Untersuchung

der

Gröſse und des Einflusses

des

Vorrückens der Nachtgleichen.

Von

F. W. Bessel,

Mitgliede der Akademien von Berlin und Petersburg etc.

Eine von der Königlich-Preuſsichen Akademie der Wissenschaften
gekrönte Preisschrift.

Non frustra signorum obitus speculamur et ortus,

Berlin,

in der Realschulbuchhandlung.

1815.

Als die königliche Akademie der Wissenschaften das Vorrücken der Nachtgleichen zur Preisaufgabe für 1813 machte, glaubte ich, ihren Forderungen, durch eine Vergleichung des grofsen, aus Bradleys Beobachtungen hergeleiteten Sternverzeichnisses, mit dem Piazzischen, Genüge leisten zu können. Da mir der Preis ohne weitere Bewerber zu Theil wurde: so erlaubte die Akademie mir später, mit meiner Abhandlung noch Veränderungen vornehmen zu dürfen. Nach dem Erscheinen der neuen Auflage des Piazzischen Verzeichnisses, benutzte ich diese Erlaubnifs, indem ich die Hofnung nährte, durch eine neue Vergleichung, meiner Untersuchung einen gröfseren Grad von Zuverlässigkeit aneignen zu können.

Die Astronomen empfangen hier also die verbesserte Abhandlung. Indessen habe ich die Vergleichung mit dem älteren Verzeichnisse nicht unterdrückt; sondern auch die durch diese erhaltenen Resultate angeführt.

Königsberg den 18ten August 1815.

1.

Die Bewegungen des Aequators und der Ekliptik umfassen theils Perioden von sehr langer Dauer, oder sind der Zeit proportional; theils erneuern sie sich in kürzeren Perioden. Jene machen den Gegenstand dieser Abhandlung aus; diese, die die Natation und die Breite der Sonne erzeugen, gehören nicht hierher.

Um sich von den verschiedenen Bewegungen der beiden erwähnten Ebenen einen deutlichen Begriff zu machen, mufs man sie auf eine feste Ebene beziehen; am bequemsten ist es, dazu eine Ebene zu wählen, mit der die Ekliptik in irgend einem gegebenen Zeitpunkte zusammenfiel. Der Kürze wegen wollen wir diese Ebene durch E bezeichnen; die wahre Ebene der Ekliptik durch E′, und die Ebene des Aequators durch A.

Aus der Anziehung der späroidisch angenommenen Erde durch die Sonne und den Mond, entsteht eine rückgängige Bewegung der Durchschnittspunkte von A und E, auf der letzten Ebene, die Lunisolarpraecession. Aus der Anziehung der Erde durch die Planeten eine Bewegung von E′, die zur Folge hat, dafs A durch E′ an anderen Punkten und in anderen Winkeln geschnitten wird, als durch E; oder dafs die allgemeine Praecession (das Zurückweichen der Durchschnittspunkte von A und E′, auf der Ebene E′) von der Lunisolarpraecession verschieden ist, und dafs die Schiefe der Ekliptik sich ändert. Endlich erzeugt die Veränderung der Lage der wahren Ekliptik gegen den Aequator, eine Veränderung der Anziehung des Erdspäroids durch die Sonne und den Mond, woraus eine Bewegung von A entsteht, die also eine Natation von sehr langer Periode ist.

Von allen diesen Bewegungen hat der grofse Laplace die Gesetze ententwickelt, und im III. Th. S. 158. der Mécanique Céleste Formeln gegeben, wonach man sie berechnen kann. Entwickelt man diese Formeln nach den

Potenzen der Zeit, und vernachlässigt man dabei die 3ten und höheren: so verwandeln sie sich in folgende:

$$\Psi = t.\ 50'',8760 - t^2.\ 0'',0001217945.$$

$$\Psi_{,} = t.\ 50'',09915 + t^2.\ 0'',0001221483.$$

$$V = 23^\circ\ 28'\ 18'' + t^2.\ 0'',00000934233.$$

$$V_{,} = 23^\circ\ 28'\ 18' - t.\ 0'',52114 - t^2.\ 0'',00000272295.$$

Die feste Ebene, auf welche sich diese Formeln beziehen, ist die Ebene der Ekliptik für 1750. Nimmt man diese Ebene für die oben durch E bezeichnete an: so ist Ψ die Bewegung von A auf E; $\Psi_{,}$ die Bewegung von A auf E′ von 1750 bis 1750 + t; V der Winkel der Ebenen A und E; $V_{,}$ der Winkel der Ebenen A und E′, die beiden letzteren für die Zeit 1750 + t.

Diese Formeln setzen die von Delambre bestimmte Lunisolarpraecession und eine Schiefe der Ekliptik voraus, die mit der aus Bradleys Beobachtungen bestimmten, fast vollkommen übereinstimmt; ferner die Massen der Planeten, so wie sie Méc. Cél. III. S. 156. angegeben sind. Die Masse der Venus ausgenommen, sind die übrigen entweder so sicher bestimmt, oder haben so geringen Einflufs auf die Bewegungen der Ekliptik und des Aequators, dafs die dabei etwa noch übrig gebliebenen Fehler nur unmerklichen Einflufs haben können. Verbessert man jene aber in dem Verhältnisse $1 : 1 + \mu'$, indem man sie $\frac{1 + \mu'}{356632}$ der Sonnenmasse setzt: so sind die dadurch entstehenden Veränderungen von

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{,} &= -\ t.\ 0'',21350.\ \mu' \\ V_{,} &= -\ t.\ 0'',33298.\ \mu'\end{aligned}\right\} \text{(Méc. Cél. III. S. 92 et. S. 156.)}$$

Aufser der genauen Bestimmung der Venusmasse und der Lunisolarpraecession für 1750, die wir in der Folge

$$= 50'',28760 + \triangle c$$

setzen wollen, bleibt daher, bei der Untersuchung der Praecession, nichts zu wünschen übrig.

2.

Es ist klar, dafs die Länge und Breite eines an sich unbeweglichen Sterns, wenn man jene von einem festen Punkte von E′ an rechnet, nur durch die Bewegung von E′ geändert werden können. Eben so ist es klar, dafs auf die gerade Aufsteigung und Abweichung dieses Sterns, die erste von einem festen Punkte der Ebene A an gerechnet, nur die Bewegung von A Einflufs haben kann. Rechnet man aber, wie es wirklich geschiehet, die Längen und geraden Aufsteigungen, von dem jedesmaligen Durchschnittspunkte der Ebenen A und E′, oder von dem Nachtgleichepunkte, an: so erleiden sie noch die Veränderungen, die dieser Punkt selbst erleidet.

Um die Veränderungen der Länge, Breite, geraden Aufsteigung und Abweichung eines Sterns zu finden, wollen wir die Bewegungen der verschiedenen Ebenen unter eine Form bringen, die ihren Einflufs auf diese Veränderungen leichter übersehen läfst. Wir wollen uns ein sphärisches Dreieck durch die Ebenen A, E und E′ gebildet vorstellen; für den Punkt, in welchem E und E′ sich schneiden, nehmen wir den aufsteigenden Knoten von E′ auf E, und bezeichnen den Winkel des Dreiecks an diesem Punkte, die Neigung von E′ gegen E, durch π; der andere an E anliegende Winkel wird V und der dritte an E′ anliegende wird $180° - V_,$ seyn. Die beiden π einschliefsenden Seiten sind, wenn die Länge des aufsteigenden Knotens von E auf E′, vom festen Nachtgleichenpunkte von 1750 an gerechnet, durch Π bezeichnet wird, $\Pi + \Psi$ und $\Pi + \Psi_,$; die dritte Seite ist die Verrükkung des Anfangspunktes der geraden Aufsteigungen, und wird durch λ bezeichnet werden.

In diesem Dreiecke ist, nach den Nepershen Analogien,

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\pi.\, \text{Sin}\, (\Pi + \tfrac{1}{2}[\Psi + \Psi_,]) &= \text{Sin}\, \tfrac{1}{2}(\Psi - \Psi_,)\, \text{tgt}\, \tfrac{1}{2}(V_, + V) \\
\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\pi.\, \text{Cos}\, (\Pi + \tfrac{1}{2}[\Psi + \Psi_,]) &= \text{Cos}.\, \tfrac{1}{2}(\Psi - \Psi_,)\, \text{tgt}\, \tfrac{1}{2}(V_, - V) \\
\text{tang}\, \tfrac{1}{2}\lambda\, .\, \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}(V_, + V) &= \text{tang}.\, \tfrac{1}{2}(\Psi - \Psi_,)\, \text{Cos}\, \tfrac{1}{2}(V_, - V)
\end{aligned}\right\} \ldots. (a)$$

Die Zweideutigkeit von Π fällt, durch die Bedingung dafs π positiv ist, weg.

Bezeichnet man nun die auf die feste Ekliptik und den Nachtgleichenpunkt von 1750 bezogene Länge und Breite des Sterns, durch L und B; die vom wahren Nachtgleichenpunkte angerechnete, auf die wahre Ekliptik bezogene Länge und Breite durch l und b: so hat man

$$\left.\begin{aligned}
\text{Cos}\, B.\, \text{Cos}\, (L - \Pi) &= \text{Cos}\, b.\, \text{Cos}\, (l - \Pi - \Psi_,) \\
\text{Cos}\, B.\, \text{Sin}\, (L - \Pi) &= \text{Cos}\, b.\, \text{Sin}\, (l - \Pi - \Psi_,)\, \text{Cos}\, \pi - \text{Sin}\, b.\, \text{Sin}\, \pi. \\
\text{Sin}\, B. &= \text{Cos}\, b.\, \text{Sin}\, (l - \Pi - \Psi_,)\, \text{Sin}\, \pi + \text{Sin}\, b.\, \text{Cos}\, \pi.
\end{aligned}\right\} \ldots. (b)$$

Nimmt man den Stern als unbeweglich, oder L und B als unveränderlich an: so hat man für eine andere Epoche, für welche die veränderlichen Qualitäten durch ($'$) bezeichnet werden

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} b'.\ \operatorname{Cos}(l'-\Pi'-\Psi'_{,}) &= \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}(L-\Pi') \\ \operatorname{Cos} b'.\operatorname{Sin}(l'-\Pi'-\Psi'_{,}) &= \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(L-\Pi') \operatorname{Cos}\pi' + \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin}\pi' \\ \operatorname{Sin} b'. &= -\operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(L-\Pi') \operatorname{Sin}\pi' + \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos}\pi' \end{aligned}\right\}\dots(c)$$

Eben so hat man, wenn man die wahre Rectascension und Declination durch α und δ, und die von dem Durchschnittspunkte von A und E angerechnete Rectascension durch $\alpha+\lambda$ bezeichnet

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}(L+\Psi) &= \operatorname{Cos}\delta.\operatorname{Cos}(\alpha+\lambda) \\ \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(L+\Psi) &= \operatorname{Cos}\delta.\operatorname{Sin}(\alpha+\lambda) \operatorname{Cos} V + \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin} V \\ \operatorname{Sin} B &= -\operatorname{Cos}\delta.\operatorname{Sin}(\alpha+\lambda)\operatorname{Sin} V + \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos} V \end{aligned}\right\}\dots(d)$$

und ferner, unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von L und B,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}(\alpha'+\lambda') &= \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos}(L+\Psi') \\ \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}(\alpha'+\lambda') &= \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(L+\Psi') \operatorname{Cos} V' - \operatorname{Sin} B \operatorname{Sin} V' \\ \operatorname{Sin}\delta' &= \operatorname{Cos} B \operatorname{Sin}(L+\Psi') \operatorname{Sin} V' + \operatorname{Sin} B \operatorname{Cos} V' \end{aligned}\right\}\dots(e)$$

Die in den Gleichungen (a) bis (e) enthaltenen Vorschriften lösen alle hierher gehörigen Probleme mit geometrischer Strenge auf. Man kann leicht L und B eliminiren, und folglich, ohne diese Hülfsgröfsen, unmittelbar von 1750 + t zu 1750 + t$'$ übergehen; auch kann man die Formeln zur Rechnung bequemer einrichten, worauf wir unten zurückkommen werden.

3.

Differentiirt man die Gleichungen (d) oder (e): so erhält man, nach einer leichten Reduction

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\left\{\operatorname{Cos} V + \operatorname{Sin} V \operatorname{tgt}\delta \operatorname{Sin}(\alpha+\lambda)\right\} - \operatorname{tgt}\delta \operatorname{Cos}(\alpha+\lambda)\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} \operatorname{Sin} V \operatorname{Cos}(\alpha+\lambda) + \operatorname{Sin}(\alpha+\lambda)\frac{dV}{dt}.$$

Diese Differentialquotienten lassen sich leicht unmittelbar von der beobachteten Rectascension α abhängig machen, indem man das Quadrat und die höheren Potenzen des immer sehr kleinen λ vernachlässigt. Dadurch erhält man

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\Psi}{dt}\left\{\cos V + \sin V \tang \delta \sin \alpha\right\} + \left\{\frac{d\Psi}{dt}\sin V.\,\lambda - \frac{dV}{dt}\right\} \tang d \cos \alpha.$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}\sin V \cos\alpha - \left\{\frac{d\Psi}{dt}\sin V.\,\lambda - \frac{dV}{dt}\right\}\sin\alpha.$$

Man kann sogar das letzte Glied ganz weglassen, indem es selbst die Restascension des Polarsterns, in einem Jahrhunderte nur um 0″,04 ändern kann. Man hat nämlich nach den Potenzen der Zeit entwickelt,

$$\lambda = + t\,[0'',20544 + 0'',23277\,\mu'] - t^2.\,0'',0002660609.$$

und

$$\frac{dV}{dt} = + t.\,0'',00001968466;$$

wodurch

$$\frac{d\Psi}{dt}\sin V.\,\lambda - \frac{dV}{dt} = + t.\,0'',000000261$$

wird. Die Verbesserung der Venusmasse ist hier weggelassen, indem sie bei den Gliedern der zweiten Ordnung überall nicht berücksichtigt wurde.

Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= m + n \operatorname{tgt} \delta \sin \alpha \\ \frac{d\delta}{dt} &= n \cos \alpha \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

so ist dieses die als vollständig anzunehmende Form der Differentialquotienten, und man hat die Zahlenwerthe von

$$m = 45'',92122 + t\,0,''0003086886 + 0,91726.\triangle c - 0'',23277\,\mu'.$$

$$n = 20,''02932 - t.0'',0000370204 + 0'',39830.\triangle c.$$

Hieraus folgt, dafs die Astronomen, die ein von der Abnahme der Schiefe der Ekliptik abhängiges Glied, in den Ausdrücken der jährlichen Veränderungen, angebracht wissen wollten, irrten; dafs sie dieses Glied fanden, lag aber darin, dafs sie, zugleich mit der Schiefe der Ekliptik, nicht auch die Längen und Breiten der Sterne als veränderlich annahmen. Uebrigens sieht man aus der eben gegebenen Darstellung, dafs es ein Umweg ist, wenn man die bewegliche Ebene der Ekliptik in die Rechnung bringt. Laplaces Autorität, die man für jene irrigen Ausdrücke angeführt hat, ist gerade dagegen und wurde nur misverstanden.

4.

Durch zwei Sternverzeichnisse für verschiedene Epochen kann man eine doppelte Bestimmung der Praecession erhalten; indem man sie sowohl auf m als auf n gründet. Die Rectascensionen allein werden m, und sowohl diese als die Declinationen n geben. Kann man in beiden Bestimmungen eine genügende Sicherheit erlangen, so wird man, aus ihrer Vergleichung, die Venusmasse herleiten, und dadurch die Untersuchung von allen fremden Voraussetzungen befreien können.

Das Problem hat aber eine grofse Schwierigkeit, indem die eigene Bewegung der Sterne sich auf keine Weise von der Praecession trennen läfst. Diese Schwierigkeit erscheint desto gröfser, je weniger es bezweifelt werden kann, dafs ein grofser Theil der eigenen Bewegungen von der Bewegung unseres Sonnensystems herrührt, welche die Sterne scheinbar nach einem Punkte rücken läfst, wodurch die Veränderungen in einer ganzen Hälfte der Sphäre in gleichem Sinne afficirt werden: so dafs selbst das Mittel aus sehr vielen einzelnen Vergleichungen, sich oft beträchtlicher von der Wahrheit entfernen wird, als allgemeine Betrachtungen über die Wahrscheinlichkeit der Fehler vermuthen lassen. Auch darf man, seitdem Bradleys Beobachtungen gezeigt haben, dafs unter den kleineren Sternen sehr starke Bewegungen vorkommen, dieser Schwierigkeit durch die Ausschliefsung der gröfseren Sterne nicht mehr auszuweichen hoffen.

Es giebt hier nur ein Mittel: nämlich die Vergleichung sehr vieler, an allen Punkten des Himmels vertheilter Sterne, unter deren Zahl jedoch nur solche aufgenommen werden dürfen, von denen man überzeugt ist, dafs sie keine sehr grofse eigene Bewegung haben. Die grofse Menge der Vergleichungen wird alsdann die von der eigenen Bewegung herrührende Unsicherheit so viel als möglich, und, wenn von so genauen Verzeichnissen, wie das Bradleysche und Piazzische, die Rede ist, die kleinen Beobachtungsfehler bis zum Verschwinden, verkleinern.

Da die durch die eigene Bewegung erzeugte Unsicherheit immer dieselbe bleibt, die Zwischenzeit der Epochen beider zu vergleichender Verzeichnisse, mag so grofs oder so klein seyn als man will: so kann die Wahl dieser Verzeichnisse nur durch ihre, mit der Zwischenzeit verhältnifsmäfsig gröfsere oder geringere, Genauigkeit und durch ihre Vollständigkeit, bestimmt werden. Es ist aber von den Astronomen längst mit Recht anerkannt, daſs die, 100 Jahre von den Piazzischen entfernten, Famsteedschen Beobachtungen, weit mehr als die doppelte Unsicherheit der Bradleyschen, 50 Jahr entfernten, haben. Obgleich beide Verzeichnisse etwa gleich vollständig sind: so konnte daher nur das letztere zur Vergleichung gewählt werden, dessen Genauigkeit, nach meiner Reduction, wie ich zuversichtlich hoffe, nicht geringer ist, als die des Piazzischen. Jenes Verzeichniſs giebt die Oerter von 3162 Sternen für 1755 an; allein es kommen mehrere darunter vor, die nur einseitig bestimmt sind, indem Bradley bei ihnen entweder die Rectascensionen oder Declinationen nicht beobachtete. Die übrigen Verzeichnisse aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts, sind entweder zu unvollständig oder zu wenig genau, um, durch ihre Vergleichung, auf eine Vermehrung der durch das Bradleysche allein gewährten Sicherheit, hoffen zu dürfen.

5.

Bei der Bestimmung von m aus den Rectascensionen, kommt alles auf die richtige Annahme der Fundamentalsterne an. Man muſs dabei desto vorsichtiger seyn, je warnender das neuerlich gegebene Beispiel der Maskelynischen Correction ist. Bei dem Verzeichnisse für 1755 scheint auch von dieser Seite nichts zu wünschen übrig zu bleiben, indem es sich auf 14 Hauptsterne gründet, deren Rectascensionen, unabhängig von einander, durch unmittelbare Vergleichungen mit der Sonne bestimmt werden; so daſs wohl schwerlich ein merklicher mittlerer Fehler übrig geblieben seyn kann. — Bei dem älteren Verzeichnisse von Piazzi wurde die, von Piazzi selbst und Maskelyne gefundene, Verbesserung von $+ 4'',0$ angebracht; das neuere, allein auf Piazzis Beobachtungen gegründete, wurde ungeändert beibehalten.

Von einem möglichen beständigen Fehler dieser Art unabhängig, ist die Bestimmung von n, sowohl aus den Rectascensionen als aus den Declinationen. Wegen der Möglichkeit, die Rectascensionen der Circumpolarsterne mit gröſserer Genauigkeit zu beobachten, würde sich aus diesen n mit vorzüglichem Vortheile ergeben, wenn die Schwierigkeit in den Fehlern der Beobachtung und nicht in der eigenen Bewegung läge. Dieser entgeht man aber durch die Circumpolarsterne eben so wenig als durch andere. Bei genauerer Untersuchung zeigte es sich sogar rathsamer, die Rectascensionen der weniger als 30° von dem Nordpol entfernten Sterne, ganz zu vernachlässigen, indem sowohl Bradley als Piazzi diese weniger häufig beobachteten, und indem, gerade in dieser Gegend, grofse eigene Bewegungen häufiger vorzukommen scheinen. Die Zahl der in diesem Umkreise, in beiden Verzeichnissen gemeinschaftlich vorkommenden Sterne, ist übrigens nicht grofs genug, um dadurch einen Ersatz der erwähnten Nachtheile erwarten zu können.

Die Bestimmung von n aus den Declinationtn scheint ein sehr sicheres Mittel zur Bestimmung der Lunisolarpraecession darzubieten, indem alle beständige Fehler der Instrumente und Reductionen verschwinden, wenn man Sterne in den auf- und niedersteigenden Zeichen miteinander vergleicht. Man hat hierbei zwei Elemente zu bestimmen; nämlich n und den Unterschied der mittleren Fehler beider Verzeichnisse. Man würde aber nicht zweckmäfsig verfahren, wenn man Sterne von sehr verschiedenen Declinationen miteinander vergleichen wollte, indem alsdann die Voraussetzung des in dem Umfange dieses Declinationsunterschiedes völlig gleichbleibenden Fehlers der Reductionen und Instrumente, die Zuverlässigkeit des Resultats aufheben würde.

Bei den folgenden Untersuchungen wurde daher die Himmelskugel in Zonen von 10° Declinationsunterschied getheilt; alle diese Zonen wurden abgesondert verglichen, und so der mittlere Fehler, für jede besonders, bestimmt.

Nach der schon oben gemachten Bemerkung wurden nur solche Sterne zum Resultate gezogen, von denen man sich überzeugen konnte, dafs sie keine sehr starke eigene Bewegung besitzen. Um aber die Zahl der Vergleichungen nicht zu sehr zu verringern, wurden die Gränzen der jährlichen eigenen Bewegung = 0,″3, im gröfsten Kreise, gesetzt. Man wird es hoffentlich nicht zu weit getriebene Consequenz nennen, dafs auch alle nicht vollständig beobachtete Sterne ausgeschlossen wurden, indem von diesen nicht entschieden werden konnte, ob die mangelnde Rectascension oder Declination eine 0,″3 überschreitende eigene Bewegung verrathen haben würde. Bei einer Untersuchung dieser Art, deren Endresultate man eine gewisse Sicherheit anzueignen hofft, obgleich die einzelnen, ihr zum Grunde liegenden Bestimmungen, oft sehr bedeutend von einander abweichen, sind feste Vorschriften dieser Art nothwendig, und belohnen gewöhnlich durch einen guten Erfolg.

6.

Bei den folgenden Untersuchungen wird häufig die Herleitung der Unbekannten x und y, aus einem Systeme von Gleichungen:

$v = x + a\,y$; Mittel aus b einzelnen Bestimmungen.
$v' = x + a'y$; .... b' — —
$v'' = x + a''y$; .... b'' — —
u. s. w.

vorkommen. Giebt man jeder einzelnen Bestimmung gleichen Werth: so sind die hieraus folgenden wahrscheinlichsten Werthe von x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate,

$$x = \frac{\Sigma\, bv - \Sigma\, abv.\dfrac{\Sigma\, ab}{\Sigma\, aab}}{\Sigma\, b - \dfrac{(\Sigma\, ab)^2}{\Sigma\, aab}}$$

$$y = \frac{\Sigma\, abv - \Sigma\, bv\,\dfrac{\Sigma\, ab}{\Sigma\, b}}{\Sigma\, aab - \dfrac{(\Sigma\, ab)^2}{\Sigma\, b}}$$

Die Sicherheit dieser Bestimmungen von x und y ist so groſs, als wären sie arithmetische Mittel so vieler directer Bestimmungen, als die Nenner Einheiten enthalten; oder ihre wahrscheinlichen Fehler verhalten sich zu dem wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen directen Bestimmung, wie 1 zu den Quadratwurzeln von den Nennern.

Da es die Geduld des unermüdestens Rechners erschöpfen würde, jede einzelne der unmittelbar erhaltenen Bestimmungen, nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln, woraus man das Maximum der Sicherheit erhalten würde: so ist eine Eintheilung in gewisse Classen nothwendig. Es ist hier der Ort, zu untersuchen, wieviel man dadurch von der Sicherheit aufopfert, die man erlangen könnte, wenn man sich diese Eintheilung nicht erlaubte.

Augenscheinlich ist diese Aufopferung unbedeutend, wenn man die beobachteten Praecessionen in Rectascension, nach ihrer Gröſse, in nicht zu weit begrenzte Classen theilt, und die arithmetischen Mittel dieser Classen, nach der Methode der kleinsten Quadrate, zum Resultate stimmen läſst. Hier wurden demzufolge fünf Classen gemacht, welche die Sterne enthalten, deren, bei der Annahme $m = 45'',9335$ und $n = 20'',0282$, berechnete Praecessionen, in der

I. Classe kleiner als $30'',9335$,
II. . . . . 40,9335 und gröſser als $30'',9335$
III. . . . . 50,9335 — — . . 40,9335
IV. . . . . 60,9335 — — . . 50,9335
V. . . . gröſser als 60,9335

sind.

Wenn eine Zone, so wie sie bei den Declinationen angenommen wurde, β Sterne enthält; so stimmen sie, unter vorausgesetzter gleichförmiger Vertheilung am Himmel, mit ihrer ganzen Zahl zur Erfindung des Unterschiedes der mittleren Fehler der Verzeichnisse; n ergeben sie, wenn man jeden einzeln, nach der Methode der kleinsten Quadrate, zum Resultate stimmen läſst, so sicher, als wäre es ein arithmetisches Mittel aus $\frac{1}{2}\beta$ directen Bestimmungen. Man muſs nun eine Eintheilung wählen, die, durch eine leichtere Rechnung, die Sicherheit des Resultats dieser Sicherheit so nahe bringt, als möglich, Hier wurde eine Eintheilung in 6 Classen, von 0° bis 60° AR; von 60° bis 120° AR; von 120° bis 180° u. s. w. gemacht, für welche man die Sicherheit der Bestimmung des Unterschiedes der mittleren Fehler der Verzeichnisse, den wir durch $\triangle(\delta)$ bezeichnen wollen, $= \sqrt{\beta}$, und von $= \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{2}} = 0,955\sqrt{\frac{\beta}{2}}$ findet; so daſs in der ersten gar nichts, in der anderen sehr wenig aufgeopfert wird. Hätte man eine Eintheilung in 4 Classen, von 45° bis 135° AR; von 135° bis 225° u. s. w. gewählt, so würde die Sicherheit von $\triangle(\delta) = \sqrt{\beta}$ und von $n = \frac{4}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\beta}{2}} = 0,735\sqrt{\frac{\beta}{2}}$, also weit geringer, gewesen seyn.

Hätte man nur die den Nachtgleichenpunkten, auf beiden Seiten, bis auf den Winkel a nahekommenden Sterne zum Resultate gezogen: so würde die dadurch erlangte Sicherheit, für verschiedene Werthe von a, folgende gewesen seyn:

Sicherheit von	$\triangle(\delta)$	n
$a = 30°$	$\frac{1}{\sqrt{3}} . \sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{2}}$
$a = 45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{8}}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{2}}$
$a = 60°$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\beta}$	$\frac{3}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{3}}$
$a = 90°$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{8}}{\pi}\sqrt{\frac{\beta}{2}}$

Obgleich also die alleinige Benutzung der Sterne zwischen 300° und 60° AR, und zwishen 120° und 240° AR, n mit der Sicherheit der hier gemachten Eintheilung gegeben haben würde: so würde sie doch $\triangle(\delta)$ mit einer geringeren gegeben haben. Ueberdieſs hat die hier gewählte Eintheilung den Vorzug, daſs sie mehr Sterne zum Resultate stimmen läſst; also einen geringeren Einfluſs der eigenen Bewegungen, in so fern sie, wenigstens zum Theil, einem bestimmten Gesetze folgend angenommen werden, befürchten läſst.

7.

Bei der Vergleichung der Verzeichnisse wurden die jährlichen Praecessionen nach den Formeln

$$\frac{d\alpha}{dt} = 45'',9335 + 20'',0285 \text{ tang } \delta \sin \alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 20'',0282 \cos \alpha$$

für die Epochen 1755 und 1800 berechnet. Das Mittel aus beiden, von der beobachteten jährlichen Fortrückung abgezogen, gab dann die Summe des Fehlers der berechneten Praecession, der jährlichen eigenen Bewegung, und des 45ten Theils des Unterschiedes der Fehler beider Verzeichnisse. Die Vergleichungen des älteren Piazzischeu Verzeichnisses, stellte ich hier mit denen des neueren zusammen, und bezeichne jene durch M, diese durch N. Auf diese Weise fand sich durch die

Rectascensionen.

Classe I.

	M.			N.		
	Anzahl der Sterne.	Berechnete Praeces.	Beobachtete Corr.	Anzahl der Sterne.	Berechnete Praeces.	Beobachtete Corr.
	56	25″,240	+0″,0429	63	25,055	-0″,0035

Classe II.

zwischen 40° 14′ und 105° 46′	50	38″,582	+0″,0350	51	38″,530	+0,077
- 106 18 — 231 22	50	36, 963	+0, 0142	50	37, 181	—0, 0162
- 231 46 — 262 5	50	36, 905	+0, 0475	51	36, 793	—0, 0313
- 263 33 — 290 27	50	36, 312	+0, 0477	50	36, 315	+0, 0031
- 290 53 — 306 19	50	36, 728	+0, 0528	49	36, 793	+0, 0396
- 306 39 — 346 57	57	37, 358	+0, 0545	65	37, 453	+0, 0344

Classe III.

zwishen 0° 27′ und 8° 54′	50	46″,583	+0″,0584	50	46″,597	+0″,0525
- 9 2 — 16 24	50	47, 055	+0, 0526	54	46, 996	+0, 0774
- 16 35 — 29 35	50	46, 938	+0, 0492	53	46, 995	+0, 0747
- 29 39 — 41 38	50	47, 468	+0, 0573	50	47, 468	+0, 0573
- 41 57 — 62 23	50	46, 745	+0, 0655	52	46, 716	+0, 0953
- 62 56 — 74 38	50	47, 010	+0, 0764	51	47, 080	+0, 0934
- 75 25 — 88 44	50	45, 357	+0, 0568	53	45, 448	+0, 0778
- 90 49 — 119 3	50	46, 550	+0, 0421	53	46, 642	+0, 0567
- 119 21 — 136 27	50	45, 944	—0, 0135	51	46, 831	+0, 0015
- 136 38 — 149 46	50	46, 822	—0, 0303	49	46, 818	—0, 0045
- 149 56 — 159 30	50	46, 813	—0, 0253	49	46, 801	+0, 0160
- 159 40 — 169 31	50	46, 666	—0, 0020	48	46, 733	+0, 0295
- 169 36 — 181 49	50	46, 207	+0, 0300	51	46, 219	+0, 0499
- 182 1 — 190 19	50	45, 303	—0, 0359	48	45, 312	—0, 0064
- 190 27 — 203 25	50	45, 828	+0, 0110	50	45, 887	+0, 0292
- 203 27 — 220 35	50	45, 919	+0, 0514	51	45, 881	+0, 0281
- 221 11 — 234 55	50	46, 353	+0, 0847	51	46, 342	+0, 0561
- 234 56 — 258 38	50	45, 087	+0, 0783	51	45, 030	+0, 0700
- 258 52 — 288 34	50	45, 606	+0, 0990	53	45, 711	+0, 0770
- 288 35 — 306 14	50	46, 184	+0, 1024	50	46, 184	+0, 0980

zwi-

zwischen 306° 17′ und 317° 57′	50	45″,984	+ 0″,0886	50	45″,984	+ 0″,1060
- 318 0 — 331 16	50	46, 586	+ 0, 0521	53	46, 785	+ 0, 1046
- 331 22 — 339 17	50	46, 593	+ 0, 0662	49	46, 547	+ 0, 1021
- 340 15 — 347 49	50	45, 745	+ 0, 0646	49	45, 74[illegible]	+ 0, 1035
- 347 54 — 355 18	50	45, 294	+ 0, 0460	50	45, 294	+ 0, 0731
- 355 19 — 359 59	27	45, 609	+ 0, 0637	27	45, 609	+ 0, 0402

Classe IV.

zwischen 10° 52′ und 42° 13′	50	54″,117	+ 0″,1157	51	54″,105	+ 0″,0538
- 42 45 — 61 18	50	54, 235	+ 0, 1179	51	54, 208	+ 0, 0610
- 61 30 — 78 45	50	54, 368	+ 0, 1466	51	54, 342	+ 0, 1133
- 78 54 — 97 40	50	53, 770	+ 0, 0986	56	53, 717	+ 0, 0612
- 99 15 — 117 40	50	54, 675	+ 0, 0724	51	55, 683	+ 0, 0549
- 118 16 — 137 39	50	54, 294	+ 0, 0545	50	54, 294	+ 0, 0231
- 137 47 — 162 5	50	54, 321	+ 0, 0311	49	54, 373	+ 0, 0391
- 162 27 — 251 38	50	52,926	+ 0, 0393	50	52, 926	+ 0, 0647
- 252 13 — 285 28	50	54,574	+ 0, 1012	51	54, 608	+ 0, 1138
- 286 9 — 334 42	51	52,865	+ 0, 1053	52	52, 812	+ 0, 1353

Classe V.

79	66″,103	+ 0″,1213	91	66″,672	+ 0″,0917

Die arithmetischen Mittel aus jeder Classe sind,

Classe I.	56	25″,240	+ 0″,0429	63	25″,053	− 0″,0035
- II.	307	37, 166	+ 0, 0422	316	2[illegible], 195	+ 0, 0186
- III.	1277	46, 299	+ 0, 0454	1296	46, 310	+ 0, 0606
- IV.	501	54, 012	+ 0, 0881	512	54, 099	+ 0, 0723
- V.	79	66, 103	+ 0, 1213	91	66, 672	+ 0, 0917

Durch die Auflösung der hieraus folgenden 5 Gleichungen von der Form

$$v = \triangle m + a \triangle n$$

erhält man, nach Art. 6.

	M.	N.
△ m . . .	= + 0″,054505; γ = 2174,7.	= + 0″,054169; γ = 2223,8.
△ n . . .	= + 0,052785; . . . 274,9	= + 0″,052026 . . . 304,5.
Anzahl der Sterne	. . . . = 2220	. . . . = 2278.

Durch γ ist die Anzahl directer Bestimmungen bezeichnet, derer Resultat für eben so sicher zu halten ist, als die hier herausgebrachten; dasselbe Zeichen wird in der Folge dieselbe Bedeutung haben.

8.

Die 6 Classen, in welche die Sterne jeder Zone der Declination, nach Art. 6., getheilt werden, enthalten

I. die Sterne deren AR. zwischen 270° und 330°
II. . . . . 330° — 30°
III. . . . . 30° — 90°
IV. . . . . 90° — 150°
V. . . . . 150° — 210°
VI. . . . . 210° — 270°

Die Resultate der verschiedenen Zonen sind, nach dieser Eintheilung, folgende:

Zone von — 35° bis — 25°.

	M.			N.		
	Anzahl der Sterne.	Berechnete Praec.	Beobachtete Corr.	Anzahl der Sterne.	Berechnete Praec.	Beobachtete Corr.
I. Classe	27	+ 9″,903	+ 0″,1130	28	+ 10″,055	0″,0560
II.	9	+ 18, 431	+ 0, 1695	9	+ 18, 431	+ 0, 1231
III.	3	+ 9, 063	+ 0, 0635	3	+ 9, 063	— 0, 1012
IV.	10	— 5, 272	+ 0, 0722	12	— 4, 906	+ 0, 0416
V.	13	— 19, 105	+ 0, 0458	14	— 19, 151	— 0, 0491
VI.	26	— 10, 991	+ 0, 0348	26	— 10, 991	— 0, 0173
	88			92		

Zone von — 25° bis — 15°

	M.			N.		
	Anzahl der Sterne.	Berechnete Praec.	Beobachtete Corr.	Anzahl der Sterne.	Berechnete Praec.	Beobachtete Corr.
I. Classe	64	+ 9″,273	+ 0″,1312	70	+ 9″,432	+ 0″,0772
II.	36	+ 19, 022	+ 0, 1084	37	+ 19, 050	+ 0, 0355
III.	22	+ 9, 099	+ 0, 0849	24	+ 8, 766	+ 0, 0351
IV.	23	— 5, 543	+ 0, 0814	25	— 5, 682	+ 0, 0303
V.	32	— 19, 148	+ 0, 0806	32	— 19, 148	+ 0, 0042
VI.	56	— 9, 510	+ 0, 0648	57	— 9, 401	+ 0, 0131
	233			245		

Zone von — 15° bis — 5°

I. Classe	50	+ 11″, 271	0″, 1315	50	+ 11″, 271	+ 0″, 0775
II.	59	+ 19, 114	+ 0, 1199	59	+ 19, 103	+ n, 0606
III.	55	+ 7, 607	+ 0, 0756	57	+ 7, 514	+ 0, 0113
IV.	41	— 11, 733	+ 0, 0804	40	— 11, 8 0	+ 0, 0209
V.	37	— 18, 891	+ 0, 0847	37	— 18, 891	+ 0, 0091
VI.	35	— 11, 536	+ 0, 0683	35	— 11, 535	+ 0, 0038
	277			278		

Zone von — 5° bis + 5°

I. Classe	53	+ 9″, 228	+ 0″, 1432	53	+ 9″, 228	+ 0″, 0883
II.	58	+ 19, 132	+ 0, 1001	58	+ 19, 132	+ 0, 0399
III.	59	— 8, 813	+ 0, 0664	61	+ 8, 993	— 0, 0001
IV.	34	— 9, 204	+ 0, 0637	34	— 9, 204	+ 0, 0129
V.	49	— 19, 049	+ 0, 0579	50	— 19, 038	— 0, 0170
VI.	42	— 9, 475	+ 0, 0666	43	— 9, 596	+ 0, 0125
	295			299		

Zone von + 5° bis + 15°

I. Classe	49	+ 10″, 854	+ 0″, 1253	49	+ 10″, 854	+ 0″, 0723
II.	54	+ 19, 444	+ 0, 0989	58	+ 19, 427	+ 0, 0507
III.	61	+ 8, 956	+ 0, 0554	63	+ 8, 961	+ 0, 0017
IV.	57	— 11, 084	+ 0, 0354	60	— 11, 080	— 0, 0127
V.	40	— 19, 158	+ 0, 0598	41	— 19, 078	— 0, 0134
VI.	41	— 8, 977	+ 0, 0834	41	— 8, 977	+ 0, 0346
	302			312		

Zone von + 15° bis + 25°

I. Classe	56	+ 9″, 498	+ 0″, 1247	55	+ 9″, 510	+ 0″, 0765
II.	56	+ 19, 056	+ 0, 0794	58	+ 19, 050	+ 0, 0431
III.	113	+ 9, 118	+ 0, 0787	118	+ 9, 014	+ 0, 0231
IV.	77	— 8, 208	+ 0, 0451	79	— 8, 325	— 0, 0056
V.	44	— 19, 206	+ 0, 0594	45	— 19, 225	— 0, 0172
VI.	42	— 9, 123	+ 0, 1178	43	— 9, 326	+ 0, 0559
	388			398		

Zone von + 25° bis + 35°

I. Classe	43	+ 9″, 263	+ 0″, 1127	44	+ 9″, 416	+ 0″, 0476
II.	33	+ 19, 137	+ 0, 0718	34	+ 19, 156	+ 0, 0237
III.	38	+ 10, 743	+ 0, 0374	41	+ 10, 796	— 0, 0100
IV.	64	— 9, 648	+ 0, 0079	64	— 9, 648	— 0, 0340
V.	37	— 18, 718	+ 0, 0305	39	— 18, 716	— 0, 0469
VI.	44	— 8, 733	+ 0, 0844	46	— 8, 787	+ 0, 0396
	259			268		

Zone von + 35° bis + 45°

I. Classe	39	+ 9″, 768	+ 0″, 1205	40	+ 9″, 834	+ 0″, 0832
II.	40	+ 19, 087	+ 0, 0577	42	+ 19, 050	+ 0, 0205
III.	36	+ 8, 841	+ 0, 0120	38	+ 9, 176	— 0, 0266
IV.	26	— 10, 573	+ 0, 0314	27	— 10, 362	— 0, 0012
V.	33	— 18, 929	+ 0, 0062	35	— 18, 992	— 0, 0337
VI.	15	— 9, 834	+ 0, 0981	18	— 9, 063	+ 0, 0528
	189			200		

Zone von + 45° bis + 55°

I. Classe	22	+ 11″, 025	+ 0″, 0830	22	+ 11″, 025	+ 0″, 0451
II.	28	+ 19, 118	+ 0, 0286	32	+ 19, 025	— 0, 0040
III.	30	+ 11, 651	— 0, 0190	30	+ 11, 651	— 0, 0589
IV.	18	— 9, 117	— 0, 0511	18	— 9, 117	— 0, 0844
V.	11	— 19, 162	— 0, 0241	11	— 19, 162	— 0, 0550
VI.	18	— 8, 395	+ 0, 0474	18	— 8, 351	+ 0, 0122
	127			131		

Zone von + 55° bis + 65°

I. Classe	22	+ 10″, 345	+ 0″, 0102	22	+ 10″, 345	— 0″, 0129
II.	27	+ 19, 121	+ 0, 0327	27	+ 19, 121	+ 0, 0058
III.	14	+ 6, 926	+ 0, 0244	15	+ 6, 885	— 0, 0213
IV.	24	— 10, 384	— 0, 4020	24	— 10, 384	— 0, 0606
V.	20	— 19, 172	— 0, 0380	22	— 19, 153	— 0, 0574
	107			110		

Von + 65 bis zum Pole.

I. Classe	30	+ 9″,365	+ 0″,0104	27	+ 9″,596	− 0″,0020
II.	36	+ 18, 688	+ 0, 0323	30	+ 18, 909	+ 0, 0118
III.	—	——	——	3	+ 16, 295	− 0, 0123
IV.	10	− 11, 438	− 0, 0097	12	− 12, 011	− 0, 0595
V.	14	− 18, 870	− 0, 0273	13	− 19, 008	− 0, 0595
VI.	10	− 5, 358	+ 0, 0840	11	− 5, 175	+ 0, 0122
	100			96		

Die Auflösung der aus diesen Vergleichungen hervorgehenden Bedingungsgleichungen von der Form

$$v = \triangle(\delta) + a \triangle n$$

giebt, nach Art. 6., den mittleren Unterschied der Verzeichnisse für jede Zone, und die Verbesserung des angenommenen. Den ersteren findet man:

	M.		N.	
$\triangle(-30°)$	= + 3″,78	γ = 86,8	+ 1″,54	γ = 91,5
$\triangle(-20°)$	+ 4, 24	231,9	+ 1, 67	243,1
$\triangle(-10°)$	+ 4, 22	271,9	+ 1, 39	272,6
$\triangle(0°)$	+ 3, 73	290,9	+ 1, 06	295,9
$\triangle(+10°)$	+ 3, 32	300,3	+ 0, 87	309,1
$\triangle(+20°)$	+ 3, 56	378,1	+ 1, 07	388,4
$\triangle(+30°)$	+ 2, 49	257,5	+ 0, 12	266,7
$\triangle(+40°)$	+ 2, 24	184,4	+ 0, 53	195,2
$\triangle(+50°)$	+ 0, 29	106,4	− 1, 24	112,9
$\triangle(+60°)$	− 0, 30	105,1	− 1, 35	109,8
$\triangle(+77°30')$	+ 0, 44	88,0	− 0, 86	87,2

Ferner die Verbesserung von $n = \triangle n$

Zonen				
$-35^\circ - 25^\circ$	$+ 0'',06403$	$\gamma = 33,4$	$+ 0'',07523$	$\gamma = 35,3$
$-25^\circ - 15^\circ$	$+ 0,0\ 942$	94,0	$+ 0,04028$	96,6
$-15^\circ - 5^\circ$	$+ 0,02386$	133,9	$+ 0,03025$	133,2
$-5^\circ + 5^\circ$	$+ 0,02774$	134,6	$+ 0,02639$	176,9
$+5^\circ + 15^\circ$	$+ 0,02816$	139,0	$+ 0,03255$	144,0
$+15^\circ + 25^\circ$	$+ 0,01586$	145,0	$+ 0,02934$	149,0
$+25^\circ + 35^\circ$	$+ 0,02893$	105,2	$+ 0,03197$	109,7
$+35^\circ + 45^\circ$	$+ 0,02476$	90,7	$+ 0,02491$	95,8
$+45^\circ + 55^\circ$	$+ 0,02558$	49,9	$+ 0,02404$	54,0
$+55^\circ + 65^\circ$	$+ 0,04161$	55,9	$+ 0,03648$	58,7
$+65^\circ + 90^\circ$	$+ 0,02179$	49,5	$+ 0,03510$	46,9
Mittel	$+0'',027137$	1031,1	$+0'',031916$	1100,6
Anzahl der Sterne	2365		2429	

8.

Die in den beiden vorigen Artikeln geführte Untersuchung, giebt daher für $\frac{1}{2}[1755 + 1800] = 1777,5$:

	M.	N.
AR. . .	$m = 45'',9335 + 0'',054055;\ \gamma = 2174,7$	$+ 0'',054169\ .\ \gamma = 2223,8$
	$n = 20,0282 + 0,052785\ \ldots\ 274,9$	$+ 0,052026\ \ldots .\ 304,5$
Decl. . . .	$n = 20,0282 + 0,027173\ \ldots\ 1031,1$	$+ 0,031916\ \ldots\ 1100,6$

Nimmt man aus den beiden Bestimmungen von n das Mittel, mit gehöriger Rücksicht auf ihren Werth: so hat man hieraus

M.	N.
$m = 45'',988005;\ \gamma = 2174,7$	$45'',987666:\ \gamma = 2225,8$
$n = 20,060764\ \ldots .\ 1306,0$	$20,064472\ \ldots .\ 1405,1$

Vergleicht man diese, dürch die Beobachtungen gegebenen Werthe von m und n, mit den (Art. 3.) aus der Laplaceschen Theorie gefolgerten

$$m = 45'',929710 + 0,91726 \triangle c - 0'',23277.\ \mu'$$

$$n = 20,026652 + 0,39830 \triangle c$$

so ergeben sich die beiden endlichen Bedingungsgleichungen des Problems

M.	N.
$0{,}91726\,\triangle c - 0'',23277\,\mu' = +\,0'',058295;\ \gamma = 2174{,}7$	$+\,0'',057959 .\ \gamma = 2223{,}8$
$0{,}39830\,\triangle c \qquad = +\,0{,}034112 \ldots 1305{,}0$	$+\,0{,}037820 \ldots 1405{,}1$

Bestimmt man den Werth von $\triangle c$ aus jeder dieser Gleichungen, so hat man

M.	N.
$\triangle c = +\,0'',063553 + 0'',25377\,\mu'$	$\ldots\ 0'',063187 + 0'',25377$
$\triangle c = +\,0{,}085644$	$0{,}094954$

Man würde also die Venusmasse, nach der ersten Vergleichung um + 0,087, nach der andern um + 0,125 vergröſsern müssen, um m und n in vollkommene Uebereinstimmung zu bringen.

Dieser Vermehrung widersprechen aber andere Bestimmungen der Venusmasse. Die angenommene Masse ist die, die Delambre aus Greenwicher Beobachtungen der Sonnenlängen folgerte, und die Laplace bis auf den 15ten Theil ihrer Gröſse für sicher hielt (Méc. Cél. III. P. 156.); früher war sie von Laplace kleiner angenommen, allein sowohl Bradleys als Maskelynes Beobachtungee forderten die Vermehrung im Verhältnisse 1 : 1,0743. Indessen wird diese Vermehrung durch die neuen Untersuchungen Burckhardts, wie es scheint, sehr unwahrscheinlich gemacht; denn er fand aus sechs und dreiſsigjährigen Sonnenbeobachtungen (Con. des Tems 1816. S. 343.), eine Verminderung der angenommenen Delambrischen Masse, die gröſser ist als die vorige Vermehrung. Nach diesen weitläuftigen und gewiſs sehr genauen Untersuchungen, würde man $\mu' = -\,0{,}1125$ setzen müssen. Die chinesischen Beobachtungen der Schiefe der Ekliptik, stimmen vollkommen mit dieser Verminderung; die Beobachtuugen seit Bradleys Zeit erfordern sogar eiue noch etwas stärkere. Ich fand nämlich, aut Bradleys Beobachtungen, die Schiefe der Ekliptik für $1755 = 23^\circ 28' 15'',32$; aus den meinigen, mit derselben Refraction reducirten, mit vollkommener Uebereinstimmung beider Sonnenwenden, für $1815 \ldots 23^\circ 27' 47'',32$. Hierans folgt die jährliche Veränderung für $1785 = -\,0'',46667$, welche nach der Formel Art. 1. $= -\,0'',52133 - 0'',33298\,\mu'$ ist; so daſs man $\mu' = -\,0{,}146$ erhält. Mit der Burckhardtschen Masse ist die Schiefe 1815, $1'',03$ gröſser beobachtet als 1755. Da aber das aus einer sehr groſsen Menge, einen Zeitraum von 36 Jahren umfassenden, Sonnenbeobachtungen, gezogene

Resultat, mehr Sicherheit zu versprechen scheint, als das aus den Schiefen der Ekliptik hervorgehende: so ziehe ich Burckhardts Bestimmung vor, und werde mich ihrer, bei den folgenden Untersuchungen der Praecession, bedienen.

Mit dem Werthe von $\mu' = -0{,}1125$, hat man aus den in diesem Art. gegebenen Bestimmungen, aus m,

$$\begin{array}{lcc} & \text{M.} & \text{N.} \\ \Delta c = & +0'',035004 & +0'',034638 \end{array}$$

Der Unterschied der auf m und n gegründeten Bestimmungen von Δc ist daher

$$\begin{array}{ccc} \text{M.} & & \text{N.} \\ 0'',050640 & \ldots & 0'',060316; \end{array}$$

er würde verschwunden seyn, wenn man die Rectascensionen des Verzeichnisses für 1755 um

$$0'',28 \ldots\ldots 2'',71$$

vermindert, oder die der Verzeichnisse für 1800 um eben so viel vermehrt hätte.

Indessen ist es kaum möglich, daſs das Verzeichniſs für 1755 einen so groſsen mittleren Fehler haben sollte, indem es auf 7jährige, mit dem gröſsten Fleiſse berechnete, Bradleysche Sonnenbeobachtungen gegründet wurde; eben so wenig aber kann man, bei der Bestimmung der Fundamentalsterne für 1800, einen so groſsen Fehler argwöhnen, indem Maskelyne und Piazzi sie, jeder aus eigenen Beobachtungen, mit fast vollkommener Uebereinstimmung, hergeleitet haben.

Dagegen scheint es aber, daſs die Bestimmungen von m und n aus den Beobachtungen, selbst einer Unsicherheit unterworfen sind, die groſs genug ist, um diesen Unterschied daraus erklären zu können. Denn theils finden sich in den aus den Rectascensionen gezogenen Resultaten noch Abweichungen, die gröſser sind als man erwarten sollte; theils zeigt sich bei den Declinationen eine auffallende Anomalie, indem das beobachtete positive Maximum der Verbesserung der angenommenen Praecession, fast bei allen Zonen, nicht in der zweiten Classe (von 330° bis 30° AR), sondern in der ersten (von 270° bis 330° AR) liegt; endlich weicht das aus den Rectascensionen gefolgerte n, mehr als man erwarten sollte, von dem durch die Declinationen bestimmten, ab.

Die

Die Ursache dieser Unterschiede ist ohne Zweifel die Regelmäſsigkeit der eigenen Bewegung der Sterne, deren Einflusse wir durcheus nicht auszuweichen im Stande sind. Diese eigene Bewegung macht es auch unmöglich, den Grad der Sicherheit des Resultats, aus den Abweichungen der einzelnen Bestimmungen unter sich, zu schätzen, indem eine solche Schätzung immer nur zufällige Abweichungen voraussetzt, auf die beständige Einwirkungen keinen Einfluſs haben. Uebrigens finden, bei dem im 7ten Artikel angeführten Vergleichungen der Rectascensionen des neuen Piazzischen Verzeichnisses, in allen Classen, die kleinsten Praecessionen in der Gegend von 135° und die gröſsten in der entgegengesetzten statt. Dieses widerspricht der von Trisnecker, aus einer Vergleichung einer weit geringeren Anzahl Sterne, gezogenen Bemerkung, daſs die Praecession in 7^{Z}. der Länge am kleinsten und in 2^{Z}. am gröſsten ist; — eben so wenig ist es der Bewegung der Sonne, nach dem von Herschel angegebenen Punkte, günstig. Allein es würde nicht zweckmäſsig seyn, die Richtung der Sonnenbewegung, aus einer Menge Sterne ohne Auswahl, ausmitteln zu wollen; da doch viele Sterne am Himmel sind, deren verhältniſsmäſsig geringere Entfernung durch ihre starke Ortsveränderung angedeutet wird. Indessen gehört die eigene Bewegung der Sonne immer zu den schwierigsten Problemen der theorischen Astronomie, da wir sie von der wirklichen eigenen Bewegung der Sterne, die mit jener von einer Ordnung ist, nicht zu trennen vermögen.

Unter der Voraussetzung, daſs der Unterschied der aus m und n geschlossenen Werthe der Lunisolarpraecession, nur von den eigenen Ortsveränderungen der Sterne herrührt, wird man am wenigsten zu irren fürchten dürfen, wenn man Δ c so annimmt, daſs die Fehler auf m und n gleich vertheilt werden. Unter dieser Voraussetzung hat man

	M.	N.
Δ c	$= + 0'',050536$	$+ 0,052899$

als das Resultat von 4585 verschiedenen Vergleichungen des älteren, und 4707 des neueren Piazzischen Verzeichnisses mit dem Bradleyschen. Die übrig bleibenden Fehler von m und n sind, mit dieser Bestimmung von Δ c,

	M.	N.
	$0'',014063$	$0'',016751$;
oder in 45 Jahren	$0'',63$	$0'',75$;

diese scheinen aber keinesweges zu grofs zu seyn, um sie nicht der aus den eigenen Bewegungen erzeugten Unsicherheit von m und n zuschreiben zu können.

Da die aus dem neueren Piazzischen Verzeichnisse gezogene Bestimmung, gröfseres Vertrauen verdient, indem dieses durch die Verbesserung des älteren entstanden ist: so werde ich den letzten Werth von Δ c annehmen, und demnach die Lunisolarpraecession für 1750

$$= 50'',340499$$

als das Endresultat der Untersuchung betrachten.

10.

Mit den gefundenen Werthen der Lunisolarpraecession und der Venusmasse erhät man, aus den Formeln des 1ten, 2ten und 3ten Artikels, für die Zeit 1750 + t:

$$\Psi = t.\ 50'',340499 - t^2.\ 0'',0001217945$$
$$\Psi, = t.\ 50,176068 + t^2.\ 0,0001221483$$
$$V = 23^\circ 28' 18'',0 + t^2.\ 0,00000984233$$
$$V, = 23^\circ 28' 18'',0 - t.\ 0'',48368 - t^2.\ 0'',00000272295$$

Jährliche Lunisolarpraecession $= 50'',340499 - t.\ 0'',0002435890.$
— Allgemeine Praecession $= 50'',176068 + t.\ 0'',0002442966.$
m . . . . $= 45'',99592 + t.\ 0'',0003086450.$
n . . . . $= 20'',05039 - t.\ 0'',0000970204.$
λ . . . . $= t.\ 0'',17926 - t^2.\ 0'',0002660394.$
π . . . . $= t.\ 0'',48892 - t^2.\ 0'',0000030719.$
Π . . . . $= 171^\circ 36' 10'' - t.\ 5',18.$

Für 1800 + t hat man hieraus

Jährliche Lunisolarpraecession $= 50'',32832 - t.\ 0'',0002435890$
— Allgemeine Praecession $= 50'',18728 + t.\ 0,0002442966$
m . . . . $= 46'',01135 + t.\ 0,0003086450$
n . . . . $= 20'',04554 - t.\ 0,0000970204$

11.

Die mittleren Unterschiede der Declinationen der verglichenen Verzeichnisse, die im 8ten Artikel bestimmt wurden, sind, wie es scheint, nicht die uninteressanteste Frucht dieser Arbeit. Das ältere Verzeichnifs von Piazzi giebt die Declinationen, vom Horizonte bis zu etwa + 50° Decl., immer mehrere Secunden nördlicher als das Bradleysche. Als ich diese auffallende Erscheinung zuerst bemerkte, war ihre Erklärung mir noch unbekannt, indem selbst die, von dem grofsen Palermer Astronomen vorgenommene Verminderung der Polhöhe, von 1″,5, nur den geringeren Theil des Unterschiedes verschwinden liefs. Indessen durfte ich, nach der Sorgfalt die auf die Untersuchung der Reductionselemente für Bradleys Beobachtungen gewandt war, hoffen, dafs mit der Zeit die Rechtfertigung dieser Declinationen erscheinen werde. Das Verzeichnifs von 220 Sternen, womit Piazzi die Astronomen, vor der neuen Ausgabe des grofsen Verzeichnisses, beschenkte, bestätigte diese Hoffnung, indem es zeigte, dafs wahrscheinlich eine neue Untersuchung der Reductionselemente ihn bewogen hatte, seine früheren Declinationen mehrere Secunden südlicher zu setzen. Das Resultat der angestellten Vergleichung dieses Verzeichnisses mit dem älteren gebe ich hier:

	Unterschiede des Verzeichnisses von 220 Sternen, mit dem Aelteren von Piazzi.	Bradleyschen f. 1755.
12 Sterne zw. — 35° und — 25°	— 2″,96	+ 0″,82
24 — ... — 25° ... — 15°	— 2,74	+ 1,50
26 — ... — 15° ... — 5°	— 2,94	+ 1,28
28 — ... — 5° ... + 5°	— 2,86	+ 0,87
32 — ... + 5° ... + 15°	— 2,74	+ 0,58
27 — ... + 15° ... + 25°	— 3,38	+ 0,18
24 — ... + 25° ... + 35°	— 2,17	+ 0,32
12 — ... + 35° ... + 45°	— 1,99	+ 0,25
9 — ... + 45° ... + 55°	— 1,26	— 0,97
11 — ... + 55° ... + 65°	— 2,08	— 2,38
3 — ... + 65° ... + 90°	+ 0,03	+ 0,47

In dem Verzeichnisse von 220 Sternen sind also die Declinationen mit den Bradleyschen als genau übereinstimmend anzusehen, indem der mittlere Fehler nur in 3 Zonen 1″ übersteigt. Etwas häufiger sind die 1″ übersteigenden Unterschiede, nach Art. 8. in der neuen Ausgabe des grofsen Verzeichnisses; allein auch dort sind sie so klein, dafs es sehr schwer seyn möchte, zu entscheiden, auf wessen Rechnung sie kommen, oder ob sie zum

Theil von der Unsicherheit herrühren, die die eigene Bewegung der Sterne noch übrig gelassen haben kann. Sobald das Resultat astronomischer Beobachtungen bis auf eine Seconde verbürgt werden soll, fällt man, bei dem heutigen Zustande der Sachen, auf Schwierigkeiten, die selten mit überzeugender Gewifsheit überstiegen worden sind. Zur Rechtfertigung der Declinationen für 1755 könnte man aber anführen, dafs die Declinationen zwischen — 15° und + 15° als unmittelbar beobachtet angesehen werden können, indem sie durch die Sonnenbeobachtungen verbessert wurden, also von der Bestimmung der Polhöhe und der Refraction, und von den Fehlern des Quadranten selbst, ganz unabhängig sind; ferner, dafs diese Beobachtungen eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen beiden Sonnenwenden gegeben haben.

Bekanntlich fand Piazzi die Schiefe der Ekliptik aus den Wintersonnenwenden 8″ kleiner als aus den Sommersonnenwenden. Bringt man die im XVI. B. der Monatl. Correspondenz S. 126 angeführten Beobachtungen, auf ihre mittlere Epoche, den 1. Janr. 1798: so ergeben

10 Sommersonnenwenden	23° 27′ 58″,69
9 Wintersonnenwenden	50,51

Da diese Sonnenwenden mit denselben Elementen berechnet sind, die dem älteren Verzeichnisse zum Grunde liegen: so müssen sie mit den in diesem enthaltenen Declinationen eine gleiche Veränderung erleiden. Im 8ten Art. haben wir aber gesehen, dafs Piazzi's Declinationen der älteren Verzeichnisses, für + 23° 28′ und — 23° 28′ Decl., 3″,19 und 4″,08 nördlicher sind, als die Bradleyschen. Bringt man diese Unterschiede bei den Schiefen der Ekliptik an: so findet mau, aus

10 Sommersonnenwenden	23° 27′ 55″,50
9 Wintersonnenwenden	54,59

aus deren Uebereinstimmung, unter der, nach Bradleys und den neuesten Beobachtungen, nicht mehr zweifelhaften Voraussetzung der wirklichen Gleichheit der Entfernungen beider Wendekreise vom Aequator, eine neue Bestätigung des Verzeichnisses für 1755 hervorgeht. Hätte man die Verbesserungen angebracht, die Piazzi selbst im neueren Verzeichnisse anbrachte: so würde man einen Unterschied von 2″ gefunden haben. Das Mittel = 23° 27′ 55″,05 für 1798, entfernt sich nur — 0″,20 von der Schiefe der

Ekliptik, die man, nach Art. 9, aus der Vergleichuug von Bradleys Bestimmung mit der meinigen für 1815, folgern würde. — So viele Bestätigungen können uns, theils über die Richtigkeit des Verzeichnisses für 1755 beruhigen; theils ein günstiges Vorurtheil für die andere aus diesen Untersuchungen gezogene Bestimmung, die der Praecession, erwecken.

12.

Es ist nun noch nöthig, dafs wir den Einflufs der Praecession auf die Oerter der Sterne näher untersuchen, und auf alle vorkommende Fälle anwendbare Vorschriften zu ihrer Berechnung geben.

Eine ansehnliche Verkürzung erleiden die für die Längen und Breiten gegebenen Grundgleichungen (b) und (c), wenn man dabei, wie es in allen vorkommenden Fällen erlaubt ist, die Quadrate und höheren Potenzen von π vernachlässigt. Man hat dann, durch eine leichte Umformung

$$l' = l + \Psi', - \Psi, + \text{tang } b\, [\pi' \cos (L - \Pi') - \pi \cos (L - \Pi)]$$
$$b' = b - [\pi' \sin (L - \Pi') - \pi \sin (L - \Pi)]$$

oder, wenn man die im 10. Art. gegebenen Zahlen substituirt,

$$\left.\begin{aligned} l' = l &+ (t'-t)\,[50'',176068 + (t'+t)\,0'',0001221438] \\ &+ (t'-t)\,[\,0'',48892 - (t'+t)\,0'',0000030719]\cos\Lambda \text{ tang } b \\ b' = b &- (t'-t)\,[\,0'',48892 - (t'+t)\,0'',0000030719]\sin\Lambda \end{aligned}\right\}\ldots(g)$$

wo, der Kürze wegen, Λ für $l - 171°36'10'' - 50'',176\,t + 5'',18\,(t'-t)$ geschrieben ist.

Obgleich man, bei der Uebertragung der Rectascension und Declination von einer Epoche auf eine andere, aus den Gleichungen (d) und (e) sehr leicht L und B elimiren kann: so scheint dieses doch keinen Vortheil zu gewähren. Ich gebe daher hier, zur vollkommen scharfen Auflösung des Problems, nur eine zur Rechnung bequemere Umformung jener Gleichungen. Diese Rechnung erfordert folgende Operationen:

$$V = 23°28'18'',0 + t^2.\ 0'',00000984233$$
$$V' = 23°28'18'',0 + t'^2.\ 0,00000984233$$
$$\lambda = t.\ 0'',17926 - t^2.\ 0,0002660394$$
$$\lambda' = t.\ 0,17926 - t'^2.\ 0,0002660394$$
$$\Psi' - \Psi = (t'-t)\,[50'',340499 - (t'+t)\,0'',0001217945]$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{tang } x = \text{cotang } \delta . \sin (\alpha + \lambda) \\
\cos B \cos (L + \Psi) = \cos \delta . \cos (\alpha + \lambda) \\
\cos B \sin (L + \Psi) = \dfrac{\sin \delta}{\cos x} \sin (V + x) \\
\sin B = \dfrac{\sin \delta}{\cos x} \cos (V + x) \\
\text{Hieraus ergiebt sich } B \text{ und } L + \Psi \\
L + \Psi' = L + \Psi + (\Psi' - \Psi) \\
\text{tang } y = \text{cotg } B . \sin (L + \Psi') \\
\cos \delta' \cos (\alpha' + \lambda') = \cos B \cos (L + \Psi') \\
\cos \delta' \sin (\alpha' + \lambda') = \dfrac{\sin B}{\cos y} \sin (y - V') \\
\sin \delta' = \dfrac{\sin B}{\cos y} \cos (y - V')
\end{array}\right\} \ldots\ldots (h)$$

woraus δ' und α' gefunden werden. Es versteht sich übrigens, daſs man auch hier die eleganten Formeln benutzen kann, und oft mit Vortheil benutzen wird, die Gauſs für die Auflösung sphärischer Dreiecke gegeben hat.

13.

Gewöhnlich wird man aber die Mühe dieser scharfen trigonometrischen Rechnung sparen können. In unseren Sternverzeichnissen ist nur der erste Differentialquotient von α und δ angegeben, womit man, seltene Fälle ausgenommen, ausreicht; zumal wenn die Zahlenwerthe dieser Differentialquotienten für zwei verschiedene Epochen angesetzt sind, indem man dann die Praecession, ohne weitere Rechnung, bis auf Gröſsen der 3ten Ordnung richtig erhält. Nichts destoweniger ist es wünschenswerth, eine schärfere Methode für die Fälle zu besitzen, in welchen es darauf ankömmt, die Oerter der den Polen sehr nahen Sterne, mit aller erforderlichen Genauigkeit, von einer Epoche auf eine beliebige Menge anderer zu übertragen, ohne jedesmal zu der trigonometrischen Rechnung zurückzukehren. Die folgende entspricht dieser Forderung.

Nach dem Taylorschen Lehrsatze hat man

$$\alpha' = \alpha + \frac{d\alpha}{dt}(t'-t) + \frac{d^2\alpha}{2dt^2}(t'-t)^2 + \frac{d^3\alpha}{6.dt^3}(t'-t)^3 + \text{etc.} \ldots$$

$$\delta' = \delta + \frac{d\delta}{dt}(t'-t) + \frac{d^2\delta}{2dt^2}(t'-t)^2 + \frac{d^3\delta}{6.dt^3}(t'-t)^3 + \text{etc.} \ldots$$

wofür wir

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' = \alpha + U'(t'-t) + U''(t'-t)^2 + U'''(t'-t)^3 + \text{etc.} \ldots \\ \delta' = \delta + W'(t'-t) + W''(t'-t)^2 + W'''(t'+t)^3 + \text{etc.} \ldots \end{array}\right\} \ldots (i)$$

schreiben wollen. Bei der Entwickelung der Coefficienten dieser Reihen, werden wir Anfangs unveränderliche Werthe von m und n annehmen, die wir, so wie sie zu der Zeit gehören, für welche α und δ gilt, zur Unterscheidung, durch m' und n' bezeichnen wollen.

Unter dieser Voraussetzung hat man:

$$U' = \text{tang}\,\delta.\, n' \sin\alpha + m'$$

$$U'' = \text{tang}\,\delta^2.\,\frac{n'^2}{2}\sin 2\alpha + \text{tang}\,\delta.\,\frac{n'm'}{2}\cos\alpha + \frac{n'^2}{4}\sin 2\alpha$$

$$U''' = \text{tang}\,\delta^3.\,\frac{n'^3}{3}\sin 3\alpha + \text{tang}\,\delta^2.\,\frac{n'^2m'}{2}\cos 2\alpha$$

$$+ \text{tang}\,\delta\left\{\frac{n'^3}{4}\sin 3\alpha + \left(\frac{n'^3}{12} - \frac{m'^2n'}{6}\right)\sin\alpha\right\} + \left\{\frac{m'n'^2}{4}\cos 2\alpha + \frac{m'n'^2}{12}\right\}$$

$$U'''' = \text{tang}\,\delta^4.\,\frac{n'^4}{4}\sin 4\alpha + \text{tang}\,\delta^3.\,\frac{n'^3m'}{2}\cos 3\alpha$$

$$+ \text{tang}\,\delta^2\left\{\frac{n'^4}{4}\sin 4\alpha + \left(\frac{n'^4}{12} - \frac{7.\,m'^2n'^2}{24}\right)\sin 2\alpha\right\}$$

$$+ \text{tang}\,\delta\left\{\frac{3\,m'n'^3}{8}\cos 3\alpha + \left(\frac{m'n'^3}{12} - \frac{m'^3n'}{24}\right)\cos\alpha\right\}$$

$$+ \left\{\frac{n'^4}{32}\sin 4\alpha + \left(\frac{n'^4}{24} - \frac{7.m'^2n'^2}{48}\right)\sin 2\alpha\right\}$$

u. s. w.

$$W' = n'\cos\alpha$$

$$W'' = -\,\text{tang}\,\delta.\,\frac{n'^2}{2}\sin\alpha^2 - \frac{m'n'}{2}\sin\alpha$$

$$W''' = -\,\text{tang}\,\delta^2.\,\frac{n'^3}{2}\sin\alpha^2\cos\alpha - \text{tang}\,\delta\,\frac{m'n'^2}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$-\left\{\frac{n'(m'^2+n'^2)}{6}\cos\alpha - \frac{n'^3}{6}\cos\alpha^3\right\}$$

$$W'''' = + \operatorname{tang} \delta^3 . \frac{n'^4}{8} (\sin \alpha^4 - 4 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2)$$
$$+ \operatorname{tang} \delta^2 \left\{ \frac{m' n'^3}{4} \sin \alpha - \frac{3 m' n'^3}{4} \sin \alpha \cos \alpha^2 \right\}$$
$$+ \operatorname{tang} \delta \left\{ \frac{m'^2 n'^2}{24} (7 \sin \alpha^2 - 3) + \frac{n'^4}{24} (\sin \alpha^4 - 8 \sin \alpha^2 \cos \alpha^2) \right\}$$
$$+ \left\{ \frac{m' n' (m'^2 + n'^2)}{24} \sin \alpha - \frac{m' n'^3}{4} \sin \alpha \cos \alpha^2 \right\}$$

u. s. w.

Die bequemste Art, diese und noch mehrere Coefficienten zu finden, scheint folgende zu seyn: wenn

$$U^{(k-1)} = \operatorname{tang} \delta^{k-1} A^{(k-1)} + \operatorname{tang} \delta^{k-2} B^{(k-1)} + \ldots + J^{(k-1)}$$
$$U^{(k)} = \operatorname{tang} \delta^{k} . \; A^{(k)} + \operatorname{tang} \delta^{k-1} B^{(k)} + \ldots + \operatorname{tang} \delta \, J^{(k)} + K^{(k)}$$

so werden A, B, C . . . . nur α, nicht δ, enthalten. Durch die Differentiirung von $U^{(k-1)}$ wird man erhalten

$$U^{(k)} = \left(\frac{d\delta}{dt}\right) \left\{ \frac{k-1}{k} \operatorname{tang} \delta^{k-2} A^{(k-1)} + \frac{k-2}{k} \operatorname{tang} \delta^{k-3} B^{(k-1)} + \ldots \ldots \ldots + \frac{1}{k} H^{(k-1)} \right\} (1 + \operatorname{tang} \delta^2)$$
$$+ \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \left\{ \frac{1}{k} \operatorname{tang} \delta^{k-1} \frac{dA^{(k-1)}}{d\alpha} + \frac{1}{k} \operatorname{tang} \delta^{k-2} \frac{dB^{(k-1)}}{d\alpha} + \ldots \ldots \ldots + \frac{1}{k} \operatorname{tang} \delta \frac{dH^{(k-1)}}{d\alpha} + \frac{1}{k} \frac{dJ^{(k-1)}}{d\alpha} \right\}$$

Setzt man nun für $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d\delta}{dt}$ ihre Werthe (f), und vergleicht man das Resultat mit dem angenommenen Werthe von $U^{(k)}$; so hat man

$$A^{(k)} = \frac{1}{k} \left\{ \quad * \quad + n' \frac{dA^{(k-1)}}{d\alpha} \sin \alpha + \quad * \quad + n' (k-1) A^{(k-1)} \cos \alpha \right\}$$
$$B^{(k)} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{dA^{(k-1)}}{d\alpha} m' + n' . \frac{dB^{(k-1)}}{d\alpha} \sin \alpha + \quad * \quad + n' (k-2) B^{(k-1)} \cos \alpha \right\}$$
$$C^{(k)} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{dB^{(k-1)}}{d\alpha} m' + n' . \frac{dC^{(k-1)}}{d\alpha} \sin \alpha + n' (k-1) A^{(k-1)} \cos \alpha + n' (k-3) C^{(k-1)} \cos \alpha \right\}$$

D$^{(k)}$

$$D^{(k)} = \left\{\frac{1}{k}\frac{dC^{(k-1)}}{d\alpha} - m' + n'.\frac{dD^{(k-1)}}{d\alpha}\sin\alpha + n'(k-2)\,B^{(k-1)}\cos\alpha\right.$$
$$\left. + n'(k-4)\,D^{(k-1)}\cos\alpha\right\}$$

u. s. w.

wodurch man leicht von dem vorhergehenden Coefficienten zum folgenden übergehen kann. Indessen findet man hieraus leicht den directen Ausdruck von

$$A^{(k)} = \frac{n'^k}{k}\sin.\,k\,\alpha$$

$$B^{(k)} = \frac{n'^{k-1}.\,m'}{2}\cos\,(k-1)\,\alpha$$

und für $C^{(k)}$ folgenden bequemeren

$$C^{(k)} = \frac{n'^k}{2k}\sin k\,\alpha + \frac{n'^{k-2}}{2k}\left\{n'^2 - (k-2\,m'^2\right\}\sin\,(k-2)\alpha$$
$$+ n'\frac{k-3}{k}C^{(k-1)}\cos\alpha + \frac{n'}{k}\frac{dC^{(k-1)}}{d\alpha}\sin\alpha.$$

Die vollständige Entwickelung der Gesetze von $C^{(k)}$, $D^{(k)}$, u. s. w., würde aber zu zusammengesetzt ausfallen, um Vortheil gewähren zu können. Ihre Entwickelung ist auch desto weniger der Mühe werth, da man theils leicht den folgenden Coefficienten aus den vorhergehenden findet; theils in den Fällen, wo man mit den gegebenen 4 Coefficienten nicht ausreicht, entweder nnr das erste oder die beiden ersten Glieder der höheren, einigermaſsen merklich seyn werden, oder es überall nicht mehr rathsam bleibt, diesen Weg länger zu verfolgen, da dann die Rechnungen (h) weit leichter zum Ziele führen. Offenbar leitet man eben so wie bei den Rectascensionen, den folgenden Coefficienten der Declinationen, aus den vorhergehenden ab; wobei man jedoch nicht übersehen darf, daſs alle $A^{(k)} = o$ sind, indem $A' = o$ ist. Allein ungleich bequemer ist es, die schon für die Rectascensionen berechneten Coefficienten zur Erfindung der Reihe der $W^{(k)}$ zu benutzen: man hat nämlich, durch successive Differentiirungen

$$W' = n'\cos\alpha$$

$$W'' = -\frac{n'}{2}\sin\alpha\,U'$$

$$W''' = -\frac{n'}{6}\cos\alpha.\ U'^2 - \frac{n'}{3}\sin\alpha.\ U''$$

$$W'''' = +\frac{n'}{24}\sin\alpha.\ U'^3 - \frac{n'}{4}\cos\alpha.\ U'.\ U''. - \sin\alpha.\ U'''$$

u. s. w.

Diese Coefficienten bedürfen indessen noch der Verbesserung, die aus den Veränderungen von m' und n' entsteht. Vernachlässigt man auch hier, wegen ihrer Kleinheit, die Quadrate und höheren Potenzen dieser Veränderungen, so kann man ihren Einfluſs sehr leicht entwickeln. Man erhält so, wenn man

$$m = m' + m''\,(t'-t)$$
$$n = n' + n''\,(t'-t)$$

setzt, die verbesserten Coefficienten der Reihen,

$$U'$$

$$U'' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dU'}{dm'}\right)m'' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dU'}{dn'}\right)n''$$

$$U''' + \tfrac{2}{3}\left(\frac{dU''}{dm'}\right)m'' + \tfrac{2}{3}\left(\frac{dU''}{dn'}\right)n''$$

$$U'''' + \tfrac{3}{4}\left(\frac{dU'''}{dm'}\right)m'' + \tfrac{3}{4}\left(\frac{dU'''}{dn'}\right)n''$$

u. s. w.

und eben so für die Declinationen. Entwickelt man diese Vorschrift weiter, so erhält man dadurch folgende Formeln zur Berechnung der Verbesserungen der gefundenen Coefficienten:

$$\left.\begin{array}{l}
U' \ldots\ldots 0 \\
U'' \ldots\ldots \operatorname{tang}\delta\sin\alpha\dfrac{n''}{2} + \dfrac{m''}{2} \\
U''' \ldots \operatorname{tang}\delta^2\sin 2\alpha\dfrac{2n'n''}{3} + \operatorname{tang}\delta\cos\alpha\left(\dfrac{n'm''+m'n''}{3}\right) + \sin 2\alpha.\dfrac{n'n''}{3} \\
\qquad\text{u. s. w.} \\
W' \ldots\ldots 0 \\
W'' \ldots + \cos\alpha.\ \dfrac{n''}{2} \\
W''' \ldots - \operatorname{tang}\delta.\ \sin\alpha^2.\ \dfrac{2n'n''}{3} - \sin\alpha.\left(\dfrac{n'm''+m'n''}{3}\right) \\
\qquad\text{u. s. w.}
\end{array}\right\}\ (k)$$

Selten wird der Einflufs der Veränderungen von m und n auf die höheren Coefficienten merklich seyn; immer aber kann er leicht berechnet werden, wenn die Berechnung der Coefficienten selbst vorhergegangen ist.

14.

Obgleich man durch diese Reihen die Genauigkeit so weit treiben kann, als man will, wenn der Stern wirklich unbeweglich ist: so würde man doch, im Allgemeinen, vergebens erwarten, durch sie dieselbe Ortsveränderung zu finden, wenn man von dem zur Zeit $1750 + t$ beobachteten Orte, zur Zeit $1750 + t'$ übergeht; und umgekehrt, von dem $1750 + t'$ beobachteten, zu $1750 + t$. Denn wenn der Stern eine eigene Bewegung hat, so wird sie sich nicht nur bei dem ersten Differentialquotienten zeigen, sondern auch auf die folgenden ihren Einflufs äufsern; — wenn sie selbst gleichförmig ist, so wird ihr Einflufs auf α und δ es keinesweges seyn; die Ungleichförmigkeit kann sogar sehr merklich werden, wenn der Stern dem Pole so nahe steht, dafs die in die Quadrate und höheren Potenzen von $(t' - t)$ multiplicirten Glieder der Reihen (i), einen bedeutenden Werth erhalten. Da aber fast alle Sterne eine eigene Bewegung verrathen, so wird es noch nöthig seyn, die Reihenentwickelung dadurch zu vervollständigen, dafs man sie mit aufnimmt.

Indem die eigene Bewegung so klein ist, dafs man ihre Quadrate und höheren Potenzen vernachlässigen kann, so wird ihr Einflufs auf den Ort des Sterns, in Beziehung auf einen festen gröfsten Kreis der Sphäre genommen, als der Zeit proportional angesehen werden können. Nimmt man daher an, dafs nach den Bezeichnungen des 3ten Art., zur Zeit $1750 + t'$, L und B sich in L′ und B′ verwandelt haben, so wird man

$$L' = L + \frac{dL}{dt}(t'-t)\,;\quad B' = B + \frac{dB}{dt}(t'-t)$$

haben. Sstzt man L′ und B′ statt L und B in die Gleichungen (e), so hat man, unter Vernachlässigung der Quadrate und höheren Potenzen von $L' - L$ und $B' - B$, den Einflufs der eigenen Bewegung von $1750 + t$ bis $1750 + t'$, auf die

$$\text{Rectasc.} = \frac{dL}{dt}\left\{\cos V' + \sin V' \operatorname{tang}\delta' \sin\alpha'\right\}(t'-t) - \frac{dB}{dt.\cos B'}.\frac{\sin V' \cos\alpha'}{\cos\delta'}(t'-t)$$

$$\text{Declin.} = \frac{dL}{dt}\sin V' \cos\alpha' (t'-t) + \frac{dB}{dt.\cos B}\left\{\cos V' \cos\delta' + \sin V' \sin\delta' \sin\alpha'\right\}(t'-t)$$

Oder sehr nahe,

$$\left.\begin{aligned} \text{Rectasc.} &= \frac{dL}{d\Psi} U'(t'-t) - \frac{dB}{d\Psi \cos B} \cdot W' \sec \delta' (t'-t) \\ \text{Declin.} &= \frac{dL}{d\Psi} W'(t'-t) + \frac{dB}{d\Psi \cos B} \cdot U' \cos \delta' (t'-t) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (l)$$

in U' und W' für die Epoche $1750 + t'$ genommen werden müssen. Man kann diese Werthe von U' und W' erhalten, nachdem man durch die Reihen des vorigen Artikels, den für $1750 + t'$ ohne die eigene Bewegung stattfindenden Ort gefunden hat; entweder durch directe Berechnung, oder durch die Reihen

$$U' + 2\, U'' (t'-t) + 3\, U''' (t'-t)^2 + \ldots.$$

$$W' + 2\, W'' (t'-t) + 3\, W''' (t'-t)^2 + \ldots.$$

Sucht man sie auf beiden Wegen, so giebt ihre Uebereinstimmung einen Beweis der Richtigkeit der berechneten Coefficienten.

Die Quantitäten $\frac{dL}{d\Psi}$ und $\frac{dB}{d\Psi \cos B}$, die wir, der Kürze wegen, durch ε und ε' bezeichnen wollen, findet man aus der Vergleichung der beobachteten Rectascension und Declination zur Zeit $1750 + t'$, mit der von $1750 + t$ übertragenen. Da sie in den beiden Gleichungen, die die Restascension und Declination angeben, mit einander vermischt sind, so ist es klar, dafs zwei zu verschiedenen Epochen beobachtete Rectascensionen, weder zu ihrer Bestimmung, noch zu der Erfindung einer Rectascension für eine dritte Epoche, hinreichen. Dasselbe gilt von den Declinationen. Um den Ort für eine 3te Epoche zu finden, mufs man daher, wenn man das Problem in aller Sshärfe nimmt, von zwei vollständigen Oertern ausgehen. Der Grund hiervon ist, auch ohne die gegebene Analyse des Phänomens, leicht zu übersehen.

Nennt man das was man zu der, nach den Reihen (i), (k) gefundenen Rectascension zur Zeit $1750 + t'$, hinzufügen mufs, um die beobachtete zu erhalten $\varkappa$, und für die Declination $\varkappa'$, so hat man die erwähnten beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= (t'-t)\,[U'\,\varepsilon - W' \sec \delta'\,\varepsilon'] \\ \varkappa' &= (t'-t)\,[W'\,\varepsilon + U' \cos \delta'\,\varepsilon'] \end{aligned}\right\} (m)$$

deren Auflösung ε und ε' ergiebt. Mit den gefundenen Werthen von ε und ε', wird man $\varkappa$ und $\varkappa'$, für jede beliebige 3te Epoche, die wir durch $1750 + T$ bezeichnen wollen, finden.

Wenn man will, kann man auch die eigene Bewegung mit in die Reihen aufnehmen, indem man $\varkappa$ und $\varkappa'$ nach den Potenzen der Zeit entwikkelt. Man hat dann, aus den Gleichungen (m), die den Coefficienten der Reihen noch hinzuzufügenden Verbesserungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Rectascension} \\
(t'-t) \ldots\ldots U'\varepsilon - \varepsilon' W' \sec\delta. \\
(t'-t)^2 \ldots 2U''\varepsilon - 2\varepsilon' [W'' + \tfrac{1}{2} W'^2 \operatorname{tang}\delta] \sec\delta \\
(t'-t)^3 \ldots 3U'''\varepsilon - 3\varepsilon' [W''' + 3 W' W'' \sin\delta + \tfrac{1}{2} W'^3 \sec\delta^2] \sec\delta \\
\text{u. s. w.} \\
\text{Declination.} \\
(t'-t) \ldots\ldots W'\varepsilon + \varepsilon'. U' \cos\delta \\
(t'-t)^2 \ldots 2W''\varepsilon + 2\varepsilon' [U'' \cos\delta - \tfrac{1}{2} U' W' \sin\delta] \\
(t'-t)^3 \ldots 3W'''\varepsilon + 3\varepsilon' [U''' \cos\delta - \tfrac{2}{3} U'' W' \sin\delta - \tfrac{1}{3} U' W'' \sin\delta - \tfrac{1}{6} U' W'^2 \cos\delta] \\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right\} (n)$$

15.

Zur Erläuterung der gegebenen Methoden, die gerade Aufsteigung und Abweichung eines Stern, auf andere Epochen zu bringen, gebe ich ein vollständiges, in Zahlen ausgeführtes Beispiel. Ich wähle dazu den Polarstern, indem seine Nähe bei dem Pole den höheren Gliedern der Reihen merkliche Werthe giebt. Die Oerter für 1755 und 1815 nehme ich wie folgt:

$$1755 \ldots \alpha = 10^\circ 55' 34'',38. \quad \delta = 87^\circ 59' 41'',12.$$
$$1815 \ldots\ldots 13\ 57\ \ 7,66 \ldots\ldots 88\ 19\ 17,21.$$

und werde die Methoden auf die Uebertragung auf eine 3te Epoche 1750 + T, anwenden. Die angenommenen Oerter beruhen übrigens für 1755 auf Bradleys Beobachtungen, für 1815 in AR. auf meinen eigenen, in Declination auf denen von Pond.

Man hat aus (h)

	1755	1815
V	23° 28′ 18″,000	23° 28′ 18″,042
λ	+ 0″,890	+ 10″,528
Ψ	+ 4′ 11″,699	+ 54′ 31″,618
α+λ	10° 55′ 35″,270	13° 57′ 18″,188
L+Ψ	85° 8′ 26″,932	85° 58′ 51″,596
L	85° 4′ 15,233	85 4 19,978
B	66° 4′ 18,128	66 4 16,165

$$\frac{dL}{dt} = + 0'',07908\ ; \quad \frac{dB}{dt} = - 0'',03272$$

Für die 5te Epoche nehme ich T = + 35, oder 1750 + T = 1785, und erhalte dadurch

L′	85° 4′ 17,606
L′ + Ψ′	85 33 39,374
B′	66 4 17,147
α′ + λ′	12 19 25,127
α′	19 19 19,178
δ′	88 9 30,918

Nimmt man, der Vollständigkeit des Beispiels wegen, die Reihen auf beide Epochan an: so hat man, aus (i), mit

	1755	1815
m′	45″,99746	46″,01598
n′	20,04990	20,04408

Rectascension.

		1755		1815
U′	+	154″,54046	+	210″,93347
U″	+	0,35875 92	+	0,60501 77
U‴	+	0,00096 1130	+	0,00189 6483
U^{IV}	+	0,00000 25267 0	+	0,00000 57753 1
U^{V}	+	0,00000 00065 446	+	0,00000 00170 834
U^{VI}	+	0,00000 00000 1653	+	0,00000 00000 4862
U^{VII}	+	0,00000 00000 000408	+	0,00000 00000 00132

Declination.

W′	+	19″,68644	+	19″,45273
W″	—	0,0014237	—	0,00247 12
W‴	—	0,00000 4045	—	0,00000 8116
W^{IV}	—	0,00000 001077	—	0,00000 00254 8

Die von der Veränderung von m′ und n′ herrühren Glieder ergeben sich aus (k)

Rectascension.

U′		0″		0″,0
U″	—	0,00010 83	—	0,00039 91
U‴	—	0,00000 1832	—	0,00000 3334
U^{IV}	—	0,00000 00087	—	0,00000 00182

Declination.

W′		0″		0″
W″	—	0,00004 76	—	0,00004 71
W‴	+	0,00000 0006	+	0,00000 0015

Für (t′ — t) . . = + 60 . . . . = — 60

geben diese Entwickelungen

α' . . . . . . $13° 55' 43'',78$ . . . . . . $10° 56' 42'',62$

δ' . . . . . . $88° 19' 15,88$ . . . . . . $87° 59' 42,48$

und die Vergleichung dieser Oerter mit den beobachteten ergiebt

$\varkappa$ und $\varkappa'$ . . $= + 83'',88$ und $+ 1'',33$ . . . $- 68'',24$ und $- 1'',36$

Aus (m) erhält man

$\varkappa$ . . . $= + 12646,8\ \varepsilon - 39849\ \varepsilon'$ . . . $- 9278,4\ \varepsilon + 33752\ \varepsilon'$

$\varkappa'$ . . . $= 1167,4\ \varepsilon + 370,5\ \varepsilon'$ . . . $- 1180,9\ \varepsilon - 324,6\ \varepsilon'$

und aus der Auflösung dieser Gleichungen

ε . . . . $= + 0,001642$ . . . . . . $+ 0,001588$

ε' . . . . $= - 0,001584$ . . . . . . $- 0,001585$

Diese Werthe von ε und ε' sollten in beiden Bestimmungen vollkommen gleich seyn; ihr kleiner Unterschied rührt von den kleinen vernachlässigten Gliedern her, die sich, wegen der langen Zwischenzeit, etwas anhäuften. Hat man, wie hier, die Reihen für beide Epochen, für welche die Oerter beobachtet wurden, berechnet, so ist es sicherer und bequemer, durch beide den Ort für die mittlere Epoche zu suchen und daraus ε und ε' zu bestimmen. Hier erhält man für 1785

α' . . . . $12° 18' 41'',322$ . . . . . . $12° 19' 56'',979$

δ' . . . . $88° 9' 30'',270$ . . . . . . $88° 9' 31'',561$

Die Vergleichung beider giebt, nach (m),

$$75'',657 = 10744,8\ \varepsilon - 36570\ \varepsilon'$$
$$1,291 = 1175,1\ \varepsilon + 345,3\ \varepsilon'$$

woraus $\varepsilon = + 0,001551$; $\varepsilon' = - 0,001607$ folgt. Nach der Vergleichung durch die endlichen Formeln, am Anfange dieses Art. würde man $\varepsilon = + 0,001571$; $\varepsilon' = - 0,001603$ gefunden haben. Da jetzt die wahren Werthe von ε und ε' bestimmt sind, so kann man die Uebereinstimmung der Reihen für die äusseren Zeiten prüfen; man findet, durch die Substitution dieser Werthe in die Bedingungsgleichungen für $\varkappa$ und $\varkappa'$, den Fehler der ersten Reihe für $t' - t = + 60$, in AR. und Decl. $= + 0'',11$ und $- 0'',09$; der anderen, für $t' - t = - 60$, in AR. und Decl. $= - 0'',57$ und $+ 0'',03$. Diese kleinen Fehler sind, für eine so lange Zwischenzeit, unbedeutend; wenn es nicht darauf angekommen wäre, ein Beispiel zu geben, so würde es nicht vortheilhaft gewesen seyn, den Gebrauch der Reihen über ein halbes Jahrhundert auszudehnen. Für 1785 findet man aus beiden Reihen, nothwendig vollkommen übereinstimmend,

$$\alpha = 12^\circ 19' 19'',150 \text{ und } 88^\circ 9' 30'',916 \quad . \quad . \quad .$$

welche Bestimmung auch von der, durch die endliche trigometrische Rechnung erhaltenen, weniger abweicht, als bei dem Gebrauche nur 7ziffriger Logarithmen erforderlich gewesen wäre.

Die Formeln (n) geben endlich die Entwickelung der eigenen Bewegung. Setzt man $\varepsilon = +\,0{,}001571$, $\varepsilon' = -\,0{,}001607$, so sind ihre Zahlenwerthe

Rectascension

	1755	1815
U'	$+\,1'',14093$	$+\,1'',398\,0$
U''	$+\,0{,}003\,6\,09$	$+\,0{,}00506\,30$
U'''	$+\,0{,}00001\,3887$	$+\,0{,}00001\,4104$

Declination.

W'	$+\,0'',02224$	$+\,0',02063$
W''	$-\,0{,}0000213$	$-\,0{,}0000329$

Nach der Addition sämmtlicher Theile der Coefficienten, hat man endlich folgende Formeln für den mittleren Ort des Polarsterns, zur Zeit 1750 + T:

$$\begin{array}{llll}
\alpha' = 10^\circ 55' 34'',38 & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & = 13^\circ 57' 7'',66 & \\
\quad +(T-5)\,155'',68749 & . \; . \; . \; . & +(T-65)\,212'',33207 & \\
\quad +(T-5)^2 & 0{,}36211\,18 \; . \; . \; . & +(T-65)^2 & 0{,}60968\,16 \\
\quad +(T-5)^3 & 0{,}00097\,3185 \; . \; . \; . & +(T-65)^3 & 0{,}00191\,5453 \\
\quad +(T-5)^4 & 0{,}00000\,25180\,0 \; . \; . & +(T-65)^4 & 0{,}00000\,57571\,1 \\
\quad +(T-5)^5 & 0{,}00000\,00065\,446 \; . & +(T-65)^5 & 0{,}00000\,00170\,834 \\
\quad +(T-5)^6 & 0{,}00000\,00000\,1653 & +(T-65)^6 & 0{,}00000\,00000\,4862 \\
\quad +(T-5)^7 & 0{,}00000\,00000\,000408 & +(T-65)^7 & 0{,}00000\,00000\,00132\,1
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\delta' = 87^\circ 59' 41'',12 & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & = 88^\circ 19' 17'',21 & \\
\quad +(T-5)\,19'',70868 & . \; . \; . \; . \; . \; . & +(T-65)\,19'',47336 & \\
\quad -(T-5)^2 & 0{,}00149\,26 \; . \; . \; . \; . & -(T-65)^2 & 0{,}00255\,12 \\
\quad -(T-5)^3 & 0{,}00000\,4039 \; . \; . \; . & -(T-65)^3 & 0{,}00000\,8103 \\
\quad -(T-5)^4 & 0{,}00000\,001077 \; . \; . & -(T-65)^4 & 0{,}00000\,00254\,8
\end{array}$$

Indem wir aber die Einwirkung der eigenen Bewegung, nur bei den 3 ersten Coefficienten in Rechnung brachten, werden diese Formeln für weit entlegene Zeiten etwas gröſsere Fehler geben, als wenn man die eigene Bewegung besonoers berechnet.