Auf das soeben behandelte Dreieck werden wir in dem folgenden noch öfter zurückkommen. (Wir bezeichnen es dabei als „Aufgabendreieck“.)

Von den Funktionsbegriffen schreiten wir nun zu Folgerungen (Umkehrungen), deren sichere Beherrschung unbedingt erforderlich ist. Auch den nachstehenden Erörterungen legen wir wieder das Dreieck Fig. 1 zugrunde. ($a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm.)

Erste Folgerung (Umkehrung).

1. $\sin = \frac{a}{c}$; der Sinus sagt uns, wie oftmal so lang die Gegenkathete (Sinuslinie) ist als die Hypotenuse.

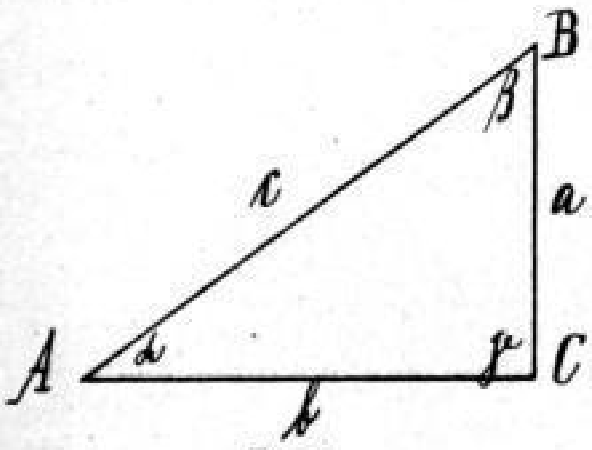

Fig. 1.

In Fig. 1 erhielten wir $\sin = 0,6$; die Gegenkathete a ist demnach 0,6 mal so lang als die Hypotenuse c, also 5 cm $\times$ 0,6 = 3 cm.

Formel: $a = c \cdot \sin$.

2. $\cos = \frac{b}{c}$; der Cosinus gibt an, wie oftmal so lang die Ankathete (Cosinuslinie) ist als die Hypotenuse.

In Fig. 1 ist $\cos = 0,8$; die Ankathete b ist somit 0,8 mal so lang als die Hypotenuse c, also 5 cm $\times$ 0,8 = 4 cm.

Formel: $b = c \cdot \cos$.

3. $\tan = \frac{a}{b}$; Tangens sagt uns, wie oftmal so lang die Gegenkathete (Tangente) ist als die Ankathete (Cotangente).

In Fig. 1 ist $\tan = 0,75$; die Gegenkathete a ist demnach 0,75 mal so lang als die Ankathete b, also 4 cm · 0,75 = 3 cm.

Formel: $a = b \cdot \tan$.

4. $\cot = \frac{b}{a}$; Cotangens gibt an, wie oftmal so lang die Ankathete (Cotangente) ist als die Ankathete (Tangente).

In Fig. 1 ist $\cot = 1,33333$; die Ankathete ist demnach 1,33333 mal so lang als die Gegenkathete a, also 3 cm mal 1,33333 = 3,99999 = 4 cm.

Formel: $b = a \cdot \cot$.

Wenden wir nun das Neugelernte auf unser „Aufgabendreieck“ an:

$a = c \cdot \sin = 13$ cm · 0,384 615 = 4,999 995 = 5 cm;
$b = c \cdot \cos = 13$ cm · 0,923 076 = 11,999 988 = 12 cm;
$a = b \cdot \tan = 12$ cm · 0,416 666 = 4,999 992 = 5 cm;
$b = a \cdot \cot = 5$ cm · 2,4 = 12 cm.

Zusammenstellung unserer bisher entwickelten trigonometrischen Formeln:

$\sin = \frac{a}{c}$;	$a = c \cdot \sin$;
$\cos = \frac{b}{c}$;	$b = c \cdot \cos$;
$\tan = \frac{a}{b}$;	$a = b \cdot \tan$;
$\cot = \frac{b}{a}$;	$b = a \cdot \cot$.

Zweite Folgerung (Umkehrung).

1. $a = c \cdot \sin$; d. h. a erhalten wir, indem wir c mit dem Sinus multiplizieren. In unserem Dreieck Fig. 1 rechneten wir: (5 cm · sin (0,6) = a (3 cm).

Umgekehrt muss a (3 cm) : sin (0,6) = c (5 cm) ergeben; daher die

Formel: $c = \frac{a}{\sin}$.

2. $b = c \cdot \cos$; d. h. b ergibt sich, wenn wir c mit dem Cosinus multiplizieren. In Fig. 1 rechneten wir: c (5 cm) · cos (0,8) = b (4 cm).

Umgekehrt ist dann b (4 cm) : cos (0,8) = c (5 cm) und daraus die

Formel: $c = \frac{b}{\cos}$.

3. $a = b \cdot \tan$; d. h. a haben wir erhalten, indem wir b mit Tangens multiplizierten. Umgekehrt muss sich durch die Division $a : \tan$ oder $\frac{a}{\tan}$ wiederum b ergeben.

In unserem Dreieck Fig. 1 haben wir $a = 3$ cm; tang = 0,75; b muss sein 3 cm : 0,75 = 300 : 75 = 4 cm.

Formel: $b = \frac{a}{\tan}$.

4. $b = a \cdot \cot$; d. h. b ergab sich dadurch, dass wir a mit Cotangens multiplizierten. Umgekehrt muss durch die Division $b : \cot$ oder $\frac{b}{\cot}$ wieder a erscheinen.

In Fig. 1 haben wir $b = 4$ cm; $\cot = 1,33333$; a muss sein 4 cm : 1,33333 = 400000 : 133333 = 3 cm:

Formel: $a = \frac{b}{\cot}$.

Anwendung des Neugelernten auf unser „Aufgabendreieck“:

1. $c = \frac{a}{\sin} =$ 5 cm : 0,834 615 = 5 000 000 : 384 615 = 13 cm;
2. $c = \frac{b}{\cos} =$ 12 cm : 0,923 076 = 12 000 000 : 923 076 = 13 cm;
3. $b = \frac{a}{\tan} =$ 5 cm : 0,416 666 = 5 000 000 : 416 666 = 12 cm;
4. $a = \frac{b}{\cot} =$ 12 cm : 2,4 = 120 : 24 = 5 cm.

Zusammenstellung unserer bisher entwickelten trigonometrischen Formeln:

$\sin = \frac{a}{c}$;	$a = c \cdot \sin$;	$c = \frac{a}{\sin}$;
$\cos = \frac{b}{c}$;	$b = c \cdot \cos$;	$c = \frac{b}{\cos}$;
$\tan = \frac{a}{b}$;	$a = b \cdot \tan$;	$b = \frac{a}{\tan}$;
$\cot = \frac{b}{a}$;	$b = a \cdot \cot$;	$a = \frac{b}{\cot}$.

Selbst einem guten Kopfe wird es nicht beschieden sein nach bloss **einmaligem** Durcharbeiten diese Formeln sich **dauernd** anzueignen. Der Lernbegierige möge zunächst die Sprichwörter beherzigen: „Wiederholung ist die Mutter aller Studien“ — „Uebung macht den Meister“ und demgemäss die Sachen immer wieder an dem Dreieck Fig. 1 und dann an dem „Aufgabendreieck“ bis zur Geläufigkeit üben. —

Hernach soll er auch an anderen mit beliebigen Massen von ihm selbst aufgezeichneten rechtwinkeligen Dreiecken (zuerst zieht man dabei immer b, dann rechtwinkelig a, zuletzt c!) der Reihe nach ermitteln: Länge der Hypotenuse, die Funktionen sin, cos, tan, cot und dann gleichsam als Probe die Folgerungen (Umkehrungen).

Für die praktische Verwendung und für die schliessliche gedächtnismässige Aneignung empfiehlt es sich, die Formeln zu gruppieren wie folgt:

$$\sin = \frac{a}{c};\ \cos = \frac{b}{c};\ \tan = \frac{a}{b};\ \cot = \frac{b}{a};$$
$$a = c \cdot \sin;\ a = b \cdot \tan;$$
$$b = c \cdot \cos;\ b = a \cdot \cot;$$
$$c = \frac{a}{\sin};\ c = \frac{b}{\cos}.$$

Bis hierher sind a, b, c auf zweifachem Wege zu finden!

Der Schreiber dieser anspruchslosen Ausführungen schämt sich nicht der Mitteilung, dass er seinerzeit ein mit obigen Formeln beschriebenes Blatt über seinem Arbeitstische befestigte, um die tägliche Wiederholung und Einprägung der Funktionen nicht zu versäumen. Die paar Minuten, welche dazu erforderlich sind, hat auch der im Erwerbsleben Vielbeschädigte noch übrig!