Dr. Giebel, Meisterschule Glashütte (Sachs.):

Trigonometrie in der Berechnung der Uhr

Geometrische Konstruktionen

Wenn wir mit Hilfe von gegebenen Stücken (Strecken und Winkeln) andere Stücke bestimmen wollen, so können wir uns bekanntlich der geometrischen Konstruktionen bedienen. Ist z. B. der Achsenabstand von Minuten- bis Sekundenachse $MS = 10$ mm, der von Minuten- bis Zwischenachse $MZ = 6{,}5$ mm, der von Zwischen- bis Sekundenachse $SZ = 5{,}5$ mm, so können wir ein Dreieck konstruieren und damit die Dreieckswinkel und (was für uns in diesem Falle das Wichtigste ist) die Lage des Punktes Z bestimmen (Abb. 1). Um die Endpunkte der Strecke $MS = 10$ mm schlagen wir Kreise, um M mit $MZ = 6{,}5$ mm, um S mit $SZ = 5{,}5$ mm. Der Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt Z. Jedem von uns ist dieser Vorgang aus dem Setzen eines Eingriffs mit Hilfe des Eingriffszirkels geläufig (Kreuzeingriff).

Wir haben hier aus dem technischen Sinn der Aufgabe die Ecken des Dreiecks mit M Z S bezeichnet. Will man an dem Dreieck weitere Untersuchungen anstellen, so empfiehlt sich, die in der Geometrie gebräuchlichen Bezeichnungen zu wählen oder sie neben die hier benutzten zu setzen (Abb. 2). Es sind dies die ersten Buchstaben des großen lateinischen Alphabets: A, B, C. Die ihnen gegenüberliegenden Seiten bezeichnet man mit den ersten Buchstaben des kleinen lateinischen

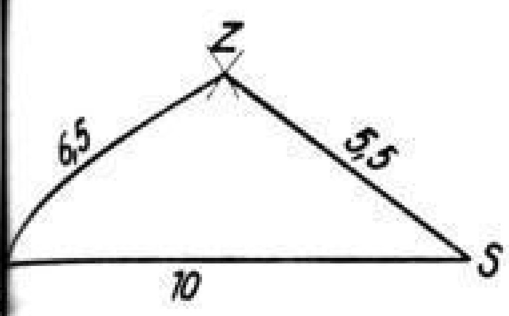

Abb. 1

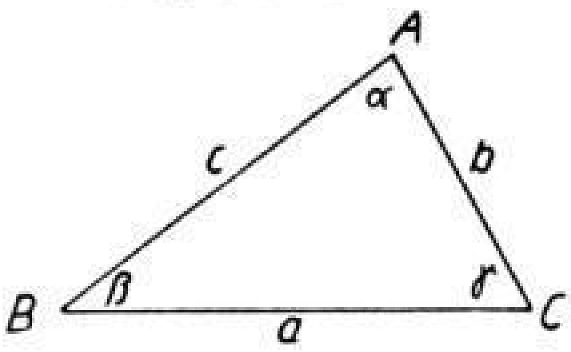

Abb. 2

Alphabets: a, b, c, und zwar liegt die Seite a der Ecke A gegenüber usw. Die Dreieckswinkel bezeichnet man mit den ersten Buchstaben des kleinen griechischen Alphabets: α, β, γ, und zwar liegt der Winkel α an der Ecke A.

Allgemein merke man sich: Punkte werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, Strecken mit kleinen lateinischen Buchstaben (oder falls man sie durch ihre beiden Endpunkte bezeichnen will, durch je zwei große Buchstaben), Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben. Die Befolgung dieser Festsetzung ist wie die jeder Norm nicht notwendig, aber nützlich, weil sie kurze Ausdrucksweise, schnelles Zurechtfinden ermöglicht und einen gewissen Schutz gegen falsches Einsetzen der Werte bietet.

Die oben erörterte Konstruktion eines Dreiecks aus den drei Seiten ist eine Aufgabe aus der Geometrie der Ebene, der „Planimetrie". Entsprechend gibt es eine Geometrie auf gekrümmten Flächen, z. B. der Kugelfläche; man könnte sie „Sphärometrie" nennen. Endlich gibt es noch eine Geometrie des Raumes, die „Stereometrie".

Bleiben wir bei der Planimetrie, die den grundlegenden und wichtigsten Teil der Geometrie ausmacht. Jeder von uns hat sie in der Schule gelernt und beim Zeichnen in der Werkstatt angewandt, manchmal vielleicht, ohne sich dessen bewußt zu sein. Da sie die Grundlage auch für den hier zu behandelnden Gegenstand, die **Trigonometrie oder Dreiecksberechnung**, ist, müssen wir an einige geometrische Tatsachen erinnern.

Wenn wir in der Ebene konstruieren, so gehen wir fast immer auf die einfachste geometrische Figur zurück, d. h. diejenige, die die wenigsten Stücke enthält; das ist das Dreieck (griechisch: Trigon). Das Dreieck enthält drei Seiten und drei Winkel, also sechs Stücke, das Viereck acht Stücke usw. Diese Stücke sind nicht alle unabhängig voneinander. Für die Winkel eines Dreiecks besteht die Bedingung, daß ihre Summe immer zwei Rechte $= 180^\circ$ betragen muß. Sind zwei Winkel bekannt, so ist auch der dritte bekannt, nämlich gleich 180° abzüglich der Summe der beiden anderen $[\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)]$. Auch für die Seiten eines Dreiecks bestehen gewisse Bedingungen, z. B. muß die Summe zweier Seiten stets größer sein als die dritte. Hätten wir z. B. in unserer Abb. 1 $MZ = 5$ mm, $ZS = 4$ mm genommen, so ließe sich kein Dreieck konstruieren, weil die beiden Kreisbögen nicht zum Schnitt kommen. Aber diese und ähnliche Bedingungen für die Seiten eines Dreiecks grenzen nur ein, ohne eine bestimmte Beziehung zu geben. Die drei Seiten sind also (innerhalb gewisser Grenzen) beliebig, während von den Winkeln nur zwei (innerhalb gewisser Grenzen) beliebig sind. Ein Dreieck hat somit fünf wesentliche Stücke. Sind von diesen fünf Stücken drei gegeben, so ist das ganze Dreieck bestimmt und eindeutig konstruierbar. Auf dieser Grundlage beruhen die vier Grundkonstruktionen von Dreiecken. (Die Eindeutigkeit des Ergebnisses der Konstruktionen findet ihren Niederschlag in den vier Sätzen der Kongruenz oder Deckungsgleichheit.)

Diese vier Grundkonstruktionen, die sich wie ein roter Faden durch die ganze Geometrie (und Trigonometrie) ziehen, wollen wir so aussprechen:

Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar (und berechenbar), wenn bekannt sind:

1. **zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (abgekürzt: S W S);**
2. **eine Seite und zwei Winkel (S W W oder W S W);**
3. **drei Seiten (S S S);**
4. **zwei Seiten und der der größeren gegenüberliegende Winkel (S S W).**

Wer mit den Anfangsgründen der Geometrie vertraut ist, kennt die Lösungen dieser vier Aufgaben. Wer sie nicht kennt und doch die Absicht hat, sich mit der Dreiecksberechnung zu beschäftigen, der arbeite zunächst ein kleines Lehr- und Übungsbuch der Planimetrie durch, und zwar gründlich, denn ohne die Grundlagen der Planimetrie kommt man in der Trigonometrie nicht weiter.

Nun noch zwei Bemerkungen zu diesen Grundaufgaben:

a) Die zweite spricht von zwei Winkeln. Wie wir schon erwähnten, ist damit auch der dritte bekannt. Es ist also gleichgültig, ob man die beiden der Seite anliegenden Winkel nimmt (W S W) oder einen anliegenden und den gegenüberliegenden (S W W). Zur planimetrischen Konstruktion gebraucht man am bequemsten W S W, zur trigonometrischen Berechnung S W W.

b) In der vierten Aufgabe ist vorsichtigerweise von zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel gesprochen worden. Spricht man von zwei Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel, so daß auch der der kleineren gegenüberliegende gemeint sein könnte, so ist die Lösung nicht mehr eindeutig; es gibt zwei gleichberechtigte Lösungen. In Abb. 3 ist gezeigt, wie das kommt.

Gegeben: $a = 4$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $\beta = 30^\circ$.
Gesucht: Dreieck A B C.

Ich lege $BC = a$ hin, trage daran in B den Winkel β an und schlage um C mit b einen Kreis. Dieser schneidet den freien Schenkel von β in den beiden Punkten A_1 und A_2. Sowohl A_1BC wie A_2BC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.

Ist dagegen b die größere der beiden Seiten, so liegt der Punkt A' nicht mehr in dem Winkelraum des Winkels β, sondern in dem seines Nebenwinkels. Das Dreieck A'BC erfüllt also nicht die Bedingungen der Aufgabe. A B C ist die einzige Lösung (siehe Abb. 4).

Mit Hilfe der Grundlagen der Planimetrie, zu denen außer den hier besprochenen Grundaufgaben der Dreieckslehre noch mancherlei gehört, z. B. die geometrischen Örter, die Lehre vom Kreis, von der Ähnlichkeit und den Proportionen usw., kann man durch Zeichnung unbekannte Stücke finden; und so ist man früher auch tatsächlich vorgegangen. So hat F. A. Lange, ein Meister der Konstruktion, vor rund 100 Jahren aus wunderbar feinen Zeichnungen mit ganz zarten Linien die gesuchten Größen entnommen. Auch Martens hat in

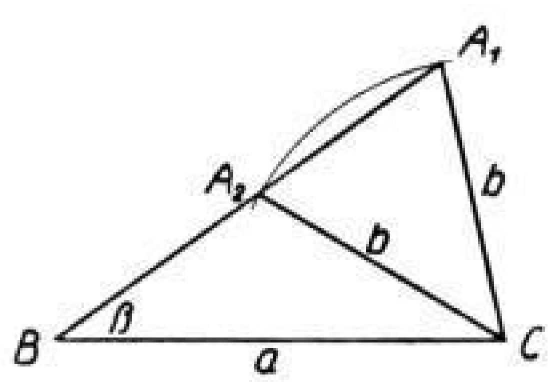

Abb. 3

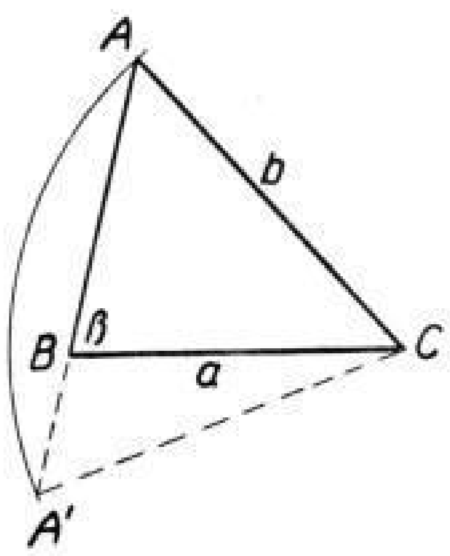

Abb. 4

seinem 1859 erschienenen Buch „Die Hemmungen der höheren Uhrmacherkunst" die gesuchten Größen zeichnerisch ermittelt. Selbst Halske, der Geschäftspartner von Werner von Siemens, hat noch so gearbeitet, und bekanntlich mit gutem Erfolg. Und als Siemens ein neuzeitliches Konstruktionsbüro aufmachte, da glaubte er, damit würden die bewährten Grundsätze eines alten, ehrenfesten Handwerks verlassen. Das Arbeiten machte ihm keine Freude mehr, und er trat aus der Firma aus.

Heute wird die Zeichnung nicht mehr dazu benutzt, Maße aus ihr zu entnehmen, denn diese Bestimmungsweise liefert nicht die Genauigkeit, die man im Zeitalter des Austauschbaues verlangt. Vielleicht könnte man denken, daß man die Genauigkeit durch entsprechende Vergrößerung der Zeichnung erreichen könnte. Das ist ein Irrtum; denn mit der Vergrößerung wachsen auch die Zeichenfehler. Man muß schon zur Berechnung übergehen. Immerhin tut man gut,