oder

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \alpha_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{12} + \dots} \quad (42)$$

Das Berichtigungsglied

$$\sqrt{1 - \frac{\alpha_0^2}{12} + \dots}$$

ist ziemlich klein. Selbst wenn wir α_0 im Winkelmaß $= 10^0$ nehmen, also im Bogenmaß 0,174533, weicht sein Wert erst um 0,00013 von 1 ab. Wollen wir diesen Fehler, der bei kleinerem α_0 natürlich noch kleiner ist, vernachlässigen, so nimmt die Gleichung die einfache Form an:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \alpha_0 \quad \dots\dots \quad (42a)$$

Dies ist also die Höchstgeschwindigkeit des Pendels, die es beim Durchgang durch die Ruhelage hat. Die Geschwindigkeit in einem beliebigen anderen Punkte N mit der Elongation α_1 erhalten wir durch ähnliche Überlegung. Ist das Pendel vom Umkehrpunkte B ausgegangen, so war in diesem die kinetische Energie Null. Auf dem Wege von B bis N hat das Pendel einen gewissen Betrag seiner potentiellen Energie verloren, der in kinetische Energie umgewandelt ist. Diese Wucht ist also gleich dem Unterschiede der potentiellen Energie im Punkte B und des im Punkte N noch vorhandenen Restes der potentiellen Energie:

$$W_1 = A_u - A_1,$$

$$\frac{1}{2} m l^2 \omega_1^2 = \frac{1}{2} m g l \alpha_0^2 - \frac{1}{2} m \cdot g \cdot l \cdot \alpha_1^2,$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} (\alpha_0^2 - \alpha_1^2) \quad \dots\dots \quad (43)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha_1^2} \quad \dots\dots \quad (43a)$$

Die Gleichung (43) läßt sich nach dem Pythagoreischen Lehrsaß geometrisch deuten: In Abb. 56 ist $\omega_1 = MG$ eine Kathete im rechtwinkeligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Höchstgeschwindigkeit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot a_0$$

ist, und dessen andere Kathete der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \alpha_1$$

ist.

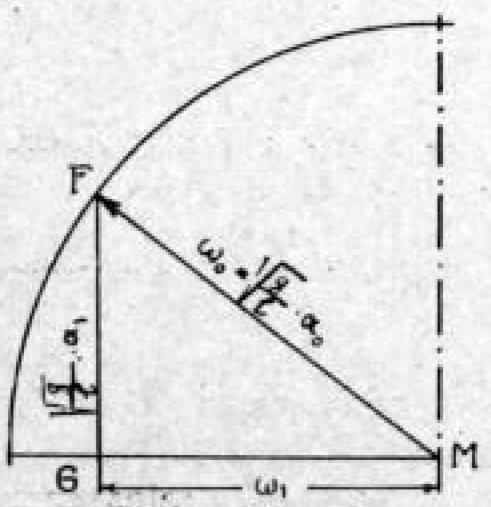

Abb. 56

Diese Tatsache führt uns wieder auf ein Bild, das Ähnlichkeit hat mit Abb. 39. Dort hatten wir die Schwingungsbewegung des Punktes N auf dem Wege BB′ verglichen mit der gleichförmigen Bewegung eines Punktes M auf dem Kreise BCB′. Die Projektion des mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Kreise umlaufenden Punktes M gab das Bild des auf dem Durchmesser BB′ schwingenden Punktes N. Das Bild nehmen wir wieder auf in Abb. 57. BB′ ist der Schwingungsweg $l \cdot 2\alpha_0$. Setzen wir $l = 1$, so kommen wir auf den Kreis mit dem Halbmesser α_0. Auf diesem Kreise läuft der Punkt M mit der gleichförmigen Geschwindigkeit ω_0 um. Seine Projektion N ist der schwingende Punkt, der sich im Abstande α_1 von der Mittellage O befindet. Dessen Geschwindigkeit finden wir, indem wir das Dreieck aus Abb. 56 in Abb. 57 an den Punkt M übertragen. Lassen wir nun den Punkt M von B nach C wandern und suchen wir für jeden Punkt das ω_1, so sehen wir anschaulich, wie ω_1 wächst von 0 bis ω_0.

Führen wir nun noch den Winkel γ ein, so können wir ω_1 statt durch den Pythagoreischen Lehrsaß auch durch Winkelfunktion ausdrücken:

$$\omega_1 = \omega_0 \cdot \cos\gamma.$$

Diese Gleichung läßt sich mit Gl. (43) leicht in Übereinstimmung bringen, wenn wir Gl. (42a) hinzuziehen.

Durch den Vergleich der Schwingungsbewegung mit der gleichförmigen Bewegung auf dem Kreise haben wir ein Mittel, die Zeit zu finden, die der schwingende Punkt zum Durchlaufen irgendeines Wegstückes gebraucht. Bestimmen wir zunächst die Schwingungsdauer T, d. h. die Zeit, die der Punkt N zum Durchlaufen der Strecke BB′ gebraucht. Der Vergleichspunkt M durchläuft gleichzeitig mit der gleichförmigen Geschwindigkeit ω_0 den Halbkreis BCB′.

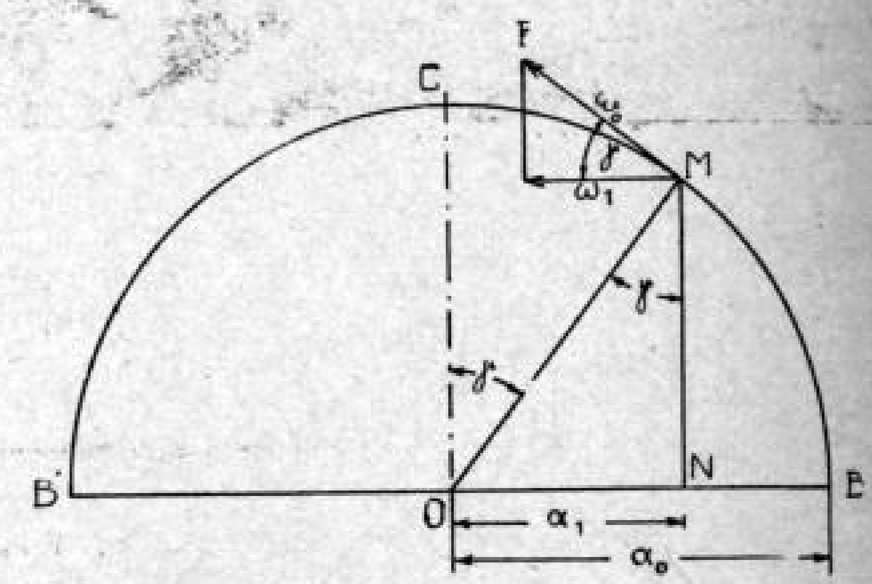

Abb. 57

Dieser Weg ist $\pi\alpha_0$, so daß wir die Gleichung erhalten:

$$\omega_0 = \frac{\pi\alpha_0}{T}.$$

oder

$$T = \frac{\pi \cdot \alpha_0}{\omega_0}.$$

Wir setzen aus Gl. (42a) den Wert für ω_0 ein:

$$T = \frac{\pi \cdot \alpha_0}{\alpha_0 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

und erhalten die uns wohlbekannte Gl. (32):

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Das wäre ja nun nichts Neues, sondern nur etwas Altes auf einem neuen Wege. Diese Betrachtungsweise wollen wir aber anwenden, um die Zeit t festzustellen, die der schwingende Punkt gebraucht, um ein Stück seines Weges, z. B. das Stück NO, zu durchlaufen. Wenn der schwingende Punkt die Strecke NO durchäuft, so wandert der mit der gleichförmigen Geschwindigkeit ω_0 umlaufende Vergleichspunkt von M nach C.

Es ist also:

$$t = \frac{MC}{\omega_0} \quad \dots\dots \quad (44)$$

MC ist das Bogenstück, das im Kreise mit dem Halbmesser α_0 zum Winkel γ gehört, also:

$$MC = \alpha_0 \cdot \operatorname{arc}\gamma.$$

Setzen wir diesen Wert und den für ω_0 aus Gl. (42a) in Gl. (44) ein, so ergibt sich:

$$t = \frac{\alpha_0 \cdot \operatorname{arc}\gamma}{\alpha_0 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}},$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \operatorname{arc}\gamma \quad \dots\dots \quad (44a)$$

Nun ergibt sich aus Dreieck ONM:

$$\sin\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_0},$$

so daß, wie wir in Abschnitt 1 an Abb. 1 erläutert hatten,

$$\operatorname{arc}\gamma = \operatorname{arc}\sin\frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$