Ueber allgemeine Collineationsachsen und Collineationsscheitel.

In einer kleinen Schrift über Correlation der geometrischen Figuren, welche im Jahre 1801 erschienen ist, hat Carnot, so viel mir bekannt ist, zuerst ein Princip aufgesucht, um die Eigenschaften einer ursprünglichen Figur auf die verwandten Gebilde, welche aus jener durch die Veränderung gewisser Theile derselben in unmerklichen Abstufungen hervorgehen, zu übertragen, und hat dadurch die Geometrie in eine neue Bahn geleitet. Die tiefen Forschungen über die räumlichen Beziehungen, welche diese Richtung in kurzer Zeit hervorgerufen hat, sind bereits zu einem solchen Umfange angewachsen, daß jede künftige Geschichte der mathematischen Wissenschaften ihnen einen eignen Abschnitt zu widmen genöthigt sein wird. Indessen möchte der Historiker, welcher seine Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand richtete, einstweilen noch keinen Ruhepunct finden, von wo aus er mit Sicherheit die einzelnen Erscheinungen auf diesem weiten Gebiete zu überschauen und zu ordnen im Stande wäre. Die Abstractionen, zu welchen wir, anfangs von synthetisch gewählten Constructionen und Größenbeziehungen ausgehend, allmälig fortgeschritten sind, werden immer allgemeiner, führen dadurch immer mehr zur Erkenntniß des innern Zusammenhangs bis dahin getrennter Anschauungsweisen und lassen uns unter den möglichen Uebertragungsprincipien diejenigen auffinden, welche die Vortheile der bisherigen theilen oder nach andern Richtungen hin fruchtbar sind. Ich werde es versuchen, in dieser Gelegenheitsschrift die Theorie der Collineationsachsen und Collineationspuncte, wie sie Hr. Magnus zuerst gegeben hat, um dadurch jene besondere Art der Collineation zu charakterisiren, welche durch das analoge Verhältniß der ähnlichen und ähnlichliegenden zu den ähnlichen Figuren bezeichnet ist, zu jener Allgemeinheit zu erheben.

1. Wenn zwei geometrische Gebilde **A** und **B** aus gleichen oder auch verschiedenartigen Elementen zusammengesetzt und so von einander abhängig sind, daß jedem Elemente des einen Gebildes ein oder auch mehre Elemente in dem andern entsprechen, so läßt sich diese Abhängigkeit analytisch unter drei verschiedenen Formen auffassen. Denken wir uns das Element, welches jedem Gebilde zum Grunde liegt, durch eigenthümliche Coordinaten dargestellt, so kommen wir zur Uebertragung der Eigenschaften des einen Gebildes auf das andere, indem wir in allen analytischen Ausdrücken die Coordinaten vertauschen. Jedes dieser Elemente ist dann als ein ursprünglich Gegebenes zu betrachten, wie der Punct, die gerade Linie, der Kreis in den entsprechenden Coordinatensystemen. Dagegen können wir auch das eine Element durch eine Gleichung oder ein System von Gleichungen, welche in ihren Coefficienten die Coordinaten des andern involviren, darstellen und gelangen dadurch nicht nur zu neuen Uebertragungsprincipien, sondern auch zur Untersuchung der Eigenschaften jenes Elementes selbst. Diese beiden Abhängigkeitsformen habe ich in meinen „Uebertragungsprincipien", so weit dieselben bis jetzt erschienen sind, verfolgt. Stellen wir drittens das Element von **A** durch die Coordinaten **xyz...**, das von **B** durch **uvw...** dar, so ist der allgemeinste Ausdruck ihrer Abhängigkeit von einander in einem System von eben so vielen Gleichungen, als Coordinaten zu jedem Elemente gehören, enthalten. Wir beschränken uns hier auf denjenigen Fall, wo jedes System nur zwei veränderliche Coordinaten hat, und die einen durch algebraische rationale Functionen der andern mit gleichen Nennern gegeben sind; setzen daher