$$\frac{m}{n} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Diesen beiden Gleichungen hat A. T. Hare im „Horological Journal" (Nr. 800, Vol. LXVII) durch die Bedingungsgleichung genügt.

$$\frac{m}{n} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{m}{m-2n} \cdot \frac{2(m-2n)}{2n} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Daß diese Gleichung der Bedingung (1) entspricht, sieht man ohne weiteres beim Kürzen des Bruches. Auch der Bedingung (5) entspricht sie:

$$m + (m - 2n) = 2(m - 2n) + 2n,$$
$$m + m - 2n = 2m - 4n + 2n,$$
$$2m - 2n = 2m - 2n.$$

Den Nebenbedingungen genügt sie indessen nicht immer, wie schon das einfache Beispiel vom 12stündigen Zeigerwerk zeigt.

Hier ist $i = 12$, also $m = 12$ und $n = 1$. Setzen wir diese Zahlen in Gleichung (6) ein, so erhalten wir

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{12}{12-2} \cdot \frac{2(12-2)}{2} = \frac{12}{10} \cdot \frac{20}{2},$$

oder nach passender Erweiterung mit der Zahl 3:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{36}{30} \cdot \frac{60}{6} = \frac{60}{6} \cdot \frac{36}{30}.$$

Die Uebersetzung ist richtig $= 12$, und auch die Summen der Zahnzahlen sind gleich, $36 + 30 = 60 + 6$, aber der überwiegende Teil der Uebersetzung ist auf das erste Räderpaar geworfen, Bedingung (3) ist also nicht erfüllt.

Gut kann man also diese Lösung nicht nennen, durch einfaches Probieren kann man schnell bessere finden, z. B.:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{32}{8} \cdot \frac{30}{10}.$$

Gänzlich unbrauchbar wird die Formel, wenn man nach ihr ein 24stündiges Zeigerwerk berechnet:

$$i = 24, \text{ also } m = 24, \; n = 1,$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{24}{24-2} \cdot \frac{2(24-2)}{2} = \frac{24}{22} \cdot \frac{44}{2} = \frac{44}{2} \cdot \frac{24}{22},$$

oder wenn wir dem kleinen Triebe 8 Zähne geben:

$$\frac{176}{8} \cdot \frac{96}{88}.$$

Eine Uebersetzung $176:8 = 22:1$ wird man wohl nicht anwenden, wenn bessere Verhältnisse möglich sind, z. B.:

$$\frac{60}{10} \cdot \frac{56}{14} \text{ oder } \frac{64}{8} \cdot \frac{54}{18}.$$

Die Formel ist nur brauchbar für eine kleine Gesamtübersetzung, bei größeren Uebersetzungen, etwa von 10 an, versagt sie. Wir können sie betrachten als Sonderfall einer allgemeinen Formel, der wir etwa die folgende Form geben können:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{a \cdot m}{a\,(am - bn)} \cdot \frac{b\,(am - bn)}{bn}} \quad . \; . \quad (7)$$

Hierbei kann a eine beliebige ganze Zahl oder ein Bruch sein und b muß um 1 größer sein als a [1]).

Die Formel (7) genügt für jeden beliebigen Wert von a den Bedingungen (1) und (5). Man kann durch Probieren schnell die Werte finden, die auch den Bedingungen (2) bis (4) genügen.

Die Brauchbarkeit der Formel (7) wollen wir zunächst an den beiden einfachen Getrieben des 12stündigen und 24stündigen Zeigerwerks erproben und dann an einem komplizierten Getriebe anwenden.

I. 12stündiges Zeigerwerk, $m = 12$, $n = 1$.

$$a = \frac{1}{3}, \; b = \frac{4}{3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 12}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{4}{3} \cdot 1\right)} \cdot \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{4}{3} \cdot 1\right)}{\frac{4}{3} \cdot 1}$$

Wir multiplizieren sämtliche 4 Werte mit 3 und erhalten

$$\frac{12}{\left(4 - \frac{4}{3}\right)} \cdot \frac{4 \cdot \left(4 - \frac{4}{3}\right)}{4} = \frac{12}{\frac{8}{3}} \cdot \frac{4 \cdot \frac{8}{3}}{4}$$

Alle 4 Werte nochmals mit 3 multipliziert

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{36}{8} \cdot \frac{32}{12}$$

die Uebersetzung ist $4\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{3} = 12.$

die Summen der Zahnzahlen sind

$$36 + 8 = 32 + 12$$
$$44 \quad = \quad 44$$

Die Zahnzahlen 36—8, 32—12 erfüllen alle Bedingungen. Entsprechend können andere Zahnzahlen des 12stündigen Zeigerwerks berechnet werden, z. B.

für $a = \frac{1}{4}$ ergeben sich die Zahnzahlen 48—7, 35—20 (2)

„ $a = \frac{3}{11}$ „ „ „ „ 36—6, 28—14 (3)

„ $a = \frac{4}{11}$ „ „ „ „ 48—12, 45—15 (4)

„ $a = \frac{5}{11}$ „ „ „ „ 32—8, 30—10 (5)

„ $a = \frac{6}{11}$ „ „ „ „ 85—17, 72—30 [2]) (6)

„ $a = \frac{1}{2}$ „ „ „ „ 27—6, 24—9 (7)

oder 54—12, 48—18 usw.

Bei diesen Beispielen haben wir die Forderung (5) streng erfüllt. Wie schon eingangs gesagt wurde, ist das nicht nötig; sie muß bloß ungefähr erfüllt sein. Wie man dann verfährt, zeigt folgendes Beispiel:

$$a = \frac{3}{7}; \; b = \frac{10}{7} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{\frac{3}{7} \cdot 12}{\frac{3}{7}\left(\frac{3}{7}\, 12 - \frac{10}{7}\right)} \cdot \frac{\frac{10}{7}\left(\frac{3}{7} \cdot 12 - \frac{10}{7}\right)}{\frac{10}{7}}$$

$$= \frac{3 \cdot 12}{3 \cdot \left(\frac{36}{7} - \frac{10}{7}\right)} \cdot \frac{10\left(\frac{36}{7} - \frac{10}{7}\right)}{10}$$

Die Klammer ist $\frac{26}{7}$ oder ungefähr 4.

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} = \frac{3 \cdot 12}{3 \cdot 4} \cdot \frac{10 \cdot 4}{10} = \frac{36}{12} \cdot \frac{40}{10}.$$

Die Bedingungen (1) bis (4) sind streng erfüllt, die Bedingung (5) nur angenähert, denn die Summe der Zahnzahlen des ersten Paares ist 48, die des zweiten 50.