In einer solchen Tafel (Gauß, S. 114/115) sehen wir, daß der Sinus wachsendem Winkel zuerst schnell wächst, dann immer langsamer; B. ist sin 30° = 0,500, sin 45° nicht 0,750, sondern erst 0,707, sin 60° 2·0,5 = 1, sondern 0,866 usw.

Entsprechend finden wir in einer Cosinustafel, daß cos 0° = 1 ist, langsam und nachher immer schneller fällt, bis er bei 90° den Null erreicht.

Tangens wächst von 0° an ähnlich wie Sinus, aber immer schneller, daß er schon bei 45° den Wert 1 erreicht und bei 90° den Wert ∞ h. unendlich groß).

Bei Cotangens ist es spiegelbildlich umgekehrt wie bei Tangens: **S i n u s und T a n g e n s w a c h s e n mit wachsendem Winkel, C o s i n u s und C o t a n g e n s f a l l e n mit wachsendem Winkel.**

Wenden wir uns nun wieder unserem rechtwinkligen Dreieck BC zu, in dem wir bisher nur für den Winkel $\alpha$ die Winkelfunktionen rachtet haben. Der Winkel $\beta$ ergänzt den Winkel $\alpha$ zu 90°, er ist „Komplementwinkel" zu $\alpha$.

$$\beta = 90 - \alpha.$$

Die Funktionswerte für $\beta$ sind:

$$\sin \beta = \frac{b}{c},\ \cos \beta = \frac{a}{c},\ \mathrm{tg}\ \beta = \frac{b}{a},\ \mathrm{ctg}\ \beta = \frac{a}{b}.$$

Vergleichen wir diese Werte mit denen für die Funktionen von $\alpha$, kommen wir zu den Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \cos\ (90 - \alpha) \\ \cos\alpha = \sin\ (90 - \alpha) \\ \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\ (90 - \alpha) \\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\ (90 - \alpha) \end{array}\right\}$$

**was wir uns mit kurzen Worten merken: D i e F u n k t i o n e i n e s W i n k e l s i s t g l e i c h d e r C o f u n k t i o n s e i n e s K o m p l e m e n t w i n k e l s.**

Von dieser Beziehung machen die Tafelwerke Gebrauch.

Sind z. B. auf einer Tafel (Gauß, S. 114/115) die Sinuswerte von bis 90° angegeben, trägt also die Tafel die Ü b e r schrift Sinus und links in der ersten Spalte die Winkelwerte, so wird dieselbe Tafel nutzt zum Aufschlagen der Cosinuswerte. Die Tafel trägt die terschrift Cosinus und r e c h t s, d. h. also in der letzten Spalte. Werte der Komplementwinkel.

Oder eine andere Anordnung (siehe Gauß, S. 52—96, Logarithmen Funktionswerte). Die Tafel gibt die Werte der vier Winkelktionen in vier Hauptspalten nebeneinander. Diese vier Spalten gen die Ü b e r schriften sin, tg, ctg, cos und darüber als Hauptberschrift die Winkelgrößen. Dazu gehören l i n k s die Minutenlen. Wir sehen, daß die Tafel nur bis 44° 60′, also 45°, geht. Das ügt auch, denn die Werte für die größeren Winkel sind ja schon in Spalten der Cofunktionen enthalten. Die erste Hauptspalte trägt Überschrift sin. In ihr sucht man die Werte von 0° bis 45°. Bei ßeren Winkeln geht man in die letzte Hauptspalte, die die Überrift cos und die U n t e r schrift sin trägt. Die Hauptu n t e r-riften sind die Winkel von 45° bis 89°, und dazu gehören r e c h t s, in der letzten Spalte, die Minuten, die jetzt natürlich von unten h oben ansteigen; also geht der Bereich von 45° 0′ bis 89° 60′ oder °. Entsprechendes gilt für die beiden mittleren Spalten, die die berschriften tg und ctg und die Unterschriften ctg und tg tragen.

Wir wollen nun einige Winkelfunktionswerte aufschlagen und betzen dazu die Tafel für Sinus und Cosinus (Gauß, S. 114/115). Der ser mag in seiner Tafel die Richtigkeit der Angaben prüfen.

Die Ü b e r schrift ist Sinus. L i n k s stehen die Gradzahlen, rechts von befinden sich sechs Spalten mit den Überschriften 10′, 20′, 30′, ′, 50′, 60′. Wir lesen ab:

$$\sin 15^\circ\ 40' = 0{,}2700,$$
$$\sin 73^\circ\ 20' = 0{,}9580.$$

Man kann aber auch noch Zwischenwerte aufsuchen (interpolieren), bei die rechtsstehenden Hilfstäfelchen (unter PP = partes proportiones = Verhältnisteile) gute Dienste leisten, aber nicht unbedingt nötig d, z. B. sin 15° 48′. Der Funktionswert liegt zwischen dem für 15° 40′ d dem für 15° 50′, also zwischen 0,2700 und 0,2728. Für den Zuwachs n 10′ ist der Funktionswert um 28 der letzten Stelle gewachsen. Wenn f 10′ 28 kommen, dann kommen auf 8′ $\frac{8 \cdot 28}{10} = 22{,}4$. Denselben Wert den wir in dem mit 28 überschriebenen Hilfstäfelchen. Vor dem nkrechten Strich stehen die Minutenzahlen von 1 . . 9, hinter dem rich die zugehörigen Anteile, hier 22,4. Wir runden auf 22 ab und dieren dies zu dem zu 15° 40′ gehörigen Wert 0,2700, so daß sich gibt:

$$\sin 15^\circ\ 48' = 0{,}2722.$$

Entsprechend sin 73° 27′. Hier ist der Tafelunterschied 8 der tzten Stelle und der zu 7′ gehörige Anteil 5,6 oder, nach oben abrundet, 6, so daß ist:

$$\sin 73^\circ\ 27' = 0{,}9586.$$

Aus derselben Tafel können wir Cosinuswerte entnehmen, wobei r jetzt die U n t e r schriften und die r e c h t s stehenden Winkelwerte nutzen:

$$\cos 28^\circ\ 50' = 0{,}8760,$$
$$\cos 64^\circ\ 10' = 0{,}4358,$$

d mit Interpolation:

$$\cos 42^\circ\ 36' = 0{,}7361\ \left(= 0{,}7373 - \frac{6 \cdot 20}{10}\right),$$

$$\cos 72^\circ\ 43' = 0{,}2971\ \left(= 0{,}2979 - \frac{3 \cdot 27}{10}\right).$$

Hier ist zu beachten, daß der Verhältnisanteil (12 bzw. 8) a b-zogen werden muß, weil ja Cosinus mit wachsendem Winkel f ä l l t. Man sieht das auch schon an den Werten, zwischen denen man interpoliert: der zu 72° 50′ gehörige Cosinuswert ist um 27 der letzten Stelle k l e i n e r als der zu 72° 40′ gehörige.

Genau in der gleichen Weise werden Tangens und Cotangens aufgeschlagen (siehe Gauß, S. 116/117).

Um mit dem Lesen der Tafeln recht vertraut zu werden, muß man üben, üben und nochmals üben. Beim Rechnen ist es ebenso wie bei der Handfertigkeit nicht damit getan, daß man die Erklärung verstanden hat. Genau so wie man Sicherheit im Gebrauch der Feile nur durch lange Übung gewinnt, so erwirbt man auch beim Rechnen erst durch ausdauernde und wiederholte Übung Sicherheit und Fertigkeit.

Nun kommt die umgekehrte Aufgabe: Zum Funktionswert den Winkel aufzuschlagen:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = 4{,}100. \text{ Wie groß ist } \alpha?$$

Unser Funktionswert liegt zwischen 4,061 und 4,113. $\alpha$ ist also größer als 76° 10′. Um wieviel? Der Tafelunterschied ist 52 der letzten Stelle. Zu diesen 52 gehören 10′, zu 1 gehören $\frac{10'}{52}$, zu unserem Unterschied von 39 gehören $\frac{39 \cdot 10'}{52} = \frac{15'}{2} = 7^1/_2{}'$ oder, da wir von $^1/_2$ an nach oben abrunden, 8′. Diesen Wert hätten wir auch aus dem Hilfstäfelchen 52 (das wir auf S. 116 finden) entnehmen können: Unser Unterschied von 39 liegt genau zwischen 36,4 und 41,6, also der Winkelzuwachs genau zwischen 7′ und 8′.

$$\mathrm{tg}\ \alpha = 4{,}100;\ \alpha = 76^\circ\ 18'.$$

Der Leser möge nun nachprüfen, ob die folgenden Angaben richtig sind:

| | |
|---|---|
| $\sin \alpha = 0{,}1240$ | $\alpha = 7^\circ\ 7'$ |
| $\cos \beta = 0{,}2539$ | $\beta = 75^\circ\ 18'$ |
| $\mathrm{tg}\ \gamma = 5{,}636$ | $\gamma = 79^\circ\ 56'$ |
| $\mathrm{ctg}\ \delta = 0{,}7676$ | $\delta = 52^\circ\ 29'$ |

Man gewöhnt sich an, beim Interpolieren nicht vom kleineren Funktionswert auszugehen, sondern von dem Funktionswert, zu dem der kleinere Winkel gehört. Das ist bei Cosinus und Cotangens der größere Funktionswert. Man kann dann, nachdem man seinen Funktionswert „eingegabelt" hat, schon die Grade und Zehner-Minuten hinschreiben und braucht nach der Interpolation nur noch die Einer-Minuten hinzuzufügen. Überhaupt sucht man sich möglichst gegen Schreib- und Lesefehler zu schützen, wozu auch s a u b e r e und ü b e r s i c h t l i c h e S c h r i f t g e h ö r t. Im übrigen: **Üben und nochmals üben!**

Bisher haben wir Winkel im rechtwinkligen Dreieck betrachtet. Diese Winkel sind alle kleiner als 90°, höchstens gleich 90°. Wie ist es nun mit den Funktionen s t u m p f e r Winkel?

Schon in Abb. 8 hatten wir die Winkelfunktionen in einen Kreis eingeordnet, in dem die Kurbel A B umlief. Dieses Bild bauen wir weiter aus (Abb. 9). Wir gehen aus von dem feststehenden Radius A D und drehen die Kurbel z. B. bis B, so daß sie mit dem festen Radius

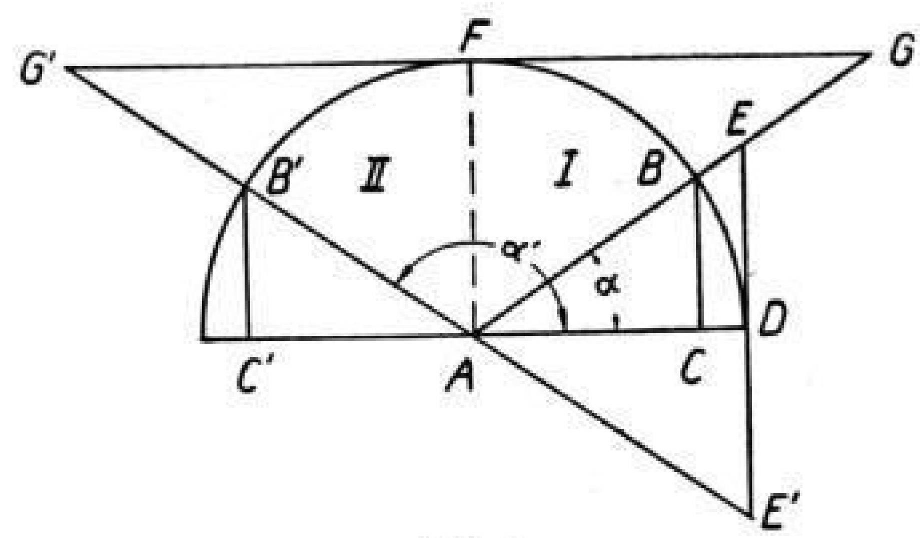


Abb. 9

A D den Winkel $\alpha$ einschließt. Dann deuten wir die Winkelfunktionen folgendermaßen:

1. **S i n u s ist das Verhältnis des vom Endpunkt B der gedrehten Kurbel A B auf den festen Radius A D gefällten Lotes C B zur Kurbellänge A B.**
2. **C o s i n u s ist das Verhältnis des Abstandes A C vom Mittelpunkt A bis zum Fußpunkt C des Lotes zur Kurbellänge A B.**
3. **T a n g e n s ist das Verhältnis des von der Kurbel abgeschnittenen Tangentenstückes D E zum festen Radius A D.**
4. **C o t a n g e n s ist das Verhältnis des von der Kurbel abgeschnittenen Tangentenstückes F G der zum festen Radius parallelen Tangente zu dem Radius A F.**

Unsere Erklärungen 1 und 2 decken sich mit den bisherigen im rechtwinkligen Dreieck A B C. Die dritte und vierte weichen zwar von den entsprechenden im Dreieck A B C ab; da aber Dreieck A E D und Dreieck A G F dem Dreieck A B C ähnlich sind, bleiben die Seitenverhältnisse erhalten. Nebenbei liefern uns diese neuen Erklärungen auch den Grund dafür, weshalb diese Funktionen Tangens bzw. Cotangens genannt sind.

Geben wir der Kurbel A B die Länge 1 (m, dm, Elle oder sonst irgendeine Längeneinheit), so ist in dem das Seitenverhältnis darstellen-