1° Temperaturerhöhung[1] und wählen die Länge des Messingrohres so, daß unsere Bedingungsgleichung (61) erfüllt ist. Der Ausdehnungskoeffizient des Nickelstahles sei $\alpha = 0{,}0000008$, der des Stahles $\beta = 0{,}000012$, der des Messings $\gamma = 0{,}000018$, der des Rotgusses der Linse $\delta = 0{,}000017$.

1. Pendelstab

$$J_1 \cdot g = P_1 \cdot \left(\frac{l_1^2}{12} + \left[\frac{l_1}{2} + l_0\right]^2\right)$$

$\frac{l_1}{2} + l_0$ setzen wir $= l_{1s}$

$$J_1 \cdot g = P_1 \left(\frac{l_1^2}{12} + l_{1s}^2\right).$$

Durch die Erwärmung wird l_1 zu $l_1 + \Delta l_1$ und l_{1s} zu $l_{1s} + \Delta l_{1s}$

$$\frac{(l_1 + \Delta l)^2}{12} = \frac{l_1^2}{12} + \frac{2 \cdot l_1 \cdot \Delta l_1}{12}$$

$$(l_{1s} + \Delta l_{1s})^2 = l_{1s}^2 + 2 \cdot l_{1s} \cdot \Delta l_{1s},$$

wobei wir die Quadrate der Δl vernachlässigen dürfen.

$$J_1 \cdot g + \Delta J_1 \cdot g = P_1 \cdot \left(\frac{l_1^2}{12} + \frac{2\, l_1 \cdot \Delta l_1}{12} + l_{1s}^2 + 2 \cdot l_{1s} \cdot \Delta l_{1s}\right)$$

$$\Delta J_1 \cdot g = P_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot l_1 \cdot \Delta l_1}{12} + 2 \cdot l_{1s} \cdot \Delta l_{1s}\right) \quad . \; . \; . \quad (62)$$

l_1 ist 125 cm, Δl_1 ist $l_1 \cdot \alpha = 125 \cdot 0{,}0000008 = 0{,}0001$ cm,

$$l_{1s} = \frac{l_1}{2} + l_0 = 62{,}5 + 1{,}8 = 64{,}3 \text{ cm},$$

$$\Delta l_{1s} = \frac{l_1}{2} \cdot \alpha + l_0 \cdot \beta = 62{,}5 \cdot 0{,}0000008 + 1{,}8 \cdot 0{,}000012$$
$$= 0{,}00005 + 0{,}000021 = 0{,}000071 \text{ cm},$$
$$P_1 = 1100 \text{ g}.$$

In (62) eingesetzt:

$$\Delta J_1 \cdot g = 1100 \cdot \left(\frac{2 \cdot 125 \cdot 0{,}0001}{12} + 2 \cdot 64{,}3 \cdot 0{,}000071\right)$$
$$= 1100 \cdot (0{,}00208 + 0{,}00913),$$
$$\Delta J_1 \cdot g = 12{,}331 \text{ g cm}^2.$$

$$D_1 = P_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_0\right) = P_1 \cdot l_{1s},$$
$$D_1 + \Delta D_1 = P_1\,(l_{1s} + \Delta l_{1s}),$$
$$\Delta D_1 = P_1 \cdot \Delta l_{1s} = 1100 \cdot 0{,}000071,$$
$$\Delta D_1 = 0{,}0781 \text{ g cm}.$$

2. Pendellinse

$$J_2 \cdot g = P_2 \cdot \left(\frac{r_3^2 + r_2^2}{4} + \frac{h^2}{12} + l_2^2\right).$$

Auch hier vergrößert sich r zu $r + \Delta r$, h zu $h + \Delta h$. l_2 aber dürfen wir nicht als fest ansehen. Wir setzen $l_2 = l_3 - p$, wo p die Länge des Rohres ist. Dieses Rohr besteht aus x cm Messing und $(11{,}6 - x)$ cm Nickelstahl. l_3 wird zu $l_3 + \Delta l_3$, p zu $p + \Delta p$, so daß l_2 wird $l_3 - p + \Delta l_3 - \Delta p$ oder zu $l_2 + \Delta l_3 - \Delta p$. Dann ergibt sich durch eine der vorhergehenden genau entsprechende Entwickelung, bei der wieder die $(\Delta l)^2$ vernachlässigt werden,

$$\Delta J_2 \cdot g$$
$$= P_2 \left(\frac{2\, r_3 \cdot \Delta r_3 + 2\, r_2 \Delta r_2}{4} + \frac{2 \cdot h \cdot \Delta h}{12} + 2 \cdot l_2 \cdot (\Delta l_3 - \Delta p)\right) \quad (62\text{a})$$

$r_3 = 3{,}5$ cm, $\Delta r_3 = 3{,}5 \cdot 0{,}000017 = 0{,}000059$ cm,
$r_2 = 0{,}88$ cm, $\Delta r_2 = 0{,}88 \cdot 0{,}000017 = 0{,}000015$ cm,
$h = 18$ cm, $\Delta h = 18 \cdot 0{,}000017 = 0{,}000306$ cm.

Die beiden ersten Glieder der Klammer in Gl. (62a), die angeben, um welchen Betrag sich das Eigenmoment der Linse vergrößert hat, geben den kleinen Wert $0{,}00013$ cm². Nun ist das dritte Glied zu berechnen.

$$\Delta l_3 = 1{,}8 \cdot 0{,}000012 + 110{,}1 \cdot 0{,}0000008$$
$$= 0{,}0001097,$$
$$\Delta p = x \cdot 0{,}000018 + (11{,}6 - x) \cdot 0{,}0000008$$
$$= 0{,}0000093 + x \cdot 0{,}000017,$$
$$\Delta l_3 - \Delta p = 0{,}0001 - x \cdot 0{,}000017 \text{ cm},$$
$$2 l_2\,(\Delta l_3 - \Delta p) = 0{,}02014 - 0{,}00341\,x \text{ cm}^2,$$
$$P_2 = 5450 \text{ g}.$$

Diese Werte setzen wir in Gl. (62a) ein:

$$\Delta J_2 \cdot g = 5450 \cdot (0{,}02117 - 0{,}00341\,x)$$
$$= 115{,}376 - 18{,}5845\,x \text{ g cm}^2.$$
$$\Delta D_2 = P_2 \cdot (\Delta l_3 - \Delta p)$$
$$= 5450 \cdot (0{,}0001 - 0{,}000017\,x),$$
$$\Delta D_2 = 0{,}545 - 0{,}09265\,x \text{ g cm}.$$

3. Schraube und Ausgleichstück

Das geringe eigene Trägheitsmoment vernachlässigen wir hier wieder wie in Abschnitt 14b.

$$J_3 \cdot g = P_3 \cdot l_3^2$$
$$\Delta J_3 \cdot g = P_3 \cdot 2 \cdot l_3 \cdot \Delta l'_3 \quad . \; . \; . \quad (62\text{b})$$

$\Delta l_3 = 0{,}0001$. Hier müssen wir jedoch noch die Ausdehnung des Messingrohres berücksichtigen. Sein Schwerpunkt liegt etwa 4 cm über seiner Grundfläche; er wird gehoben um $4 \cdot 0{,}000018 = 0{,}000072$ cm. Dieses Messingrohr macht jedoch nur etwa 30 % des Gesamtgewichtes aus, so daß der Gesamtschwerpunkt um 0,000020 cm gehoben wird.

$$\Delta l'_3 = 0{,}0001 - 0{,}000020 = 0{,}000080 \text{ cm},$$
$$l_3 = 111{,}9 \text{ cm},$$
$$P_3 = 300 \text{ g}.$$

Diese Werte setzen wir in Gl. (62b) ein:

$$\Delta J_3 \cdot g = 300 \cdot 2 \cdot 111{,}9 \cdot 0{,}000080 = 5{,}3712 \text{ g cm}^2.$$
$$\Delta D_3 = P_3 \cdot \Delta l'_3$$
$$= 300 \cdot 0{,}000080,$$
$$\Delta D_3 = 0{,}024 \text{ g cm}.$$

$$\text{Nun ist } \frac{\Delta J \cdot g}{\Delta D} = \frac{\Delta J_1 \cdot g + \Delta J_2 \cdot g + \Delta J_3 \cdot g}{\Delta D_1 + \Delta D_2 + \Delta D_3}$$
$$= \frac{12{,}331 + 115{,}376 - 18{,}5845\,x + 5{,}3712}{0{,}0781 + 0{,}545 - 0{,}09265\,x + 0{,}024}$$
$$= \frac{133{,}078 - 18{,}5845\,x}{0{,}6471 - 0{,}09265\,x} \quad . \; . \; . \quad (63)$$

Diesen Wert setzen wir in die Gl. (61) ein. Den Wert für $l = \frac{J \cdot g}{D}$ haben wir für unser Pendel in Abschnitt 14b errechnet zu 99,4 cm.

$$\frac{133{,}078 - 18{,}5845\,x}{0{,}6471 - 0{,}09265\,x} = 99{,}4.$$

Daraus finden wir den Wert

$$x = 7{,}3 \text{ cm}.$$

Das Messingrohr muß also 73 mm lang genommen werden. Durch Einsetzen dieses Wertes in Gl. (63) erfahren wir, daß durch eine Erwärmung um 1° das Trägheitsmoment des Pendels um 3,22 g cm² abnimmt, das Richtmoment um 0,0324 g cm. Wenn auch diese Abnahme nur der 20millionsten Teil des Trägheitsmomentes und des Richtmomentes ist, so sehen wir doch, daß die Annahme von der Erhaltung des Schwerpunktes streng genommen nicht richtig ist.

Wir sehen aber auch aus dieser — trotz der einfachen Verhältnisse beim Rieflerpendel schon ziemlich verwickelten — Rechnung, daß wir uns bei Anwendung dieser Rechnungsart auf das Rostpendel mit seinen vielen Teilen eine Last aufbürden würden, die in keinem Verhältnis zum Ergebnis steht. Und obendrein würde bei der ungenauen Kenntnis der Ausdehnungskoeffizienten das Ergebnis nicht einmal Anspruch auf große Genauigkeit machen können

[1] Wenn das Pendel für 1° ausgeglichen ist, so ist es für jede Temperaturerhöhung ausgeglichen. Wir vermeiden so nur das überflüssige Mitschleppen des Faktors t.