Das Pendel

(1. Fortsetzung)

Von Dr. K. Giebel (Glashütte i. Sa.)

2. Die Grundlagen der Mechanik

Während die Mathematik für uns nur ein Hilfsmittel, Rüstzeug ist, ist die Mechanik Selbstzweck. Denn die in der Uhr wirkenden Gesetze sind ja nichts anderes als die reinen Gesetze der Mechanik. Die Uhr ist angewandte Mechanik. Deshalb müssen wir uns vollständig klar sein über die Grundbegriffe der Mechanik.

a) Die reine Bewegungslehre (Kinematik) handelt von Weg, Zeit, Geschwindigkeit, Beschleunigung.

Der Weg wird im Längenmaß gemessen, in der Wissenschaft in Zentimetern. Allgemein wird er mit s (spatium) bezeichnet.

Die Zeit (t = tempus) wird fast ausschließlich in Sekunden gemessen.

Der erste abgeleitete Begriff ist die Geschwindigkeit. Sie ist der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg. Man findet sie, indem man den in einer beliebigen Zeit zurückgelegten Weg durch die Anzahl der Zeiteinheiten dividiert. Legt ein Eisenbahnzug in einer halben Stunde (= 1800 sec) 36 km (3 600 000 cm) zurück, so ist die Geschwindigkeit

$$c = \frac{3600000}{1800} = 2000 \text{ cm/sec oder } 20 \text{ m/sec},$$

oder allgemein:

$$\boxed{c = \frac{s}{t}} \tag{4}$$

Ist im besonderen Falle der Weg eine Kreisbahn mit dem Halbmesser r, also die ganze Kreisbahn $s = 2\pi r$, und ist die zum Durchlaufen dieses Weges nötige Zeit, also die Umlaufszeit, T, so ist die Geschwindigkeit:

$$c = \frac{2\pi r}{T}. \tag{4a}$$

Der Ausdruck $\frac{2\pi}{T}$ wäre die Geschwindigkeit eines Körpers, der in derselben Umlaufszeit den Umfang des Einheitskreises durchliefe. Der auf dem Einheitskreise in der Zeiteinheit durchlaufene Weg ist der im Bogenmaß gemessene Winkel, weshalb man den Ausdruck $\frac{2\pi}{T}$ auch als Winkelgeschwindigkeit (ω) bezeichnet. Zwischen der im Längenmaß gemessenen Geschwindigkeit c (lineare Geschwindigkeit) und der im Bogenmaß gemessenen Geschwindigkeit ω (Winkelgeschwindigkeit) ergibt sich nach Gleichung (4a):

$$c = r \cdot \omega. \tag{4b}$$

Die Geschwindigkeit, von der wir bisher gesprochen haben, und die wir mit c (celeritas constans = gleichförmige Geschwindigkeit) bezeichnet haben, ist die gleichförmige oder mittlere Geschwindigkeit. Es gibt daneben aber noch eine ungleichförmige Geschwindigkeit, v (velocitas variabilis = veränderliche Geschwindigkeit). Denken wir uns in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem (Abb. 2) auf der Wagerechten die Zeit, auf der Senkrechten den Weg aufgetragen, und tragen wir zu jedem Zeitpunkt den zugehörigen Wegpunkt ein, so erhalten wir bei der gleichförmigen Bewegung eine Gerade unter dem Winkel γ, und die Geschwindigkeit läßt sich für jeden Punkt der Geraden ausdrücken durch $c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Senkrechte}}{\text{Wagerechte}} = \text{tg}\,\gamma$.

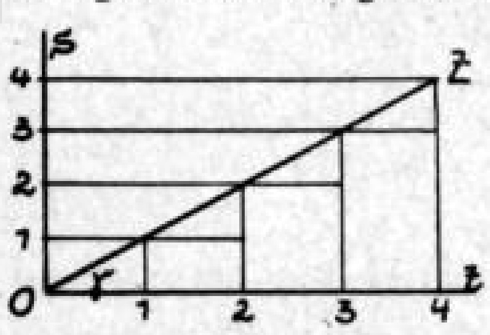

Abb. 2

Nehmen wir aber nun die Fallbewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene, so finden wir, daß die in den einzelnen Zeiteinheiten durchlaufenen Wege verschieden groß sind. Durchläuft der Körper z. B. in der ersten Sekunde 1 cm, so durchläuft er in der zweiten 3 cm, in der dritten 5 cm, in der vierten 7 cm usw. Tragen wir diese Werte in ein entsprechendes Diagramm ein (Abb. 3), so erhalten wir eine gekrümmte Linie. Wollen wir jetzt für einen Punkt A die Geschwindigkeit feststellen, so müssen wir annehmen, daß der Punkt in seiner augenblicklichen Richtung (d. h. in der Richtung der Tangente) fortschreitet, dann können wir wieder ein rechtwinkeliges Dreieck ADC bilden, in dem die Geschwindigkeit $v = \text{tg}\,\gamma$ ist. Natürlich ändert sich γ und damit v von Punkt zu Punkt. Um nun nicht in jedem Punkte die Tangente zeichnen zu müssen, können wir auch anders vorgehen. Wir können auf der Kurve einen zu A benachbarten Punkt B annehmen und das kleine Dreieck BEA zeichnen. In diesem ist der Winkel bei der Ecke B nahezu gleich γ und wird dessen Größe immer näher kommen, je näher B an A heranrückt. Aus diesem sehr kleinen Dreieck BEA können wir also $v = \text{tg}\,\gamma$ bestimmen $= \frac{EA}{BE}$. EA ist der kleine Wegzuwachs Δs (Δ ist das große griechische Delta und bedeutet „Zuwachs von"). BE ist Δt, so daß wir für die Geschwindigkeit im Punkte A erhalten:

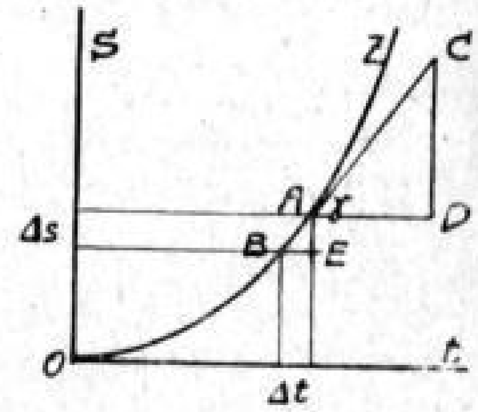

Abb. 3

$$\boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \tag{5}$$

Die veränderliche Geschwindigkeit erhält man also, indem man ein kleines Wegelement durch das zugehörige Zeitelement dividiert.

Nun möchte man noch wissen, in welchem Maße sich die Geschwindigkeit ändert, d. h. wie groß der Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit ist. Diese Größe nennt man die Beschleunigung. Man findet die Beschleunigung durch Überlegungen, die den vorhergehenden entsprechen:

$$\boxed{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \tag{6}$$

Bei unserem obigen Beispiel des Falles auf der schiefen Ebene wäre der mittlere Wegzuwachs in der Sekunde, also die mittlere Geschwindigkeit 1 cm, 3 cm, 5 cm in der ersten, zweiten, dritten Sekunde. Der Geschwindigkeitszuwachs in der Sekunde, also die Beschleunigung, ist für alle Punkte der Bahn dieselbe, nämlich 2 cm/sec². Eine solche Bewegung nennt man gleichförmig beschleunigt. Auch der freie Fall ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung der Schwere auf der Erde ist bekanntlich in mittlerer geographischer Breite 9,81 m/sec².

Nicht alle beschleunigten Bewegungen sind gleichförmig beschleunigt. Gerade die Schwingungsbewegung, die uns besonders angeht, ist ungleichförmig beschleunigt. In welcher Weise, werden wir später sehen.

Erfährt ein Körper in einer Kreisbahn eine Beschleunigung, so wird man passend die lineare Beschleunigung durch eine Winkelbeschleunigung ausdrücken:

$$b = r \cdot \beta, \tag{6a}$$