Um die Richtigkeit der letztern nur durch ein Zahlenbeispiel darzuthun, so sey $a = 120°$, $b = 30°$, mithin $\frac{1}{2}(a + b) = 75°$, $\frac{1}{2}(a - b) = 45°$, daher

$\cos. 30° + \cos. 120° = 2 \sin. 75° \sin. 45$, d. i.

$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} = 2. \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}). \frac{1}{2}\sqrt{2}$, oder

$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = \frac{1}{4}(\sqrt{12} + 2) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$; desgl.

$\cos. 30° - \cos. 120° = 2 \cos. 75° \cos. 45°$, d. i.

$\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} = 2. \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}.) \frac{1}{2}\sqrt{2}$, oder

$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) = \frac{1}{4}(\sqrt{12} - 2) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

Die Fehlerhaftigkeit des Gebrauchs der Formeln α), wenn $a > 90°$ ist, zeigt sich am auffallendsten durch Verbindung derselben. In den Büchern findet man z. B.

$$\frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. b + \cos. a} = \text{tang.} \tfrac{1}{2}(a + b) \text{ tang.} \tfrac{1}{2}(a - b),$$

was nur richtig ist, wenn $a < 90°$, wogegen sich, wenn $a > 90°$, ergiebt

$$\frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. b + \cos. a} = \cot. \tfrac{1}{2}(a + b) \cot. \tfrac{1}{2}(a - b).$$

Wenn man in die erstere dieser Formeln die Werthe ebendesselben Zahlenbeispiels setzt, so erhält man $2 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$, mithin offenbaren Widerspruch! — Man könnte zwar hier schnell einwenden: „man müsse in der ersten Formel die Zeichen vor cos. a, weil a stumpf, umkehren." Dadurch erhält man allerdings auf beiden Seiten $2 + \sqrt{3}$, was aber falsch ist, denn $2 - \sqrt{3}$ ist der allein richtige Werth, welchen auch die zweite Formel giebt.

Da die Formeln N. 3 und 4 ohne Zeichenveränderung besonders in der sphärischen Trigonometrie häufig gebraucht werden, so werden die Gleichungen, in welche man sie setzt, entweder nur auf die Fälle beschränkt, wo a, oder was an dessen Stelle steht, $< 90°$ ist, oder, wo dieses nothwendig $> 90°$ seyn muß, begeht man wesentliche Fehler. Siehe §. 16. 17.

10.

Setzt man ferner in den Formeln §. 9. N. 3 u. 4, α.) und β.) $b = 0°$, so ist

α) wenn $a < 90°$,

1) $1 + \cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} a$,

2) $1 - \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$,

β) wenn aber $a > 90°$,

1) $1 + \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$,

2) $1 - \cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} a$.

In beiden Fällen erhält man

γ) $(1 + \cos. a)(1 - \cos. a) = 1 - \cos.^2 a = \sin.^2 a = 4 \sin.^2 \frac{1}{2} a. \cos.^2 \frac{1}{2} a$; dagegen

$$\delta)\ \frac{1 + \cos. a}{1 - \cos. a} = \begin{cases} \cot.^2 \tfrac{1}{2} a, & \text{wenn } a < 90° \ (\alpha) \\ \text{tang.}^2 \tfrac{1}{2} a, & \quad " \quad a > 90° \ (\beta) \end{cases}$$

und umgekehrt. Die mit β) bezeichneten finden sich nicht in den Büchern, aber die Richtigkeit derselben läßt sich auch an Figuren ebenso beweisen, als die erstern α).