Brechen wir nach dem zweiten Gliede ab, so vernachlässigen wir 0,000099, brechen wir nach dem dritten Gliede ab, so ist unser Fehler 0,00000099. Wir sehen, daß bei kleinerem x der Fehler schnell kleiner wird, oder — wie wir sagen — die Reihe schärfer konvergiert. Wir sehen aber auch an diesem Beispiel, welchen Vorteil die binomische Entwickelung gewährt, nämlich unbequeme Ausdrücke in bequeme Reihen zu entwickeln, von denen ganz wenig Glieder (für uns meist zwei, höchstens drei) genügen, um die von uns verlangte Genauigkeit zu erreichen.

Ähnliche unbequeme Ausdrücke sind:

2) $$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 - \binom{-1}{1} x + \binom{-1}{2} x^2 - \binom{-1}{3} x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \qquad (2b)$$

wie man auch durch Ausdividieren leicht finden kann.

Hier liegen die Genauigkeitsverhältnisse fast ebenso wie bei dem ersten Beispiel.

3) $$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{1/2}{1} x + \binom{1/2}{2} x^2 + \binom{1/2}{3} x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1} x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \ldots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 - \ldots \qquad (2c)$$

4) $$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{16} x^3 - \ldots \qquad (2d)$$

Bei diesen beiden Reihen liegen die Genauigkeitsverhältnisse noch günstiger als bei den ersten beiden Beispielen. Z. B. ist $\sqrt{1+0{,}1} = 1{,}048768$, während die ersten beiden Glieder der zugehörigen Reihe 1,05 ergeben, also nur um 0,00123 vom genauen Werte abweichen.

Zur Vervollständigung unserer Beispiele wollen wir noch zwei häufig vorkommende Werte entwickeln:

5) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 - \frac{5}{16} x^3 + \ldots \qquad (2e)$$

6) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 + \ldots \qquad (2f)$$

die zwar nicht ganz so gut wie die beiden vorhergehenden, aber besser als die beiden ersten Reihen konvergieren.

Wir haben in diesen Beispielen den ersten Summanden des Binoms gleich 1 angenommen. Das ist natürlich von vornherein nicht immer so, aber durch einfache Umformung kann man den Ausdruck immer auf eine solche oder eine ähnliche Form bringen (wie wir das bei dem ersten, ausführlich durchgerechneten Beispiel gemacht haben). Das hat den Vorzug, daß dieser erste Summand in dem zweiten und den folgenden Gliedern nicht mehr auftritt, da alle Potenzen von 1 wieder 1 sind. So fallen alle gebrochenen und negativen Exponenten fort, und die Reihe ist eine reine Potenzreihe mit ganzen positiven Exponenten von x. Die Größe dieses Wertes x hält sich bei uns im allgemeinen unter 0,1, so daß wir, wie schon gesagt, meist mit zwei bis drei Gliedern auskommen.

In solche Potenzreihen lassen sich auch die trigonometrischen und die Kreisfunktionen entwickeln. Da diese letzteren in den Lehrbüchern meist recht stiefmütterlich behandelt werden, wollen wir das Notwendigste darüber hier sagen.

Die Kreisfunktionen

Wenn man um den Scheitel eines Winkels einen Kreis mit dem Halbmesser 1 (cm, dm, m usw.) schlägt, so kann man die Größe des Winkels auch durch das auf dem Kreisumfang gemessene Bogenmaß ausdrücken. Ist der Halbmesser 1, so ist der zum Winkel von 360° gehörige ganze Umfang des Einheitskreises $2\pi = 6{,}28318\ldots$ Zu einem Winkel von 1° gehört demnach $\frac{2\pi}{360} = 0{,}0174533$ (im selben Maß gemessen wie der Halbmesser). In fast allen Logarithmentafeln findet sich eine Tabelle zum Umrechnen von Winkelmaß im Bogenmaß. Das Bogenmaß drückt man aus durch arc (Arkus-Bogen), z. B. arc 32° 17′ 35″ = 0,56363. In einem Kreise mit dem Halbmesser r ist der zum Winkel α gehörige Bogen $b = r \cdot \text{arc}\,\alpha$. Wenn man beim Zeichnen verlangt, daß auf einem Kreise 1 mm einem Winkel von 1° entspricht, so hat man die Gleichung:

$$1\ \text{mm} = r \cdot \text{arc}\ 1^\circ = r \cdot 0{,}0174533,$$

woraus man für den Halbmesser r findet: $r = \frac{1\ \text{mm}}{0{,}0174533}$,
$r = 57{,}296$ mm oder abgerundet $r = 57{,}3$ mm.

Der Arkus wird nicht nur zum Winkel in Beziehung gesetzt, sondern auch zu den trigonometrischen Funktionen. Nehmen wir an, in Abb. 1 sei nicht der Winkel γ bekannt, wohl aber die Strecke AC = c und der Halbmesser r, und gesucht sei arc γ = DE. Dann suchen wir also den Arkus, dessen Sinus bekannt ist, denn $\sin\gamma = \frac{c}{r}$. Man drückt das

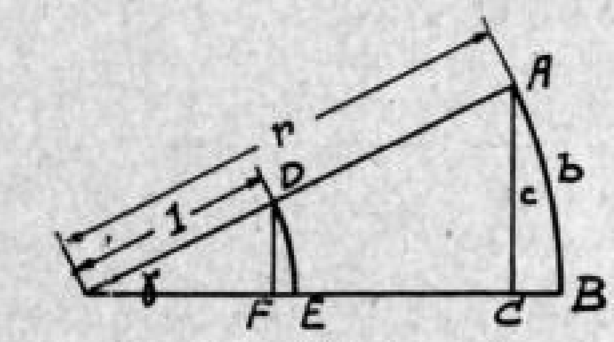

Abb. 1

kurz so aus: $DE = \text{arc}\sin\frac{c}{r}$. Man kann sich denken, daß es Tafeln gibt, aus denen zu jedem Sinuswert der zugehörige Arkuswert zu entnehmen ist. Diese Tafeln finden sich aber in den gebräuchlichen Logarithmentafeln nicht, weshalb man den Umweg einschlagen muß, zuerst aus dem Sinuswert den Winkelwert und aus diesem den Arkuswert zu bestimmen. Es sei z. B. r = 7 mm und c = 3,5 mm. Dann ist $\sin\gamma = \frac{c}{r} = \frac{3{,}5}{7} = 0{,}5$. Aus der Sinustafel finden wir (sofern wir es nicht so wissen) $\gamma = 30^\circ$, und aus der arc-Tafel finden wir dazu arc 30° = 0,52360, so daß sich ergibt: $DE = \text{arc}\sin\frac{3{,}5}{7} = \text{arc}\sin 0{,}5 = 0{,}52360$, oder in Worten: Der Arkus zum Sinus 0,5 ist 0,52360. Hätten wir statt DE den Bogen AB gesucht, so wäre $AB = r \cdot \text{arc}\sin\frac{c}{r} = 7 \cdot 0{,}52360 = 3{,}64520$ mm. Wir dürfen natürlich nicht den Faktor r gegen den Nenner r im Funktionswert kürzen, sehen aber, daß der Bogen b nur um wenig größer ist als die Strecke c. Ist der Winkel γ sehr klein, so kann man angenähert b = c setzen. Ist z. B. c = 0,5 mm und r = 7 mm, so ist $\sin\gamma = \frac{0{,}5}{7} = 0{,}07143$ und $\gamma = 4^\circ 5' 45{,}7''$, dazu $\text{arc}\sin\frac{0{,}5}{7} = \text{arc}\ 4^\circ 5' 45{,}7'' = 0{,}07148$ oder $b = 7 \cdot \text{arc}\sin\frac{0{,}5}{7} = 0{,}50036$. Hätten wir unmittelbar c statt b gesetzt, also b = 0,50000 statt 0,50036, so hätten wir einen Fehler von 0,7‰ gemacht.

Ebenso wie zum Sinuswert kann man auch zu Werten der anderen trigonometrischen Funktionen den Arkus