentricität abhängigen Glieder ergänzt werden:

$$\begin{aligned}
n\delta z = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 0''.0034\, nt^2 \\
& - 0''.1569\, nt^2 \sin g \;\; - 0.4661\, nt^2 \cos g \\
& - 0.0019\, nt^2 \sin 2g - 0.0056\, nt^2 \cos 2g \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 0.0001\, nt^2 \cos 3g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu = & + 0''.0019\, nt^2 \\
& + 0.0785\, nt^2 \cos g \;\; - 0''.2331\, nt^2 \sin g \\
& + 0.0019\, nt^2 \cos 2g - 0.0056\, nt^2 \sin 2g \\
& + 0.0001\, nt^2 \cos 3g - 0.0002\, nt^2 \sin 3g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 0''.0097\, nt^2 \\
& + 0''.0604\, nt^2 \sin g \;\; + 0.1344\, n^2 t^2 \cos g \\
& + 0.0015\, nt^2 \sin 2g + 0.0032\, nt^2 \cos 2g \\
& + 0.0001\, nt^2 \sin 3g + 0.0001\, nt^2 \cos 3g
\end{aligned}$$

Durch Zusammenziehung dieser Ausdrücke mit den im Art. 138 entwickelten Gliedern, und nach Einführung des numerischen Werthes von n, gehen die Endresultate des Art. 160 hervor, in denen die auf die Breite bezüglichen Glieder jetzt folgende Werthe annehmen:

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 0''.0018 \left(\frac{t}{100}\right)^2 \\
& + 0''.0183 \left(\frac{t}{100}\right)^2 \sin g + 0.0436 \left(\frac{t}{100}\right)^2 \cos g \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 0.0041 \left(\frac{t}{100}\right)^2 \cos 2g \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 0.0002 \left(\frac{t}{100}\right)^2 \cos 3g
\end{aligned}$$

Juni 1875.

W. Scheibner.

Inhaltsübersicht.