Dr. Giebel, Meisterschule Glashütte (Sachs.):

(Fortsetzung von Seite 191)

Trigonometrie in der Berechnung der Uhr

V. Das Rechnen mit Koordinaten

In Teil I hatten wir daran erinnert, daß man beim Aufsuchen von Punkten (z. B. Achspunkten von Wellen oder allgemein Kaliberpunkten auf der Uhrplatte) planimetrische Konstruktionen anwenden kann. Wir hatten aber gleichzeitig betont, daß dies heute nur noch in beschränktem Maße (z. B. bei Einzelanfertigung, Mustermacherei oder Wiederherstellungsarbeiten) geschieht. In der Massenfertigung, bei der Austauschbarkeit verlangt wird, legt man die Punkte auf andere Weise fest, nämlich durch Koordinaten (d. h. einander zugeordnete Wertegruppen).

Man kann in der Ebene (und entsprechend auch im Raum) Punkte auf verschiedene Weise festlegen; die gebräuchlichste ist die mit rechtwinkligen Koordinaten. Wir legen (Abb. 19) in der Ebene ein rechtwinkliges Achsenkreuz fest und tragen auf diesen Achsen Maßstäbe auf. Die Werte auf der Waagerechten nennt man Abszissen (= Abschnitte) und bezeichnet sie mit x. Vom Schnittpunkt der Achsen aus nach rechts zählt man sie positiv, nach links negativ. Die Werte auf der Senkrechten nennt man Ordinaten (= Senkrechte) und bezeichnet sie mit y. Nach oben zählt man sie positiv, nach unten negativ.

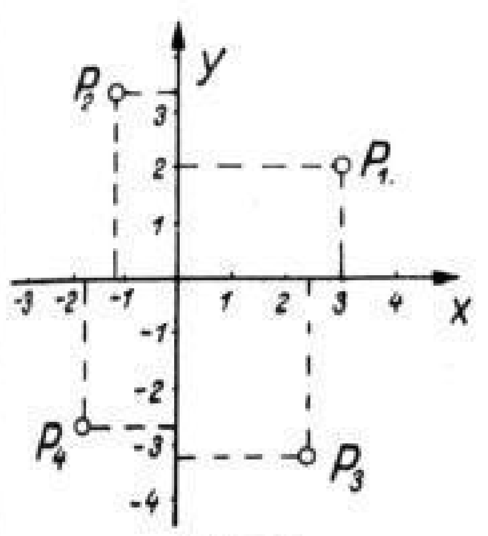

Abb. 19

Auf Grund dieser Festsetzungen können wir nun jeden Punkt der Ebene durch zwei Zahlenwerte festlegen; z. B. hat der Punkt P_1 die Abszisse $x_1 = +3$, die Ordinate $y_1 = +2$, was wir kurz ausdrücken P_1 (3; 2). Für P_2 ist $x_2 = -1{,}2$; $y_2 = +3{,}3$ oder kurz P_2 (—1,2; 3,3). Eigentlich müßte es ja heißen P_2 (—1,2; + 3,3), man läßt aber meist das + - Zeichen als selbstverständlich weg, wodurch die Lesbarkeit eher erhöht als gesenkt wird. Entsprechend sind die beiden anderen Punkte festgelegt: P_3 (2,4; —3,2) und P_4 (—1,8; —2,7).

Das Vorzeichen ist allgemein ziemlich lästig und gibt zu Fehlern Anlaß. Man vermeidet es in der Kleinuhrmacherei, indem man dem Schnittpunkt der beiden Achsen, dem sogenannten Koordinatenanfangspunkt, nicht die Bezeichnung 0; 0 gibt, sondern 50; 50. Dadurch ist das Achsenkreuz so weit in den positiven Bereich verschoben, daß negative Werte überhaupt nicht auftreten. Handelt es sich um größere Stücke, so müßte man noch weiter verschieben (natürlich immer um eine runde Zahl). In dieser Schreibweise hätte P_2 die Koordinaten 48,8; 53,3, also P_2 (48,8; 53,3) entsprechend P_3 (52,4; 46,8). Manche Fabriken drücken die Maße auch nicht in Millimeter, sondern in hundertstel Millimeter aus, um auch das Komma überflüssig zu machen. Da wir aber eine hundertstel Millimeter Genauigkeit anstreben, müssen wir die tausendstel Millimeter berücksichtigen, so daß man dann besser in tausendstel Millimeter rechnet.

Abb. 20

In der Kleinuhrmacherei pflegt man den Koordinatenanfangspunkt (bzw. den Punkt 50, 50) in die Minutenachse zu legen und die y - Achse in die Aufzugsachse. Die Punkte werden trigonometrisch berechnet.

Ehe wir zu solchen Berechnungen übergehen, wollen wir noch etwas über das Messen sagen. Man bedient sich dabei der Koordinatenmeßmaschinen, von denen Abb. 20 ein besonders einfaches und kleines Muster der Firma C. Zeiss, Jena, zeigt. Das Wichtigste daran ist der Kreuztisch, der wie der bekannte Kreuzsupport gebaut ist, mit zwei genau senkrecht zueinander stehenden Spindeln, die sehr genaue Mikrometergewinde tragen, so daß Verschiebungen des Tisches von $^2/_{1000}$ mm noch ablesbar sind. Die Glasscheibe auf dem Tisch trägt ein Achsenkreuz. Auch in dem Mikroskop darüber, das der bequemeren Handhabung wegen geknickt ist, befindet sich ein Fadenkreuz. (Von der Meßvorrichtung, die man hinter dem Okular des Mikroskops sieht, wollen wir hier nicht sprechen.) Will man messen, so stellt man den Kreuztisch so ein, daß der Anfangspunkt der Messung unter dem Bild des Fadenkreuzes liegt. Dann dreht man die auf dem Kreuztisch liegende kreisrunde Platte mit Hilfe einer Spindel, deren Kopf hinten sichtbar ist, so lange, bis entweder die Meßrichtung oder eine Hauptrichtung (sagen wir die x-Richtung) mit der Richtung des einen Fadens zusammenfällt. Dann merkt man sich die Angaben der Skalen an den beiden Meßspindeln und dreht die Spindeln so lange, bis der Endpunkt der Strecke unter dem Schnittpunkt der beiden Fäden liegt. Im ersten Fall hatte man nur eine Spindel zu bewegen, und diese gibt dann unmittelbar die Länge O A = r (Abb. 21) der zu messenden Strecke. Im zweiten Fall geben die Bewegungen der beiden Meßspindeln die Koordinatenunterschiede von Anfangs- und Endpunkt A der Strecke: x_a und y_a.

Außer den rechtwinkligen Koordinaten werden auch die sogenannten Polarkoordinaten benutzt. Die festen Beziehungsgrößen sind hier nicht zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen, sondern eine feste Richtung OE und der Richtungsunterschied α gegen diese Richtung. Man sieht, daß auch durch die Länge des Abstandes O A (Radiusvektor oder Fahrstrahl genannt) und den Richtungsunterschied α (auch Argument genannt) die Lage des Punktes A eindeutig bestimmt ist. Da an der Meßmaschine die runde Platte drehbar und die Größe des Drehungswinkels an dem Nonius rechts vorn ablesbar ist, so kann man mit ihr auch die Polarkoordinaten ausmessen.

Die Beziehung zwischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten ist, wie aus Abb. 21 hervorgeht, sehr einfach:

Rechtwinklige Koordinaten, ausgedrückt in Polarkoordinaten:	Polarkoordinaten, ausgedrückt in rechtwinkligen Koordinaten:
$\mathbf{x} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{cos}\ \alpha$	$\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}$
$\mathbf{y} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{sin}\ \alpha$	$\mathbf{tg}\ \alpha = \dfrac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$

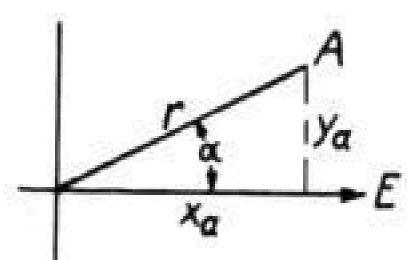

Abb. 21

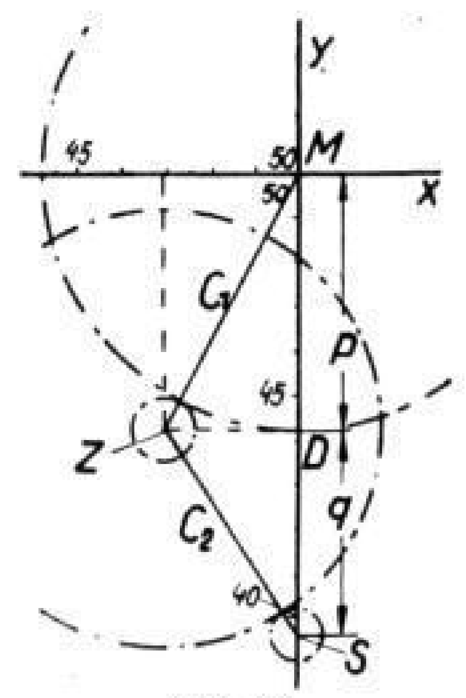

Abb. 22

Man kann also in der Rechnung leicht von dem einen System in das andere übergehen.

Hat man nun die zur Festlegung des Kalibers der Uhr nötigen Punkte (für Wellen, Schrauben, Stellstifte, Ausdrehungen, Ausfräsungen, Begrenzungsbögen) gemessen und berechnet, dann müssen diese Punkte auf Werkzeuge und Vorrichtungen (Lehren, Stanzwerkzeuge, Bohrschablonen, Kurvenscheiben) übertragen werden, damit austauschbare Massenteile hergestellt werden können. Dazu sind diese kleinen Meßmaschinen wie in Abb. 20 wenig geeignet. Bei größeren Meßmaschinen kann das Mikroskop herausgenommen und durch einen Körper ersetzt werden, der eine genau zentrierte Körnerspitze trägt. Die mit dem Mikroskop eingestellten Punkte können also gleich auf der Maschine angekörnt werden. Ja, bei manchen Maschinen kann man sogar eine Bohrspindel einsetzen, so daß die für das Werkzeug wichtigsten Löcher gleich auf der Maschine gebohrt werden können, was der Genauigkeit der Werkzeuge natürlich sehr förderlich ist.

Aufgabe 6. In dem Werk einer offenen Taschenuhr hat das Minutenrad 80, das Zwischenrad 75, das Zwischen- und das Sekundentrieb je 10 Zähne. Der Modul des ersten Räderpaares ist 0,145 mm, der des zweiten 0,130 mm. Die Koordinaten der Minutenachse sind $x_m = 50{,}00$, $y_m = 50{,}00$. Die Sekundenachse liegt auf der y - Achse, hat also die Abszisse $x_s = 50{,}00$. Von der Zwischenachse weiß man, daß sie die Abszisse $x_z = 46{,}929$ hat. Welche Werte haben die noch fehlenden Ordinaten y_z und y_s? (Abb. 22.)

Gegeben sind:

$z_m = 80$, $z_z' = 10$, $z_z = 75$, $z_s' = 10$, $m_1 = 0{,}145$ mm,
$m_2 = 0{,}130$ mm, $x_m = 50{,}00$ mm, $y_m = 50{,}00$ mm,
$x_z = 46{,}929$ mm,
$x_s = 50{,}00$ mm.

Zu berec.nen sind: c_1, c_2, p, q.