Dr. Giebel, Meisterschule Glashütte (Sachs.):

Trigonometrie in der Berechnung der Uh

(Fortsetzung von Seite 181)

Zum Schluß sei nochmals daran erinnert, daß bei sin und tg die Werte mit wachsendem Winkel steigen, bei cos und ctg mit wachsendem Winkel fallen, daß also bei sin und tg die Differenz zu addieren, bei cos und ctg die Differenz zu subtrahieren ist.

Nachdem wir uns mit der Einrichtung der Tafel vertraut gemacht haben, wollen wir das Aufschlagen der Werte üben.

lg sin 36° 35′ 43″. Auf S. 88 finden wir zu 36° 35′ den Wert 9,77524 — 10 und die Differenz 17. Zu 60″ gehört 17, zu 1″ $\frac{17}{60}$, zu 43″ $\frac{43 \cdot 17}{60} = 12{,}18$, abgerundet 12. Benutzen wir das Hilfstäfelchen, so finden wir: zu 40″ 11,3, zu 3″ 0,8, zusammen 12,1 oder abgerundet 12:

lg sin 36° 35′ 43″ = 9,77536 — 10.

Eine sechste Stelle (1 oder 2) anzufügen, ist zwecklos, denn wir wissen ja nicht, ob der Ausgangswert 9,77524 aus 9,775236 oder aus 9,775 244 entstanden ist. Die sechste Stelle würde also nur eine Genauigkeit vortäuschen, die tatsächlich nicht vorhanden ist.

lg tg 63° 0′ 14″ = 0,292 83 + 7 } = 0,292 90

lg cos 43° 41′ 46″ = 9,859 24 — 10 — 9 } = 9,859 15 — 10

lg ctg 79° 46′ 49″ = 9,256 55 — 10 — 60 } = 9,255 95 — 10

Der Leser möge sich selbst im Aufschlagen fleißig üben und auch feststellen, ob die folgenden Werte richtig aufgeschlagen sind:

lg tg 86° 33′ 24″ = 1,220 62
lg cos 13° 17′ 9″ = 9,988 22 — 10
lg ctg 81° 35′ 47″ = 9,169 47 — 10
lg sin 6° 39′ 52″ = 9,064 67 — 10 (S. 48 oder S. 58. Die beiden Werte weichen um 1 der letzten Stelle voneinander ab.)

Nun möge umgekehrt zum Logarithmus der Funktion der Winkel aufgeschlagen werden.

lg sin $\alpha = 9{,}649\,00 - 10$. Der Logarithmus liegt zwischen 9,648 77 — 10 und 9,649 02 — 10. Dazu gehören 26° 27′ und 26° 28′. Er liegt also schon fast an 26° 28′. Nun ist noch festzustellen, wieviel Sekunden zu dem Unterschied 23 gehören. Die Tafeldifferenz ist 25. Im Hilfstäfelchen finden wir, daß zu 20,8 50″ gehören und zu den restlichen 2,2, die näher bei 2,1 als bei 2,5 liegen, 5″, so daß sich ergibt: $\alpha = 26° 27′ 55″$. Wir wollen aber nicht zu sehr auf die letzte Stelle der Sekunden pochen, denn unsere Differenz 23 kann ebensogut 22,5 als auch 23,4 bedeuten. Demnach liegt unser gesuchter Wert zwischen 54″ und 56″. Bei dieser mittleren Differenz von 23 ergibt sich also schon eine Unsicherheit von 2″. Viel schlimmer wird die Unsicherheit bei kleinen Differenzen (bei lg sin von großen Winkeln oder lg cos von kleinen Werten). Deshalb empfinden wir es angenehm, daß bei lg tg und lg ctg die Minutendifferenz nie unter 25 der fünften Stelle hinuntergeht, also die Unsicherheit nie 2″ überschreitet. In den meisten Fällen ist eine solche Unsicherheit belanglos. Sollte es aber einmal nötig sein, die Sekunden verbürgen zu müssen, so reicht die fünfstellige Tafel nicht aus und man muß mit der siebenstelligen rechnen. Absolute Genauigkeit ist nicht erzielbar, man muß sich aber Rechenschaft ablegen über den Grad der erzielten Genauigkeit.

Auch im Aufschlagen der Winkel muß man, um zur Sicherheit zu kommen, fleißig üben. Wir geben im folgenden einige Aufgaben zur Nachprüfung:

lg sin α = 9,500 05 — 10	**α = 18° 26′ 14″**
lg cos β = 9,838 00 — 10	**β = 46° 28′ 37″**
lg tg γ = 9,860 00 — 10	**γ = 35° 55′ 16″**
lg ctg δ = 1,106 00	**δ = 4° 28′ 46″**

Nachdem wir uns mit den Logarithmen der Winkelfunktionen vertraut gemacht haben, wollen wir unsere Aufgabe 2 logarithmisch rechnen.

Es ist zu berechnen:

r = c · cos α	+ | + |	**lg 18,24 = 1,261 02**
= 18,24 · cos 47° 48′ 45″	+ |	**lg cos 47° 48′ 45″ = 9,827 08 — 10**
a = c · sin α	+ |	**lg sin 47° 48′ 45″ = 9,869 79 — 10**
= 18,24 · sin 47° 48′ 45″		**lg r = 1,088 10**
r = 12,249		**lg a = 1,130 81**
a = 13,5147		

Auf vier Ziffern abgerundet:
r = 12,25 mm
a = 13,51 mm

Bei jeder Rechnung ist Übersichtlichkeit und Klarheit nötig, damit man Fehler nach Möglichkeit vermeidet und die Rechnung leicht nachprüfen kann. Das gilt von der logarithmischen Rechnung in erhöhtem Maße. Wir schreiben die Entwicklung links und die logarithmische Rechnung — wie jede Nebenrechnung rechts. Da die Logarithmen genau untereinander stehen müssen, schreibt man zuerst das Schema der Rechnung hin, daneben genau untereinander die Gleichheitszeichen. Dann kommen die Logarithmen von selbst gut untereinander. Ferner empfiehlt es sich, die Rechenoperationen, die an den einzelnen Logarithmen vorgenommen werden sollen (hier zu Additionen), anzugeben, damit man während der Logarithmenrechnung nicht auf die Entwicklung zurückzugreifen braucht, was unter Umständen störend wirkt. Ferner soll jede Zeile der Rechnung einen Namen haben. Ist z. B. das Ergebnis einer Rechnung noch nicht das Endergebnis, sondern erst ein Teilergebnis, z. B. ein Zähler oder Nenner oder Radikand oder Bruch od. dgl., so schreibt man vor das Gleichheitszeichen lg Z oder lg N oder lg R oder lg B usw., so daß man beim Nachrechnen schnell und sicher den Zusammenhang der Rechnung erkennt. Berufsmäßige Rechner achten peinlich auf Sauberkeit und Übersichtlichkeit. Sogenannte Genialität, die sich als Schludrigkeit äußert, führt zwangsläufig zu Fehlern.

Aufgabe 3. Bei einer (Chronometer-) Federhemmung hat das Chronometerrad 14 mm ⌀ und 15 Zähne. Der Fall ist vor der hinter der Hebung je 1°. Die Unruhbewegung während der Hebung ist 45°. Wie groß ist der Hebelhalbmesser, der Achsenabstand und die Eingriffstiefe? (Abb. 16)

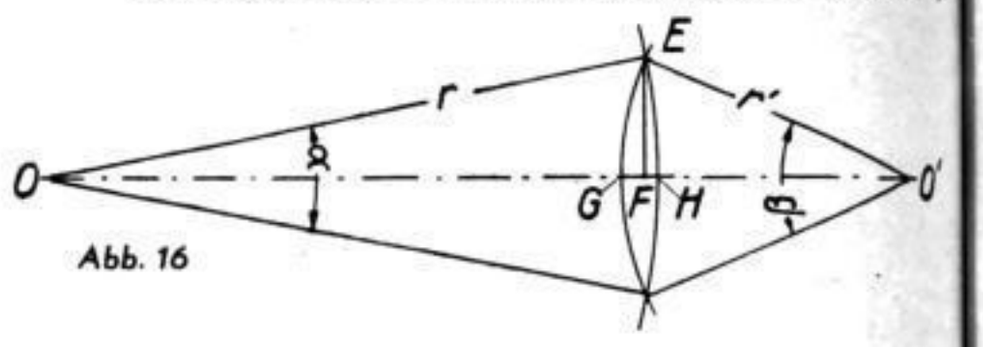

Abb. 16

Wenn das Rad 15 Zähne hat, so ist die Teilung $t = \frac{360°}{15} = 2$. Zieht man davon 2° Fall ab, so bleibt die Führung $\alpha = 22°$. Abb. 16 ist

gegeben: r = 7 mm, $\alpha = 22°$, $\beta = 45°$,
gesucht: r′, E F = e, O O′ = c = O F + F O′ = p + q, G H

In dem rechtwinkligen Dreieck O F E ist bekannt die Hypotenuse r = 7 mm und der Winkel $EOF = \frac{\alpha}{2} = 11°$. Es lassen sich berechnen die beiden Katheten e und p.

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{e}{r}$ + \| + \| **lg r = 0,845 10**
+ \| **lg sin $\frac{\alpha}{2}$ = 9,280 60 = 10**
$e = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$
$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{r}$ + \| **lg cos $\frac{\alpha}{2}$ = 9,991 95 = 10**
lg e = 0,125 70
$p = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$
lg p = 0,837 05
p = 6,8715 mm

In dem rechtwinkligen Dreieck E F O′ ist bekannt die Kathete e und der Winkel $\frac{\beta}{2} = 22\frac{1}{2}°$. Es lassen sich berechnen die Hypotenuse r′ und die Kathete q.

$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{e}{r'}$ + \| + \| **lg e = 0,125 70**
− \| **lg sin $\frac{\beta}{2}$ = 9,582 84 −**
$r' = \frac{e}{\sin \frac{\beta}{2}}$ − \| **lg tg $\frac{\beta}{2}$ = 9,617 22 −**
lg r′ = 0,542 86
$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{e}{q}$
lg q = 0,508 48
$q = \frac{e}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$

r′ = 3,4903 mm
q = 3,2246 mm
p = 6,8715 mm
q = 3,2246 mm
c = p + q = 10,0961 mm
r = 7 mm
r′ = 3,4903 mm
r + r′ = 10,4903 mm
f = r + r′ − c = 0,3942 mm

Der Hebelhalbmesser des Hebelsteines ist r′ = 3,490 mm, der Achsenabstand ist c = 10,096 mm, die Eingriffstiefe ist f = 0,394 mm.

SLUB Wir führen Wissen. http://digital.slub-dresden.de/id318594536-19420100/277