kraft proportional der Ausdehnung ist, werden im Federband Kräfte von verschiedener Größe wirken, deren Resultante sich aus der Summe der Einzelkräfte zusammensetzt. Weil ferner die Entfernung der äußersten Schichten symmetrisch von der Mittelschicht ist, letzterer aber keine Kraftwirkung zukommt, da sie in ihrer Länge unverändert bleibt, so kann man die an symmetrisch gelegenen Schichten wirkenden Einzelkräfte als gleich groß bezeichnen und ihre Summe als die zweifache Einzelkraft annehmen. Abb. 4 soll dies beweisen.

Wenn die Enden der äußersten und innersten Schicht des gestreckten Stahlbandes in dieser Abbildung in den Punkten b und j liegen, so wird nach erfolgter Abbiegung der Endpunkt b der äußersten Schicht a b in b_1 und der Endpunkt j der innersten Schicht j i in j_1 liegen. Somit zeigt die Strecke b b_1 die Ausdehnung der äußersten Schicht, d d_1 die Ausdehnung der zweiten Schicht, f den Endpunkt der unveränderten Mittelschicht, h_1 h die Verkürzung der vierten Schicht und j j_1 die Verkürzung der innersten Schicht.

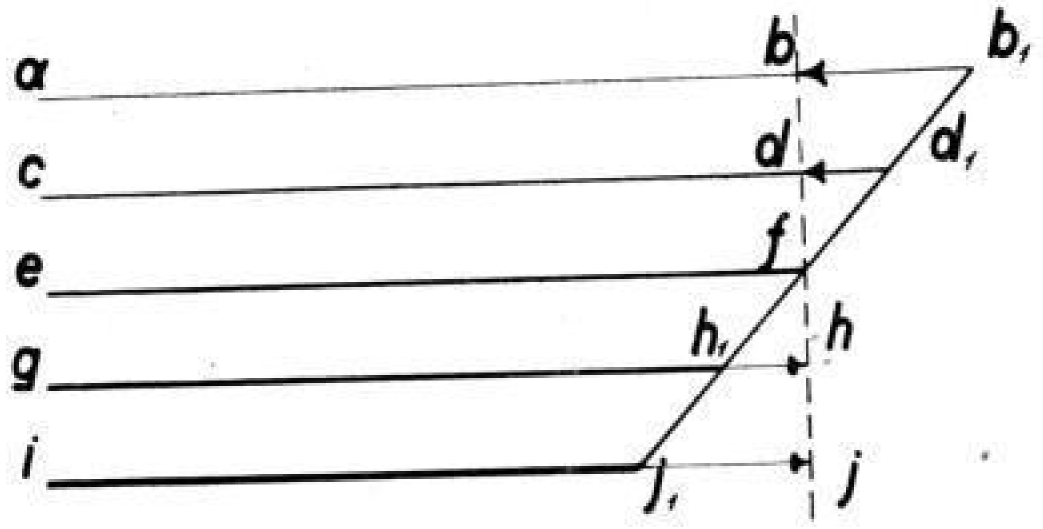

Abb. 4

Aus der Abbildung kann auch entnommen werden, daß sowohl Ausdehnung als auch Verkürzung proportional zur Entfernung von der Mittelschicht erfolgen, was übrigens auch daraus hervorgeht, daß sich die Länge um die Größe

$$\pm \frac{2 e \cdot 3{,}14}{u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

ändern, worin e die Entfernung der Schicht von der Mittelschicht, u das Verhältnis des Bogens zum ganzen Kreisumfang bedeutet. Je nachdem die Schicht verkürzt oder verlängert wird, ist sinnentsprechend das Plus- oder Minusvorzeichen anzuwenden.

Die Kraftrichtung der äußersten und innersten Schicht ist zwar entgegengesetzt, da aber zwischen ihnen eine neutrale oder ruhende Schicht sich befindet, kann man deren Endpunkt f als Drehungspunkt eines Hebels b_1 j_1 auffassen, an dessen Enden die beiden Kräfte im gleichen Sinne wirken, so daß sich ihre Wirkung summiert. Das gleiche gilt auch von allen übrigen symmetrisch liegenden Schichten und der von ihnen ausgeübten Kräfte.

Eine klare Ableitung der Formeln gibt Jules Großmann. Bei dieser Ableitung wird von der Formel zur Berechnung der Länge der einzelnen Schichtstreifen ausgegangen. Diese Formel lautet

$$l_n = 2\,(r \pm e_n) \cdot \alpha \cdot \pi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (50)$$

In dieser Formel ist l_n die Länge einer Schicht und e_n die Entfernung des Mittels dieser Schicht vom Mittel der neutralen Schicht. Je nachdem diese Schicht eine äußere oder eine innere ist, wird das positive oder das negative Vorzeichen gegeben. α bezeichnet den Verdrehungswinkel, um den die Feder aufgewunden wurde.

Es wurde bereits erwähnt, daß sich die Wirkung der symmetrisch zur Mitte gelegenen Schichten summiert. Wenn man die Länge der äußersten Schicht mit l_a, die Länge der innersten Schicht mit l_i bezeichnet, so ist

$$l_a = 2\,(r + e) \cdot \alpha \cdot \pi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

und

$$l_i = 2\,(r - e) \cdot \alpha \cdot \pi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (52)$$

Die Längendifferenz der beiden Schichten ist dann

$$\Delta l = l_a - l_i = 2\,(r - e) \cdot \alpha \cdot \pi - 2\,(r - e) \cdot \alpha \cdot \pi$$
$$= 4\,\alpha \pi \cdot e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53)$$

Auf gleiche Art werden auch die Differenzen der Längen der anderen Schichten erhalten. Diese Berechnung bezieht sich jedoch nur auf die Biegung des Federbandes aus seiner gestreckten Form in eine gebogene. Ist die Feder in ihrem Ruhezustande schon aufgewunden, wie es bei den Uhrfedern der Fall ist, so wird sich der Verdrehungswinkel zusammensetzen aus dem ursprünglichen Winkel $\alpha \cdot \pi$ und der neuen Verdrehung $\alpha_1 \cdot \pi$. Dabei ändert sich auch der Halbmesser der Schichten, denn die Windungen werden durch jede weitere Verdrehung enger. Bezeichnet man in der weiteren Folge, um die Formeln übersichtlicher zu gestalten, das analytische Maß des Verdrehungswinkels einschließlich des ihm beigegebenen, in der vorhergehenden Formel dem Halbmesser vorgesetzten Faktor 2π mit α, so gilt dieser Ausdruck für $2\alpha \cdot \pi$, und die Formel für die Länge der äußersten Schicht wird lauten

$$l_a = (r + e)\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

Die Verlängerung bei einer weiteren Verdrehung ist dann aus dem neuen Halbmesser zu errechnen. Die Länge der mittelsten Schicht bleibt, wie wir wissen, unverändert, ihr Halbmesser r'' ist trotzdem kleiner geworden. Er läßt sich aus nachstehender Formel ermitteln:

$$l = r''\,(\alpha + \alpha_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (55)$$

worin α_1 den neuen Verdrehungswinkel bezeichnet. Da die Formel nach der ersten Verdrehung zur Bestimmung der Länge

$$l = r \cdot \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

war und die Längen gleich geblieben sind, kann man aus den beiden Gleichungen eine neue bilden, die lautet:

$$r \cdot \alpha = r''\,(\alpha + \alpha_1),$$

und der neue Halbmesser r'' ist

$$r'' = \frac{r \cdot \alpha}{\alpha + \alpha_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57)$$

Berechnet man die Länge l_a'' der äußersten Schicht nach der neuen Verdrehung, so ist ihr natürlich der neue Halbmesser r'' und auch der gesamte Verdrehungswinkel $\alpha + \alpha_1$, der aus der Summe des ersten und zweiten Winkels besteht, zugrunde zu legen. Die Formel lautet dann:

$$l_a'' = \left(\frac{r \cdot \alpha}{\alpha + \alpha_1} + e\right)(\alpha + \alpha_1) = r \cdot \alpha + e \cdot \alpha + e \cdot \alpha_1 \quad (58)$$

Die Längenänderung nach der zweiten Verdrehung ist gleich der Differenz zwischen der Länge der äußersten Schicht nach der ersten und ihrer Länge nach der zweiten Verdrehung. In einer Formel ausgdrückt ist dies:

$$l_a'' - l_a = r \cdot \alpha + e \cdot \alpha + e \cdot \alpha_1 - r \cdot \alpha - e \cdot \alpha = e \cdot \alpha_1 \quad (59)$$

Die Längenänderung ist nach dieser Beweisführung ausschließlich proportional der Verdrehung, ohne Rücksicht auf den Halbmesser der Windung, die Spannkraft der Feder setzt sich aber zusammen aus der vor der Verdrehung vorhandenen plus der durch die neuerliche Verdrehung bewirkten.

Das Moment der Kraft ist nach Formel (46)

$$M = P \cdot r$$

für die äußerste Schicht ist der Halbmesser gleich $r + e$, für die innerste Schicht gleich $r - e$, das Kraftmoment für die äußerste Schicht ist

$$M_a = P\,(r + e) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60)$$

und für die innerste Schicht

$$M_i = P\,(r - e) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61)$$

Da sich beide Kraftmomente in ihrer Wirkung summieren, ist das Moment

$$M_s = P\,(r + e) - P\,(r - e) = 2 P \cdot e \quad . \; . \quad (62)$$