Das Schema der Rechnung wird also so aussehen:

		+	lg r	=
		—	lg sin (90 — w)	=
+	+	+	$\lg \frac{r}{\sin(90-w)}$	=
		+	$\lg \sin\left(90-\frac{\alpha}{2}\right)$	=
	+		$\lg \sin\left(w+\frac{\alpha}{2}\right)$	=
+			$\lg \sin\left(w-\frac{\alpha}{2}\right)$	=
			lg c	=
			$\lg r_a$	=
			$\lg r_i$	=

In Zahlen:

r = 12 mm			+	lg r	= 1,079 18
w = 58° 50′ 47″			—	lg sin (90 — w)	= 9,713 77 — 10
ν = 90 — w = 31° 9′ 13″					
α = 5° 35′					
$\frac{\alpha}{2}$ = 2° 47′ 30″	+	+	+	$\lg \frac{r}{\sin(90-w)}$	= 1,365 41
$90-\frac{\alpha}{2}$ = 87° 12′ 30″			+	$\lg \sin\left(90-\frac{\alpha}{2}\right)$	= 9,999 49 — 10
$w+\frac{\alpha}{2}$ = 61° 38′ 17″		+		$\lg \sin\left(w+\frac{\alpha}{2}\right)$	= 9,944 47 — 10
$w-\frac{\alpha}{2}$ = 56° 3′ 17″	+			$\lg \sin\left(w-\frac{\alpha}{2}\right)$	= 9,918 85 — 10
c = 23,168 mm				lg c	= 1,364 90
r_a = 20,412 mm				$\lg r_a$	= 1,309 88
r_i = 19,242 mm				$\lg r_i$	= 1,284 26

Nun führen wir den Hebungswinkel β ein. Es ist der Winkel $B_0O'B$, d. h. der Winkel, um den der Anfangspunkt der Hebefläche B_0 gehoben werden muß, bis der Zahn am Ende der Hebefläche A abfällt. Da in diesem einfachsten Fall A auf der Geraden $O'B_0$ liegt, ist $\sphericalangle B_0O'B = \sphericalangle AO'B$. In dem Dreieck $AO'B$ kennen wir drei Stücke: $O'B = r_a$, $O'A = r_i$ und $\sphericalangle BO'A = \beta$, d. h. zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel. Wir können zur Berechnung weiterer Stücke den Cosinussatz und den Tangenssatz anwenden. Da unser Ziel ist, den Winkel λ zu finden, um mit seiner Hilfe den Halbmesser ϱ des Hebungskreises zu berechnen, wäre der Tangenssatz vorzuziehen. Der Übung und auch der Kontrolle wegen wollen wir λ auf beide Weisen berechnen.

1. Mit dem Cosinussatz.

Es ist BA = b zu berechnen und dann mit dem Sinussatz λ.
Gegeben: r_a = 20,412 mm; r_i = 19,242 mm; β = 1° 30′.
Gesucht: b, λ.

$$b^2 = r_a^2 + r_i^2 - \underbrace{2\, r_a \cdot r_i \cdot \cos\beta}_{=M}$$

+	r_a^2	= 416,65	+	lg 2	= 0,301 03
+	r_i^2	= 370,26	+	$\lg r_a$	= 1,309 88
+	$r_a^2 + r_i^2$	= 786,91	+	$\lg r_i$	= 1,284 26
—	M	= 785,27	+	$\lg \cos\beta$	= 9,999 85 — 10
	b^2	= 1,64		lg M	= 2,895 02
	b	= 1,281 mm			

Mit dem Sinussatz weiter.
Gegeben: r_i = 19,242 mm; b = 1,28 mm; β = 1° 30′.
Gesucht: λ.

$\sin\lambda : \sin\beta = r_i : b$	+	$\lg r_i$	= 1,284 26
	+	$\lg \sin\beta$	= 8,417 92 — 10
$\sin\lambda = \frac{r_i \cdot \sin\beta}{b}$	+	lg Z	= 9,702 18 — 10
	—	lg b	= 0,107 55
λ = 23° 9′ 17′		$\lg \sin\lambda$	= 9,594 63 — 10

2. Mit dem Tangenssatz.

Gegeben: r_a = 20,412 mm; r_i = 19,242 mm; β = 1° 30′.
Gesucht: λ.

$$\operatorname{tg}\frac{\varkappa-\lambda}{2} = \frac{r_a - r_i}{r_a + r_i} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

	r_a = 20,412	+	$\lg r_a - r_i$	= 0,068 19
	r_i = 19,242	—	$\lg r_a + r_i$	= 1,598 28
	$r_a - r_i$ = 1,170	+	lg B	= 8,469 91 — 10
	$r_a + r_i$ = 39,654	+	$\lg \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$	= 1,883 04
	β = 1° 30′		$\lg \operatorname{tg}\frac{\varkappa-\lambda}{2}$	= 0,352 95
	$\frac{\beta}{2}$ = 0° 45′			
+	$\frac{\varkappa+\lambda}{2}$ = 89° 15′			
—	$\frac{\varkappa-\lambda}{2}$ = 66° 4′ 30″			
	λ = 23° 10′ 30″			

Diese doppelte Berechnung von λ ist lehrreich, weil die dadurch erhaltenen Werte nicht genau gleich sind. Das macht den Anfänger stutzig, der gewohnt ist, bei richtigem Rechnen auf verschiedenen Wegen genau das gleiche Ergebnis zu erhalten. Und dabei haben wir noch „Glück“ gehabt, weil sich verschiedene Ungenauigkeiten ausgeglichen bzw. bei beiden Rechnungen in derselben Richtung gewirkt haben. Bei Benutzung von siebenstelligen Logarithmen würden wir sehen, daß die Abweichung noch größer ist.

Woher kommt nun diese Abweichung? Sehen wir uns zunächst die Konstruktion an. Das Dreieck B O′ A ist lang und schmal, was in unserer verzerrten Zeichnung nicht einmal so schlimm erscheint, wie es in der maßstäblich richtigen Zeichnung ist, die der Leser selbst angefertigt hat. Die Punkte B und A liegen so nahe beieinander, daß man den Halbmesser des Hebungskreises günstigenfalls auf 1 mm genau aus der Zeichnung entnehmen kann. Das ist ja auch der Grund, weshalb man hier die Rechnung zu Hilfe ruft. Sie leistet diese Hilfe auch, aber doch nicht unbeschränkt.

Man erkennt auch leicht die schwachen Stellen oder, wie man heute gern sagt, die „Engpässe“ in der Rechnung. In unseren Rechnungen verlangen wir eine Genauigkeit von fünf Stellen. In unserer ersten Rechnung müssen wir nun b^2 als Differenz aus zwei fast gleichgroßen fünfziffrigen Zahlen bilden. Das Ergebnis ist dreiziffrig, es ist nur rund 1/500 der Zahlen, aus denen es gebildet ist. Wenn wir also bei den beiden Ausgangszahlen die sechste Ziffer als belanglos vernachlässigen, so wirkt sich diese Vernachlässigung bei der Differenz 500 mal so stark aus und ist durchaus nicht mehr belanglos.

In der zweiten Rechnung mußten wir ebenfalls eine Differenz bilden, die fast 1/20 der Zahlen ist, aus denen sie gebildet ist.

Solche Überlegungen geben ein Bild von der Leistungsfähigkeit der Rechnung. Wenn man auch aus der Tafel Sekunden entnimmt, so ist noch keineswegs (auch bei vollkommen einwandfreier Rechnung) die Gewähr geboten, daß das Ergebnis auf Sekunden genau ist. Im vorliegenden Fall werden wir den Verhältnissen gerecht, wenn wir die Sekunden weglassen und schreiben:

$$\lambda = 23°\ 10' \pm 1'.$$

Es wäre nun aber gänzlich verfehlt, wenn man sagen wollte: Da die Rechnung doch nur Minutengenauigkeit ergibt, kann man sie von Anfang an einfacher gestalten und sich vielleicht mit einer vierstelligen Tafel begnügen, mit der man etwas schneller rechnen kann. Das Gegenteil ist richtig! Bis zu der kritischen Stelle, die wir hier ausführlich besprochen haben, muß man so genau wie möglich rechnen, damit an dieser Stelle die Streuung möglichst klein wird.

Mit unserem Wert für λ wollen wir nun den Halbmesser ϱ des Hebungskreises berechnen. In dem rechtwinkligen Dreieck B T O′ ist die Hypotenuse r_a = 20,412 mm und der Winkel λ = 23° 10′ (± 1′).

$\frac{\varrho}{r_a} = \sin\lambda$	+	$\lg r_a$	= 1,309 88
$\varrho = r_a \cdot \sin\lambda$	+	$\lg \sin\lambda$	= 9,594 84 — 10
ϱ = 8,030 ± 0,006 mm		$\lg \varrho$	= 0,904 72 ± 30

Wir sehen, daß auch bei Berücksichtigung der Abweichung die Rechnung den Ansprüchen genügt; sie liefert das Ergebnis auf etwa 1/200 mm genau und ist damit der Zeichnung weit überlegen.

(Fortsetzung folgt.)