lehre bekannt. Der allgemeine binomische Lehrsatz gibt also die Reihenentwickelung auch für solche Ausdrücke, in denen das Binom im Nenner oder unter dem Wurzelzeichen vorkommt. Solche Reihen sind für uns nur brauchbar, wenn sie konvergieren, d. h. wenn sie mit wachsender Gliederzahl einem endlichen Grenzwert zustreben. Die Feststellung, ob eine Reihe konvergiert, ist oft schwierig. Wir benutzen nur Reihen, die so stark konvergieren, daß wir mit ganz wenig Gliedern dem Grenzwert genügend nahe kommen. Dazu einige Beispiele.

Zunächst einige Beispiele mit bestimmten Zahlen:

Es soll ohne Benutzung von Logarithmen die fünfte Wurzel aus 33 auf 4 Dezimalstellen genau berechnet werden.

$$\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32+1}$$

$$= \sqrt[5]{32\left(1+\frac{1}{32}\right)} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{32}} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Wir entwickeln das Binom:

$$\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 1 + \binom{1/5}{1}\cdot\frac{1}{32} + \binom{1/5}{2}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \binom{1/5}{3}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} + \frac{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{32^2} + \frac{\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{32^3} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{1024} + \frac{6}{125}\cdot\frac{1}{32\cdot 1024} - \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{160} - \frac{1}{12800} + \frac{3}{2048000} - \ldots$$

$$= 1 + 0{,}00625 - 0{,}000078125 + \ldots$$

Das vierte Glied hat etwa den Wert 0,0000015 ... Scheinbar gebrauchen wir dieses und auch schon das vorhergehende dritte Glied gar nicht mehr, da wir ja nur vier Stellen nach dem Komma haben wollen, aber wir müssen beachten, daß wir das Ergebnis dieser Reihenentwickelung noch mit 2 multiplizieren müssen. Wenn wir die vierte Stelle wirklich genau haben wollen, müssen wir deshalb die fünfte, unter Umständen sogar die sechste mit berücksichtigen. Es ergibt sich:

$$\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 1{,}006173.$$

$$\sqrt[5]{33} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 2{,}012346,$$

$$\sqrt[5]{33} = 2{,}0123.$$

Diese Reihe konvergiert sehr gut, so daß wir mit drei oder vier Gliedern die verlangte Genauigkeit erreichen. Wir wollen nun ein ähnliches Beispiel mit schlechterer Konvergenz betrachten:

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{32+8}$$

$$= \sqrt[5]{32\left(1+\frac{8}{32}\right)} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{4}} = 2\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 1 + \binom{1/5}{1}\cdot\frac{1}{4} + \binom{1/5}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{1/5}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \binom{1/5}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{25}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{6}{125}\cdot\frac{1}{4^3} - \frac{21}{625}\cdot\frac{1}{4^4} + \frac{399}{15625}\cdot\frac{1}{4^5} - \frac{1596}{78125}\cdot\frac{1}{4^6} + \frac{6612}{390625}\cdot\frac{1}{4^7} - \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{200} + \frac{3}{4000} - \frac{21}{160000} + \frac{399}{16000000} - \frac{399}{80000000} + \frac{1653}{1600000000} - \ldots$$

$$= 1 + 0{,}05 - 0{,}005 + 0{,}00075 - 0{,}00013125 + 0{,}00002493 - 0{,}000005 + 0{,}000001 - \ldots$$

$$= 1{,}045640,$$

$$\sqrt[5]{40} = 2{,}091280,$$

$$\sqrt[5]{40} = 2{,}0913.$$

Wir sehen, daß wir hier statt drei bis vier Glieder deren sieben bis acht gebrauchen, und daß die „Stellenjägerei“ auch in der Mathematik bisweilen recht mühsam ist.

Würde die Konvergenz noch schlechter, so müßten wir sie durch geschickte Zerlegung verbessern. Soll z. B. die fünfte Wurzel aus 80 gezogen werden, so würde die Reihe überhaupt nicht mehr konvergieren, wenn wir $2^5 = 32$ ausklammerten. Durch Überschlagsrechnung finden wir, daß das Ergebnis nahezu 2,4 ist. Deshalb sondern wir $2{,}4^5 = 79{,}62624$ aus:

$$\sqrt[5]{80} = \sqrt[5]{79{,}62624 + 0{,}37376} = \sqrt[5]{2{,}4^5\left(1+\frac{0{,}37376}{79{,}62624}\right)}$$

$$= 2{,}4\cdot(1 + 0{,}0046939)^{\frac{1}{5}} = 2{,}4022.$$

Der zweite Summand des Binoms ist zwar etwas unbequem, aber er ist so klein, daß drei Glieder der Reihe genügende Genauigkeit ergeben.

Diese Beispiele sollten zeigen, wie man zahlenmäßig mit Reihen rechnet. Wir wollen nun noch einige allgemeine Beispiele von Aufgaben besprechen, die häufig vorkommen.

$$1)\ \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \binom{-1}{3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{-1}{1}x + \frac{(-1)(-2)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad (2a)$$

Zu demselben Ergebnis hätten wir auch durch Ausdividieren kommen können.

Ist in diesem Ausdruck x eine kleine Zahl, z. B. 0,1, so ist der Wert des Bruches $\frac{1}{1{,}1} = 0{,}90909\ldots$ Unsere Reihe ergibt $1 - 0{,}1 + 0{,}01 - 0{,}001 + \ldots$

Brechen wir nach dem zweiten Gliede ab, so erhalten wir 0,9 statt 0,90909, machen also einen Fehler von 0,00909.

Brechen wir nach dem dritten Gliede ab, so erhalten wir 0,91 statt 0,90909, machen also einen Fehler von 0,000909 ...

Genügt uns eine Genauigkeit von 0,01, so kommen wir mit den beiden ersten Gliedern aus, verlangen wir aber eine solche von 0,001, so müssen wir das dritte Glied noch mit hinzuziehen.

Ist $x = 0{,}01$, so ist der Wert des Bruches 0,990099 ... Unsere Reihe ist:

$$1 - 0{,}01 + 0{,}0001 - 0{,}000001 + \ldots$$