23.

Setzt man nun die halbe Summe der Seiten des Dreiecks $\frac{1}{2}(A + B + C) = P$ so erhält man aus diesen 4 Gleichungen bei Vertauschung der Buchstaben folgende 12:

$$P = \overset{1.}{\frac{A \cos.\frac{1}{2} b \cos.\frac{1}{2} c}{\sin.\frac{1}{2} a}} = \overset{2.}{\frac{B \cos.\frac{1}{2} a \cos.\frac{1}{2} c}{\sin.\frac{1}{2} b}} = \overset{3.}{\frac{C \cos.\frac{1}{2} a \cos.\frac{1}{2} b}{\sin.\frac{1}{2} c}}$$

$$P - A = \overset{4.}{\frac{A \sin.\frac{1}{2} b \sin.\frac{1}{2} c}{\sin.\frac{1}{2} a}} = \overset{5.}{\frac{C \sin.\frac{1}{2} b \cos.\frac{1}{2} a}{\cos.\frac{1}{2} c}} = \overset{6.}{\frac{B \sin.\frac{1}{2} c \cos.\frac{1}{2} a}{\cos.\frac{1}{2} b}}$$

$$P - B = \overset{7.}{\frac{B \sin.\frac{1}{2} a \sin.\frac{1}{2} c}{\sin.\frac{1}{2} b}} = \overset{8.}{\frac{A \sin.\frac{1}{2} c \cos.\frac{1}{2} b}{\cos.\frac{1}{2} a}} = \overset{9.}{\frac{C \sin.\frac{1}{2} a \cos.\frac{1}{2} b}{\cos.\frac{1}{2} c}}$$

$$P - C = \overset{10.}{\frac{C \sin.\frac{1}{2} a \sin.\frac{1}{2} b}{\sin.\frac{1}{2} c}} = \overset{11.}{\frac{B \sin.\frac{1}{2} a \cos.\frac{1}{2} c}{\cos.\frac{1}{2} b}} = \overset{12.}{\frac{A \sin.\frac{1}{2} b \cos.\frac{1}{2} c}{\cos.\frac{1}{2} a}}.$$

Durch einfache Multiplication je zweier zweckmäßig gewählter erhält man nun ohne weiteres jene verlangten Gleichungen (§. 20), z. B. aus N. 2 und 5 oder N. 3 und 6; desgl. aus N. 7 und 10, oder N. 9 und 11. Daß sich auf gleiche Art aus den andern und durch Division von je 2 die Gleichungen für 5 Stücke ergeben, leuchtet ebenso von selbst ein, als daß je 2 neben einanderstehende die Grundgleichung enthalten, von welchen die Zusammensetzung ausging.

24.

In dem §. 12. betrachteten Falle, wenn B, C, a bekannt und A zu berechnen ist, wo man zweimal zu rechnen nicht vermeiden kann, scheinen folgende Verfahren, ohne der Umwandelung zu bedürfen, die bequemsten.

1) Wenn man in §. 12. (2) $(B + C) = s$ und $4\,B\,C \cos.^2 \frac{1}{2} a = n^2$ setzt und n berechnet, so erhält man $A^2 = s^2 - n^2$, folglich $A = \sqrt{(s + n)(s - n)}$.

2) Da nach §. 21. 4) durch $\tang. \frac{1}{2}(b - c) = \frac{(B - C) \cot. \frac{1}{2} a}{B + C}$

$\frac{1}{2}(b - c)$ leicht gefunden wird, so erhält man, ohne b und c selbst zu berechnen, nach 1. 2.

$$A = \frac{(B + C) \sin. \frac{1}{2} a}{\cos. \frac{1}{2}(b - c)} = \frac{(B - C) \cos. \frac{1}{2} a}{\sin. \frac{1}{2}(b - c)}.$$

b) der sphärischen Trigonometrie.

25.

Wenn in der sphärischen Trigonometrie die berührten Uebelstände beseitiget werden sollen, so sind zweierlei Bedingungen zu erfüllen: