diejenigen Werthe von R und S, welche man erhält, indem man x und y an die Stelle von u und v setzt, so stellt für einen beliebigen constanten Werth von n die Gleichung

$$R_1 + n\,S_1 = 0 \qquad (21)$$

jeden Ort des Gebildes A dar, welcher die gemeinsamen Elemente der beiden Curven (6) enthält und mit diesen von demselben Grade ist, wobei jedoch der Grad von R und S nach 3. durch den Uebergang zu drei Veränderlichen beurtheilt und daher immer dem von W gleich geachtet werden muß. Gemäß (8) erhalten wir aber für denjenigen Ort in B, welcher (21) entspricht,

$$R + nS - \left\{\left(\frac{dR}{dv} + n\frac{dS}{dv}\right)S + \left(\frac{dR}{du} + n\frac{dS}{du}\right)R\right\}\frac{T}{W}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2R}{dv^2} + n\frac{d^2S}{dv^2}\right)S^2 + 2\left(\frac{d^2R}{dv\,du} + n\frac{d^2S}{dv\,du}\right)SR + \left(\frac{d^2R}{du^2} + n\frac{d^2S}{du^2}\right)R^2\right\}\frac{T^2}{W^2}$$
$$- \text{etc.} = 0. \qquad (22)$$

Die beiden durch (21) und (22) dargestellten entsprechenden Oerter müssen aber als einerlei angesehen werden, wenn die letztere von diesen Gleichungen für jeden beliebigen Werth von n in die Form

$$(R + nS)P = 0 \qquad (23)$$

übergeht, wo wieder P eine von n unabhängige veränderliche Function bezeichnet und dieselbe geometrische Bedeutung hat wie früher. Offenbar setzt aber die Uebereinstimmung von (22) und (23) die beiden Identitäten

$$-\left(\frac{dR}{dv}S + \frac{dR}{du}R\right)\frac{T}{W} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2R}{dv^2}S^2 + 2\frac{d^2R}{dv\,du}SR + \frac{d^2R}{du^2}R^2\right)\frac{T^2}{W^2} - \ldots = RP,$$
$$-\left(\frac{dS}{dv}S + \frac{dS}{du}R\right)\frac{T}{W} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2S}{dv^2}S^2 + 2\frac{d^2S}{dv\,du}SR + \frac{d^2S}{du^2}R^2\right)\frac{T^2}{W^2} - \ldots = SP$$

voraus, wobei indessen P seine Bedeutung geändert hat. Die Discussion der letztern kann im Allgemeinen nicht gegeben werden, indem sie zu einer Abhängigkeit der Coefficienten in den einzelnen hier vorkommenden Functionen führt. Des Raumes halber müssen wir uns daher auf die Feststellung der vorhergehenden Grundformeln beschränken.

11. Neben der Collineationsachse und dem Collineationsscheitel treten bei jeder collinearen Verwandtschaft noch zwei andere feste Linien hervor, welche von der Lage der entsprechenden Figuren unabhängig sind, und gewinnen dadurch eine besondere Bedeutsamkeit. Hr. Magnus hat sie bei zwei collinearen Gebilden der ersten Ordnung Gegenachsen genannt; sie sind dort, wie die Collineationsachse, vom ersten Grade und für Punctcoordinaten mit ihr parallel; jedem der beiden verwandten Gebilde gehört eine derselben an und sie ist in ihm der Ort, auf welchem sich je zwei gerade Linien jenes Gebildes, denen zwei parallele gerade Linien des andern Gebildes entsprechen, begegnen. Aber unabhängig von der Collineationsachse und dem Collineationsscheitel, so wie von jedem besondern Coordinatensystem, tritt uns diese Linie für das Gebild B schon aus unsern allgemeinsten Formeln (1) entgegen und hat zu ihrer Gleichung $W = 0$. Denn für alle Elemente in B, deren Coordinaten in diese Gleichung passen, werden x und y unendlich; dieser Schluß läßt sich aber auch umkehren, wenn wir von solchen Elementen absehen, welche beiden Gebilden zugleich angehören, also entweder auf einer Collineationsachse liegen oder als ein Collineationsscheitel anzusehen sind. Haben also zwei Oerter ersten Grades aus A ein Element mit unendlichen Coordinaten gemein, so gehört sein entsprechendes Element in B der festen Linie $W = 0$ an. Sind insbesondere bei Punctcoordinaten zwei gerade Linien aus A parallel, so schneiden sie sich auf jener festen Linie. Bei Liniencoordinaten haben je zwei Puncte aus A, welche mit dem Anfangspuncte der Coordinaten in gerader Linie liegen, zu ihren entsprechenden Linien in B zwei Oerter, die mit $W = 0$ dieselbe gerade Linie berühren, und bei Kreiscoordinaten liegen je zwei Oerter aus B, welche zwei parallelen Linien ersten Grades aus A entsprechen, mit $W = 0$ um denselben Elementarkreis. Für collineare Gebilde der ersten Ordnung mit einer Collineationsachse unterscheidet sich die Gleichung der letztern, welche nach 10. $W - P = 0$ ist, gemäß 9. nur in dem constanten Gliede von $W = 0$.