Mittelpunkte an einer Feder, die etwa $l = 20$ cm lang, $a = 1$ mm breit und $b = 0{,}1$ mm stark ist. Diese Feder trägt oben in der Nähe ihres Befestigungspunktes ein wagerechtes, gabelartiges Klemmstück, in dessen Schlitz ein senkrecht stehender Führungsstift hineinragt, der an dem Anker einer Grahamhemmung befestigt ist. Soviel über den Aufbau des Pendels und seinen Antrieb.

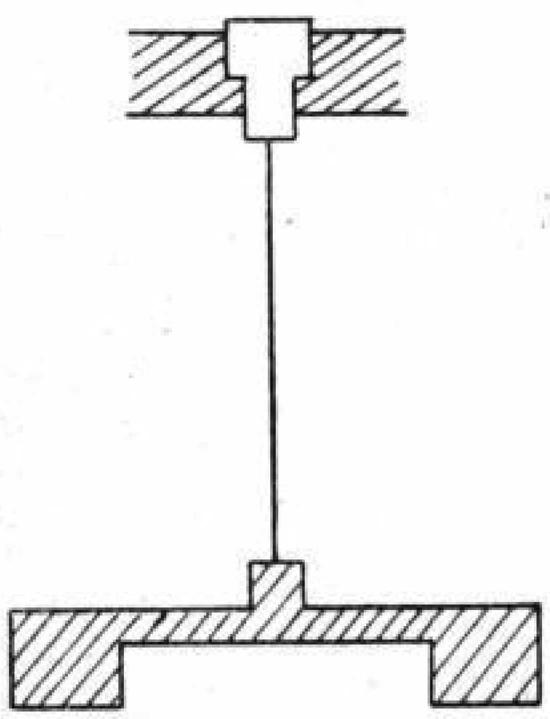

Abb. 100

Nun zur Theorie des Pendels. Die Theorie der Drehfeder können wir hier nicht ausführlich erörtern, wir verweisen auf Bücher über Elastizitätstheorie, z. B. Dreyer, Festigkeitslehre, Abschn. 193 bis 197.

Wirkt auf einen Stab, der an einem Ende fest eingespannt ist, am freien Ende ein Kraftmoment $\mathfrak{M}$, das den Stab um seine Achse zu drillen sucht, so wird diesem Moment das Gleichgewicht gehalten durch Schubkräfte in dem Stabe. Es ist

$$\mathfrak{M} = \frac{G \cdot J_d}{l} \cdot \alpha, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (74)$$

worin G der sogenannte Gleitmodul ist (= etwa drei Achtel bis zwei Fünftel des Elastizitätsmoduls). $J_d$ ist im einfachsten Falle das polare Trägheitsmoment des Stabquerschnittes (siehe Abschn. 5); in unserem Falle, wo der Querschnitt ein Rechteck mit der langen Seite a, der kurzen Seite b ist, wird

$$J_d = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} - 0{,}63\right) b^4. \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

$\alpha$ ist der Verdrehungswinkel am unteren Ende des Stabes, im Bogenmaß gemessen.

Der Ausdruck

$$D = \frac{G \cdot J_d}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76)$$

hat für eine bestimmte Feder einen bestimmten Wert, er ist durch die Eigenschaften dieser Feder festgelegt. Wir nennen ihn das Drillmoment D der Feder, ähnlich, wie wir in Abschn. (14a) den Begriff des Richtmomentes einführten. Gl. (74) nimmt dann die Form an

$$\mathfrak{M} = D \cdot \alpha.$$

Das bei der Bewegung auftretende Kraftmoment ist also proportional dem Verdrehungswinkel. Wie wir in Abschn. 8 ausgeführt haben, ist dies das Kennzeichen der harmonischen Bewegung oder der isochronen Schwingung. Das Drehpendel ist also ein isochron schwingender Körper.

Der Vollständigkeit halber müssen wir hieran eine kleine Einschränkung vornehmen. Wenn man einen Stab drillt, so erfährt er, wie man ja vom Drillen eines Gummifadens her weiß, auch eine Verkürzung. Dementsprechend treten Druckspannungen auf. Diese sind aber im vorliegenden Falle sehr gering, so daß das Drehpendel in höherem Maße isochronisch ist als das ebene Kreispendel (und auch als die Unruh mit Spiralfeder ohne Endkurven). Die Schwingungsweite des Pendels kann also in weiten Grenzen schwanken, ohne daß der Gang dadurch beeinflußt wird.

Allerdings ist dabei stillschweigende Voraussetzung, daß die Höchstspannung irgendeiner Faser der Feder die Elastizitätsgrenze nicht überschreitet, weil sonst dauernde Formänderungen der Feder zurückbleiben. Diese Höchstspannung ist

$$\tau = \frac{\mathfrak{M} \cdot b}{J_d}.$$

Setzen wir hierin aus Gl. (74) den Wert für $\mathfrak{M}$ ein, so ergibt sich

$$\tau = \frac{G \cdot b}{l}\,\alpha.$$

Es sei $G = 8\,000\,000$ g/mm², $b = 0{,}1$ mm, $l = 200$ mm, $\alpha = 4\,\pi = 12{,}57$. Dann ist

$$\tau = \frac{8\,000\,000 \cdot 0{,}1}{200} \cdot 12{,}57$$
$$= 50\,000 \text{ g/mm}^2.$$

In Abschnitt (20c) hatten wir die Elastizitätsgrenze für unseren Federstahl zu 150 kg/mm² angenommen, so daß wir bei einer Schubspannung von 50 kg/mm² eine dreifache Sicherheit hätten. Die Zugspannung ist gering. Wiegt die Scheibe 1 kg, so ist, da der Querschnitt der Feder 0,1 mm² ist, die spezifische Belastung 10 kg mm². Während bei der Pendelfeder die Biegungsbeanspruchung neben der Zugbeanspruchung vernachlässigt werden konnte, finden wir hier, daß die Drillung die Feder bedeutend stärker beansprucht als der Zug. Immerhin reicht die Feder für die betriebsmäßige Belastung; denn betriebsmäßig ist die Schwingungsweite nicht $4\,\pi$, wie wir angenommen haben, sondern $1^1/_2$ bis höchstens $2\,\pi$. Es muß aber davor gewarnt werden, bei Versuchen den Pendelkörper zu stark anzuschwingen.

Auch erscheint es zweifelhaft, ob Nickelstahlfedern, die in bezug auf den Wärmeausgleich vorteilhaft wären, der Beanspruchung genügen, da sie eine viel niedrigere Elastizitätsgrenze und kein gleichmäßiges Gefüge haben, und da man doch immer mit einer etwas rauhen Behandlung durch Unkundige rechnen muß.

Die Schwingungsdauer wird genau wie beim physischen Pendel (Abschn. 14a) nach Gl. (52) berechnet:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad \ldots \ldots \quad (52)$$

wo J das Trägheitsmoment des Pendels bez. der Drehachse ist und D hier das Drillmoment.

Aufgabe: In einer Jahresuhr von Andreas Huber ist ein Torsionspendel, dessen Feder 116 mm lang, 0,57 mm breit, 0,0775 mm stark ist. Der Gleitmodul sei 7100000. Der Pendelkörper, der aus vier Kugeln besteht, ist 272 g schwer und hat einen Trägheitsradius von 30 mm. Die Schwingungsdauer ist zu berechnen.

Gegeben: $a = 0{,}57$ mm, $b = 0{,}0775$ mm, $l = 116$ mm, $G = 7\,100\,000$ g/mm², $m = \frac{272}{9810}$ [g · mm⁻¹ sec²], $\varrho = 30$ mm.

Das Trägheitsmoment des Pendelkörpers ist $J = m \cdot \varrho^2$ $= \frac{272 \cdot 900}{9810} = 28{,}3$ [g mm sec²].

Das Drillmoment ist (Gl. 76)

$$D = \frac{G \cdot J_d}{l}.$$