Dr. Giebel, Meisterschule Glashütte (Sachs.):

(Schluß)

Trigonometrie in der Berechnung der Uhr

Aufgabe 17. Aufstellung einer Formel für die Berechnung der Eingriffsdauer und des Überdeckungsgrades einer genormten Zykloidenverzahnung für Laufwerksräder.

Die Zykloidenverzahnung, ohne die die Uhrmacherei, wenigstens die Kleinuhrmacherei, noch nicht auskommt, ist ihrem Wesen nach (im Gegensatz zur Evolventenverzahnung) normenfeindlich. Man hat sie aber in Normen gezwungen, indem man den Zykloidenbogen durch einen Kreisbogen ersetzt, dessen Halbmesser beim Rade = $^3/_2$ der Kopfhöhe k ist. Die Kopfhöhe wird in Moduln ausgedrückt. $k = f \cdot m$, wobei der Faktor f tabellarisch festgelegt ist. Eine solche Tabelle für f findet sich z. B. in der zweiten Auflage von Romershausen, Das Fachrechnen des Uhrmachers, Band 2, S. 16.

Über die Kopfhöhe des Triebes haben wir schon Aufgaben gerechnet (siehe Aufgabe 5 und 5a, S. 191). Bei einem siebenzahnigen, spitzgewälzten (= $^2/_3$-ogivalem) Trieb z. B. ist $k' = 0{,}785$ m. Diese Zahnkopfform deckt sich nur im unteren Drittel mit der richtigen Epizykloide. Die oberen $^2/_3$ sind stark eingezogen, so daß sie nicht in Berührung mit dem Fuß des Radzahnes kommen. Wir müssen deshalb eine wirksame Kopfhöhe [k'] einführen, die beim spitzgewälzten Trieb ist:

$$[k'] = {}^1/_3\, k'.$$

Beim rundgewälzten Trieb ist sogar

$$[k'] = {}^1/_4\, k'.$$

In der Formel

$$[k'] = f' \cdot m$$

ergeben sich für den Faktor f' folgende Zahlenwerte:

	Spitz	Rund
Weniger als zehn Zähne	0,262	0,130
Zehn und mehr Zähne	0,314	0,157

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir an die Aufgabe. Unter Eingriffsdauer verstehen wir den Winkel, den das Trieb durchläuft, während ein Radzahn und ein Triebzahn im Eingriff sind. Die Eingriffslinie ist bei der Geradflankenverzahnung bekanntlich der Rollkreis, dessen Halbmesser halb so groß ist wie der des Teilkreises.

Der Eingriff beginnt in der stark verzerrten Abb. 41 in dem Schnittpunkt A des im Radteilkreis liegenden Rollkreises mit dem Spitzenkreis des Triebes, natürlich nicht dem wirklichen, sondern dem wirksamen mit der Kopfhöhe $[k'] = f' \cdot m$.

Der Eingriff endet in dem Schnittpunkt E des im Triebteilkreis liegenden Rollkreises mit dem Spitzenkreis des Rades. Das benutzte Stück der Eingriffslinie ist ABE. Ein Punkt des Triebteilkreises ist während des Eingriffs von A_1 nach E_1, dem Schnittpunkt von O'E mit

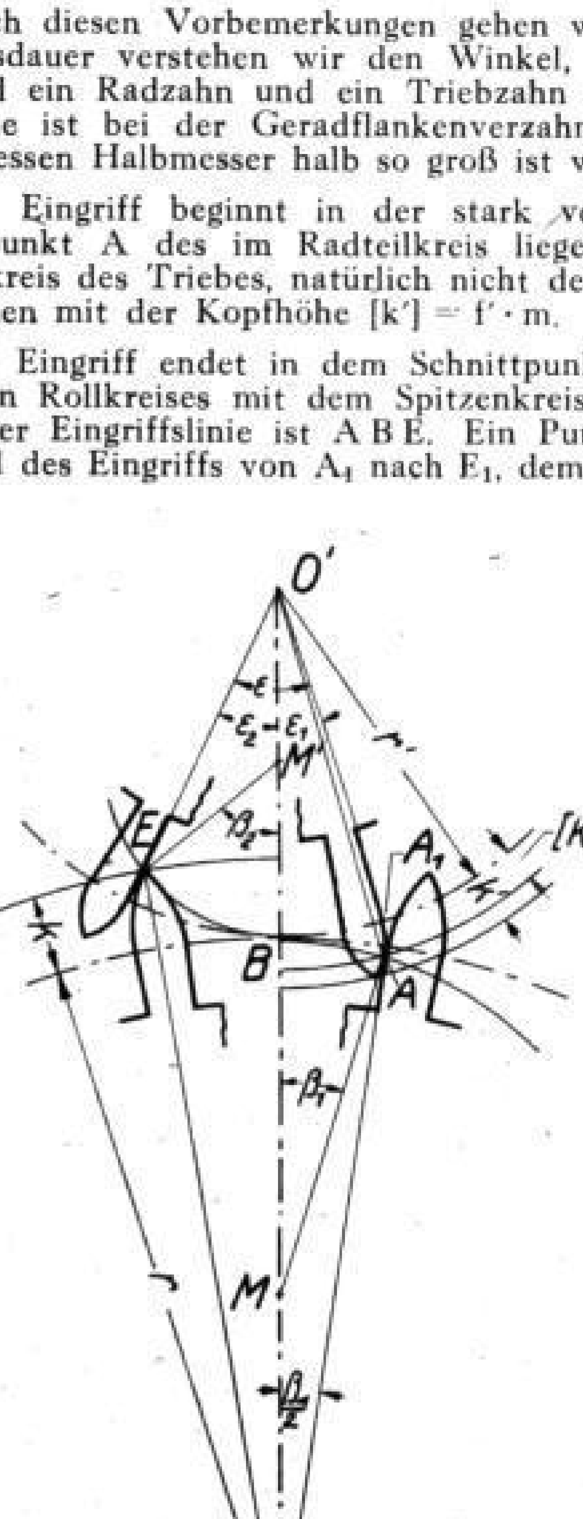

Abb. 41.

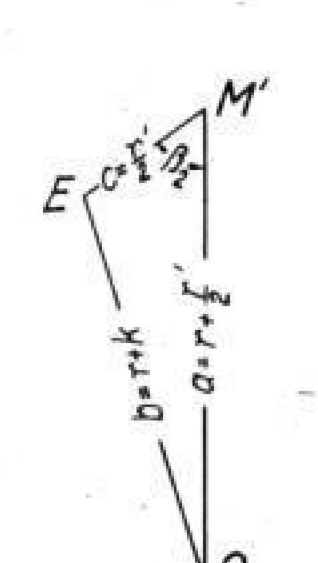

Abb. 42.

dem Triebteilkreis, gewandert, d. h. das Trieb hat sich um den Winkel ε gedreht. Dieser Winkel ε setzt sich zusammen aus ε_1 vor der Mittellinie und ε_2 hinter der Mittellinie.

Suchen wir zuerst die Größe des Winkels ε_2. Er ist Zentriwinkel im Triebteilkreis mit dem Mittelpunkt O' und dem Halbmesser r'. Der Halbmesser des Rollkreises mit dem Mittelpunkt M' ist $^1/_2$ r'. Also ist ε_2 Basiswinkel in dem gleichschenkligen Dreieck EM'O', zu dem Winkel β_2 Außenwinkel an der Spitze ist. Also ist

$$\varepsilon_2 = {}^1/_2\, \beta_2.$$

β_2 liegt in dem Dreieck OM'E, von dem die drei Seiten bekannt sind. Es ist nämlich

$$OM' = r + \frac{r'}{2} = a \quad \text{(Abb. 42)}$$
$$OE = r + k = b$$
$$ME = \frac{r'}{2} = c.$$

Nach dem Satz vom Tangens des halben Winkels ist

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-c)}{s\cdot(s-b)}}.$$

$$a = r + \frac{r'}{2}$$
$$b = r + k$$
$$c = \frac{r'}{2}$$

$$2s = 2r + r' + k$$
$$s = r + \frac{r'}{2} + \frac{k}{2}$$
$$s - a = \frac{k}{2}$$
$$s - b = \frac{r'}{2} - \frac{k}{2}$$
$$s - c = r + k$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_2 = \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2} = \sqrt{\frac{\frac{k}{2}\cdot(r+k)}{\left(r+\frac{r'}{2}+\frac{k}{2}\right)\cdot\left(\frac{r'}{2}-\frac{k}{2}\right)}}.$$

Nach der Erklärung des Moduls ist

$$d = m \cdot z, \text{ also } r = m \cdot \frac{z}{2}$$
$$r' = m \cdot \frac{z'}{2}.$$

Ferner ist nach unserer Vorbemerkung

$$k = f \cdot m.$$

Wir setzen diese Werte in unsere Formel ein.

$$\operatorname{tg}\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{m\cdot\frac{f}{2}\cdot\left(m\cdot\frac{z}{2}+m\,\frac{f}{2}\right)}{\left(m\,\frac{z}{2}+m\,\frac{z'}{4}+m\,\frac{f}{2}\right)\cdot\left(m\,\frac{z'}{4}-m\,\frac{f}{2}\right)}}.$$

Nun dividieren wir Zähler und Nenner durch m^2 und multiplizieren mit 4.

$$\operatorname{tg}\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{f\cdot(z+f)}{\left(z+\frac{z'}{2}+f\right)\cdot\left(\frac{z'}{2}-f\right)}}. \tag{1}$$

Um den Winkel ε_1 zu finden, gehen wir von dem Winkel β_1 aus. Dieser liegt in dem Dreieck MAO', in dem wir ebenfalls die drei Seiten kennen:

$$MO' = r' + \frac{r}{2}$$
$$O'A = r' + [k']$$
$$AM = \frac{r}{2}$$

In genau derselben Weise wie soeben finden wir

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2} = \sqrt{\frac{f'(z'+f')}{\left(z'+\frac{z}{2}+f'\right)\cdot\left(\frac{z}{2}-f'\right)}}. \tag{2}$$