Dr. Giebel, Meisterschule Glashütte (Sachs.):

(Fortsetzung von Seite 223)

Trigonometrie in der Berechnung der Uhr

VII. Berechnung von Teilen der Uhr

Nachdem wir die Sätze für die Berechnung des allgemeinen Dreiecks behandelt haben, müßten wir nun eine größere Zahl von Übungsaufgaben durchnehmen. Und es ist dem Leser sehr zu empfehlen, dies zu tun. Aufgaben findet man in den zahllosen kleinen Schulbüchern über Trigonometrie. Wir sehen hier davon ab, um den Aufsatz nicht zu umfangreich werden zu lassen, und gehen gleich zu größeren Aufgaben über, wie sie in der Uhrmacherei vorkommen. Dabei bedienen wir uns ausschließlich der hier behandelten Sätze. Dem Leser wird anheimgegeben, nachdem er sich über den Gang der Lösung Klarheit verschafft hat, die Aufgaben selbständig für sich zu rechnen und dann seine Rechnung mit der unsrigen zu vergleichen und Unstimmigkeiten zu klären. So erwirbt er sich die notwendige Sicherheit im selbständigen Rechnen.

Als erstes Beispiel wählen wir die Berechnung einer einfachen Graham-Hemmung.

Aufgabe 8. Von einer Graham-Hemmung ist gegeben:

der Spitzenkreisdurchmesser des Steigrades $d = 24$ mm,
die Zähnezahl des Steigrades $z = 26$,
der Fall φ = rund 10 % der Teilung,
die Ruhe $\delta = \frac{1}{2}°$,
der Hebungswinkel $\beta = 1\frac{1}{2}°$,
Zahl der Teilungen, über die der Anker faßt, $n = 8\frac{1}{2}$.
Der Ankermittelpunkt liegt auf der Sekante.

Zu berechnen sind:

die Teilung t, die Führung α, der Durchgangswinkel 2 w, der Achsenabstand c, die Halbmesser des äußeren und inneren Ankerkreises r_a und r_i, der Hebungskreishalbmesser ϱ, die Ankerhöhe h und die Segmenthöhe s.

Lösung: Wenn das Rad $z = 26$ Zähne hat, so ist die Teilung

$$t = \frac{360°}{z} = \frac{360°}{26} = 13{,}8462° = 13° \, 50' \, 46''.$$

Der Führungswinkel ist

$$\alpha = \frac{t}{2} - \varphi = 6° \, 55' \, 23'' - \varphi.$$

φ soll etwa 10 % von t betragen, also rund 1,38°. Um die Rechnung nicht überflüssig zu beschweren, setzen wir

$$\varphi = 1° \, 20' \, 23',$$

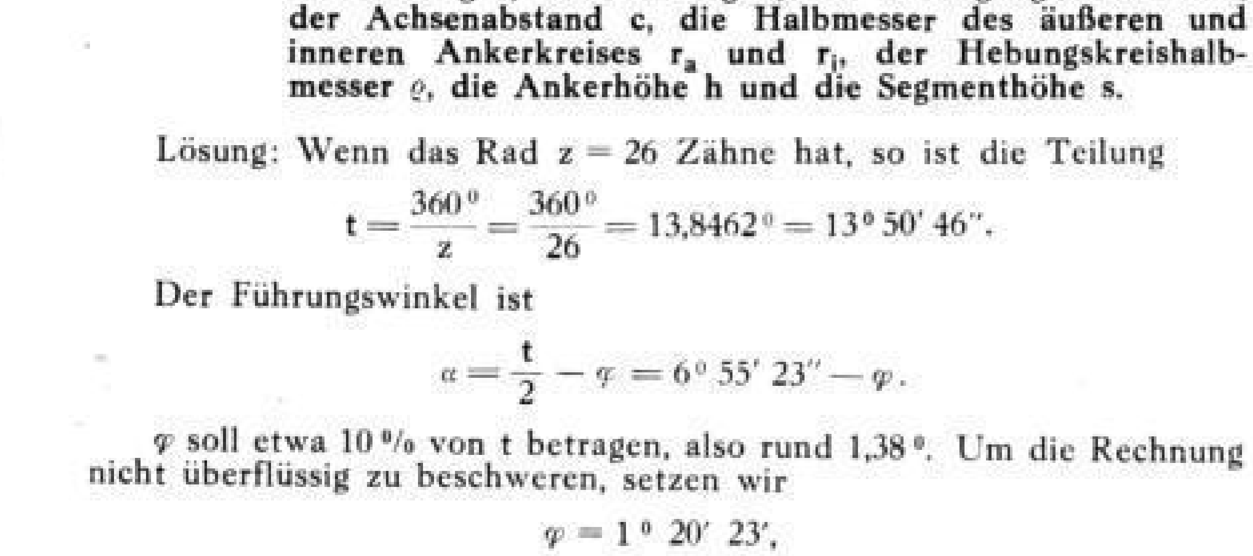

Abb. 28

so daß für α eine runde Zahl herauskommt:

$$\alpha = 6° \, 55' \, 23'' - 1° \, 20' \, 23'' = 5° \, 35'.$$

Der Durchgangswinkel ist

$$2\,w = n \cdot t = 8\frac{1}{2} \cdot 13{,}8462° = 117{,}6927° = 117° \, 41' \, 34''.$$

Für die meisten Fälle würde 117° 42′ mehr als ausreichend sein, wegen der Übung im Rechnen wollen wir aber den Winkel

$$2\,w = 117° \, 41' \, 34'' \text{ beibehalten.}$$
$$w = 58° \, 50' \, 47''.$$

Wie dem Leser bekannt ist, sind diese Rechnungen nötig zur Konstruktion der Hemmungszeichnung. Unsere Zeichnung (Abb. 28) ist absichtlich nicht maßstäblich gehalten, sondern verzerrt, um deutlich zu zeigen, worauf es ankommt. Zur Kontrolle der Rechnung ist eine maßstäblich richtige Zeichnung erwünscht, die der Leser anfertigen möge. Um den Punkt O ist der Spitzenkreis zu legen. An die senkrechte Mittellinie O O′ trägt man den Winkel w an. Zu beiden Seiten des freien Schenkels OH dieses Winkels ist $\frac{\alpha}{2} = 2° \, 47' \, 30''$ anzutragen, so daß der Bogen $B_0 A$ des Spitzenkreises den Führungswinkel α umfaßt. Die Sekante $B_0 A$ schneidet die Mittellinie im Ankerdrehpunkt O′. Um diesen Punkt O′ legen wir durch B_0 und A die beiden Ankerkreise a_a und a_i.

Nun wollen wir $O O' = c$, $O' B_0 = r_a$ und $O' A = r_i$ berechnen. Hätten wir auf der Tangente statt auf der Sekante konstruiert, so könnten wir c aus einem rechtwinkligen Dreieck finden wie in Aufgabe 2 (Abb. 15). Hier dagegen müssen wir die Dreiecke $O B_0 O'$ und $O A O'$ benutzen. Das Dreieck $O H O'$ ist rechtwinklig; deshalb ist der Winkel ν bei O′ gleich $90° - w$. In den Dreiecken $O B_0 O'$ und $O A O'$ ist also bekannt:

1. die Seite $O B_0$ bzw. $O A = r$,
2. die Winkel

$$\text{in } \triangle O B_0 O' \quad \sphericalangle B_0 O O' = w + \frac{\alpha}{2}; \quad \sphericalangle B_0 O' O = \nu = 90° - w \text{ und}$$

$$\sphericalangle O B_0 O' = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{in } \triangle O A O' \quad \sphericalangle A O O' = w - \frac{\alpha}{2}; \quad \sphericalangle A O' O = \nu = 90° - w \text{ und}$$

$$\sphericalangle O A O' = 90 + \frac{\alpha}{2}.$$

Aus diesen Stücken lassen sich mit Hilfe des Sinussatzes die gesuchten Stücke c, r_a, r_i berechnen.

Aus $\triangle O B_0 O'$ ergibt sich

$$c : r = \sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) : \sin \nu,$$

$$c = r \cdot \frac{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin (90 - w)}.$$

Wir hätten c auch aus $\triangle O A O'$ berechnen können und wären zu demselben Ausdruck gelangt. Der c gegenüberliegende Winkel ist zwar $90 + \frac{\alpha}{2}$, aber nach dem Satz vom Supplementwinkel ist $\sin\left(90 + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Aus $\triangle O B_0 O'$ ergibt sich ferner

$$r_a : r = \sin\left(w + \frac{\alpha}{2}\right) : \sin \nu,$$

$$r_a = r \cdot \frac{\sin\left(w + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \; (90 - w)}.$$

Aus $\triangle O A O'$ ergibt sich

$$r_i : r = \sin\left(w + \frac{\alpha}{2}\right) : \sin \nu,$$

$$r_i = r \cdot \frac{\sin\left(w - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin (90 - w)}.$$

Die drei angestrichenen Ausdrücke sind zu berechnen. Da in allen dreien der Ausdruck $\frac{r}{\sin (90 - w)}$ vorkommt, stellen wir in der logarithmischen Rechnung zuerst seine Größe fest und fügen dazu den Logarithmus des jeweiligen Zählers hinzu.