Setzt man nun $a = (b + c)$, so ist

$$\cos.(b + c) = 2\cos.^2 \tfrac{1}{2}(b + c) - 1 = 1 - 2\sin.^2 \tfrac{1}{2}(b + c)\ (\alpha),$$

wenn $(b + c) < 90°$; wenn aber $(b + c) > 90°$,

$$\cos.(b + c) = 2\sin.^2 \tfrac{1}{2}(b + c) - 1 = 1 - 2\cos.^2 \tfrac{1}{2}(b + c)\ (\beta).$$

Da nun der letztere Umstand in Büchern gar nicht beachtet wird und nur die ersteren Formeln (α) angewendet werden, so werden die Beweise den Gleichungen, welche man durch sie hervorbringt, entweder auf die Fälle beschränkt, wo $(b + c) < 90°$ ist, mithin sehr einseitig, oder, wo $(b + c) > 90°$ ist, fehlerhaft. S. §. 17.

b) Betrachtung trigonometrischer Gleichungen.

11.

Die Einseitigkeit der angeführten goniometrischer Formeln, wie sie in den Büchern stehen und gebraucht werden, erstreckt sich nun hauptsächlich auf die gewöhnlichen Umwandelungen der Gleichungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Wenn die Seiten eines ebenen Dreiecks A, B, C, die Winkel a, b, c bedeuten (welche auch von Vega gebrauchte Bezeichnung aus mehr als einem Grunde die bequemste ist), so wird gewöhnlich aus der bekannten Gleichung

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,C\cos.a\ (1),$$ oder

$$2\,B\,C\cos.a = B^2 + C^2 - A^2\ (2),$$

$$B\,C\cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}(A + B + C).\ \tfrac{1}{2}(B + C - A)\ (3)$$ und

$$B\,C\sin.^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2}(A + B - C)\ \tfrac{1}{2}(A + C - B)\ (4)$$

hergeleitet. Da (1) und (2) nur, wenn $a < 90°$, gültig sind und die Transformation mittelst §. 10. α) geschieht, so werden (3) und (4) nur für diese Fälle bewiesen und für die, wo $a > 90°$ ohne Beweis angenommen. Die Formeln §. 10. α) würden auch zu einem falschen Resultate dabei führen. — Aber wenn $a > 90°$ ist, wo auch $A^2 > (B^2 + C^2)$, so ist, was nur in wenigen Büchern beiläufig bemerkt wird,

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2\,B\,C\cos.a\ (5),$$ mithin

$$A^2 - (B^2 + C^2) = 2\,B\,C\cos.a\ (6).$$

Daraus gehen aber die Gleichungen (3) und (4) nicht mittelst §. 10. α), sondern der dafür gültigen §. 10. β) hervor. Die Entwickelung derselben im letztern Falle wird in Büchern schweigend übergangen, nicht weil sie nicht nöthig wäre, was doch nachgewiesen werden müßte, sondern weil sie durch die einseitigen Formeln §. 10. α) nicht gefunden werden, und man läßt sie lieber blos einseitig bewiesen. — Daß aber die Mühe der Umwandelung ganz erspart werden kann, wird sich §. 23. zeigen.

12.

Dieselbe Einseitigkeit haben aus ebendenselben Ursachen auch folgende aus §. 11. (1) abgeleiteten Gleichungen.