15.

Wenn ferner die Gleichung II auf ein Polardreieck, worin alle Seiten und Winkel $> 90°$ sind, wofür sie nicht bewiesen ist, angewendet wird, um dadurch die Gleichung III zu erhalten, so muß solches Verfahren zwar als ein „sinnreiches Zeichenspielwerk" gelten, aber der Ernst und die Strenge der Wissenschaft kann es schwerlich als Beweis anerkennen. Es wird daher die Gl. III in solchen Büchern ohne Beweis angenommen und gebraucht. Wenn die ältere Beweisart derselben durch Anwendung der für das rechtwinkliche Kugeldreieck bewiesenen Formeln sich zwar auch nur auf die Fälle beschränkt, wo die Seiten den Quadranten nicht übersteigen, so ist sie doch für diese streng bewiesen. Da sie aber, wie jene II, unter andern auch die Unbequemlichkeit in sich trägt, daß sie zur Anwendung der Logarithmen erst umgewandelt werden muß, so kann es für die Methode, wovon im zweiten Abschn. die Rede seyn wird, gleichgültig seyn, ob sie bewiesen werden oder nicht.

16.

Daß aber die Umwandelungen der Gleichungen §. 13. II. III die Beweise der Gültigkeit der dadurch hervorgebrachten in weit engere Grenzen setzen, wird sich durch wenige Beispiele, so viel die Kürze dieser Schrift gestattet, leicht darthun lassen.

Aus der Gleichung §. 13. II macht man

$$1 + \cos. a = \frac{\sin. B. \sin C - \cos. B \cos. C + \cos. A}{\sin. B \ \sin. C}$$

$$\text{und schreibt} = \frac{\cos. A - (\cos. B \cos. C - \sin. B \sin. C)}{\sin. B. \sin. C.}$$

Nun setzt man das Eingeschlossene $= \cos. (B + C)$ was nur gilt, wenn $(B + C) < 90°$ (§. 6). Die durch das weitere Verfahren hervorgehende bekannte Gleichung für $\cos.^2 \frac{1}{2} a$, wenn $a < 90°$, wird daher blos für Fälle bewiesen, wo die Summe von 2 Seiten $(B + C) < 90°$ ist. Wie einseitig! — Um sie aber für die Fälle zu beweisen, wo $(B + C) > 90°$ ist, so muß $\sin. B \sin. C - \cos. B \cos. C = \cos. (B + C)$ (§. 6. β) gesetzt und dann $\cos. (B + C) + \cos. A$ nach §. 9. N. 3. β) verwandelt werden. Aber da letztere in den Büchern fehlen, so bleibt auch der Beweis der *sphärischen* Gleichung einseitig.

Von andern Fällen aber, z. B. wo $a > 90°$ und $\cos. a = \dfrac{\cos. B \cos. C - \cos. A}{\sin. B \ \sin. C}$ ist in den Büchern gar nicht die Rede und es würden auch die einseitigen Formeln, die man gewöhnlich nur braucht, zu falschen Resultaten führen. Man scheint es daher vorgezogen zu haben, alle andern Fälle mit Stillschweigen zu übergehen und die Theorie mangelhaft zu lassen.

17.

Nicht weniger einseitig werden die Gleichungen bewiesen, welche man durch die Umwandelungen der §. 13. III hervorzubringen pflegt.

1) Auch wenn $A < 90°$ ist, so wird die Gl. für $\cos. \frac{1}{2} A$ auf die Fälle beschränkt, wo der entgegenliegende W. $a < 90°$ ist. Wenn aber $a > 90°$, mithin $\cos. a$ negativ ist, so würde man mittelst der gewöhnlich gebrauchten Formel §. 9. N. 4. α) durch die