$$J = \delta \cdot \frac{s \cdot h}{n} \cdot \frac{s^2}{16 n^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (2\nu - 1)^2$$

$$= \delta \cdot \frac{s^3 \cdot h}{16 n^3} \cdot \Sigma (2\nu - 1)^2; \text{ für } \nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$$

$$= \delta \cdot \frac{s^3 \cdot h}{16 n^3} \cdot \underbrace{(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + [2n-1]^2)}_{K}.$$

Um für den Klammerausdruck K eine handlichere Form zu finden, entwickeln wir folgende Binome:

$$3^3 = (1+2)^3 = 1^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 + 2^3,$$
$$5^3 = (3+2)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2^2 + 2^3,$$
$$7^3 = (5+2)^3 = 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2^2 + 2^3,$$
$$9^3 = (7+2)^3 = 7^3 + 3 \cdot 7^2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \cdot 2^2 + 2^3,$$

usw.

Nun wollen wir beachten, daß der Ausdruck für 9^3 beginnt mit 7^3. Für diesen Wert aber können wir die Entwickelung der vorletzten Reihe einsetzen, die mit 5^3 beginnt. Für dieses 5^3 läßt sich die Entwickelung der drittletzten Reihe einsetzen usw. Wir erhalten für 9^3:

$$\begin{aligned} 9^3 = \quad & 3 \cdot 7^2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 \cdot 2^2 + 2^3, \\ & + 3 \cdot 5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2^2 + 2^3, \\ & + 3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2^2 + 2^3, \\ + 1^3 & + 3 \cdot 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 + 2^3. \end{aligned}$$

Die Glieder der ersten Spalte sind verschwunden bis auf das letzte, 1^3. Addieren wir jetzt die Reihen, so erhalten wir:

$$9^3 = 1^3 + 6 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) + 12 (1 + 3 + 5 + 7) + \frac{9-1}{2} \cdot 8.$$

Setzen wir nun für $9 = 2 \cdot 4 + 1$ das allgemeine Glied $(2n+1)$ ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (2n+1)^3 = 1^3 & + 6 (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + [2n-1]^2) \\ & + 12 (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + [2n-1]) \\ & + \frac{(2n+1)-1}{2} \cdot 8. \end{aligned}$$

Die Klammer des zweiten Gliedes ist unser gesuchter Ausdruck K, die Klammer des dritten Gliedes ist bekannt, nämlich n^2, und das vierte Glied ist $n \cdot 8$, so daß unser Ausdruck die Form annimmt:

$$(2n+1)^3 = 1 + 6K + 12 \cdot n^2 + 8n$$

Daraus ergibt sich für 6 K:

$$6K = (2n+1)^3 - 12n^2 - 8n - 1$$

Lösen wir die Klammer auf, so erhalten wir:

$$6K = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 - 12n^2 - 8n - 1,$$
$$6K = 8n^3 - 2n = 2n(4n^2 - 1) = 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n-1)$$
$$6K = (2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1),$$

oder endlich:

$$K = \frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}{6}.$$

Setzen wir diesen Wert in unsere Gleichung für J ein, so nimmt diese die Form an:

$$J = \delta \cdot \frac{s^3 \cdot h}{16 n^3} \cdot \frac{(2n+1) \cdot 2n (2n-1)}{6},$$

oder

$$J = \delta \cdot \frac{s^3 \cdot h}{96} \cdot \frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}{n^3}.$$

Lassen wir nun n sehr groß werden, d. h. machen wir unsere Streifen sehr schmal, so wird mit wachsender Zahl n unser Ausdruck dem genauen Wert von J immer näher kommen. Ist aber n sehr groß, so kann

$$(2n+1)\, 2n \cdot (2n-1)$$

mit genügender Genauigkeit $= 2n \cdot 2n \cdot 2n = 8n^3$ gesetzt werden. Und wir erhalten:

$$J = \delta \cdot \frac{s^3 \cdot h}{96} \cdot \frac{8n^3}{n^3},$$

$$J = \delta \cdot \frac{s^3 \cdot h}{12}.$$

$\delta \cdot s \cdot h$ ist aber die Masse m unserer Platte, also können wir setzen

$$J = m \cdot \frac{s^2}{12}.$$

Diese Entwickelung ist reichlich umständlich. Hätten wir die höhere Rechnungsart der Integralrechnung anwenden können, so würde sie nicht mehr als drei Zeilen in Anspruch genommen haben. Aber wir haben ja eingangs erörtert, weshalb wir auf diese Rechnungsart verzichten wollen. Wir haben uns jedenfalls überzeugt, daß es auch mit elementarer Rechnung gelingt, zu unserem Ergebnis zu kommen, das wir uns noch etwas genauer ansehen wollen.

Wollen wir den Ausdruck auf die uns geläufige Form des Trägheitsmomentes bringen, so setzen wir

$$J = m \cdot \varrho^2,$$

und aus dem Vergleich mit der vorhergehenden Gleichung ergibt sich dann.

$$\varrho^2 = \frac{s^2}{12} \text{ oder } \varrho = \frac{s}{\sqrt{12}} = \frac{s}{2\sqrt{3}} = \frac{s \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{1{,}732 \cdot s}{6},$$

$$\varrho = 0{,}2887\ s.$$

Hätten wir die feine Einteilung der Platte nicht gemacht, sondern die Platte nur ganz grob betrachtet, so hätten wir auf den Gedanken kommen können, folgendermaßen zu schließen: Wir denken uns die Masse jeder Plattenhälfte in ihrem Schwerpunkt vereinigt; dieser hat den Achselabstand 0,25 s. Dann ist das Trägheitsmoment:

$$J' = m \cdot \varrho'^2 = m \cdot (0{,}25\ s)^2.$$

Wir hätten dann, wie unsere feinere Rechnung zeigt, einen ganz groben Fehler gemacht, der bei ϱ etwa 13 % betragen hätte, und J wäre um ungefähr 25 % falsch berechnet worden. Dadurch, daß die Quadrate der größeren Abstände mehr ins Gewicht fallen als die der kleineren, wird ϱ größer als der Schwerpunktsabstand.

Das Bild wird vielleicht noch etwas klarer, wenn wir h sehr klein werden lassen. Dann wird die Platte zu einer Stange (Abb. 22), die um ihre Mitte drehbar ist. Die

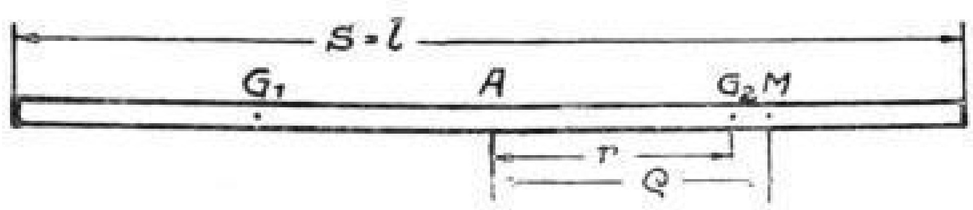

Abb. 22

Schwerpunkte der Stangenhälften G_1 und G_2 liegen bei $r = 0{,}25\,s$. Wollten wir uns aber für das Trägheitsmoment die Massen in einem Punkt vereinigt denken, so muß dieser Punkt im Abstande $\varrho = 0{,}2887\ s$ am Drehpunkt liegen. Wir nennen ihn den Trägheitsmittelpunkt und bezeichnen ihn mit M.

Durch unsere Rechnung haben wir festgestellt:

Der Trägheitsmittelpunkt liegt stets weiter von der Drehungsachse entfernt als der Massenmittelpunkt (= Schwerpunkt).

Hätten wir in Abb. 21 die andere Symmetrielinie, die die Seite h halbiert, als Drehungsachse genommen, so hätten wir entsprechend bekommen:

$$J = m \cdot \frac{h^2}{12}.$$

Nun gibt es aber noch eine dritte ausgezeichnete Achse, um die die Platte sich drehen kann, nämlich eine Achse senkrecht zur Platte durch den Punkt P. Es läßt sich leicht nachweisen, daß das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse gleich ist der Summe aus den Trägheitsmomenten um die beiden erstgenannten Achsen, die in der Ebene der Platte liegen und aufeinander senkrecht stehen.