namentlich wenn man allein rechnet, neben der Rechnung eine einigermaßen genaue Zeichnung zu benutzen, schon der Selbstkontrolle wegen. Zeigen sich Widersprüche zwischen Zeichnung und Rechnung, so wird man ihnen so lange nachgehen, bis der Widerspruch aufgeklärt ist. Beide Bestimmungsweisen ergänzen sich: Die Zeichnung gibt die ungefähr richtigen Größen, die Rechnung bringt eine gesteigerte Genauigkeit.

II. Übergang zur Rechnung

Der erste, der die Rechnung in größerem Umfang in die Uhrmacherei einführte, war Moritz G r o ß m a n n in seinem Buch „Der freie Ankergang" vom Jahre 1864.

Wenn wir nun solche Rechnungen ausführen, so verlangen wir in der Regel, daß im Ergebnis die vierte Ziffer (das sind meist die hundertstel Millimeter) noch verbürgt ist. Wenn wir das erreichen wollen, müssen wir mit fünfziffrigen Zahlen arbeiten, multiplizieren, dividieren usw. Das ist zwar nicht schwierig, aber langwierig. Deshalb benutzt man dabei häufig die Logarithmen, von denen schon Joh. Kepler sagte, daß sie die Lebensdauer des Menschen verdoppelt haben, womit er sagen wollte, daß man mit ihnen doppelt so schnell rechnen könnte wie mit gewöhnlichen Zahlen. Die Technik des Logarithmenrechnens setzen wir als bekannt voraus, ebenso die des Rechenschiebers.

Es fragt sich nun, welche Tafel wir benutzen wollen. In den allgemeinbildenden Schulen ist es üblich geworden, vierstellige Logarithmen zu benutzen. In der Tat reichen sie für sehr viele Zwecke völlig aus, und sie haben den Vorzug, daß sie nur wenige Seiten umfassen, also sehr übersichtlich und bequem sind. Leider genügen sie bei uns für manche Rechnungen nicht, weshalb wir im allgemeinen die fünfstelligen Tafeln vorziehen. In seltenen Fällen müssen wir sogar siebenstellige Tafeln heranziehen. Welche fünfstellige Tafel man benutzt, ist gleichgültig. Für jeden ist die Tafel die beste, mit der er am genauesten vertraut ist. Ich benutze „F. G. G a u ß : F ü n f s t e l l i g e v o l l s t ä n d i g e l o g a r i t h m i s c h e u n d t r i g o n o m e t r i s c h e T a f e l n", Verlag K. Wittwer, Stuttgart, ohne aber deshalb die anderen, wie Schlömilch usw., abzulehnen.

Wie kommt man nun zur Trigonometrie oder Dreiecksberechnung?

Wir hatten eingangs festgestellt, daß man aus drei Stücken das Dreieck konstruieren kann, und zwar nannten wir als Stücke des Dreiecks seine Seiten und zwei seiner Winkel. Damit ist aber die Möglichkeit für Angabe von Bestimmungsstücken keineswegs erschöpft. Wir können an Stelle der Seiten auch andere Strecken im Dreieck heranziehen, z. B. Höhen, Mittellinien, Winkelhalbierende, Halbmesser des um- und des einbeschriebenen Kreises usw. Und an Stelle der Winkel an den Ecken des Dreiecks können wir auch andere Winkel im Dreieck verwenden, ja wir können sogar einen Winkel ersetzen durch das Verhältnis zweier Seiten; z. B. können wir statt der Aufgabe S W W auch die Aufgabe stellen: ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und dem Verhältnis der beiden anderen Seiten. Diese Aufgabe hat ebenfalls eine eindeutige Lösung.

Gegeben: $a = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $b : c = 4 : 3$.

Gesucht: das Dreieck.

Lösung: Ich konstruiere ein Dreieck aus $b_1 = 4$ cm, $c_1 = 3$ cm und $\alpha = 60^\circ$. In diesem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ ist die Seite a_1 nicht die vor-

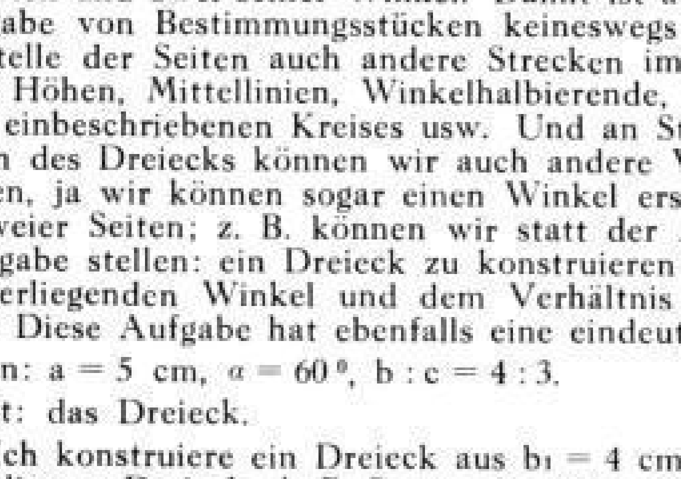

Abb. 5

geschriebene von 5 cm, sondern es ist $a_1 = 3{,}6$ cm (Abb. 5). Trage ich nun auf $B_1 C_1$ die verlangte Strecke $BC = a = 5$ cm auf und ziehe durch C die Parallele zu b_1, so schneidet diese die Verlängerung von $B_1 C_1$ in A, und A B C ist das verlangte Dreieck.

Beweis: Dreieck ABC ist ähnlich dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$. Deshalb ist:

1. $\alpha = \alpha_1 = 60^\circ$;
2. $b : c = b_1 : c_1 = 4 : 3$; ferner hat
3. B C die vorgeschriebene Länge $a = 5$ cm.

Die gegebenen Stücke sind also in dem Dreieck enthalten.

Wir können das Dreieck A B C auch auf andere Weise erhalten, z. B. können wir die Strecke $a = 5$ cm beliebig auf $B_1 C_1$ legen oder auch nur parallel zu $B_1 C_1$, immer erhalten wir, wenn wir durch B und C Parallelen zu c_1 und b_1 ziehen, das verlangte Dreieck, in dem die nicht gegebenen Stücke b und c die Größen $b = 5{,}55$ cm und $c = 4{,}16$ cm werden. Die Lösung ist eindeutig.

Wenn nun ein Winkel ersetzbar ist durch das Verhältnis zwei Seiten, dann muß doch eine Beziehung bestehen zwischen Winkeln Seitenverhältnis. Indem man diesen Gedanken weiter verfolgt, kom man zur G o n i o m e t r i e oder der Lehre von den Winkelfunktionen.

III. Die Winkelfunktionen

Um Winkel und Seitenverhältnis in Beziehung zu setzen (oder anders ausgedrückt: den Winkel als **„Funktion" des Seitenverhältnisses** darzustellen), ging man früher aus von dem W i n k e l an der Spitze e i n e s g l e i c h s c h e n k l i g e n D r e i e c k s oder, was dasselbe ist, vom M i t t e l p u n k t s w i n k e l i m K r e i s e und dem Verhältnis d e r S e h n e s z u m H a l b m e s s e r r bzw. der Höhe des Kreisbogens p zum Halbmesser r (Abb. 6). So kam man zu den Tafeln

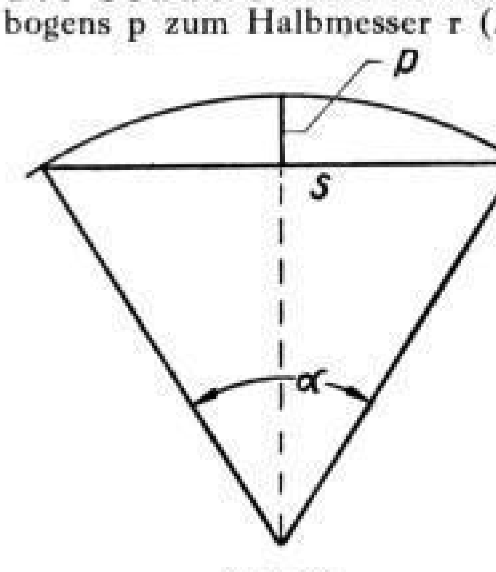

Abb. 6

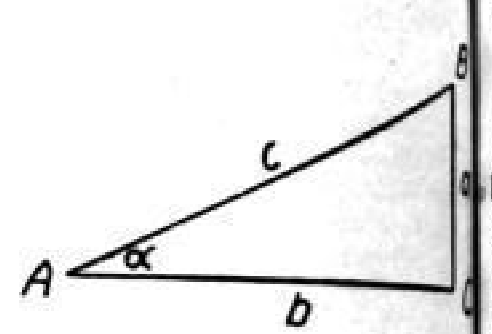

Abb. 7

Sehnen und Höhen der Kreisbögen (im Kreise mit dem Halbmesser 1), die man noch in den Tafelwerken findet und die wir bei unseren Rechnungen auch gelegentlich benutzen werden.

Vor rund 200 Jahren fand man, daß es meist bequemer ist, ein halbes gleichschenkliges Dreieck, also ein rechtwinkliges Dreieck, zu benutzen.

Wir nehmen also ein rechtwinkliges Dreieck A B C mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c (Abb. 7). In diesem Dreieck nennen wir in Beziehung auf den Winkel α die gegenüberliegende Kathete a die „Gegenkathete" und die anliegende Kathete b die „Ankathete". Und nun führen wir neue Bezeichnungen ein:

Sinus eines Winkels ist das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse, oder in Gleichungsform:

1. **Sinus** $= \dfrac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Hypotenuse}}$ **und entsprechend**
2. **Cosinus** $= \dfrac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Hypotenuse}}$,
3. **Tangens** $= \dfrac{\textbf{Gegenkathete}}{\textbf{Ankathete}}$,
4. **Cotangens** $= \dfrac{\textbf{Ankathete}}{\textbf{Gegenkathete}}$.

oder in Buchstaben:

1. $\sin \alpha = \dfrac{a}{c}$, 2. $\cos \alpha = \dfrac{b}{c}$, 3. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a}{b}$, 4. $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{b}{a}$.

Ändern wir die Größe von α bei festgehaltenem c, so beschreibt die Ecke B den Kreisbogen D F um die Ecke A (Abb. 8). Machen wir z. B. α sehr klein (=0), so fällt B mit C in Punkt D zusammen. Die Gegenkathete a wird Null und damit auch das Seitenverhältnis Null.

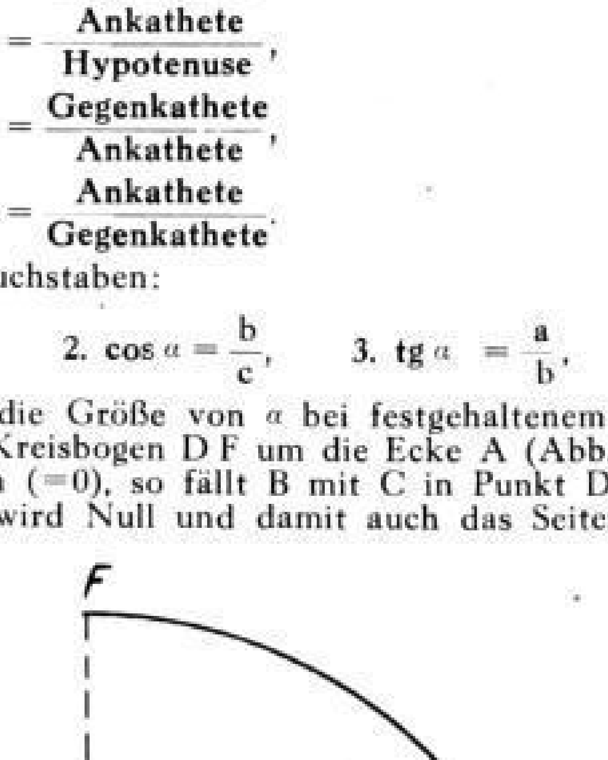

Abb. 8

Es ist also

$$\sin 0^\circ = 0.$$

Machen wir α sehr groß (=90°), so fällt B mit F und C mit A zusammen, die Gegenkathete a wird dann gleich c und das Verhältnis $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{c} = 1$, d. h.

$$\sin 90^\circ = 1.$$

Dazwischen könnten wir mit den Hilfsmitteln der Planimetrie noch leicht einige Sinuswerte (für 18°, 30°, 45°, 60°, 72°) berechnen. Zur Berechnung der Zwischenwerte benutzt man dann Reihen. Das Ergebnis ist in Tafeln niedergelegt, deren wir uns bedienen.