

Ich bin bei der Ausarbeitung der ökonomischen principles / Grundsätze / so verdammt aufgehoben mit Rechnungsfehlern, daß ich aus despair / Verzweiflung / wieder mich drangesetzt habe, rasch die Algebra durchzuschlagen. Arithmetik blieb mir immer fremd. Auf dem algebraischen Umweg aber schieße ich mich rasch wieder ein." So erwähnte Marx zum erstenmal am 11. Januar 1858 in einem Brief an Engels, daß er Mathematik treibe.

Erstmalig nach dem Gymnasium wandte sich Marx mit fast 30 Jahren wieder der Mathematik zu. Eins seiner Hefte aus dem Jahre 1846 mit Notizen zur politischen Ökonomie enthält sieben zusammenhängende Seiten mit mathematischen Zeichen. Es sind Lösungen von Gleichungen ersten Grades, Berechnungen von Prozentverhältnissen und Newtonschen Binomialkoeffizienten. Weitere Jahre danach entstanden in den Vorarbeiten „Zur Kritik der politischen Ökonomie“ verschiedene Seiten mit geometrischen Zeichnungen, algebraischen Berechnungen zur Abstrahierung des Begriffs der Potenz und des Logarithmus.

Zwischen diesen Studien lagen große Unterbrechungen von mehreren Monaten, ja sogar Jahren. Die Mathematik half Marx, wenn er keine Kraft mehr zu etwas anderem hatte. Im November 1860 schrieb er Engels: „Artikelschreiben ist mir beinahe out of question / unmöglich / Die einzige Beschäftigung, wodurch ich die nötige quietness of mind / den nötigen seelischen Gleichmut / aufrechterhalten kann, ist Mathematik“.

Systematisch konnte er sich mit der Mathematik aber erst ab 1878, also in seinen letzten fünf Lebensjahren, befassen.

Bekanntheit mit der Analysis – ein ästhetisches Vergnügen

Die erste Bekanntheit mit der Analysis bereitete Marx ein rein ästhetisches Vergnügen. Voller Begeisterung löste er ein Beispiel nach dem anderen, füllte er Manuskriptseiten mit der Ausrechnung von Differentialgleichungen. Seine Bibliothek wuchs um mathematische Werke, und bald schon sah er sich verpflichtet, Engels von seinem neuen Steckenpferd zu berichten und ihm vorzuschlagen, sich ebenfalls an den Freuden der Erkenntnis zu laben: „In der freien Zeit treibe ich Differential- und Integralkalkül. Apropos! Ich habe Überfluß an Schriften darüber und will Dir eine zuschicken, wenn Du das Fach in Angriff nehmen willst.“

Ein für Marxsche Manuskripte ungewöhnlicher schmaler Papierstreifen enthält die Beilage (Marx nannte sie „Appendix“) zu einem Brief an Engels, dessen Datum nur ungefähr angegeben werden kann (Ende 1865 bis Anfang 1866). Sie beginnt so:

„Appendix. Du hast mich während meines letzten Aufenthaltes in Manchester einmal nach Erklärung des Differentialkalküls gefragt. Im folgenden Beispiel wird Dir die Sache ganz klar werden. Der ganze Differentialkalkül entspringt zunächst aus der Aufgabe, Tangenten durch einen beliebigen Punkt einer beliebigen Kurve zu ziehen. Daran will ich Dir daher die Sache exemplifizieren.“

An diese Einleitung schließt sich die älteste Handschrift von Marx zur höheren Mathematik an. Die jüngste Ausarbeitung ist in seinen letzten Lebensjahren entstanden, genauer gesagt, begonnen worden, weil ihn der Tod hinderte, die große Arbeit zu vollenden, nämlich die Differentialrechnung zu begründen, ihre Natur und Dialektik zu enthüllen. Gleichsam im Vorgefühl des nahenden Endes wollte er die wichtigsten Teile seiner Aufzeichnungen sauber abschreiben und an Engels schicken. Solche Reinschriften sollte es drei geben, aber Engels erhielt nur zwei. Die dritte und letzte konnte Marx nicht mehr beenden.

Marx war schon über 60 Jahre alt, krank und matt, durch die tödliche Krankheit seiner Frau gebrochen, als er diese Manuskripte niederschrieb. Er schrieb sie in der feurigen, kraftvollen Sprache eines Mannes, der um den Wert eines geschliffenen Wortes und scharfen Gedankens wußte. Engels antwortete ihm jugenhaft triumphierend: „Gestern also endlich hab' ich mir die Courage gefaßt, auch ohne Hülfsbücher Deine mathematischen Manuskripte durzustudieren, und war froh zu sehen, daß ich die Bücher nicht nötig hatte. Ich mache Dir mein Kompliment dazu. Die Sache ist so sonnenklar, daß man sich wirklich nicht genug wundern kann, wie die Mathematiker so hartnäckig darauf bestehen, sie zu mystifizieren.“ Und der Brief schließt in der gleichen Tonart: „Die Sache hat mich so erfaßt, daß sie mir nicht nur den ganzen Tag im Kopf herumgeht, sondern ich auch vorige Nacht im Traum einem Kerl meine Hemdknöpfe zum Differenzieren gab und dieser mir damit durchbrannte.“

Mit Unterbrechungen, in Minuten von Stunden, die dem „Kapital“ galten, suchte Marx schon in jenem Frühjahr 1865 herauszufinden, wieso es in der Differentialmethode so sonderbar zugeht, daß sie strenggenommen die Mathematik durchweg verletzt, die Resultate aber immer richtig sind. „Wir sind dahingekommen“, schrieb Engels im „Anti-Dühring“, „daß die meisten Leute differenzieren und integrieren, nicht weil sie verstehen, was sie tun, sondern aus reinem Glauben, weil es bisher immer richtig herausgekommen ist.“ Konnte sich doch Marx in der Tat nicht mit dem Ratschlag des d'Alembert abfinden: „Schreitet nur voran, der Glaube wird kommen!“ Der gallische Leichtsinns dieses Satzes paßte nicht zu Marx.

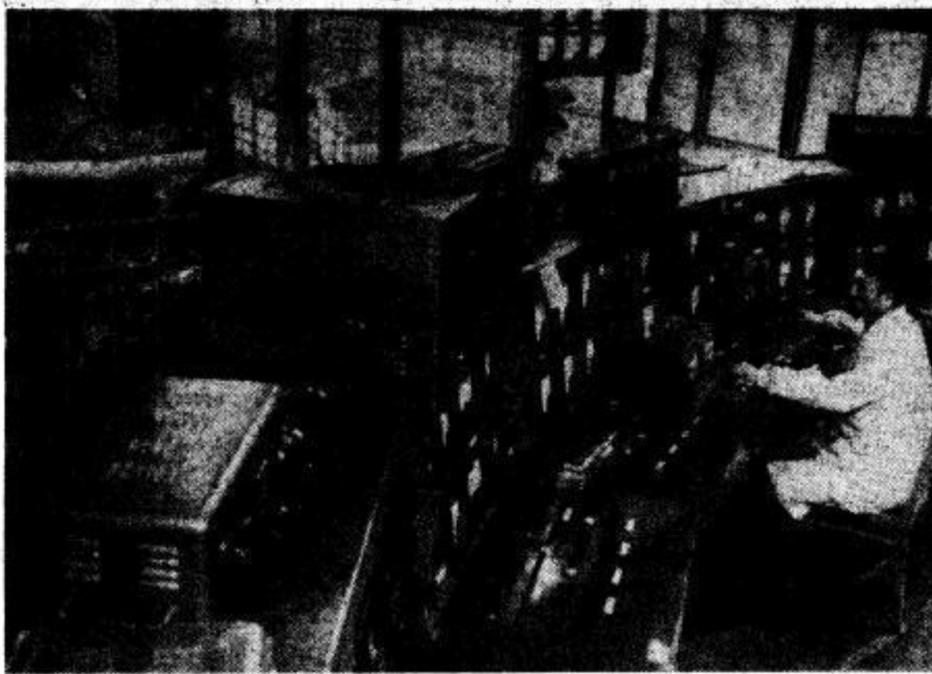
„Die Torheiten und Absurditäten, mit denen die Mathematiker diese ihre Verfahrensweise, die sonderbarerweise immer zu richtigen Resultaten führt, mehr entschuldigend als erklärt haben, übertreffen die ärgsten ... Phantasereien zum Beispiel der Hegelschen Naturphilosophie.“ Doch kam der Zeitpunkt, da es sich Marx erlauben konnte, eine Sache in Angriff zu nehmen, die ihn schon lange beschäftigte.

Allerdings ergab sich das nicht ganz so, wie er es sich gewünscht hätte, einfach, weil er sehr krank war. „Nach 1870 trat wieder eine Pause ein, bedingt hauptsächlich durch Krankheitszustände. Wie gewöhnlich füllte Marx diese Zeit durch Studien aus; Agronomie ... Geologie und Physiologie und namentlich selbständige mathematische Arbeiten, bilden den Inhalt der zahlreichen Auszugshefte aus dieser Zeit.“

Diese Worte aus Engels' Vorwort zum zweiten Band des „Kapital“ sind wohl bekannt. Nicht jedermann weiß jedoch, wie tapfer damals der kranke Marx mit der Aufgabe rang, die bis heute als nicht völlig gelöst gelten kann, obwohl den Versuchen, die Differentialrechnung zu begründen, Hunderte von Büchern gewidmet sind, die einen selbständigen Zweig der mathematischen Literatur ausmachen.

Taylors Theorem und der Maclaurinsche Lehrsatz

Marx studierte aufmerksam die Vorgeschichte des Problems. Bald sah er schon genau, wo die angenommene Grenze zwischen den beiden „Sorten“ der Mathematik verläuft. Newtons Binom ist der letzte Grenzpfahl der elementaren Algebra. Taylors Theorem und ihr Spezialfall – der Maclaurinsche Lehrsatz – sind die Vorposten der höheren Mathematik. Das Binom ist das Reich des Endlichen, die Theoreme sind bereits Reihen unendlicher Glieder ... Zunächst hatte Marx den verlockenden Gedanken, daß alles äußerst einfach sei: „Il. Taylors Theorem beruht auf Übersetzung des binomialen Theorems aus der algebraischen Sprache in die Differentialausdrucksweise.“ Dieses Zitat ist die Überschrift eines Manuskriptabschnitts.



Die „Mathematischen Manuskripte“ von Karl Marx



$$\frac{a}{0} = \alpha \quad \frac{2}{2-2} = 1+1+1+1+\dots \quad \frac{dx}{0} \quad \frac{a}{0}$$

$$\frac{1}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+\dots \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{dx}{dy}$$

$$1+1+1+1+\dots \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

von Lew Katolin, Moskau

während ihr Sinn aus dem am Rande stehenden Satz erhellt: In Wirklichkeit stammt alles aus der Algebra, sogar das konsequente Differenzieren.“

Marx glaubte damals, dem Geheimnis der Differentialrechnung auf der Spur zu sein. In seinen Worten über Newtons Binom klingen Triumphtöne an: „Newtons Entdeckung des binomischen Theorems revolutionierte die ganze Algebra. Das binomische Theorem ist aber auch die Hauptbasis des Differentialkalküls.“ Aber sowohl das Binom als auch die Differentialrechnung sind Schöpfungen des Genius Newtons. In Marx kam der Verdacht auf: Und was, wenn Newton bereits Taylors Formel als auch Maclaurins Lehrsatz gekannt hatte? Was, wenn er selbst sie für sich entwickelt, seine Resultate insgeheim durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes erhalten hatte?

Dieser in den einzelnen Heften immer wiederkehrende Gedanke ließ Marx lange keine Ruhe. Er vermutete einen anderen Genius in der Möglichkeit, daß auch dieser in der Lage gewesen wäre, Papierstöße zu verbrauchen, um dann der Menschheit nur einige wohlformulierte Sätze sagen zu können ... „Hätte Newton bloß die Resultate der Welt gebend, nicht ganz im stillen für eigenen Privatgebrauch, aus dem binomischen Lehrsatz, dem er entdeckte, sowohl Taylors Systeme und ... Maclaurins Theoreme bereits entwickelt“, fragte sich Marx noch einmal und beschloß, mit dem Zweifel endlich Schluß zu machen.

„Darauf kann man voller Gewißheit sagen: nein“, und es folgen in den mathematischen Manuskripten energische Zeilen.

„Er war in der Tat doch zu sehr absorbiert durch die Ausarbeitung der Differentialoperationen selbst ... Was andererseits Taylor und Maclaurin betrifft“ (und in seinem Mißtrauen versuchte Marx auch sie wiederholt zu beschuldigen, alles zu wissen, es jedoch zu verschweigen), „so arbeiten und bewegen sie sich von vornherein auf dem Boden des Differential selbst und hatten danach keinen Anlaß, die einfachen algebraischen Ausgangspunkte desselben zu suchen ...“

So erklärte Marx für sich die psychologische Seite des Problems. Er gelangte nicht nur zu der Überzeugung, daß niemand vor ihm „die algebraischen Prototypen des Differenzierens“ gesucht hatte, sondern begriff auch, weshalb es so gekommen war.

Nach einige Sätze, und Marx hielt die Frage für erschöpft:

„Die wirklichen und daher einfachsten Zusammenhänge des Neuen mit dem Alten werden immer erst dann entdeckt, sobald dies Neue selbst schon eine abgerundete Form gewonnen. Man kann sagen, daß der Differentialkalkül diese Relation erhielt durch die Taylorschen und Maclaurinschen Theoreme. Es fiel daher erst Lagrange zu, den Differentialkalkül auf strikt algebraischer Basis zurückzuführen.“

So hielt sich Marx mit Eifer an Lagrange. Eigentlich setzte er allein auf ihn: Hätten ihn doch Maclaurin und Taylor getäuscht – ihre Lehrsätze (die Marx als „großartige Verallgemeinerungen“ bezeichnet hatte), wenn auch dem Binom von Newton verwandt, entstanden immerhin auf der Basis der Differentialrechnung, und Marx wollte nicht glauben, daß sie die gewünschte Lösung seien – jene algebraischen Wurzeln der höheren Mathematik, die er suchte.

Lagrange fesselte Marx zunächst durch seine kristallklare Beweisführung, ja allein schon der Gedanke, das fertige Gebäude der Differentialrechnung nachträglich auf ein algebraisches Fundament zu stellen, war Marx sympathisch. Doch er stellte fest, der wichtigste, der Ausgangspunkt von Lagranges Arbeit, nämlich der Versuch, Taylors Lehrsatz nicht aus der Differentialrechnung, sondern aus der reinen Algebra abzuleiten, sei an den Haaren herbeigezogen. Marx ertappte ihn und schrieb erbittert: Dieser Schluß „scheint daher auf einem Betrug zu beruhen“. So lautet sein hartes, aber völlig zu Recht gefälltes Urteil über Lagrange. Er mußte wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren: „Es ist jetzt Lehrbuchmode nachzuweisen, daß aus Taylors und Maclaurins Theoremen das binomische Theorem entwickelbar, so umgekehrt. Dennoch ist nirgendwo, selbst nicht bei Lagrange ... der Zusammenhang zwischen dem binomischen und ihrem Theorem in seiner waldruprünglichen Einfachheit klargestellt worden, und es ist hier, wie überall, der Wissenschaft der Scheiter des Geheimnisvollen abzuhelfen.“

Drei Arten der Differentialrechnung

So entstand der „historische Abriss“. Marx faßte sämtliche Versuche zur Begründung der Differentialrechnung zusammen und kam – ohne jeglichen Ballast – auf insgesamt drei Arten.

„Die mystische Differentialrechnung“ nannte er die erste.

Ihre Begründer und Koryphäen waren Newton und Leibniz. Sie mußten, natürlich keineswegs aus bösem Willen, den Differentialen, die sowohl Nullen als auch keine Nullen sind, eine geheimnisvolle, unerklärliche Eigenschaft zuschreiben. Sonst kam nichts heraus: damit die Ergebnisse immer richtig sind, mußte man einmal den einen Standpunkt und dann den anderen beziehen.

Und hier das Resümee des ganzen ersten Abschnittes der Geschichte der Differentialrechnung:

„Also man glaubte selbst an den mysteriösen Charakter der neuentdeckten Rechnungsart, die wahre (und dabei namentlich in der geometrischen Anwendung überraschende) Resultate liefert bei positiv falschem mathematischem Verfahren. Man war selbst so mystifiziert, schätzte den neuen Fund um so höher, ärgerte die Schar der alten orthodoxen Mathematiker um so toller und rief so das gegenwärtige Geschrei hervor, das selbst in der Laienwelt widerhält und nötig ist, um dem Neuen den Weg zu bahnen.“

„D'Alembert hatte dem Differentialkalkül das mystische Gewand abgestreift, einen enormen Fortschritt gemacht.“ Dieser Satz gehört schon zur zweiten Periode, die Marx als „rationale“ bezeichnete. In der dritten, der „rein algebraischen“, gebührte die führende Rolle Lagrange. Minutlos studierte Marx sämtliche bekannten Differenzierungsmethoden, er exzerierte Seite für Seite, verglich, stellte eine Methode der anderen gegenüber, blieb aber unbefriedigt. Erst als er sich überzeugt hatte, daß die Bücher nichts Neues mehr hergaben, legte er die Konzepte zur Seite und schrieb Berechnung auf Berechnung nieder, ohne auf irgendwelche Autoritäten zu verweisen. So entstand seine eigene Art zu differenzieren, die er als „einfach algebraisch“ bezeichnete.

Glücklicherweise konnte er einige Seiten schreiben, auf denen diese Gedanken nicht als Selbstverständigung niedergelegt, sondern an einen Partner gerichtet sind. Marx schrieb auf einen Umschlag: „Für General“ (so hatten Laura und Jenny Marx Engels wegen seiner militärischen Interessen getauft) und legte die erste Sendung an Engels hinein, die Arbeit „Über den Begriff der abgeleiteten Funktion“.

Engels drängte es, mit jemandem die Freude zu teilen, die ihm Marxens Briefe bereiteten.

Unter seinen Freunden gab es große Wissenschaftler. Die Mathematik kannte jedoch keiner von ihnen, außer dem Advokaten Samuel Moore, der das „Kapital“ ins Englische übersetzte.

Wie wir heute wissen, war Moore in höherer Mathematik nicht allzu bewandert. Er schöpfte seine mathematischen Kenntnisse aus Büchern, die an den englischen Universitäten, vor allem in Cambridge, in Umlauf waren. Dort verehrte man Newton so sehr, daß sogar der Versuch, die „kontinentalen“ Symbole, die von Leibniz eingeführten Zeichen, zu benutzen, lange als „Pietätlosigkeit gegenüber Sir Isaac“ galt.

Infolge des Newton-Kults waren die englischen Mathematiker weit hinter ihren europäischen Kollegen zurück. Moore und Marx benutzten Lehrbücher, die schon überholt waren, bevor sie noch in die Bibliotheken kamen. Vermochte aber Marx, auch ohne die europäischen Werke zu kennen, den Rahmen der englischen Schule zu sprengen, so war dies Moore nicht vergönnt.

Und trotzdem war dieser der einzige, mit dem sich Marx und Engels über Mathematik unterhalten konnten. Als Marx, von der Analysis begeistert, beschloß, sie in der Ökonomie anzuwenden, um die inneren Gesetze der ökonomischen Entwicklung mathematisch abzuleiten, konsultierte er Moore.

„Ich habe hier Moore eine Geschichte mitgeteilt, mit der ich mich privatim lang herumgebalgt“, schrieb Marx an Engels am 31. Mai 1873. „Er glaubt aber, daß die Sache unlösbar ist, oder wenigstens, wegen der vielen und großenteils erst auszufindenden Faktoren, die darin eingehen, pro tempore / zur Zeit / unlösbar ist. Die Sache ist die: Du kennst die Tabellen, worin Preise, Discount etc. etc. in ihrer Bewegung während des Jahres etc. in auf- und absteigenden Zickzacks dargestellt sind. Ich habe verschiedene Male versucht – zur Analyse der Krisen –, diese ups und downs / Auf- und Abwärtsbewegungen / als unregelmäßige Kurven zu berechnen und glaubte (ich glaube noch, daß es mit hinreichend geschicktem Material möglich ist), daraus die Hauptgesetze der Krisen mathematisch zu bestimmen. Moore, wie gesagt, hält die Sache einstweilen für untunbar, und ich habe beschlossen, for the time being / vorläufig es aufzugeben.“

Man muß sagen, daß Moore mit seinen ernüchternden Worten für Marx nicht ganz im Unrecht war. Die Aufgabe, an die Marx sich gewagt hatte, war unendlich schwer. Sie war so schwierig, daß auch die mathematische Ökonomie von heute noch nicht weitergekommen ist.

Zehn Jahre später schickte Engels Marxens mathematische Werke Moore, der sie zu studieren begann und in ihnen nichts anderes erblickte, als daß die Zeichnung mit der Richtung der Tangente an der Kurve, die sich aus Marxens Methode ergab, der allgemein üblichen entsprach.

Moore war zwölf Jahre jünger als Marx. In der Mathematik soll das Alter keine geringe Rolle spielen: Ihre größten Entdeckungen machen Mathematiker meist in der ersten Hälfte ihres Lebens, wenn ihre Auffassungsgabe noch frisch und der jugendliche Eifer nicht erfahmt ist. Marx vertiefte sich in die Mathematik im fortgeschrittenen Alter, aber deswegen war er doch derselbe Draufgänger wie in der Brüsseler Emigrantenvorstellung und während seines ganzen Lebens überhaupt.

Diese Kühnheit und Frische fehlten Moore trotz seines geringeren Alters. Was auf der Oberfläche der Marxschen Manuskripte lag, begriff er nicht, was in ihrer Tiefe steckte, sah er einfach nicht.

Die Höllenfahrt durch Null

Auf den Seiten der Marxschen Manuskripte, wo sich an exakte Formeln Wendungen wie „die Höllenfahrt durch Null“ anschließen, wo englische, deutsche und französische Wörter miteinander verbunden sind, wo aus Lehrbüchern exzerpierte Sätze neben eigenen Gedanken von Marx stehen, findet man Dutzende Male Absätze, in denen Marx immer wieder zu ein und demselben Gedanken zurückkehrt.

Diesen Gedanken kann man kurz so ausdrücken: Das Differential ist das Symbol einer Rechenoperation. Es ist nicht eine Größe mit besonderen Eigenschaften, sondern das Symbol einer bestimmten Rechenoperation, um es mit Engels zu sagen, „der Ausdruck des an ihnen vorgehenden Veränderungsprozesses ohne alle Quantität“.

Marx begriff als erster, daß eine solche Definition des Differentials dasinberechtigt ist. Mehr noch: Er zeigte, wie durch welchen verstandenen Prozeß das Differentialsymbol dieses Recht auf selbständige Existenz erlangt. Marx irte keineswegs – er war sich darüber völlig im klaren, daß er einen neuen Pfad eingeschlagen hatte. (Tatsächlich tauchten solche Ideen zum erstenmal in der mathematischen Literatur erst viele Jahrzehnte später auf, als die allgemeine Theorie symbolischer Rechnungen zu entstehen begann.) Marxens mathematische Arbeiten enthalten viele Seiten mit diesem Gedanken, der die Bedürfnisse der Mathematik um mehr als vierzig Jahre vorwegnahm.

Das Schicksal der Handschriften ist dramatisch. Ihr Weg zu den Menschen war nicht einfach. Engels konnte seine Absicht, sie zusammen mit seinen zuletzt entstandenen Werken herauszugeben, nicht verwirklichen – seine „Dialektik der Natur“ erschien erst viele Jahre nach seinem Tode, erst in den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts. Die von Marx hinterlassenen Manuskripte gelangten in das Archiv der deutschen Sozialdemokratie. Wird fortgesetzt