Math.
487

Sächsische Landesbibliothek –
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/1
gefördert von der
Deutschen Forschungsgemeinschaft

Mathem. 497. e.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/2
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Ueber die

gänzliche Entbehrlichkeit

der gewöhnlichen mangelhaften und einseitigen

Umwandelungen

der

Gleichungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie

von

Dr. Friedrich Schmeißer,
Prorector des Gymnasiums zu Frankfurth a. d. O.

Frankfurth a. d. O.,
in der Hoffmannschen Buchhandlung.
1833.

25600.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/3
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Sächsische Landesbibliothek –
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/4
gefördert von der
Deutschen Forschungsgemeinschaft

Vorerinnerung.

Daß nach den bekannten Methoden, nach welchen die ebene und sphärische Trigonometrie sowohl in Büchern, als auch bei dem Unterrichte vorgetragen zu werden pflegen, nicht alle, in der sphärischen sogar die wenigsten, Gleichungen so, wie sie zur Anwendung der Logarithmen brauchbar sind, gefunden, sondern deshalb durch oft weitläufige analytische Operationen erst in solche umgewandelt, oder zum Theil Hülfswinkelformeln gebildet werden; ferner auch, daß man die einfachsten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie nicht unmittelbar erhält, sondern aus den gewöhnlich so genannten Fundamentalgleichungen durch theils kunstreiche, theils kunstgriffige, umständliche und schwierige, Arten des Verfahrens „herleitet" — vielmehr zwangsvoll herausrechnet, — scheint nicht zu den Vortheilen, sondern zu den bisher nothwendigen Uebeln gerechnet werden zu müssen, welche diese höchst wichtigen Zweige der Mathematik drücken und das Studium derselben erschweren und hindern. Zwar soll damit nicht verneint werden, daß eine gewisse Kenntniß goniometrischer Formeln nebst der Geschicklichkeit und Fertigkeit im Gebrauche derselben dem Anfänger nützlich und nöthig, daß die zweckmäßige Wahl und Anwendung der Ausdrücke, wie sie der analytische Gang der Entwickelung fordert, geeignet seyen, die Urtheilskraft zu üben und den Scharfsinn in Anspruch zu nehmen, dazu daß Einzelnen die sinnreiche, wenn auch nicht immer geistreiche, Beschäftigung und Rechnung mit Formeln Vergnügen gewähre; allein die oft regellosen Zusammensetzungen und Trennungen, wobei zuweilen auch unnöthiges herbei und wieder fortgeschafft wird, und die wiederholten Substitutionen, Elimationen und Operationen aller Art, welche während des unnatürlichen Zusammenbaues der Sachen kein Ende nehmen, sind für den größten Theil der Anfänger sehr ermüdend und machen ihm das Studium dieser schönen Wissenschaft nicht nur lästig und schwierig, sondern verursachen auch in so fern, als auf kürzern Wegen und mit leichtern Mitteln Ziel und Zweck erreicht werden kann, einen erheblichen Verlust an Zeit und Kraft. In Büchern, welche für den Unterricht geschrieben sind, wird von den für die Logarithmenrechnung nicht brauchbaren Gleichungen häufig gesagt: „durch eine leichte Umwandelung erhält man sofort folgende für jene bequeme Gleichung." Nun rechnet man aber so fort ganze Seiten voll, um letztere herauszubringen und zieht den Lernenden durch eine ihm dunkele Reihe von Operationen hin, wodurch seine Einsicht in die eigentliche Beschaffenheit der Sache nicht gefördert, dagegen seine Aufmerksamkeit ermüdet oder wenigstens langweilig beschwert wird. Diese Behauptung wird durch die Urtheile ausgezeichneter Lehrer unterstützt, welche die Meinung bereits öffentlich ausgesprochen haben, daß in den, nicht den anschaulich lehrenden Griechen, sondern den rechnenden Franzosen abgelernten analytischen Behandlungsweisen geometrischer Gegenstände gerade die Haupthindernisse allgemeinerer Verbreitung der Kenntnisse derselben liegen. Ohne auf die Frage hier einzugehen, ob man dieser Meinung unbedingt beitreten könne, wird

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/5 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

doch jeder Sachkenner diesem Urtheile beistimmen, daß die Trigonometrie an Einfachheit und Kürze und der Unterricht darin zugleich an Leichtigkeit und Zeit gewinnen müsse, wenn die gewöhnlichen Umwandelungen der Gleichungen ganz vermieden werden können, d. h. wenn man andere Wege kennt, auf welchen sich der Zweck einfacher und wenigstens eben so vollkommen erreichen läßt.

Das letztere aber will in mancher Hinsicht nicht viel sagen. Denn die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie werden in den Lehrbüchern gewöhnlich nur für Kugeldreiecke, deren Seiten $< 90°$ sind, mithin einseitig, bewiesen und aufgestellt, und, so oft es zum Dienste der Logarithmen nöthig ist, mittelst Formeln umgewandelt, welche nur für die Fälle bewiesen werden, wo die Summe von 2 Winkeln oder Seiten $< 90°$ ist. In so fern nun in der Mathematik nur wahr und gültig ist, was und in so weit es bewiesen ist, so bringen die weitschweifigen, beschwerlichen und zeitraubenden Umwandelungen, wie sie gewöhnlich geschehen, der Wissenschaft selbst auch noch den Nachtheil, daß sie die Gültigkeit der dadurch hervorgebrachten Gleichungen auf die nur geringe Anzahl Fälle beschränken, wo die Summe von 2 Seiten oder Winkeln $< 90°$ ist! — Es dürfte daher der Vorschlag einer Methode, nach welcher die in mehr als einer Hinsicht nachtheiligen Umwege ganz vermieden und der Zweck kürzer und hinsichtlich der Allgemeinheit der Beweise auch vollkommener erreicht würde, nicht unnütz erscheinen.

Indem der Verfasser im nachstehenden Aufsatze eine solche darzubieten unternimmt, thut er es im Vertrauen auf die Humanität, mit welcher in dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften neue Ansichten und Entdeckungen stets aufgenommen zu werden pflegen. In so fern er sich aber verpflichtet fühlt, das Bishergesagte zu rechtfertigen, müssen zuvörderst einige goniometrische Formeln und trigonometrische Gleichungen in gründliche Betrachtung gezogen werden. Es scheint darum zweckmäßig, die zu behandelnden Sachen in 2 Abschnitte zu vertheilen. Wenn in Hinsicht der ebenen Trigonometrie die Sache selbst Kürze gestattet, so wird er sich in Hinsicht der sphärischen in so fern auch kürzer fassen können, als er sich auf seine bereits 1831. geschriebene und in dem vom Herrn geh. O. B. R. Crelle herausgegebenen Journal für reine und angewandte Mathematik ꝛc. Bd. 10. S. 129. u. ff. abgedruckte Abhandlung beziehen und die darin dargestellte Methode der Beweisführung als bekannt voraussetzen darf *).

---

*) Bei der Beziehung auf diese Abhandlung hält es der Verf. für Pflicht auf einige Druckfehler, ob sie gleich jedem Sachkenner als solche einleuchten, hier aufmerksam zu machen.

S. 129	Z. 4	st. Dreiecke	l. Kugeldreiecke.
„ „	„ 25	„ können	„ kann.
„ 130	„ 20	„ auf	„ durch.
„ 141	„ 11	„ bi. di. cosc.	„ 2 bi. di. cosc.
„ „	„ 12	„ fi. ei. cosc.	„ 2 fi. ei. cosc.
„ 146	„ 21	„ $\sin \frac{1}{2}(a + b + c)$	„ $\cos. \frac{1}{2}(a + b + c.)$
„ 149	„ unterste	„ $\cos. \frac{2}{1} a$	„ $\sin \frac{2}{1} a.$
„ 151	„ 3	„ $>$	„ $<$
„ „	„ 6	„ $\cos. \frac{1}{2} c$	„ $\cos. \frac{2}{1} c.$
„ 153	„ 12	„ cot. b.	„ tang. b.

Tafel I. Fig. 6. ist die Linie ce noch zu ziehen.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/6
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Erster Abschnitt.

Von der Mangelhaftigkeit und Einseitigkeit goniometrischer Formeln und trigonometrischer Gleichungen.

1.

Die Mängel der trigonometrischen Gleichungen, welche hier in Betrachtung gezogen werden sollen, liegen hauptsächlich in den bekannten goniometrischen Formeln, deren man sich theils zur Entwickelung einiger Gleichungen, theils zur Umwandelung derselben um der Anwendung der Logarithmen willen bedient. Sie sind zwar von zweierlei Art, indem sie theils die Vorzeichen, theils den Umstand, daß sie nicht allgemein, sondern blos für eine beschränkte Anzahl Fälle bewiesen zu werden pflegen, theils beides zugleich betreffen, sind aber meistens so in einander verkettet, daß sie nicht weiter getrennt werden können. — Da der Verf. es hier nur mit dem zu thun hat, was und wie es in vielen sehr bekannten Büchern vorgetragen wird, so kann und wird er sich die namentliche Aufführung derselben und speciellen Nachweisungen ersparen, um auch jede geringste Verletzung zu vermeiden.

a) Betrachtung goniometrischer Functionen und Formeln.

2.

Alle goniometrische Functionen sind, wie bekannt, in zweierlei Beziehung zu nehmen. In der einen sind sie in oder außerhalb des Functionskreises, links oder rechts, aufwärts oder abwärts entweder vom Mittelpunkte oder von Grenzpunkten der Halbmesser aus gedachte Linien, welche sich ihrer Größe nach gegenseitig bestimmen; in der andern sind sie Zahlwerthe, welchen der Halbmesser des Kreises als Einheit zum Grunde liegt. Nur in der ersten finden unter ihnen Gegensätze statt, wie unter den Halbmessern selbst, mit welchen sie in Verbindung stehen und werden in so fern mit + und — bezeichnet; als Zahlenwerthe aber sind sie an sich weder positiv, noch negativ, wie die Zahlen an sich überhaupt. Von zusammengesetzten goniometrischen Ausdrücken, worin jene Zeichen die Addition und Subtraction bedeuten, ist hier nicht die Rede.

3.

Was nun die Bezeichnung der Linearfunctionen betrifft, so ist zwar folgende Theorie, wie sie auch in guten und den meisten Lehrbüchern gefunden wird, ganz richtig:

a) Jede Function nimmt von ihrem Minimo bis zu ihrem Maximo und von da wieder bis zum Minimo gleichartig zu und ab, d. h. sie behält ebendasselbe Zeichen. So sind z. B. die Sinus des 1sten und 2ten Quadranten positiv, die des 3ten und 4ten negativ ꝛc.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/7 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

b) Jede Function, welche bis zu ihrem Minimo abgenommen hat, nimmt von da in entgegengesetzter Richtung zu und wird mit jener ungleichartig, d. i. wenn sie positiv abnahm, wie z. B. die Cosinus des 1sten Quadranten, so nimmt sie negativ wieder zu, bis sie das Maximum erreicht hat und folgt von da an dem erstern Gesetze (a). So nehmen daher die Cosinus des 2ten Quadr. negativ zu, die des 3ten negativ ab bis zum Minimo bei 270° und im 4ten Quadr. positiv wieder zu.

Und diese Gesetze haben nicht nur in der Goniometrie, sondern auch in der Astronomie ihre vollkommene Richtigkeit.

4.

Aber dieselben Schriftsteller, welche in ihren Büchern diese Gesetze richtig aufstellen, kommen mit ihrer eigenen Lehre dadurch in Widerspruch, daß sie die Tangenten des 2ten Quadr. negativ bezeichnen, die doch nach demselben positiv seyn müssen, wie umgekehrt im 3ten. Denn die Tangenten wachsen und nehmen ab, wie die Sinus und bleiben nach §. 3. a) von 0° bis 180° gleichartig, mithin positiv, wogegen sie im 3ten und 4ten Quadr. jenen entgegengesetzt nach §. 3. b, das entgegensetzende negative Zeichen erhalten müssen. Dieses ist der Natur der Sache und den Gesetzen so gemäß, und so klar, daß man sich über die ebenso willkührliche, als fehlerhafte Umkehrung nur wundern kann.

Der Irrthum scheint eine sehr einfache Quelle gehabt zu haben. Wenn a einen stumpfen Winkel bedeutet, so ist bekanntlich cos. a negativ, wie der Halbmesser, wovon er ein Theil ist. Nun pflegt man aber in Büchern den Halbmesser des Functionskreises unbedingt $= 1$ zu setzen und nach der Formel $\text{tang. } a = \frac{+\text{ sin. } a}{-\text{ cos. } a}$ zu schließen, daß die Tangente des stumpfen Winkels negativ sey. Allein da der Halbmesser des 2ten Quadranten negativ seyn muß, wenn der Cosinus als Theil davon negativ ist und jener Formel eine Proportion zum Grunde liegt, worin je 2 entsprechende Glieder gleichartig seyn müssen, so ist $\text{tang. } a = \frac{-\text{ r. } + \text{ sin. } a}{-\text{ cos. } a} = + \frac{\text{r sin. } a}{\text{cos. } a}$, mithin auch dieser Formel nach positiv, wie sie ihrer Lage und dem Gesetze nach seyn muß. — Daß aber die Tangenten des 3ten Quadr. aus denselben Gründen negativ seyn müssen, leuchtet von selbst ein.

5.

Gegen die positive Bezeichnung könnte man vielleicht, ungeachtet der Beseitigung des gewöhnlich als Hauptgrund angeführten, einwenden, daß man mit der negativen bei dem praktischen Gebrauche zu richtigen Resultaten gelange und daß sich die Richtigkeit der gewöhnlichen Annahme durch andere goniometrische Formeln nachweisen lasse. Beides ist näher zu betrachten.

In der ebenen Trigonometrie hat dieser Umstand auf das Resultat nirgends Einfluß; wo aber in astronomischen Rechnungen Gleichungen der Art gebraucht werden, kommen sehr oft 2 Tangenten darin vor und der Fehler, welcher der Bezeichnung wegen durch die eine entstünde, wird durch die andere wieder aufgehoben. Aber man findet, wenn die sphärische Formel nichts ungereimtes enthält, bei Bezeichnung der Tangente des 2ten

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/8 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Quadr. mit + und der des 3ten mit — ebendieselben richtigen Resultate. In solchen Fällen könnte demnach die Bezeichnung dieser Functionen zwar für die Praxis ganz gleichgültig scheinen, aber sie ist es nicht für die Wissenschaft, wo man nichts lehren darf, was nicht richtig ist.

Aber nicht in allen Fällen hebt sich auf diese Weise der Fehler. Von vielen Beispielen mag hier wenigstens eins zum Beweise dienen.

Wenn man an einem Orte auf der nördlichen Hemisphäre der Erde bei südlicher Abweichung der Sonne = d den halben Tagbogen kennt, welcher = a sey, und will daraus die Aequatorhöhe = Entfernung des Zenits vom Nordpol = B berechnen, so sey $(90° + d) = C$, indem die dritte Seite $A = 90°$ seyn muß. Da hier der W. a $< 90°$, $C > 90°$ ist, so ist nach der Gleichung §. 13. II. $o = -\text{Cos. C. cos. B} + \text{sin. C sin. B cos. a}$, folglich cot. B = tang. C. cos. a. Bezeichnet man nun tang. C negativ, so erhält man für cot. B. einen negativen Ausdruck, mithin $B > 90°$, was offenbar falsch ist.

Was ferner die zweite Einwendung betrifft, so müssen die Formeln, worauf man sie stützt, in nähere Betrachtung gezogen werden.

6.

Wenn a und b zwei Winkel sind und $a > b$, so werden folgende Formeln:

1) $\sin.(a + b) = \sin. a \cos. b + \cos. a \sin. b$,
2) $\sin.(a - b) = \sin. a \cos. b - \cos. a \sin. b$,
3) $\cos.(a - b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b$,
4) $\cos.(a + b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b$ (α),

in Büchern nur für die Fälle bewiesen, wo $(a + b) < 90°$ ist, und es ist bekannt, daß um diese für die Trigonometrie so wichtigen Formeln als allgemeingültig auf dem gewöhnlichen Wege zu beweisen, entweder alle einzelnen Hauptfälle durchgegangen werden müssen, wozu in kleinen Schriften recht sinnreiche Verfahren angegeben worden sind, oder daß die scharfsinnigsten Bemühungen, den Beweis mit einem Male zu führen, wegen Dunkelheit und Schwierigkeit den gewünschten Beifall nicht erlangt haben. — In der angeführten Abhandlung (Crelle's Journal ꝛc. Bd. 10. S. 133) hat der Verf. nach einer andern Methode, (von welcher er nachher erfahren hat, daß sie auch Carnot gebraucht habe) diese 4 Formeln auf einmal in so weit bewiesen, als $(a + b)$ zwischen 0° und 180° beträgt, welches auch dem Verfahren ganz gnügt, welches hier im 2ten Abschnitte angegeben werden wird. Nach dieser Beweisart, deren Eleganz man nicht verkennen wird, ergiebt sich, daß die Formeln No. 1. 2. 3. nach Gestalt und Inhalt richtig sind, wenn $(a + b)$ zwischen 0° und 180° beträgt, N. 4. aber nur, wenn $(a + b) < 90°$. Wenn dagegen $(a + b)$ zwischen 90° — 180° fällt, so muß N. 4. folgende Gestalt haben:

$\cos.(a + b) = \sin. a \sin. b - \cos. a \cos. b$ (β), weil in diesem Falle allemal $\sin. a \sin. b > \cos. a \cos. b$ ist (wie dies auch in d. angef. Werke aus Taf. I. Fig. 7. einleuchtet). Man könnte zwar der Formel N. 4. (α) die Gestalt (β) dadurch geben, daß man auf beiden Seiten — vorsetzte; aber da die Formel blos Zahlwerthe enthält, so ist das isolirt vorgesetzte Zeichen — unnütz. Bei der dort gebrauchten Beweisart, welche letztere Formel unmittelbar giebt, kann die Zeichenveränderung darum nicht stattfinden, weil dabei der Durchmesser des Functionskreises als Einheit angenommen ist, der mit sich selbst nicht in Gegensatz kommen und darum weder positiv, noch negativ seyn kann.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/9 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

7.

Durch Division der Formel §. 6. No. 1. mit No. 4 (α) und Reduction mit cos. a cos. b erhält man nun für die Fälle, wo $(a + b) < 90°$ ist

$$\alpha)\ \text{tang}\ (a + b) = \frac{\text{tang. a} + \text{tang. b}}{1 - \text{tang. a tang. b}},$$

welcher Ausdruck allemal positiv ist, weil tang. a tang. b < 1. Wenn dagegen $(a + b) > 90°$, so muß mit der Formel §. 6. N. 4 (β) dividirt werden, wodurch sich ergiebt

$$\beta)\ \text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. a} + \text{tang. b}}{\text{tang. a tang. b} - 1}.$$

Da nun in diesen Fällen tang. a tang. b > 1, so ist der Ausdruck, mithin die Tang. des stumpfen Winkels $(a + b)$ ebenfalls allemal positiv. Wenn man, um die Annahme, daß die Tang. des stumpfen W. negativ sey, zu rechtfertigen, mit der einseitigen Formel §. 6. N. 4 (α) dividiren wollte, so würde man einen wesentlichen Fehler begehen, weil jene Formel ihrer Gestalt nach für diese Fälle nicht gültig ist.

8.

Wiewohl hier der Raum nicht gestattet, auf andere, mitunter seltsame Arten, wie man die negative Bezeichnung der Tangenten stumpfer Winkel zu rechtfertigen sich bemüht hat, einzugehen, so mögen doch 2 derselben, weil sie oft in Büchern vorkommen, nicht ganz unberührt bleiben. Manche Schriftsteller lehren nämlich, die Tangenten des 2ten Quadr. seyen nicht die des 2ten, sondern des 4ten, welche allerdings negativ sind. Gegen diesen Irrthum ist nichts weiter zu bemerken, als daß 2 nicht 4 ist. — Andere sagen: „da die „Tangentenreihe von 0° bis 90° eine steigende ist, deren letztes Glied bei 90° im Unend„lichen verschwindet (?), so geht sie über 90° hinaus in das Entgegengesetzte (?) u. s. w.“ Allein tang. 90° verschwindet nicht, sondern erreicht vielmehr das Maximum, und daß tang. 90° nicht mehr als Größe denkbar ist, ist kein „Verschwinden“ derselben. Die Tangentenreihe nimmt vielmehr, wie diese Schriftsteller selbst lehren, von ihrem Maximo gleichartig, mithin im 2ten Quadr. positiv wieder ab, wie sich dies auch durch richtig, nicht einseitig, gebildete Formeln bestätigt, bis sie bei 180° verschwindet und von da an negativ wächst und abnimmt (§. 3.)

9.

Setzt man in den Formeln (§. 6.) a statt $(a + b)$, b statt $(a - b)$, so findet man in den Büchern durch Addition und Subtraction

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin. a + \sin. b = 2 \sin. \tfrac{1}{2} (a + b) \cos. \tfrac{1}{2} (a - b), \\ 2)\ \sin. a - \sin. b = 2 \sin. \tfrac{1}{2} (a - b) \cos. \tfrac{1}{2} (a + b), \\ 3)\ \cos. b + \cos. a = 2 \cos. \tfrac{1}{2} (a + b) \cos. \tfrac{1}{2} (a - b) \\ 4)\ \cos. b - \cos. a = 2 \sin. \tfrac{1}{2} (a + b) \sin. \tfrac{1}{2} (a - b) \end{array}\right\} \alpha.$$

Es sind aber N. 3 und 4 nur für die Fälle gültig, wo $a < 90°$ ist (§. 6.); wenn dagegen a zwischen 90° und 180° fällt, so müssen diese Formeln wegen §. 6. (β) so heißen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{N. 3.)}\ \cos. b + \cos. a = 2 \sin. \tfrac{1}{2} (a + b) \sin. \tfrac{1}{2} (a - b) \\ \text{N. 4.)}\ \cos. b - \cos. a = 2 \cos. \tfrac{1}{2} (a + b) \cos. \tfrac{1}{2} (a - b) \end{array}\right\} (\beta.)$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/10 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Um die Richtigkeit der letztern nur durch ein Zahlenbeispiel darzuthun, so sey $a = 120°$, $b = 30°$, mithin $\frac{1}{2}(a + b) = 75°$, $\frac{1}{2}(a - b) = 45°$, daher

$$\cos. 30° + \cos. 120° = 2 \sin. 75° \sin. 45, \text{ d. i.}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} = 2.\ \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) = \tfrac{1}{4}(\sqrt{12} + 2) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 1); \text{ desgl.}$$

$$\cos. 30° - \cos. 120° = 2 \cos. 75° \cos. 45°, \text{ d. i.}$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2} = 2.\ \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}.)\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) = \tfrac{1}{4}(\sqrt{12} - 2) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Die Fehlerhaftigkeit des Gebrauchs der Formeln α), wenn $a > 90°$ ist, zeigt sich am auffallendsten durch Verbindung derselben. In den Büchern findet man z. B.

$$\frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. b + \cos. a} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a + b)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a - b),$$

was nur richtig ist, wenn $a < 90°$, wogegen sich, wenn $a > 90°$, ergiebt

$$\frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. b + \cos. a} = \cot.\ \tfrac{1}{2}(a + b)\ \cot.\ \tfrac{1}{2}(a - b).$$

Wenn man in die erstere dieser Formeln die Werthe ebendesselben Zahlenbeispiels setzt, so erhält man $2 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$, mithin offenbaren Widerspruch! — Man könnte zwar hier schnell einwenden: „man müsse in der ersten Formel die Zeichen vor cos. a, weil a stumpf, umkehren." Dadurch erhält man allerdings auf beiden Seiten $2 + \sqrt{3}$, was aber falsch ist, denn $2 - \sqrt{3}$ ist der allein richtige Werth, welchen auch die zweite Formel giebt.

Da die Formeln N. 3 und 4 ohne Zeichenveränderung besonders in der sphärischen Trigonometrie häufig gebraucht werden, so werden die Gleichungen, in welche man sie setzt, entweder nur auf die Fälle beschränkt, wo a, oder was an dessen Stelle steht, $< 90°$ ist, oder, wo dieses nothwendig $> 90°$ seyn muß, begeht man wesentliche Fehler. Siehe §. 16. 17.

10.

Setzt man ferner in den Formeln §. 9. N. 3 u. 4, α.) und β.) $b = 0°$, so ist

α) wenn $a < 90°$,

1) $1 + \cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} a$,

2) $1 - \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$,

β) wenn aber $a > 90°$,

1) $1 + \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$,

2) $1 - \cos. a = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} a$.

In beiden Fällen erhält man

γ) $(1 + \cos. a)(1 - \cos. a) = 1 - \cos.^2 a = \sin.^2 a = 4 \sin.^2 \frac{1}{2} a. \cos.^2 \frac{1}{2} a$; dagegen

$$\delta) \frac{1 + \cos. a}{1 - \cos. a} = \begin{cases} \cot.^2 \frac{1}{2} a, & \text{wenn } a < 90° \ (\alpha) \\ \text{tang.}^2 \frac{1}{2} a, & \text{"} \ a > 90° \ (\beta) \end{cases}$$

und umgekehrt. Die mit β) bezeichneten finden sich nicht in den Büchern, aber die Richtigkeit derselben läßt sich auch an Figuren ebenso beweisen, als die erstern α).

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/11 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Setzt man nun $a = (b + c)$, so ist

$$\cos.(b + c) = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} (b + c) - 1 = 1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} (b + c) \ (\alpha),$$

wenn $(b + c) < 90°$; wenn aber $(b + c) > 90°$,

$$\cos.(b + c) = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} (b + c) - 1 = 1 - 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} (b + c) \ (\beta).$$

Da nun der letztere Umstand in Büchern gar nicht beachtet wird und nur die ersteren Formeln (α) angewendet werden, so werden die Beweise den Gleichungen, welche man durch sie hervorbringt, entweder auf die Fälle beschränkt, wo $(b + c) < 90°$ ist, mithin sehr einseitig, oder, wo $(b + c) > 90°$ ist, fehlerhaft. S. §. 17.

b) Betrachtung trigonometrischer Gleichungen.

11.

Die Einseitigkeit der angeführten goniometrischer Formeln, wie sie in den Büchern stehen und gebraucht werden, erstreckt sich nun hauptsächlich auf die gewöhnlichen Umwandelungen der Gleichungen der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Wenn die Seiten eines ebenen Dreiecks A, B, C, die Winkel a, b, c bedeuten (welche auch von Vega gebrauchte Bezeichnung aus mehr als einem Grunde die bequemste ist), so wird gewöhnlich aus der bekannten Gleichung

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2\,B\,C \cos.a \ (1), \text{ oder}$$

$$2\,B\,C \cos.a = B^2 + C^2 - A^2 \ (2),$$

$$B\,C \cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} (A + B + C) . \tfrac{1}{2} (B + C - A) \ (3) \text{ und}$$

$$B\,C \sin.^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} (A + B - C) \tfrac{1}{2} (A + C - B) \ (4)$$

hergeleitet. Da (1) und (2) nur, wenn $a < 90°$, gültig sind und die Transformation mittelst §. 10. α) geschieht, so werden (3) und (4) nur für diese Fälle bewiesen und für die, wo $a > 90°$ ohne Beweis angenommen. Die Formeln §. 10. α) würden auch zu einem falschen Resultate dabei führen. — Aber wenn $a > 90°$ ist, wo auch $A^2 > (B^2 + C^2)$, so ist, was nur in wenigen Büchern beiläufig bemerkt wird,

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2\,B\,C \cos.a \ (5), \text{ mithin}$$

$$A^2 - (B^2 + C^2) = 2\,B\,C \cos.a \ (6).$$

Daraus gehen aber die Gleichungen (3) und (4) nicht mittelst §. 10. α), sondern der dafür gültigen §. 10. β) hervor. Die Entwickelung derselben im letztern Falle wird in Büchern schweigend übergangen, nicht weil sie nicht nöthig wäre, was doch nachgewiesen werden müßte, sondern weil sie durch die einseitigen Formeln §. 10. α) nicht gefunden werden, und man läßt sie lieber blos einseitig bewiesen. — Daß aber die Mühe der Umwandelung ganz erspart werden kann, wird sich §. 23. zeigen.

12.

Dieselbe Einseitigkeit haben aus ebendenselben Ursachen auch folgende aus §. 11. (1) abgeleiteten Gleichungen.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/12 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

$$A^2 = 4\,B\,C \sin.^2 \tfrac{1}{2}\,a + (B - C)^2 \quad (1)$$

$$A^2 = (B + C)^2 - 4\,B\,C \cos.^2 \tfrac{1}{2}\,a \quad (2)$$

und es wird in Büchern ebenfalls nicht bewiesen, daß sie für $a > 90°$ gültig sind. Es sind daher auch die Hülfswinkelformeln, wenn man in (1) $\frac{4\,B\,C \sin.^2 \frac{1}{2}\,a}{(B - C)^2} =$ tang.^{2} φ und in (2) $\frac{4\,B\,C \cos.^2 \frac{1}{2}\,a}{(B + C)^2} = \cos.^2 \varphi$ setzt, nur einseitig bewiesen. — Ueber die bequemste Art der Auflösung dieses Falles s. unten §. 24.

13.

Die Theorie der Kugeldreiecke pflegt man nach dem gewöhnlichen Verfahren auf folgende 3 Gleichungen, worin ebenfalls A, B, C die Seiten und a, b, c die Winkel eines beliebigen Kugeldreiecks bedeuten mögen, zu gründen:

I) sin. A sin. b = sin. B sin. a;

II) cos. A. = cos. B. cos. C + sin. B sin. C cos. a;

III) cos. a = sin. b sin. c cos. A. — cos. b cos. c.

Die Gleichung I. wird zwar in Büchern auch nur einseitig bewiesen aufgestellt, obgleich der Beweis, wenn A und B den Quadranten übertreffen, auch nach der gewöhnlichen Methode leicht ist. Viele halten es aber für einen Gewinn für die Wissenschaft (?) — für den Unterricht ist es gewiß keiner, — nach der Methode von de Gua die Gleichung I. aus der II. „abzuleiten" (eigentlich zwar sinnreich, aber auch sehr unnatürlich und gewaltsam herauszuarbeiten), um mit den Franzosen zu sagen, daß alle Gleichungen der sphär. Trig. dieser einzigen abgezwungen werden können. Abgesehen von dem etwas seltsamen Verfahren wird der „Gewinn" nach Betrachtung der Gleichung II. sich ermessen lassen (§. 14.)

14.

Die Gleichung II. wird in Büchern nur für Kugeldreiecke bewiesen, deren Seiten und Winkel $< 90°$ sind und gilt in der Gestalt, wie sie gewöhnlich aufgestellt wird, auch für keine andern; sie ist daher einseitig. Nun behauptet man zwar, daß sie für andere Fälle gültig sey, wenn man die erforderliche Umtauschung der Zeichen vor den Cosinus vornehme. Ob solche Behauptung vor dem strengen Richterstuhle der Mathematik als Beweis gelten könne, muß zwar eines Jeden Urtheile überlassen werden; der Verf. bezweifelt es mit allen Denjenigen, welche viele Mühe und Scharfsinn angewendet haben, um die allgemeinere Gültigkeit dieser sehr wichtig scheinenden Gleichung durch andere Beweisarten darzuthun, welche in Lehrbücher wohl darum nicht übergetragen worden sind, weil wegen ihrer Weitschweifigkeit und Dunkelheit schwerlich zu hoffen ist, daß sie je werden bei dem Unterrichte gebraucht werden können. — Wenn nun in Büchern die Einseitigkeit dieser Gleichung anerkannt, aber eben sie auch zugleich als Fundament der ganzen sphär. Trigon. angenommen wird, so muß man auch annehmen, daß die ganze Theorie derselben nur als ein gleichsam einseitiges Gebäu gelten soll! — Daß dieselbige aber als gebrechliches Fundament dieser so wichtigen Wissenschaft ganz unnöthig sey, wird aus dem 2ten Abschnitte klar werden.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/13 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

15.

Wenn ferner die Gleichung II auf ein Polardreieck, worin alle Seiten und Winkel $> 90°$ sind, wofür sie nicht bewiesen ist, angewendet wird, um dadurch die Gleichung III zu erhalten, so muß solches Verfahren zwar als ein „sinnreiches Zeichenspielwerk" gelten, aber der Ernst und die Strenge der Wissenschaft kann es schwerlich als Beweis anerkennen. Es wird daher die Gl. III in solchen Büchern ohne Beweis angenommen und gebraucht. Wenn die ältere Beweisart derselben durch Anwendung der für das rechtwinkliche Kugeldreieck bewiesenen Formeln sich zwar auch nur auf die Fälle beschränkt, wo die Seiten den Quadranten nicht übersteigen, so ist sie doch für diese streng bewiesen. Da sie aber, wie jene II, unter andern auch die Unbequemlichkeit in sich trägt, daß sie zur Anwendung der Logarithmen erst umgewandelt werden muß, so kann es für die Methode, wovon im zweiten Abschn. die Rede seyn wird, gleichgültig seyn, ob sie bewiesen werden oder nicht.

16.

Daß aber die Umwandelungen der Gleichungen §. 13. II. III die Beweise der Gültigkeit der dadurch hervorgebrachten in weit engere Grenzen setzen, wird sich durch wenige Beispiele, so viel die Kürze dieser Schrift gestattet, leicht darthun lassen.

Aus der Gleichung §. 13. II macht man

$$1 + \cos. a = \frac{\sin. B. \sin C - \cos. B \cos. C + \cos. A}{\sin. B \sin. C}$$

$$\text{und schreibt} = \frac{\cos. A - (\cos. B \cos. C - \sin. B \sin. C)}{\sin. B. \sin. C.}$$

Nun setzt man das Eingeschlossene $= \cos. (B + C)$ was nur gilt, wenn $(B + C) < 90°$ (§. 6). Die durch das weitere Verfahren hervorgehende bekannte Gleichung für $\cos.^2 \frac{1}{2} a$, wenn $a < 90°$, wird daher blos für Fälle bewiesen, wo die Summe von 2 Seiten $(B + C) < 90°$ ist. Wie einseitig! — Um sie aber für die Fälle zu beweisen, wo $(B + C) > 90°$ ist, so muß $\sin. B \sin. C - \cos. B \cos. C = \cos. (B + C)$ (§. 6. β) gesetzt und dann $\cos. (B + C) + \cos. A$ nach §. 9. N. 3. β) verwandelt werden. Aber da letztere in den Büchern fehlen, so bleibt auch der Beweis der *sphärischen* Gleichung einseitig.

Von andern Fällen aber, z. B. wo $a > 90°$ und $\cos. a = \frac{\cos. B \cos. C - \cos. A,}{\sin. B \sin. C}$ ist in den Büchern gar nicht die Rede und es würden auch die einseitigen Formeln, die man gewöhnlich nur braucht, zu falschen Resultaten führen. Man scheint es daher vorgezogen zu haben, alle andern Fälle mit Stillschweigen zu übergehen und die Theorie mangelhaft zu lassen.

17.

Nicht weniger einseitig werden die Gleichungen bewiesen, welche man durch die Umwandelungen der §. 13. III hervorzubringen pflegt.

1) Auch wenn $A < 90°$ ist, so wird die Gl. für $\cos. \frac{1}{2} A$ auf die Fälle beschränkt, wo der entgegenliegende W. $a < 90°$ ist. Wenn aber $a > 90°$, mithin $\cos. a$ negativ ist, so würde man mittelst der gewöhnlich gebrauchten Formel §. 9. N. 4. α) durch die

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/14 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Umwandelung ein falsches Ergebniß erhalten, das richtige dagegen durch die §. 9. N. 4. β) welche für diese Fälle gilt, aber in den Büchern nicht steht.

2) Fast schlimmer steht es in manchen Büchern mit der Gleich. für $\sin. \frac{1}{2} A$. Obgleich A und $a < 90°$ angenommen werden, so findet man doch aus

$$1 - \cos. A = \frac{\sin. b \sin. c - \cos. b \cos. c. - \cos. a}{\sin. b. \sin. c.}$$

$= - [\cos. (b + c) + \cos. a]$ hergeleitet, was schon darum ungereimt ist, weil $1 - \cos. A$ nie negativ seyn kann. Daraus macht man nun nach §. 9. α), 10. α) $\sin.^2 \frac{1}{2} A = - \frac{\cos. \frac{1}{2} (a + b + c) \cos. \frac{1}{2} (b + c - a)}{\sin b. \sin. c.}$

und schreibt nach Ausziehung der $\sqrt{}$ so, daß $\sin. \frac{1}{2} A$ als unmögliche Größe erscheint, was wieder ungereimt ist. In manchen Büchern setzt man hinzu, der Werth für $\sin. \frac{1}{2} A$ sey nicht imaginär, weil $\cos. \frac{1}{2} (a + b + c)$ allemal negativ sey; aber warum schreibt man ihn imaginär? Es scheint doch damit nichts anderes gesagt zu seyn, als das Geschriebene soll das Gegentheil bedeuten von dem, was geschrieben ist! — Aber jenes Verfahren ist dennoch falsch. Denn wenn $a < 90°$ ist, so muß nothwendig $(b + c) > 90°$, mithin $\sin. b \sin. c - \cos. b \cos. c = \cos. (b + c)$ seyn, daher

$$1 - \cos. A = \frac{\cos. (b + c) - \cos. a}{\sin. b \sin. c} \text{ (§. 6. N. 4. } \beta\text{)},$$

woraus die Gleichung nach §. 9. N. 4. β) richtig folgt. — (Welche Bewandniß es mit der durch $\cos. \frac{1}{2} (a + b + c)$ ausgedrückten Größe hat, vergl. Crelle's Journal ꝛc. Bd. 10. S. 145 §. 28).

Es bleibt immer räthselhaft, daß berühmte Mathematiker jene Ungereimtheit geduldet haben und gegen den Gebrauch der Formeln nicht mißtrauisch geworden sind. Blos von Lagrange erinnert sich der Verf. gelesen zu haben, daß er sich über die Erscheinung, daß $1 - \cos. A$ einer negativen Größe gleich sey, gewundert habe, ohne solche erklären zu können. Aber wie leicht läßt sie sich erklären! Von den andern Fällen, wo A oder a oder beide $> 90°$ sind, ist in den Büchern gar nicht die Rede und deshalb die hier betrachteten Gleichungen in mehr als einer Hinsicht einseitig bewiesen.

18.

Wenn es auch die Grenzen dieser Schrift gestatteten, so würde der Verf. die geehrten Leser, wie sich selbst ermüden, wenn er fortfahren wollte, die mehrfache Einseitigkeit nachzuweisen, welche in den zwar verschiedenen, aber sämmtlich gezwungenen Entwickelungsarten sowohl der Neperschen Analogien, als auch der vier wichtigen von Delambre (1807) und von Gauß (1809) ohne Beweis bekannt gemachten Gleichungen zwischen allen sechs Elementen eines Kugeldreiecks vorkommen. Denn wenn zwar die Bemühungen ausgezeichneter Mathematiker die letztern durch Beweise zu begründen, die größte Achtung und Dank verdienen, so haben doch die in Büchern bekannt gemachten Arten auch alle hier berührten Mängel. Die Nachsicht, womit sie dessenungeachtet aufgenommen worden sind, scheint ihren Grund theils sowohl in dem Gefühle zu haben, aus welchem man mit Mangelhafterem sich begnügt, so lange man nicht Vollkommeneres hat, als auch in der Schonung der

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/15 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Mühe, welche sich bei dem gewöhnlichen Verfahren vervielfältigen würde, je größere Allgemeinheit erreicht werden sollte; anderntheils auch in dem Umstande, daß jene Gleichungen auch für die Fälle, für welche sie nicht bewiesen werden, zufällig gültig erfunden werden.

Außerdem muß es wohl einem jeden Mathematiker eben so befremdend als lästig seyn, zu jenen vier so einfachen Gleichungen auf so unnatürlichen und beschwerlichen Umwegen zu gelangen. Wiewohl seit 1811, wo der ehrwürdige J. v. Sniadecki in Wilna zuerst, wie es scheint, mit einer aus den Cagnolischen Gleichungen abgeleiteten Beweisart, welche er nach seiner Angabe (sphär. Trigon. §. 6.) den 24. März d. K. Akademie der Wiss. in St. Petersburg überreichte, auftrat, scharfsinnige Bearbeiter sich bemüht haben, das umständliche Verfahren zu verkürzen, so scheint doch im Wesentlichen nicht viel gewonnen worden zu seyn. In so fern aber die übliche Herleitung der Neperschen Analogien schon als ein Umweg erkannt werden muß, so macht die von Delambre (Astronomie. Par. 1814. p. 161 etc.) gewählte Methode, jene vier berühmten Gleichungen aus den Neperschen auszuscheiden, welche umgekehrterweise leichter aus jenen erfolgen, sogar einen doppelten Umweg!

19.

So hoch die Anwendung analytischer Kunst auch auf diese Zweige der Mathematik geschätzt und ihr wohlthätiger Einfluß auf die Bildung derselben anerkannt werden muß, so würde es doch ein nicht geringer Irrthum seyn, wenn man unbedingt glauben wollte, daß dadurch das Studium derselben erleichtert und gründliche Einsicht gefördert werden könne. Dieß ist aber schon öfters von Andern öffentlich gesagt worden, und wird es auch jeder Docent zugestehen, welcher nicht blos voranalysirt, sondern sich auch um den Erfolg bekümmert hat.

Wenn nun die Transformationen der Gleichungen zur erforderlichen Allgemeinheit nach dem gewöhnlichen analytischen Verfahren für alle unter sich verschiedenen Fälle durchgeführt werden sollten, so würde die sphärische Trigonometrie zu weitläufig und zu ermüdend und zeitraubend für Schriftsteller und Lehrer, wie für Leser und Hörer, — dem Fähigern lästig, den weniger Fähigen verwirrend, das spreizige Formelgebäu aber Vielen ein „Schreckbild" (wie es ein berühmter Astronom nennt) — so daß die allgemeinere Verbreitung dieser schönen Wissenschaft mehr gehindert, als gefördert werden würde. — Wenn dagegen mit Vermeidung der analytischen Transformationen nach einer andern leichtern und anschaulichern Methode der Zweck so vollkommen, als nöthig, erreicht werden kann, so dürfte der Vorschlag einer solchen um so eher annehmlich gefunden werden, als das gewöhnliche Verfahren mit der anderwärts widerstrebenden Auctorität des Alterthums sich nicht bewaffnen kann.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/16 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Zweiter Abschnitt.

Von der gänzlichen Entbehrlichkeit der Umwandelungen der Gleichungen

a) der ebenen Trigonometrie.

20.

Unter den Gleichungen der ebenen Trigonometrie, welche zur Anwendung der Logarithmen durch Umwandelung hervorgebracht zu werden pflegen, sind bekanntlich die zwischen 3 Seiten und 1 Winkel die vornehmsten (§. 11. N. 3. 4.). Beide kann man durch einfache Constructionen beweisen, es mag der zu suchende W. a $<$ oder $>$ 90° seyn. Die Nachzeichnung der hier deutlich beschriebenen einfachen Figuren wird keine Schwierigkeit machen.

α) In einem beliebigen Dreiecke abc sey die Seite $A > B$. Man verlängere $B = ac$ auf beiden Seiten bis e und f so, daß $cf = A$, $ae = C$, mithin $ef = A + B + C$ sey, und beschreibe um c mit $bc = A$ einen Halbkreis dbf, so ist $de = B + C - A$. Zieht man be, welche Linie oder deren Verlängerung den Halbkreis in g schneidet, so ist der W. $e = \frac{1}{2}$ a, $be = 2\ C \cos. \frac{1}{2}$ a und $ge = 2\ B \cos. \frac{1}{2}$ a. Denn wenn man mit eg parallel ak zieht und letztere mit $ac = B$ schneidet, so ist wegen Beschaffenheit der Winkel $\triangle$ ack $\sim$ $\triangle$ abe und das Viereck aegk ein Parallelogramm, worin $ak = B \cos. \frac{1}{2}\ a = eg$. Nach einem bekannten geometrischen Satze (Klügels math. Wörterb. Art. Kreis N. 35) ist nun $ef.\ de = be.\ eg$, d. i. trigonometrisch übersetzt

$$(A + B + C).\ (B + C - A) = 4\ BC \cos.^2 \tfrac{1}{2}\ a,$$

wobei einleuchtet, daß a ieden möglichen Werth haben kann.

β) In einem andern Dreiecke abc trage man die kleinere Seite B auf die größere $C = ab$ so, daß $ac = B = ad$, mithin $bd = C - B$ sey, verlängere $bc = A$ nach e und ziehe cd verlängert bis f so, daß ein mit bd um b zu beschreibender Halbkreis durch e, f, d geht und bc in k schneidet, wodurch $ce = (A + C - B)$ und $ck = A - (C - B) = A + B - C$ wird. Verlängert man auch $B = ac$ bis g und zieht $bg \parallel cd$, so ist das gleichschenkliche $\triangle$ abg $\sim$ $\triangle$ acd und bgcf ein Parallelogramm, mithin $bg = cf = 2\ C \sin. \frac{1}{2}$ a, $dc = 2\ B \sin. \frac{1}{2}$ a. Nun ist nach ebenjenem Satze $ce.\ ck = cf.\ cd$, oder trigonometrisch,

$$(A + C - B).\ (A + B - C) = 4\ B\ C \sin.^2 \tfrac{1}{2}\ a,$$

wo a ebenfalls jeden möglichen Werth annehmen kann. Es lassen sich daher beide Gleichungen ohne Umwandelung als gemeingültig beweisen.

21.

Wenn aber diese constructiven wie auch instructiven Beweisarten nicht bequem genug scheinen sollten, so stehen den Freunden der Analysis andere zu Diensten, welche die ein-

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/17 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

seitige Umwandelungsmethode ebenfalls vermeiden. Aus den als allgemein gültig bewiesenen Gleichungen

$$A \sin. c = C \sin. a \text{ und}$$
$$B \sin. c = C \sin. b \text{ folgt}$$

1) durch Addition

$$(A + B) \sin. c = C (\sin. a + \sin. b) \text{ oder}$$
$$(A + B) \sin. \tfrac{1}{2} c = C \cos. \tfrac{1}{2} (a - b) \quad (\S. 9. 1);$$

2) durch Subtraction

$$(A - B) \sin. c = C (\sin. a - \sin. b) \text{ oder}$$
$$(A - B) \cos. \tfrac{1}{2} c = C \sin. \tfrac{1}{2} (a - b) \quad (\S. 9. 2);$$

3) durch Multiplication von N. 1. 2.

$$(A + B) (A - B) \sin. c = C^2 \sin. (a - b);$$

4) durch Division

$$\frac{A + B}{A - B} = \frac{\cot. \frac{1}{2} (a - b)}{\tang. \frac{1}{2} c} = \frac{\tang. \frac{1}{2} (a + b)}{\tang. \frac{1}{2} (a - b)}$$

Die Gleichungen N. 1 und 2, welche Mollweide in dem monatlichen Corresp. ohne Beweis mitgetheilt, aber Thom. Simson schon gekannt hat, hat der Verf. in Crelle's Journal ꝛc. Bd. 10 S. 137 auch geometrisch bewiesen. — Wie mancher analytische Umweg dadurch erspart wird, leuchtet bei Aufgaben ein, wie z. B. in Meier Hirsch Samml. geometr. Aufg. Berlin 1805. Thl. I. §. 67. 68 u. a.

22.

Wenn man nun der Gleichung §. 21. 1

$$(A + B) \sin. \tfrac{1}{2} c = C \cos. \tfrac{1}{2} (a - b) \text{ addirt und subtrahirt}$$
$$C \sin. \tfrac{1}{2} c = C \cos. \tfrac{1}{2} (a + b), \text{ so erhält man}$$

1) $$(A + B + C) \sin. \tfrac{1}{2} c = C [\cos. \tfrac{1}{2} (a - b) + \cos. \tfrac{1}{2} (a + b)]$$
$$= 2 C \cos. \tfrac{1}{2} a \cos. \tfrac{1}{2} b. \quad (\S. 9.).$$

2) $$(A + B - C) \sin. \tfrac{1}{2} c = C [\cos. \tfrac{1}{2} (a - b) - \cos. \tfrac{1}{2} (a + b)]$$
$$= 2 C \sin. \tfrac{1}{2} a \sin. \tfrac{1}{2} b.$$

Auf gleiche Art ergeben sich aus

$$C \cos. \tfrac{1}{2} c = C \sin. \tfrac{1}{2} (a + b) \text{ und}$$
$$(A - B) \cos. \tfrac{1}{2} c = C \sin. \tfrac{1}{2} (a - b) \quad (\S. 21. 2)$$

3) $$(A - B + C) \cos. \tfrac{1}{2} c = C [\sin. \tfrac{1}{2} (a + b) + \sin. \tfrac{1}{2} (a - b)]$$
$$= 2 C \sin. \tfrac{1}{2} a \cos. \tfrac{1}{2} b; \text{ und}$$

4) $$[C - (A - B)] \cos. \tfrac{1}{2} c = C [\sin. \tfrac{1}{2} (a + b) - \sin. \tfrac{1}{2} (a - b)] \text{ oder}$$
$$(C + B - A) \cos. \tfrac{1}{2} c = 2 C \sin. \tfrac{1}{2} b \cos. \tfrac{1}{2} a.$$

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/18 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

23.

Setzt man nun die halbe Summe der Seiten des Dreiecks $\frac{1}{2}(A + B + C) = P$ so erhält man aus diesen 4 Gleichungen bei Vertauschung der Buchstaben folgende 12:

1. $$P = \frac{A \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} a}$$ 2. $$= \frac{B \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} b}$$ 3. $$= \frac{C \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b}{\sin. \frac{1}{2} c}$$

4. $$P - A = \frac{A \sin. \frac{1}{2} b \sin. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} a}$$ 5. $$= \frac{C \sin. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} a}{\cos. \frac{1}{2} c}$$ 6. $$= \frac{B \sin. \frac{1}{2} c \cos. \frac{1}{2} a}{\cos. \frac{1}{2} b}$$

7. $$P - B = \frac{B \sin. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} b}$$ 8. $$= \frac{A \sin. \frac{1}{2} c \cos. \frac{1}{2} b}{\cos. \frac{1}{2} a}$$ 9. $$= \frac{C \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b}{\cos. \frac{1}{2} c}$$

10. $$P - C = \frac{C \sin. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} b}{\sin. \frac{1}{2} c}$$ 11. $$= \frac{B \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} b}$$ 12. $$= \frac{A \sin. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} a}.$$

Durch einfache Multiplication je zweier zweckmäßig gewählter erhält man nun ohne weiteres jene verlangten Gleichungen (§. 20), z. B. aus N. 2 und 5 oder N. 3 und 6; desgl. aus N. 7 und 10, oder N. 9 und 11. Daß sich auf gleiche Art aus den andern und durch Division von je 2 die Gleichungen für 5 Stücke ergeben, leuchtet ebenso von selbst ein, als daß je 2 neben einanderstehende die Grundgleichung enthalten, von welchen die Zusammensetzung ausging.

24.

In dem §. 12. betrachteten Falle, wenn B, C, a bekannt und A zu berechnen ist, wo man zweimal zu rechnen nicht vermeiden kann, scheinen folgende Verfahren, ohne der Umwandelung zu bedürfen, die bequemsten.

1) Wenn man in §. 12. (2) $(B + C) = s$ und $4 B C \cos.^2 \frac{1}{2} a = n^2$ setzt und n berechnet, so erhält man $A^2 = s^2 - n^2$, folglich $A = \sqrt{(s + n)(s - n)}$.

2) Da nach §. 21. 4) durch $\tang. \frac{1}{2}(b - c) = \frac{(B - C) \cot. \frac{1}{2} a}{B + C}$ $\frac{1}{2}(b - c)$ leicht gefunden wird, so erhält man, ohne b und c selbst zu berechnen, nach 1. 2.

$$A = \frac{(B + C) \sin. \frac{1}{2} a}{\cos. \frac{1}{2}(b - c)} = \frac{(B - C) \cos. \frac{1}{2} a}{\sin. \frac{1}{2}(b - c)}.$$

b) der sphärischen Trigonometrie.

25.

Wenn in der sphärischen Trigonometrie die berührten Uebelstände beseitiget werden sollen, so sind zweierlei Bedingungen zu erfüllen:

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/19 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

1) Es müssen entweder die Produktengleichungen selbst, wie sie zur Anwendung der Logarithmen brauchbar sind, oder wenigstens solche, aus welchen sie durch eine ganz einfache Operation hervorgehen, unmittelbar, d. h. nicht durch analytische Umwege gefunden werden.

2) Die Beweise derselben müssen mit der Strenge, welche die Mathematik fordert, allgemein, d. h. für alle Kugeldreiecke zahlloser Mannigfaltigkeit, deren Elemente zwischen 0° und 180° betragen, — denn darüber wäre aus bekannten Gründen überflüssiger Luxus, — so einfach und kurz als möglich geführt werden.

Vergleicht man nun damit die Gleichungen, wie sie in Büchern vorkommen, so entsprechen die §. 13. I. zwar der ersten Bedingung, aber nicht der zweiten; II. und III. keiner von beiden. Die Delambre-Gaußischen sind hinsichtlich der ersten zwar Produktengleichungen, woraus andere einfach hervorgehen, allein in sofern sie aus einseitig bewiesenen Gleichungen mit umständlichen Kunstmitteln herausgearbeitet zu werden pflegen, genügen die Beweisarten derselben beiden nicht. — Es leuchtet aber bald ein, daß dieser Umstand beseitigt werden kann, wenn sich letztere selbstständig für sich beweisen und anstatt der §. 13. II. III. andere finden lassen, welche dieselben Stücke des Dreiecks enthalten und als Produktengleichungen allgemein bewiesen werden können.

26.

Durch viele oft veränderte, aber vergebliche Versuche nach der gewöhnlichen Weise, glaubt der Verf. sich überzeugt zu haben, daß um den Bedingungen §. 25. völlig zu genügen, ein ganz anderer Weg eingeschlagen werden müsse. Durch welche Veranlassung er i. J. 1829. die bereits in Crelle's Journal d. M. Bd. 10. S. 129. ꝛc. mitgetheilte Methode fand, hat er daselbst nebst den Beweggründen erzählt, aus welchen er erst 1831. eine Schrift darüber abfaßte, wovon jene Abhandlung ein Auszug ist.

Für Diejenigen, welchen das Journal nicht sogleich zur Hand seyn sollte, sey hier nur mit wenigen Umrissen angedeutet, daß das darin mitgetheilte Verfahren zwar von der Betrachtung der Dreiecke auf der Fläche der Halbkugel ausgeht, aber nicht an Projectionen, sondern in der Ebene eines größten Kreises geschieht, in welchem die 3 Seiten an einander gelegt betrachtet werden, indem sowohl 2, als auch alle 3 Seiten zusammen genommen allemal einem Bogen eines und desselben größten Kreises gleich gesetzt werden können. Mit Hülfe der oben (§. 6.) angedeuteten Beweisart für sin. (a + b) u. s. w. werden an ganz einfachen Constructionen mittelst des einzigen allgemein gültigen Satzes der ebenen Trigonometrie §. 21. zwölf Grundgleichungen der sphärischen allgemein bewiesen, woraus alle übrigen einfach hervorgehen. Das Verfahren aber muß der Verf. bitten, in der angeführten Schrift selbst nachzusehen.

27.

Jene 12 Grundgleichungen zwischen allen 6 Stücken eines beliebigen Kugeldreiecks, wovon einzelne oder mehre $<$ oder $=$ oder $>$ 90° seyn mögen, für den Halbmesser $= 1$, sind folgende, worin ebenfalls A, B, C die Seiten und a, b, c die Winkel bedeuten, so daß $A > B$, $a > b$:

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/20 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

I. $\sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} B \sin. c = \sin. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} (b + c - a)$.

II. $\cos. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} B \sin. c = \sin. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} (a + c - b)$.

III. $\cos. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} B \sin. c = \cos. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} (a + b - c)$.

IV. $\sin. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} B \sin. c = \cos. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} (a + b + c)$.

V. $\sin. \frac{1}{2} (A + B) \sin. \frac{1}{2} c = \sin. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} (a - b)$.

VI. $\sin. \frac{1}{2} (A - B) \cos. \frac{1}{2} c = \sin. \frac{1}{2} C \sin. \frac{1}{2} (a - b)$.

VII. $\cos. \frac{1}{2} (A - B) \cos. \frac{1}{2} c = \cos. \frac{1}{2} C \sin. \frac{1}{2} (a + b)$.

VIII. $\cos. \frac{1}{2} (A + B) \sin. \frac{1}{2} c = \cos. \frac{1}{2} C \cos. \frac{1}{2} (a + b)$.

IX. $\sin. \frac{1}{2} (A + B + C) \sin. \frac{1}{2} c = \sin. C \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b$.

X. $\sin. \frac{1}{2} (A + B - C) \sin. \frac{1}{2} c = \sin. C \sin. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} b$.

XI. $\sin. \frac{1}{2} (A + C - B) \cos. \frac{1}{2} c = \sin. C \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b$.

XII. $\sin. \frac{1}{2} (B + C - A) \cos. \frac{1}{2} c = \sin. C \cos. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} b$.

28.

Wie nun aus den Delambre-Gaußischen Gleichungen N. V—VIII. die Neperschen Analogien einfach hervorgehen, ist bekannt, weniger aber folgende 6 Gleichungen, welche man daraus durch Multiplication derselben erhält:

1) $\sin. \frac{1}{2} (A + B) \sin. \frac{1}{2} (A - B) \sin. c = \sin.^2 \frac{1}{2} C \sin. (a - b)$.

2) $\sin. \frac{1}{2} (A + B) \cos. \frac{1}{2} (A - B) \sin. c = \sin. C \sin. \frac{1}{2} (a + b) \cos. \frac{1}{2} (a - b)$.

3) $\sin. (A + B) \sin.^2 \frac{1}{2} c = \sin. C \cos. \frac{1}{2} (a + b) \cos. \frac{1}{2} (a - b)$.

4) $\sin. (A - B) \cos.^2 \frac{1}{2} c = \sin. C \sin. \frac{1}{2} (a + b) \sin. \frac{1}{2} (a - b)$.

5) $\sin. \frac{1}{2} (A - B) \cos. \frac{1}{2} (A + B) \sin. c = \sin. C \sin. \frac{1}{2} (a - b) \cos. \frac{1}{2} (a + b)$.

6) $\cos. \frac{1}{2} (A - B) \cos. \frac{1}{2} (A + B) \sin. c = \cos.^2 \frac{1}{2} C \sin. (a + b$.

N. 2 und 5 sind außer Andern auch bereits von J. v. Sniadecki (sphär. Trig. §. 3.) auf anderem Wege gefunden und aufgestellt.

29.

Aus den 8 Gleichungen §. 27. I—IV. und IX—XII., welche die nöthige Anzahl einfacher Produktengleichungen ergänzen und worin daher der §. 25. angedeutete Ersatz besteht, ergeben sich durch Vertauschung der Buchstaben folgende 24, ähnlich jenen für die ebenen Dreiecke gefundenen (§. 23.) Der Kürze wegen sey $\frac{1}{2} (a + b + c) = p$, $\frac{1}{2} (A + B + C) = P$.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/21 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

1. 2. 3.

$$\cos. p = \frac{\sin. a \sin. \frac{1}{2} B \sin. \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2} A} = \frac{\sin. b \sin. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2} B} = \frac{\sin. c \sin. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} B}{\cos. \frac{1}{2} C};$$

4. 5. 6.

$$\cos. (p - a) = \frac{\sin. a \cos. \frac{1}{2} B \cos. \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2} A} = \frac{\sin. c \sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} B}{\sin. \frac{1}{2} C} = \frac{\sin. b \sin. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} C}{\sin. \frac{1}{2} B};$$

7. 8. 9.

$$\cos. (p - b) = \frac{\sin. b \cos. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2} B} = \frac{\sin. a \sin. \frac{1}{2} B \cos. \frac{1}{2} C}{\sin. \frac{1}{2} A} = \frac{\sin. c \cos. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} B}{\sin. \frac{1}{2} C};$$

10. 11. 12.

$$\cos. (p - c) = \frac{\sin. c \cos. \frac{1}{2} A \cos. \frac{1}{2} B}{\cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\sin. b \cos. \frac{1}{2} A \sin. \frac{1}{2} C}{\sin. \frac{1}{2} B} = \frac{\sin. a \cos. \frac{1}{2} B \sin. \frac{1}{2} C}{\sin. \frac{1}{2} A}.$$

---

13. 14. 15.

$$\sin. P = \frac{\sin. A \cos. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} a} = \frac{\sin. B \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} b} = \frac{\sin. C \cos. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b}{\sin. \frac{1}{2} c};$$

16. 17. 18.

$$\sin. (P - A) = \frac{\sin. A \sin. \frac{1}{2} b \sin. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} a} = \frac{\sin. C \cos. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} b}{\cos. \frac{1}{2} c} = \frac{\sin. B \cos. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} b};$$

19. 20. 21.

$$\sin. (P - B) = \frac{\sin. B \sin. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} c}{\sin. \frac{1}{2} b} = \frac{\sin. A \cos. \frac{1}{2} b \sin. \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} a} = \frac{\sin. C \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} b}{\cos. \frac{1}{2} c};$$

22. 23. 24.

$$\sin. (P - C) = \frac{\sin. C \sin. \frac{1}{2} a \sin. \frac{1}{2} b}{\sin. \frac{1}{2} c} = \frac{\sin. B \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} b} = \frac{\sin. A \sin. \frac{1}{2} b \cos. \frac{1}{2} c}{\cos. \frac{1}{2} a}.$$

Daß sich aus je 2 neben einander stehenden die Gleichung §. 13. I. sogleich ergiebt, leuchtet von selbst ein.

30.

Durch einfache Multiplication je zweier zweckmäßig gewählter finden sich nun folgende 4 Gleichungen, welche man sonst durch Umwandelung hervorzubringen pflegt.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/22 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

1) Aus N. 2 und 5, oder 3 und 6

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a+b+c)\cos.\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \sin. b \sin. c \sin.^2 \tfrac{1}{2} A.$$

2) Aus N. 7 und 10, oder 9 und 11

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a+c-b)\cos.\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \sin. b \sin. c \cos.^2 \tfrac{1}{2} A.$$

3) Aus N. 14 und 17, wie aus N. 15 und 18

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\sin.\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \sin. B \sin. C \cos.^2 \tfrac{1}{2} a.$$

4) Aus N. 19 und 22, wie aus N. 21 und 23

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+C-B)\sin.\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \sin. B \sin. C \sin.^2 \tfrac{1}{2} a.$$

Die ihnen ähnlichen auf gleiche Weise. Wie leicht sich diese Gleichungen durch Construction beweisen lassen, ist unter andern ein Beispiel gegeben in Crelle's Journal d. M. Bd. 10. S. 149. — Wie sich aber die Gleichungen für 5 Stücke aus denen §. 29. kurz finden lassen, bedarf der Nachweisung nicht.

31.

Wiewohl der Verf. nicht ermangelt hat, für die 2 Fälle, wo α) C aus A, B, c und β) c aus a, b, C berechnet werden soll, je 4, so viel er weiß, neue, als allgemein gültig bewiesene und unzweideutige Hülfswinkelformeln anzugeben (Crelle's Journal f. Math. ꝛc. Bd. 10 S. 150 ꝛc.), so geschah es dort nur, um nachzuweisen, wie die vorgetragene Methode auch die Wünsche Derjenigen nicht unbefriediget lasse, welche dergleichen Hülfswinkelformeln für zweckmäßig halten. Aber sie können, wie dem Verf. scheint, entbehrt und der Zeitaufwand ihrer Bildung erspart werden. Denn wenn man mittelst der Neperschen Analogien im erstern Falle α) $\frac{1}{2}(a-b)$ und dann $\frac{1}{2}$ C nach §. 27 N. V oder VI; im zweiten β) $\frac{1}{2}(A-B)$ und dann $\frac{1}{2}$ c nach §. 27 N. VI oder VII berechnet, so erhält man ebenfalls unzweideutige und hinlänglich genaue Ergebnisse, wie schon an jenem Orte angedeutet worden ist.

32.

In Hinsicht der Zweideutigkeit der Resultate wird nun auch einleuchten, daß die einzige Gleichung: sin. A sin. b = sin. B. sin. a, (oder ähnliche) übrig bleibt, bei deren Gebrauche solche statt finden kann. Allein aus der Betrachtung in der mehrmal angeführten Abhandlung in Crelle's Journal ꝛc. wird leicht klar, daß jene auf nur 4 speciellere Fälle sich beschränkt, als gewöhnlich in Büchern angegeben werden.

Um dieses nachzuweisen sey $A > B$, $a > b$. Ist $(A+B) = 180°$, so ist auch $(a+b) = 180°$ und umgekehrt, mithin das Gesuchte nie zweideutig; es kann daher nur in den Fällen seyn, wo $(A+B)$ oder $(a+b) <$ oder $> 180°$. Nach jener Methode aber geht deutlich hervor, daß

1) wenn $(A+B) < 180°$ ist, b allemal $< 90°$ seyn muß, mithin nur für den größern W. a, wenn er gesucht wird, 2 Werthe möglich sind;

2) wenn $(A+B) > 180°$, wo auch allemal $(a+b) > 180°$ ist und umgekehrt, der W. a allemal $> 90°$ seyn muß, daher nur der gesuchte kleinere b der Zweideutigkeit unterworfen seyn kann;

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/23 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

3) wenn $(a + b) < 180°$, wo auch $(A + B) < 180°$ ist, so kann die kleinere Seite B nie, sondern nur die größere A, sehr selten, zweifelhaft bleiben;

4) eben so selten die kleinere B, wenn $(a + b) > 180°$, wo auch $(A + B) > 180°$ ist.

Aber die Zweideutigkeit dieser Fälle hebt sich sogleich, sobald man beurtheilen kann, was wohl selten schwer seyn dürfte, ob der dritte W. c spitz oder stumpf sey. Dem Verf. wenigstens ist in so fern kein zweifelhafter Fall vorgekommen.

[Der geehrte Leser, welchem des Crelle'schen Journals Bd. 10 Heft 2 zur Hand seyn sollte, wird im zweifelhaften Falle auch folgendes Mittel als nicht unbrauchbar erkennen. Wenn man z. B. im ersten die bekannten Seiten A und B in einen Kreis einträgt, wobei auf Genauigkeit nicht viel ankommt, und die Figur Taf. I. N. 6 construirt, so ergeben sich bei einiger Kenntniß der Größe des W. c, die Winkel u und z, mithin auch $a = u + z$ (nach §. 22. 1. jener Abhandl.) unzweideutig.]

33.

In Kugeldreiecken endlich, wo 1 Seite oder 1 Winkel $= 90°$, ist bei dem Gebrauche der einfachen Formeln (welche der Verf. in der angef. Schrift §. 40 u. 41 auch nach seiner Methode anschaulich bewiesen hat) die Entscheidung der Zweideutigkeit auf die angeführte Weise äußerst leicht. Es sind daher die Vorzeichen, wo sie nöthig scheinen könnten, auch, wie fast gewöhnlich, ausgelassen. Nicht Anweisung des Gebrauchs, sondern blos die Art des Beweises dieser Formeln konnte dort Zweck seyn.

34.

Eine vergleichende Betrachtung der Gleichungen der sphärischen Trigonometrie mit jenen der ebenen zeigt, wie bekannt, eine so analoge Uebereinstimmung, daß man darin die sphärische als das schönere Urbild der ebenen leicht erkennt. So entsprechen nicht nur die Grundgleichungen einander, als §. 21 jener §. 13 I; §. 21. 1. 2. jenen §. 27. V—VIII; die 12 §. 23. jenen 24 §. 29; sondern auch die daraus abgeleiteten, als die §. 21. 3. jenen §. 28. 1. 3. 4. 6; §. 21. 4. den Neperschen Analogien u. s. w. und sind die ebenen gleichsam die Wiederhalle der sphärischen. Die Gleichungen §. 12 aber erkennt man urbildlich in folgenden sphärischen, welche darum hier beigefügt seyn mögen, weil sie, so viel der Verf. weiß, in keinem Buche stehen. (Die Beweise derselben und resp. deren Andeutung s. in Crelle's Journal ꝛc. Bd. 10. N. 9. §. 17. 19. 25. 37. 38.)

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} A = \begin{cases} \sin.^2 \tfrac{1}{2} (B - C) + \sin. B \sin. C \sin.^2 \tfrac{1}{2} a & (1), \\ \sin.^2 \tfrac{1}{2} (B + C) - \sin. B \sin. C \cos.^2 \tfrac{1}{2} a & (2), \end{cases}$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \begin{cases} \cos.^2 \tfrac{1}{2} (B - C) - \sin. B \sin. C \sin.^2 \tfrac{1}{2} a & (3), \\ \cos.^2 \tfrac{1}{2} (B + C) + \sin. B \sin. C \cos.^2 \tfrac{1}{2} a & (4), \end{cases}$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \begin{cases} \sin.^2 \tfrac{1}{2} (b - c) + \sin. b \sin. c \cos.^2 \tfrac{1}{2} A & (5), \\ \sin.^2 \tfrac{1}{2} (b + c) - \sin. b \sin. c \sin.^2 \tfrac{1}{2} A & (6), \end{cases}$$

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} a = \begin{cases} \cos.^2 \tfrac{1}{2} (b - c) - \sin. b \sin. c \cos.^2 \tfrac{1}{2} A & (7), \\ \cos.^2 \tfrac{1}{2} (b + c) + \sin. b \sin. c \sin.^2 \tfrac{1}{2} A & (8), \end{cases}$$

wobei man gedenke, daß $2 \sin. \tfrac{1}{2} A =$ Sehne A u. s. w.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/24 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Dagegen sind die Gleichungen §. 13. II. III nicht so glücklich, ihnen ähnliche in der ebenen Trigonometrie zu finden und ihre Wahrheiten verhallen darin gleichsam ohne Gegenruf.

Eine geistreiche Betrachtung der Harmonie — gleichsam gegenseitige Abspiegelung — beider Trigonometrien dürfte vielleicht einen interessanten Stoff zu einer kleinen Abhandlung abgeben, wie bereits auf ähnliche Weise Herr O. L. W. Brettner in Leobschütz einen Versuch gemacht hat, das Verhältniß der Sphärik zur Planimetrie darzustellen, der sich jedoch blos auf die rechtwinklichen Dreiecke beschränkt, in der kleinen Schrift: Zur Theorie des sphär. rechtwinklichen Dreiecks ꝛc. 1831, deren Inhalt und Zweck aber bekannter zu werden verdient. *)

35.

Wenn nun der Inhalt dieser Abhandlung manchem an das Gewöhnliche Gewöhnten nicht gefallen sollte, so thut es dem Verf. leid, aber sehr leid, daß er nach seiner Ueberzeugung sich nicht anders hat erklären können über einen wissenschaftlich kunstreichen Bau, welcher den ehrwürdigen Männern, welche ihn einst zugerichtet, manchen Aufwand von Zeit und Mühe gekostet haben mag. Aber es kann weder das Verdienst derselben geschmälert, noch der ihnen schuldige Dank verkümmert werden, wenn die spätere Zeit durch Fortschritte in der Wissenschaft bequemere Wege und Mittel entdeckt, um einen nützlichen Zweck zu erreichen. — Otto v. Guerike's Verdienst und Ruhm dauern unverändert fort, wenn auch seine Luftpumpe, wie er sie erfand und gebrauchte, längst schon zurückgesetzt ist und man sich verbesserter bedient. — Welche Menge Verbesserungen auch in den mathematischen Disciplinen würden unterblieben seyn und vermißt werden, wenn man von unwürdigem Auctoritätsglauben gefesselt dabei stehen geblieben wäre, was und wie es ein Gewisser vor vielen Jahren gemacht hätte, oder wie und weil es so in einem gewissen Buche steht. Keine Wissenschaft aber hat von jeher die gedeihliche Freiheit der Forschung und Darlegung ihrer Wahrheiten in ihrem Gebiete so unverkümmert genossen, als die Mathematik, — denn nur einzelne Lehren der ebenso nützlichen als erleuchtenden Physik waren es, gegen welche Verblendete oder Wahntolle, selten Nichtswürdige versuchsweise, verketzernde Bisse gethan haben! — und die sachkundigen Bekenner derselben haben jederzeit den ehrenvollen Vorzug behauptet, bei Beurtheilung neuer Entdeckungen, wie bei Berichtigung etwaniger Irrthümer keiner Intoleranz oder Inhumanität, unwürdig des wissenschaftlich Gebildeten,

*) Wiewohl durch die seit 1824 bestehende vortreffliche Einrichtung des programmatischen Verbandes nicht nur aller Gymnasien der Königl. Preuß. Staaten, sondern auch einiger auswärtigen, welche ihm beigetreten sind, die kleinen Abhandlungen, welche vorschriftmäßig den Programmen beigefügt werden, der Verbreitung in diesem Kreise sich zu erfreuen haben, so verdienen doch manche davon auch außer demselben bekannt zu werden, worunter auch einige mathematischen Inhalts. Letztere haben in Leipzig einen einsichtsvollen Fürsprecher gefunden, welcher in der dortigen Lit. Zeit. 1831 Nr. 305 S. 2437, sich so darüber äußert: „Der nicht geringen Anzahl mathematischer Gelegenheitsschriften wird ein sehr ungünstiges, meist unverdientes „Loos zu Theil ꝛc. — Gleichwohl beurkunden manche dieser kleinen Abhandlungen die Kenntnisse, den Scharfsinn „und die Geschicklichkeit ihrer Verff. besser, als viele Lehrbücher, deren Verdienst oft nur in einer veränderten, „nicht immer verbesserten, Anordnung des längst bekannten besteht und von denen das Publicum sich oft breite Anzeigen gefallen lassen muß. Fast immer findet man aber in jenen Programmen und Dissertationen irgend „etwas neues ꝛc. — Es wäre doch zu wünschen und zu erreichen, daß man mehr Gelegenheit bekäme, Specialabhandlungen, die als Gelegenheitschriften erschienen sind, kennen zu lernen." — Da die verehrl. Redaction dieser Lit. Zeit. erlaubt hat, dergleichen kleine mathem. Schriften anzeigen zu dürfen, so scheint es nicht unzweckmäßig zu seyn, wenn die HH. Verff. solcher math. Abhandlungen, wenn deren Inhalt nicht unbedeutend ist, solche gelegentlich und kostenfrei Derselben zukommen lassen wollten.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/25 gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

sich zu Schulden kommen zu lassen, sondern selbst das weniger Wichtige mit Wohlwollen und Nachsicht aufgenommen. — Absichtlich sind auch in gegenwärtiger Schrift, die es nur mit der Sache zu thun hat, so oft es vermieden werden konnte, weder Bücher, noch deren Verfasser genannt und dem kundigen Leser Wahl und Prüfung überlassen.

Mit der Angabe bequemerer Arten des Verfahrens, um der mühsamen und zeitraubenden Umwandelungen der Gleichungen überhoben zu seyn, wird hoffentlich kein Mathematiker unzufrieden seyn. Denn daß es in unserer Zeit noch Einzelne geben sollte, welche um des eingewohnten Schlendrians willen das Nützliche verwerfen, läßt sich nicht annehmen. — Die 2 vielgerühmten Gleichungen §. 13. II. III. nebst daraus zusammengesetzten, welche vor der Erfindung der Logarithmen sehr wichtig und zweckmäßig waren, sind freilich durch die neuentdeckten §. 27. etwas überflüssig geworden; aber sie verdienen darum nicht gleichsam in die mathematische Polterkammer verwiesen zu werden, indem sie in manchen Fällen dennoch brauchbar sind und es auch außerdem nützlich ist, eine Sache mehrseitig zu kennen.

Schlüßlich fühlt der Verf. hinsichtlich seiner frühern Schrift sich bewogen, den gelehrten Kennern der Sache, welche sowohl die 8 genannten Hanptgleichungen, als auch die Art der Beweisführung aller 12 (§. 27.) als neu und nützlich erkannt haben, zu bitten, den verbündlichsten Dank gütig zu empfangen, der gegenwärtigen Schrift aber wegen etwaniger Mängel ebendieselbe gütige Nachsicht wiederfahren zu lassen.

Frankfurth a. d. O. im Juli 1833.

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn in Frankfurth a. d. O.

Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/26
gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG

Datum der Entleihung bitte hier einstempeln!

(204) JG 162/14/79

Math 487

Sächsische Landesbibliothek –
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/27
gefördert von der
Deutschen Forschungsgemeinschaft

Sächsische Landesbibliothek –
Staats- und Universitätsbibliothek Dresden
http://digital.slub-dresden.de/ppn332492753/28
gefördert von der
Deutschen Forschungsgemeinschaft