Die Wucht des Körpers $K_1$ ist nach Gl. (12):

$$W_{01} = \frac{1}{2} J_1 \cdot \omega_0{}^2{}_1,$$

die des Körpers $K_2$ ist

$$W_{02} = \frac{1}{2} J_2 \cdot \omega_0{}^2{}_2.$$

Da die beiden Körper starr verbunden sind, haben sie dieselbe Winkelgeschwindigkeit, $\omega_0$, und die ganze Wucht des Pendels ist

$$W_0 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2)\, \omega_0{}^2.$$

Die Trägheitsmomente sind $J_1 = m_1 \cdot \varrho_1{}^2$ und $J_2 = m_2 \cdot \varrho_2{}^2$. Die Summe dieser Trägheitsmomente ist $J = J_1 + J_2$.

$$J = m \cdot \varrho^2 \quad \dots \dots \quad (50a)$$

Darin ist $m = m_1 + m_2$ und der Trägheitsradius

$$\varrho^2 = \frac{m_1 \cdot \varrho_1{}^2 + m_2 \cdot \varrho_2{}^2}{m_1 + m_2}.$$

Wie er berechnet wird, ist in Abschn. 5 ausführlich erörtert. Wir haben also

$$W_0 = \frac{1}{2} J \cdot \omega_0{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \varrho^2 \omega_0{}^2 \quad \dots \quad (50b)$$

worin m die Gesamtmasse und $\varrho$ der Trägheitsradius ist.

Die im Umkehrpunkte aufgespeicherte potentielle Energie ist Arbeits = Kraftmoment $\times$ Winkelweg [1]).

$$A_u = \frac{1}{2} \mathfrak{M} \cdot \alpha \quad \dots \dots \quad (50c)$$

Das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ ist gleich der im Schwerpunkte G angreifenden Tangentialkraft P mal dem Hebelarm r:

$$\mathfrak{M} = P \cdot r,$$

und die Tangentialkraft P ist, wie aus Abb. 46 zu ersehen ist,

$$P = P_1 \cdot \sin \alpha,$$

worin $P_1$ die Schwerkraft $m \cdot g$ ist.

Da es sich um kleine Winkel handelt, können wir $\sin \alpha$ durch $\alpha$ ersetzen [2]).

Das Kraftmoment wird dann

$$\mathfrak{M} = P_1 \cdot r \cdot \alpha.$$

Hierin führen wir für $P_1 \cdot r$ den Buchstaben D ein.

$$D = P_1 \cdot r = m \cdot g \cdot r \quad \dots \dots \quad (50d)$$

Dies ist das Richtmoment (Direktionsmoment). Es kann aufgefaßt werden als das Kraftmoment der Pendelmasse, wenn das Pendel sich in wagerechter Lage befindet. Setzen wir aber D in die Gleichung für das Moment ein, so ist $\mathfrak{M} = D \cdot \alpha$. Es würde also $D = \mathfrak{M}$ werden für $\alpha = 1$, d. h. für den Winkel 57,3° und nicht 90°. Dieser Widerspruch ist darin begründet, daß wir $\sin \alpha$ ersetzt haben durch $\alpha$. Die Gleichung $\mathfrak{M} = D \cdot \alpha$ gilt also beim Pendel nur für kleine Auslenkungswinkel.

Setzen wir den Wert für das Kraftmoment in Gl. (50c) ein, so erhalten wir für die potentielle Energie im Umkehrpunkte:

$$A_u = \frac{1}{2} D\, \alpha^2. \quad \dots \dots \quad (50e)$$

Nun setzen wir die Werte von (50b) und (50e) in (50) ein:

$$\frac{1}{2} J\, \omega^2 = \frac{1}{2} D \cdot \alpha^2, \text{ oder}$$

$$\omega^2 = \frac{D}{J} \cdot \alpha^2 \quad \dots \dots \quad (51)$$

1) Diese Gleichung stimmt nicht mit der Gl. (9a) überein. Dort hatten wir ein gleichförmiges Moment angenommen, während wir hier, ebenso wie in Abschn. (13a), ein mit dem Winkel wachsendes Moment haben. Ebenso wie in Gl. (41) muß deshalb hier der Faktor $\frac{1}{2}$ auftreten.

2) Wollen wir das nicht machen, so müssen wir in Reihen entwickeln und erhalten dann bei der Formel für die Schwingungsdauer Störungsglieder für die Abweichung vom Isochronismus, wie wir in Abschn. 11 des Näheren dargelegt haben.

Daraus ergibt sich dann durch eine Ableitung, die genau der in Abschn. 13a entspricht und deshalb hier nicht wiederholt werden soll,

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad \dots \dots \quad (52)$$

oder für Teilwege:

$$t = \sqrt{\frac{J}{D}} \arcsin \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \quad \dots \dots \quad (52a)$$

Wir haben nun noch die Beziehung aufzusuchen zwischen diesem physischen Pendel und dem gleichwertigen mathematischen Pendel, d. h. dem mathematischen Pendel, das dieselbe Schwingungsdauer hat. Die Formel dafür ist:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Wollen wir diese mit Gl. (52) in Einklang bringen, so ergibt sich:

$$\boxed{\frac{l}{g} = \frac{J}{D}} \quad \dots \dots \quad (53)$$

Für J und D setzen wir die Werte aus (50a) und (50d) ein:

$$\frac{l}{g} = \frac{m \cdot \varrho^2}{m \cdot g \cdot r}$$

$$\boxed{l = \frac{\varrho^2}{r}} \quad \dots \dots \quad (53a)$$

Die Länge des gleichwertigen mathematischen Pendels oder die reduzierte Pendellänge l ist also der

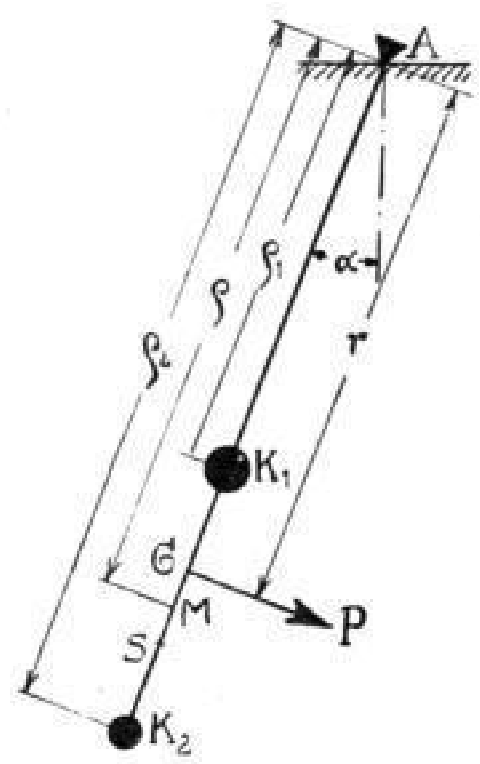


Abb. 69

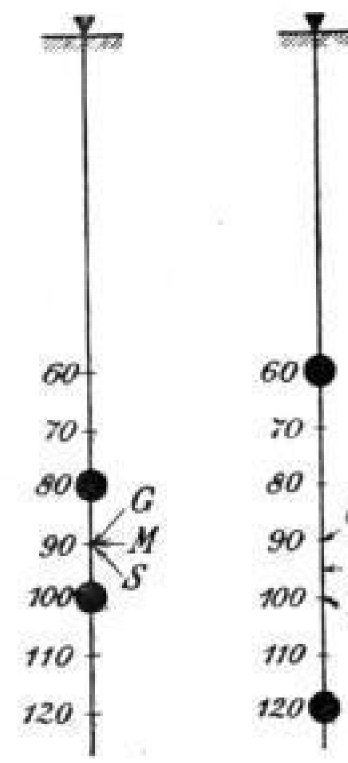


Abb. 70

Quotient aus dem Quadrat des Trägheitsradius $\varrho$ und dem Schwerpunktsabstande r. Selbstverständlich sind alle drei Größen im selben Maße zu messen.

An unserem Pendel haben wir also drei Punkte zu unterscheiden: 1. Den Schwerpunkt G, dessen Abstand vom Drehpunkte r ist; 2. den Trägheitsmittelpunkt M, dessen Abstand vom Drehpunkt der Trägheitsradius $\varrho$ ist; 3. den Schwingungsmittelpunkt S, dessen Abstand vom Drehpunkt die reduzierte Pendellänge l ist. Da $\varrho$ stets größer ist als r, so ergibt sich aus Gl. (53a), daß die drei Punkte immer in der Reihenfolge G, M, S unter einander liegen.

Das hier Entwickelte soll an zwei Beispielen erläutert werden. In eine leichte Holzstange von ungefähr 130 cm Länge schlagen wir oben eine Achse ein, die hüben und drüben schneidenförmig angefeilt ist (Abb. 70). In Abständen von je 10 cm vom Drehpunkt aus sind Bohrungen angebracht, so daß zwei Bleischeiben von etwa 2 kg Gewicht, die ebenfalls durchbohrt sind, mittels gewöhn-