Sehen wir uns die beiden Sätze und das, was damit geleistet werden kann, etwas genauer an:

Der Sinussatz handelt von zwei Seiten und den beiden gegenüberliegenden Winkeln. Drei von diesen vier Stücken müssen gegeben sein; dann kann das vierte berechnet werden. Wir können also mit diesem Satz zwei Grundaufgaben lösen:

1. Gegeben eine Seite und die Winkel; gesucht eine Seite.

Beispiel: Gegeben: α, β, b;
gesucht: a.

$$\mathbf{a : b = \sin\alpha : \sin\beta}$$

$$\mathbf{a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}$$

2. Gegeben zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel; gesucht der andere gegenüberliegende Winkel.

Beispiel: Gegegeben: a, c, γ;
gesucht: α.

$$\mathbf{\sin\alpha : \sin\gamma = a : c}$$

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{a}{c} \cdot \sin\gamma}.$$

Bei dieser letzten Aufgabe ist Vorsicht geboten. Wie wir in Abschnitt I ausführlich erörtert haben, ist in diesem Fall das Dreieck nur dann eindeutig konstruierbar, wenn der gegebene Winkel der größeren der beiden Seiten gegenüberliegt. Ist aber der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, also der der größeren gegenüberliegende gesucht, so kann dieser — wie dort in Abb. 3 u. 4 gezeigt wurde — spitz oder stumpf sein, und zwar sind die beiden Winkel Supplementwinkel. Dasselbe zeigt sich auch hier bei der Berechnung. Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Supplementwinkels. Wir können also dem Wert für den Sinus eines Winkels nicht ansehen, ob er zu dem Tafelwert des Winkels oder zu dessen Supplementwinkel gehört. Da im Dreieck nur e i n stumpfer Winkel vorkommen kann, muß dieser immer der größten der drei Seiten gegenüberliegen. Bei dem der größeren von zwei Seiten gegenüberliegenden Winkel muß also stets mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß er unter Umständen stumpf sein kann. Der Sinussatz hat also trotz seiner scheinbaren Einfachheit doch seine Tücke. Meist ergibt sich zwar aus dem ganzen Zusammenhang der Aufgabe, ob der gesuchte Winkel spitz oder stumpf ist. Wenn er aber sehr nahe bei 90° liegt (und dieser Fall tritt bei der Berechnung von Hemmungen häufig auf), dann ist die Entscheidung bisweilen nicht ganz einfach. Deshalb vermeiden wir nach Möglichkeit diese Berechnungsart.

Beim Cosinussatz handelt es sich um drei Seiten und einen Winkel. Auch mit diesem Satz lassen sich zwei Grundaufgaben lösen.

1. Gegeben zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; gesucht die dritte Seite.

Beispiel: Gegeben: b, c, α;
gesucht: a.

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \cdot c \cdot \cos\alpha}.$$

2. Gegeben drei Seiten; gesucht ein Winkel.

Beispiel: Gegeben: a, b, c;
gesucht: β.

Bei der Aufstellung der Gleichung müssen wir natürlich mit der dem Winkel β gegenüberliegenden Seite beginnen.

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a \cdot c \cdot \cos\beta}.$$

Nach $\cos\beta$ entwickelt

$$\mathbf{\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}}.$$

Der Cosinussatz zeigt die beim Sinussatz erwähnte Tücke nicht. Ist der gesuchte Winkel β stumpf, so zeigt sich das in der Rechnung selbsttätig an dadurch, daß der Zähler des Bruches negativ wird, d. h. daß b^2 größer ist als a^2+c^2. Negative Werte finden wir in der Funktionstafel nicht. Nach dem Satz vom Supplementwinkel ist

$$\mathbf{\cos\beta = -\cos(180 - \beta)}.$$

Für $180-\beta$ setzen wir β'.

Ist
$$\mathbf{\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}},$$

dann ist
$$\mathbf{\cos\beta' = \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{2\,ac}}.$$

Wir rechnen also, wenn $\cos\beta$ negativ wird, nicht dieses aus, sondern suchen β', dürfen dann allerdings nachher nicht vergessen, daß nicht β', sondern $\beta = 180 - \beta'$ der gesuchte Winkel ist.

Schwierigkeiten treten also hier nicht auf; wohl aber ist der Cosinussatz für die logarithmische Rechnung unbequem, weil Summen auftreten, man also gezwungen ist, während der Rechnung von den Logarithmen zu den Nummern zurückzukehren, wenigstens sofern man die Quadrate logarithmisch ausgerechnet hat. Hat man aber — wie in unserer Gaußschen Tafel — Tabellen für Quadrate, dann kann man diese benutzen, und die Unbequemlichkeit fällt zum größten Teil fort.

Für alle vier Grundaufgaben haben wir eine Lösungsmöglichkeit erhalten. Wir stellen sie (vgl. auch S. 149) noch einmal zusammen:

Grundaufgabe	Lösung durch	
1. SWS	Cosinussatz	(Tangenssatz)
2. SWW	Sinussatz	
3. SSS	Cosinussatz	(Tangens des halben Winkels)
4. SSW	Sinussatz	

Haben wir dadurch ein viertes Stück berechnet, dann nehmen wir von diesen vier Stücken die drei, die uns auf die bequemste Weise (das wird meist der Weg über den Sinussatz sein) das fünfte Stück liefern.

Zur Berechnung des einfachen Dreiecks reichen also unsere zwei Sätze aus. Damit ist freilich die Lehre von der Trigonometrie und ihr Anwendungsbereich keineswegs erschöpft. Es gibt insbesondere noch Sätze über die Funktionen von Summen und Differenzen von Winkeln, Formeln für Kontrollrechnungen, trigonometrische Lösung von Gleichungen und vieles andere; aber das geht uns hier nichts an. Nur zwei Sätze wollen wir noch (ohne Ableitung) hier erwähnen, weil sie besonders bequem sind und in unserer Rechnung manchmal mit Vorteil angewendet werden können (ohne indessen unbedingt nötig zu sein). Das sind

3. Der Tangenssatz:

$$\boxed{\mathbf{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot ctg\,\frac{\gamma}{2}}}$$

In Worten: T a n g e n s d e r h a l b e n D i f f e r e n z z w e i e r D r e i e c k s w i n k e l i s t g l e i c h d e m Q u o t i e n t e n a u s d e r D i f f e r e n z u n d d e r S u m m e d e r b e i d e n g e g e n ü b e r l i e g e n d e n S e i t e n m a l d e m C o t a n g e n s d e r H ä l f t e d e s v o n i h n e n e i n g e s c h l o s s e n e n W i n k e l s.

4. Satz vom Tangens des halben Winkels:

$$\boxed{\mathbf{tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-a)}}}}$$

Diesen Satz in Worten auszusprechen, ist so umständlich, daß wir darauf verzichten. Man beachte, das mit s die h a l b e Summe der drei Dreiecksseiten gemeint ist. Und man merkt sich rein gedächtnismäßig, daß im Zähler und im Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen je ein Produkt aus zwei Seitenstücken auftritt, und zwar stehen im Zähler die Differenzen aus der halben Seitensumme und den e i n s c h l i e ß e n d e n Seiten und im Nenner außer der halben Seitensumme selbst noch die Differenz aus der halben Seitensumme und der g e g e n ü b e r l i e g e n d e n Seite.

Nach dieser Regel kann man dann leicht die Formeln auch für die beiden anderen Winkel aufstellen, z. B. für β

$$\mathbf{tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-b)}}}.$$

Der Tangenssatz liefert eine Lösung der ersten Grundaufgabe und hat gegenüber dem Cosinussatz den Vorteil, daß er durchgehend logarithmische Berechnung gestattet. Man erhält aus ihm zunächst nur die Differenz zweier Dreieckswinkel, hier $\frac{\alpha-\beta}{2}$. Da aber der Winkel γ bekannt ist, ist auch die Summe der beiden Dreieckswinkel bekannt:

$$\alpha + \beta = \mathbf{180^0} - \gamma$$

oder
$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \mathbf{90^0} - \frac{\gamma}{2}.$$

Man schreibt:

$$\begin{array}{c|c|l} + & + & \frac{\alpha+\beta}{2} = \dots\dots \\ - & + & \frac{\alpha-\beta}{2} = \dots\dots \\ \hline & & \alpha = \dots\dots \\ & & \beta = \dots\dots \end{array}$$

denn
$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha \text{ und } \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta.$$

Damit hat man die beiden Winkel selbst erhalten.

Der Satz vom Tangens des halben Winkels liefert eine Lösung der dritten Grundaufgabe und gestattet ebenfalls durchgehend logarithmische Berechnung.

Beide Sätze bieten in der Rechnung gewisse Vorteile:

1. Es kommen nur spitze Winkel vor. Man braucht also nicht mehr darauf zu achten, ob man das Supplement nehmen muß.

2. Wie wir früher schon einmal erwähnten, werden die Tafeldifferenzen nicht wie bei dem Sinus großer Winkel und dem Cosinus kleiner Winkel sehr klein, sondern die kleinste Tafeldifferenz (bei 45°) ist in der fünfstelligen Tafel für 1' 25 der fünften Stelle, so daß man das Ergebnis auf mindestens 2" genau der Tafel entnehmen kann.

Der Tangenssatz hat einen Nachteil: Wenn die beiden Seiten nahe zu gleich sind, dann wird der Zähler sehr klein, z. B. bei fünfzifferigen Zahlen nur dreizifferig. Der Fehler, der durch das Weglassen der sechsten Ziffer entstanden ist, wird also prozentual 100 mal so groß und kann das Ergebnis merkbar beeinträchtigen; der Satz ist also in diesem Fall mit Vorsicht anzuwenden.