hier ein fester Kreis und die Tangenten an denselben zwar Linien des ersten Grades in Kreiscoordinaten, aber nur dann gerade Linien sind, wenn die Coordinatenachse selbst geradlinig ist.

In die Form (19) können die Transformationsformeln (17) für die beiden letzten Coordinatensysteme nicht durch bloße Verlegung der Achsen übergehen, weil hier die alten Coordinaten nicht durch lineare und ganze Functionen der neuen ausgedrückt werden; es ist vielmehr eine Aenderung der Coordinatenconstruction selbst nöthig, welche wir hier nicht erörtern können, weil sie uns zu weit führen würde.

8. Die Identität (13) kann nicht in die Form (16) gebracht werden, wenn $\mathbf{W} - \mathbf{P} = 0$, also $\mathbf{W} = \mathbf{P}$ ist; aber sie reducirt sich in diesem besondern Falle auf

$$m(\mathbf{V} - v\mathbf{W}) + n(\mathbf{U} - u\mathbf{W}) = 0$$

und da n von u und v unabhängig sein muß, so können $\mathbf{V} - v\mathbf{W}$ und $\mathbf{U} - u\mathbf{W}$ nur durch einen constanten Factor von einander verschieden sein. Setzen wir daher

$$\mathbf{V} - v\mathbf{W} = n\mathbf{T},$$

so muß

$$\mathbf{U} - u\mathbf{W} = -m\mathbf{T}$$

werden. Dadurch erhalten die Transformationsformeln diese Gestalt:

$$y = v + \frac{n\mathbf{T}}{\mathbf{W}}, \quad x = u - \frac{m\mathbf{T}}{\mathbf{W}}. \qquad (20)$$

Sie gehören zwei collinearen Gebilden an, welche zugleich eine Collineationsachse $\mathbf{T} = 0$ haben. Während p ganz beliebig bleibt, hat n nur einen einzigen Werth, d. h. die Gleichung (11) stellt hier in Punctcoordinaten ein System paralleler Geraden, in Liniencoordinaten eine continuirliche Reihe von Puncten, welche mit dem Anfangspuncte in gerader Linie liegen, und in Kreiscoordinaten ein System von parallelen Linien des ersten Grades dar. Der Colliniationsscheitel zweier solcher Gebilde ist also im ersten Falle ein Punct, und im letzten ein Kreis, der im Unendlichen liegt, bei Liniencoordinaten aber eine gerade Linie, die durch den Anfangspunct der Coordinaten geht; also in allen drei Fällen ein Element mit unendlichen Coordinaten, dessen Lage durch das Verhältniß derselben näher bestimmt wird.

9. Für Punctcoordinaten stellen die Formeln (19) die Collineation mit einem Scheitel in völliger Allgemeinheit dar. Sollen nun x' und y' Verhältnisse linearer Functionen von u' und v' sein, so muß offenbar $\mathbf{P}'$ constant und $\mathbf{W}'$ linear sein. Unter dieser Form kommen dieselben bei Magnus vor und stellen dann in Punctcoordinaten zwei collineare und collinearliegende Gebilde dar, deren Collineationsscheitel der Anfangspunct der Coordinaten ist. Da aber der Grad einer Function durch die Verlegung der Achsen bei Punctcoordinaten nicht geändert werden kann, so beziehen sich auch die Formeln (17) auf zwei collineare und collinearliegende Gebilde, wenn $\mathbf{P}$ constant und $\mathbf{W}$ vom ersten Grade ist; nur ist der Collineationspunct hier nicht mehr der Anfangspunct der Coordinaten, sondern der Punct $a\,b$.

Zu demselben Resultate kommen wir aber auch unmittelbar durch die Betrachtung der Formeln (17), wodurch es sich zugleich auf die Coordinatensysteme der geraden Linie und des Kreises ausdehnt, d. h. für ein constantes $\mathbf{P}$ und ein lineares $\mathbf{W}$ beziehen sich die Formeln (17) auf zwei collineare Gebilde mit einem Scheitel, in welchen sich nur Oerter desselben Grades entsprechen, insbesondere bei Punctcoordinaten eine gerade Linie einer geraden Linie, bei Liniencoordinaten ein Punct einem Puncte und bei Kreiscoordinaten eine Linie ersten Grades wieder einer Linie desselben Grades.

10. Indem wir bei der Bestimmung des Collineationsscheitels, wie sie in den vorhergehenden Nummern niedergelegt ist, wieder zu unsern allgemeinsten Formeln (1) zurückgegangen sind, haben wir dieselbe von dem Dasein der Collineationsachse ganz unabhängig erhalten. Transformiren wir dagegen die Gleichung (11) durch die Formeln (8), so treten wir in die Frage ein, ob zwei collineare Gebilde mit einer Collineationsachse auch einen Scheitel haben können. Dabei gelangen wir aber leicht auf dem in 6. befolgten Wege wieder zu den Formeln (17), zu welchen auch (1) geführt haben. Demnach müssen sich (17) unter (8) subsumiren lassen; die Collineation mit einer Achse ist die allgemeinere Ver-