$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Hierin setzen wir für x den Wert $\frac{\alpha}{2}$ ein:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^4}{384} - \ldots,$$

wo auf der rechten Seite die Bogenwerte eingesetzt werden müssen. Nehmen wir α sehr groß, z. B. $= 10^0$, so ist das zweite Glied $\frac{0{,}174\,53^2}{8} = 0{,}004$ und das dritte Glied 0,000002. Da es sich überhaupt nur um eine Annäherung handelt, können wir das dritte Glied schon vernachlässigen. Wir setzen den Wert in die Wurzel ein:

$$\sqrt{\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{8}}} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dieses Binom entwickeln wir nach Gl. (2f), Abschnitt 1:

$$\sqrt{\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha^2}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\alpha^4}{64} + \ldots$$

Auch hier begnügen wir uns mit den beiden ersten Gliedern und setzen den Wert in Gl. (35) ein:

$$\boxed{T = T_o\cdot\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (35\,a)$$

Weitere Annäherungen wollen wir nicht berechnen, sondern nur die bei genauer Rechnung sich ergebende Formel hierher setzen:

$$T = T_o\left[1 + \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\sin^3\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \ldots\right] \quad \ldots \quad (35\,b)$$

Da Sinus eines nicht zu großen Winkels in erster Annäherung gleich dem Bogen ist, entspricht das zweite Glied der eckigen Klammer in der genauen Formel (35 b) dem in unserer Näherungsformel (35 a) errechneten Korrektionsgliede.

Dieses zweite Glied wird im allgemeinen schon sehr klein sein. Das dritte Glied ist fast das Quadrat des zweiten, wird also klein zweiter Ordnung und kann deshalb meist neben dem zweiten vernachlässigt werden, so daß unsere Näherungsformel (35 a) im allgemeinen zur Berechnung ausreichen dürfte.

Im folgenden wollen wir nun nicht die Schwingungsdauer selbst wissen, sondern nur die Abweichung von der Dauer der unendlich kleinen Schwingung

$$\Delta T = T - T_o$$

(Δ = Delta = großes griechisches D, bedeutet „Abweichung von").

Wir lösen die Gl. (35 a) auf:

$$T = T_o + T_o\cdot\frac{\alpha^2}{16},$$

$$T - T_o = T_o\cdot\frac{\alpha^2}{16},$$

oder

$$\boxed{\Delta T = T_o\,\frac{\alpha^2}{16}} \quad \ldots\ldots \quad (36\,a)$$

Entsprechend ergibt Gl. (35 b):

$$\Delta T = T_o\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \ldots\right] \quad (36\,b)$$

In der folgenden Tabelle wollen wir die Größen dieser Abweichungen zusammenstellen. In der ersten Spalte steht die Schwingungsweite α (= dem halben Schwingungsweg) in Winkelgraden, in der zweiten die nach der genauen Formel (36 b) berechnete Abweichung in Prozenten der Schwingungsdauer und in der dritten diese Abweichung in Sekunden, berechnet für einen ganzen Tag = 86400 sec. Die vierte Spalte gibt die der vorhergehenden Spalte entsprechenden Werte, berechnet nach unserer Näherungsformel (36 a).

Schwingungsweite	Abweichung Δ nach der genauen Formel (36 b)		Abweichung Δ nach der Näherungsformel (36 a)
α^0	%	sec/Tag	sec/Tag
40	3,13	2707,8	2631
35	2,38	2059,1	2015
30	1,74	1504,0	1481
25	1,20	1039,3	1028
20	0,77	662,52	658,40
15	0,43	371,54	369,80
10	0,19	164,71	164,20
5	0,05	41,14	41,13

Durch Vergleichung der beiden letzten Spalten ersehen wir, daß unsere Näherungsformel in der Tat ausreicht; denn selbst bei einer Schwingungsweite von 40^0 oder einem Schwingungsbogen von 80^0, der heute wohl nur noch bei den kleinen Nippührchen mit Röllchen- oder Simplexhemmung anzutreffen ist, beträgt der Fehler der Angabe der Näherungsformel noch nicht $3\,^0/_0$; bei 5^0 Schwingungsweite, wie sie die gewöhnlichen Pendeluhren aufweisen, beträgt der Fehler der Angabe weniger als $^1/_{10}\,^0/_0$.

Für Uhren mit so großer Schwingungsweite ist nur die Größenordnung der Abweichung wissenswert; praktisch wichtig aber wird die Kenntnis der Abweichung bei Präzisionsuhren, die normal eine Schwingungsweite von 90 Winkelminuten haben. Wollen wir für solche Uhren die Abweichungen auf tausendstel Sekunden im Tage berechnen, so ist auch da das dritte Glied der genauen Formel (36 b) nur bis etwa 140 Winkelminuten hinab von Einfluß; immerhin wollen wir es berücksichtigen.

In Formel (36 b) ersetzen wir $\sin\frac{\alpha}{2}$ nach Gl. (3 a) durch $\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}$ und erhalten dann:

$$\Delta T = T_o\left(\frac{1}{16}\,\alpha^2 + \frac{11}{3072}\,\alpha^4 + \ldots\right) \quad \ldots \quad (36\,c)$$

Dieser Ausdruck ist insofern für die Rechnung etwas unbequem, als α im Bogenmaß zu messen ist. Wir wollen ihn so umgestalten, daß der Winkel α in Winkelminuten eingesetzt werden kann. Wir beachten, daß 1 Bogengrad = 0,0174533 ist, also, wenn p Bogengrad und q die entsprechenden Winkelminuten bedeuten, die Beziehung besteht:

$$p = \frac{0{,}0174533}{60}\,q = 0{,}00029089\ q,$$

$$p^2 = 0{,}000000084617\ q^2,$$

$$p^4 = 0{,}0000000000000007716\ q^4.$$