Zeitschrift

für

mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exacten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen.

(Zugleich Organ der mathematisch-naturwissenschaftlich-didactischen Sectionen der Philologen-, Naturforscher- und allgemeinen deutschen Lehrer-Versammlung.)

Unter Mitwirkung
der Herren Prof. Bopp in Stuttgart, Prof. Dr. Frischauf in Graz, Director Gernerth und Director Dr. Pick in Wien, Prof. Scherling in Lübeck, Director Dr. Schwarz in Gumbinnen

herausgegeben
von

J. C. V. Hoffmann.

Fünfter Jahrgang.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1874.

Inhaltsverzeichniss des 5. Bandes.

*) Abkürzungen: A. = Abhandlung oder (grösserer) Aufsatz.
K. M. = Kleinere Mittheilung.
P. Z. = Pädagogische Zeitung.
L. B. = Literarische Berichte.

---

*) Die Abkürzungen der Recensenten-Namen bedeuten:
R. = Reidt, Schw. = Schwarz, Hl. = Hellmann, Fr. = Frischauf, Sch. = Scherling, Ba. = Bardey, Pi. = Pick, Fu. = Funke, Ro. = Rothe, E. = Engelhardt, Cl. = Clar, Esch. = Escherich.

Figurenverzeichniss.

Alphabetisches Verzeichniss der Mitarbeiter an diesem Bande.*)

Name	Wohnort	Name	Wohnort	Name	Wohnort
Ackermann	Hersfeld	Erler	Züllichau in d. Prov. Brandenb.	Kudelka	Linz
Bardey	Brandenbrg. a/H.			Lottner	Lippstadt
Bauer	Carlsruhe	Escherich	Gratz	Meyer	Landsberg a/W.
Bebber	Kaiserslautern	Fresenius	Frankfurt a/M.	Morgenstern	Göttingen
Belović	Esseg	*Frischauf	Gratz	J. Müller	Freiburg i/B.
Binder	Schönthal in Würtemberg	Fritel	Königsberg	*Pick	Oberdöbling bei Wien
		Fuhrmann	„		
Bode	Mühlheim a/R.	*Funke	Altona	*Reidt	Hamm
Börner	Ruhrort	*Hellmann	Berlin	*Rothe	Wien
*Clar	Gratz	Höhr	Schässburg in Siebenbürgen.	*Scherling	Lübeck
Curtze	Thorn			*Schwarz	Gumbinnen
Diekmann	Wesel	Krebs	Wiesbaden	Zerlang	Witten a/R.
*Engelhardt	Dresden	Kober	Grimma		

*) Die mit einem * bezeichneten Mitarbeiter waren zugleich liter. Berichterstatter (Recensenten).

Die Naturgeschichte auf dem Gymnasium.

Von J. Kober.

I. Was soll die Naturgeschichte auf dem Gymnasium*)?

Es ist eine beklagenswerthe Thatsache, dass die Naturgeschichte in manchen Kreisen, zumal auch bei den maassgebenden Behörden, nicht in dem Ansehen steht, das sie verdient und das ihr Jeder wünschen muss, der durch eingehendes wissenschaftliches und didaktisches Studium ein Urtheil erlangt hat. Ist doch diese Geringschätzung schroff ausgesprochen in der Bestimmung, dass der Unterricht in Quarta ruhen soll und auch in andern Classen (V u. VI) ausfallen, wenn kein geeigneter Lehrer vorhanden**) ist.

Die Thatsache, so schmerzlich sie ist, darf, selbst wenn sie nicht aus Unkenntniss hervorgeht, nicht Wunder nehmen, so lange der Kern des Unterrichts im Vorzeigen und Namensagen von Pflanzen, Käfern und Schmetterlingen, allenfalls gewürzt mit halb unwahren Erzählungen, lag oder noch liegt; denn zur Anekdotenerzählung ist die Schule nicht da und ob ein Schüler 100 oder 200 Käfernamen kennt, hat wahrlich nicht viel Werth. „Käfersammler, Moosforscher sollen unsre Gymnasiasten nicht werden.“

Das Selbstbestimmen von Pflanzen (und Thieren) durch die Schüler, das in neuerer Zeit mehr und mehr üblich geworden

*) Unter den Schriften über diesen Gegenstand ist hervorzuheben: Gies, im Programm des Gymnasiums zu Fulda 1859. — Oefters citirt habe ich E. Fries, Prof. zu Upsala: Sind die Naturwissenschaften ein Bildungsmittel? Uebersetzt von Hornschuh. 1844.

Rossmässler. Der naturwissenschaftliche Unterricht. Leipzig 1860.

**) Dass eine solche Bestimmung nöthig wurde, beweist eben, dass das mühevolle Studium zu der Anerkennung, die es im Lehramte findet, nicht im richtigen Verhältnisse steht.

ist, bringt in der That der formalen Bildung einen Nutzen, der durchaus nicht gering anzuschlagen ist. Es ist eine wahre Gymnastik des Geistes, eine Schule der Selbstthätigkeit (über deren Mangel in unsrer Bildung ja so oft geklagt wird), auf einer Stufe anwendbar,*) auf welcher andre Fächer wesentlich nur receptive Thätigkeit fordern. Es ist trefflich geeignet, im Schüler Selbstvertrauen zu wecken und zu heben: „jede gelungene Bestimmung eines Naturkörpers ist ein Sieg, der zu neuen Siegen ermuthigt.“ Es ist eine praktische Logik,**) die einen besondern Vorzug darin besitzt, dass Thatsache und Wort zugleich verstanden und dem Gedächtniss überliefert, dass Anschauung und Wort immer zur Congruenz gebracht werden. Und dennoch wird dies die Gegner der Naturgeschichte nicht bekehren: zwischen Ideal und Wirklichkeit, zwischen Theorie und Anwendung liegt noch ein weites Feld.

Obwohl ich sonach den Nutzen des eignen Bestimmens zumal für die formale Bildung nicht gering schätze, so bin ich weit entfernt, dasselbe als einzigen oder auch nur als Hauptzweck des naturgeschichtlichen Unterrichts zu betrachten.

Den Hauptnutzen der Naturgeschichte finde ich vielmehr in ihren Beziehungen zur allgemeinen Bildung, und das Gymnasium ist ja für diese bestimmt. Ohne auf die subtilen Definitionen von Bildung einzugehen, kann ich wohl als ausgemacht voraussetzen, dass zur Bildung gehört Aufhebung jeder Beschränktheit und Erweiterung des Gesichtskreises. Beschränktheit ist es aber, wenn Einer nur sein Fach versteht, wie der Fabrikarbeiter, der zeitlebens nur Stecknadelköpfe macht. Erweiterung des Gesichtskreises nach Raum und Zeit, Natur und Geist umfassend, ist Ziel der Bildung: sowie der Gebildete in fernen Zeiten sich heimisch fühlen muss, wie der Gymnasiast im Geiste auf dem Forum zu Rom oder dem Markte zu Athen wandeln soll, so muss der Gebildete sowohl in der Heimath zu Hause sein, als auch im Geiste in ferne Länder sich versetzen und mit dem Leben und Treiben der Menschen auch Land und Klima, Thiere und Pflanzen wie mit sinnlichem Auge anzuschauen

*) Hierin liegt die Mahnung, damit möglichst früh zu beginnen.

**) Was wird aber aus dieser Logik, wenn die Bücher selbst unlogisch sind? (II, 293).

vermögen. Während Geschichte und Philologie den Blick in ferne Zeiten lenken, müssen Geographie und Naturgeschichte für Orientirung im Raume und in der Gegenwart sorgen.

Eine verständige Ansicht der Natur als eines geschlossenen Organismus ist es, was die allgemeine Bildung verlangt, nicht bloss Kenntniss einzelner Bruchstücke, wie z. B. der Physik und Mechanik. Unsre Gymnasien — bis in die neuere Zeit und zum Theil noch heute — achten nur die Physik und auch diese vielleicht nur als Aufgabensammlung für die Mathematik, sie finden es nicht nöthig, den Boden zu kennen, auf dem wir stehen, die Natur, in der wir leben, die Luft, die wir athmen u. s. w., gleich als ob es des wissenschaftlichen Menschen unwürdig sei, sich mit so materiellen Dingen zu beschäftigen.

In einseitigem Hochhalten der formalen Bildung, das wie eine ewige Krankheit von Lehrer auf Schüler forterbt, hält man den Gymnasiasten in Gegensatz zu dem praktischen Leben, als wäre es nöthig, ihn ja die Welt, in der er einst wirken, die er einst leiten soll, nicht kennen zu lassen.

Man braucht heutzutage mehr und mehr das Wort „Naturwissenschaft“ statt Naturwissenschaften, aber, wie es scheint, ohne den Sinn desselben zu verstehen oder zu würdigen: es sollen eben Zusammenhang und Wechselbeziehungen der verschiedenen Naturwissenschaften klargelegt werden, es soll z. B. die Physik mit Meteorologie und physischer Geographie, die Mineralogie mit der Chemie, die Zoologie mit der Botanik, letztere wieder mit der Chemie und Geognosie und alle wieder unter einander zu einem Naturbilde verschmelzen.

Ist es nicht z. B. eine würdige Aufgabe, den Zögling ahnen zu lassen, wie von physikalischen Verhältnissen das Klima des Landes und von diesem das Pflanzen- und Thierleben und die Kultur und Geschichte des Volkes abhängt?

Die Hintansetzung der organischen Naturwissenschaft trägt mit Schuld wie an dem alten,*) so an dem modernen Aberglauben. Die Mechanik, für sich allein, verführt zu mechanischer Auf-

*) „Vergebens arbeiteten die Kirchenväter, die Aufgeklärtesten in der Kirche und im Staate, den groben Wahnglauben etc. des Mittelalters auszurotten; aber als die Naturwissenschaften das Licht ansteckten, verschwand derselbe wie ein Nebel.“ Fries, S. 19.

fassung der Natur, sie sieht im Gehirn eine Elektrisirmaschine etc. Es ist nöthig, den Gymnasiasten so tief in die Biologie einzuführen, dass er von selbst die Hohlheit der Materialisten, die aus Kraft und Stoff die Welt aufzubauen vermeinen, zur Genüge durchschaut, dass er mit Augen sieht, wie weit wir entfernt sind vom wirklichen Verständniss auch des einfachsten Organismus, und wie eine genaue Beobachtung überall Thatsachen entdecken kann, von denen sich die Naturphilosophen nichts träumen liessen.

Es wird mehr und mehr Gebrauch, beim philologischen Unterrichte die Realien hervorzuheben; man hält es für eine Aufgabe der Gymnasien, Staatsverfassung, Handel, Gewerbe etc. der Alten kennen zu lehren: sollte es nicht geboten erscheinen, den Schüler auch mit den Gewerben etc. der Jetztzeit, in der er zu leben hat, einigermassen bekannt zu machen? Die Schule darf ihren Zögling der materiellen Welt, in der er lebt, nicht entfremden, sie muss das alte Wort „je gelehrter desto verkehrter“ Lügen strafen. In früheren Zeiten verachtete man die Gewerbe, man meinte, dass zu ihrer Ausübung (wie zu der der Muttersprache) kein Studium nöthig sei, sondern nur gemeine Handgriffe; allmälig hat sich die Lage geändert: die heutige Industrie erfordert eine wissenschaftliche Grundlage, die den Gymnasialstudien den Rang streitig macht.

Naturbeobachtung ist, wie im Leben des Individuums, so in der Geschichte der Völker die Hauptquelle der Intelligenz. Das Denken bedarf realer Objecte: an der Natur hat der menschliche Geist sich gebildet. Die natürliche Beschaffenheit des Landes, Gliederung des Bodens, Klima, Landschaftsbilder, Produkte haben auf die Geistesrichtung und die Geschichte der Völker grossen Einfluss geübt. Jedes tiefere Verständniss der Welt des Geistes setzt daher die Erkenntniss der Naturbedingungen voraus, auf denen sie ruht. —

Ohne Naturkenntniss ist nicht einmal ein rechtes Verständniss der alten Schriftsteller möglich.*)

Auch der Sittlichkeit leistet die Naturgeschichte ihre guten

*) Der Gymnasiast hört von der Platane des Xerxes und übersetzt: „Platanusque caelebs evincet ulmos,“ aber er weiss nicht, dass die Bäume, deren Schatten ihn auf dem Schulwege erquickt, Platanen sind, und der (philologische) Lehrer sagt es ihm nicht, weil er es selbst nicht weiss.

Dienste. Sie erscheint im Gegensatze zum Bücherstudium als Erholung, füllt die Freizeiten angenehm aus und schützt daher vor Gedankenleere und Langeweile. Aus letzterer entspringen nicht nur viele Unsitten, sondern auch die traurige Verflachung des Gemüthslebens, jene Leere an Herz und Geist, die man Blasirtheit nennt, die, weil sie an nichts Interesse findet, durch nichts erfreut wird.

Die Naturgeschichte erzeugt Liebe zur Natur, sie lehrt uns dieselbe „als unsre schöne mütterliche Heimath" erkennen, sie lehrt uns Pflanze und Thier als Mitgeschöpfe achten und lieben — und eine Rückwirkung auf die Gesinnung den Mitmenschen gegenüber kann nicht ausbleiben.*) „Da man bald einsehen lernt, dass das Leben sich nicht beherrschen lässt ohne die Unterwerfung unter dessen höhere Gesetze, so leitet die Naturgeschichte zu wahrer Resignation." (Fr.) Dieses Bewusstsein der Abhängigkeit macht ihre Verwandtschaft mit der Religion.

Wichtig ist ferner die Schärfung der Sinne, zumal des Auges. Der Schüler, der Interesse an der Natur besitzt, hat auch ausser den Stunden, fast auf jedem Schritte, Anlass, sein Auge im Scharfsehen zu üben und zumal durch Fixirung entfernterer Gegenstände der so häufigen Kurzsichtigkeit vorzubeugen. Die Schärfung des physischen Auges geht aber Hand in Hand mit der des geistigen, die man gar oft an studirten Leuten vermisst

Auch der directe praktische Nutzen der Naturkenntniss, besonders der Anthropologie, ist mindestens nicht zu verschmähen. Dies gilt vorzüglich von der Wissenschaft, der das alte Herkommen noch heute an den meisten Gymnasien den Eingang versperrt, von der Chemie. (Ich verlange nicht, dass im Stundenplane für chemische Stunden Rath geschafft werde; man lasse nur in jeder Classe zwei wöchentliche Stunden für Naturwissenschaft und gewähre die nöthigen materiellen Hülfsmittel, so lässt sich schon viel erreichen.)

Will man das Gymnasium nicht als allgemeine Bildungsstätte, sondern als Vorbereitungsschule für Berufsstudien ansehen, so

*) Fries (S. 15) sagt sogar: „Uralte Erfahrung zeigt, dass diejenigen, die am meisten mit der Natur verkehren, zugleich die liebreichsten, versöhnlichsten Charaktere sind."

denke man an den Theologen, der durch Naturunkenntniss sich vor dem Bauer lächerlich macht, den Juristen, der so viel mit technischen und gewerblichen Dingen zu thun hat, den Arzt, dessen Wissen meist Naturwissenschaft sein soll, oder gar den künftigen Lehrer der Naturwissenschaft! Man beachte auch, dass es auf die Schüler sehr günstig wirkt, wenn wie der Mathematiker in der Philologie, so der Philolog in der Mathematik und Naturwissenschaft nicht als Ignorant erscheint.

Man meint wohl, der künftige Arzt etc. könne auf der Universität das Versäumte nachholen. Hier gilt das Wort: Was Hänschen nicht lernt u. s. w. Im günstigen Falle wird der nöthige Stoff (Worte!) flüchtig eingelernt und bald vergessen. Ganz besonders in der Botanik ist es schwer, das im Knabenalter Versäumte nachzuholen. Fries sagt (S. 24) aus eigner Erfahrung: „Botanische Kenntnisse werden im Examen von solchen verlangt, die in der Jugend keine Anleitung darin gehabt haben. Die Lage dieser ist wirklich beklagenswerth; dasjenige, was die Würze ihrer Studien sein sollte, wird deren schwerste Plage. Wenige besitzen die Kraft, welche dazu erfordert wird, das Versäumte ehrlich nachzuholen, die Uebrigen suchen so gut sie können die Examinatoren zu betrügen.“

Aber lässt sich nicht die nöthige Kenntniss später im praktischen Leben aus Büchern schöpfen? — Der Beruf wird wenig Zeit übrig lassen; wem die Vorbildung fehlt, dem wird das Interesse fehlen; und wer nicht von früh auf Naturgeschichte, in der die Anschauung die Hauptrolle spielt, getrieben hat, versteht die Bücher gar nicht.

II. Stellung der Naturgeschichte zu andern Fächern.

Seit einigen Jahrzehnten ertönt der Ruf nach Concentration des Unterrichts. Man fand, das Gymnasium treibe zu vielerlei, die geistige Ausbildung verlange non multa sed multum, durch die Zersplitterung der geistigen Kraft leide die Charakterbildung, die wissenschaftliche Vertiefung und Gründlichkeit. Man müsse die Intensität der Hauptfächer erhöhen, dagegen die entbehrlichsten Nebenfächer aus dem Stundenplane streichen.

Ich glaube, diese Concentrationsideen sind schuld an den 10 lateinischen Stunden in jeder Classe und an dem Streichen der Naturgeschichte in Quarta.

Um die Concentration des Unterrichts klar aufzufassen, möchte ich mir das Gebiet der intellectuellen allgemeinen Bildung nicht sowohl kreisförmig (woraus die Benennung hergenommen ist), als vielmehr elliptisch vorstellen. Das Centrum der antiken Gymnasialbildung liege in dem einen Brennpunkte, das der modernen Realschule in dem andern: der „Kenntniss und Handhabung der Menschheitsgesetze" steht gegenüber die „Kenntniss und Handhabung der Naturgesetze."*) Aber kein Bogenstück darf der Bildung ganz fehlen, sonst wird sie lückenhaft und einseitig. Zwar werden die nahegelegenen Theile das Uebergewicht behalten, aber auch zu den entfernteren müssen Fäden, Leitstrahlen, gezogen sein, die auch mit ihnen die Verbindung offen halten: auch nach diesen entfernteren Theilen muss dem Geiste der Weg gebahnt, das Verständniss eröffnet werden.

Der Einwurf liegt nahe, dass ich das multa befürworte auf Kosten des multum. Darauf vorläufig nur die Gegenfrage, ob es rathsam sei, z. B. behufs der Concentration des mathematischen Unterrichts nur die Arithmetik auszubauen und die Geometrie zu streichen? behufs der Concentration der Naturwissenschaften Botanik zu treiben und Zoologie wegzulassen? oder ob man nicht vielmehr den einen Zweig durch den andern heben und fördern müsse, die Fäden festigen, die die Zweige unter sich und mit dem Brennpunkt verbinden?

Der menschliche Geist mit seinen Kräften ist ein wachsender Organismus d. h. er entwickelt sich nie sprungweise sondern stetig aus unsichtbaren Anfängen. In einen Tisch kann man, ihm grösseren Halt zu geben, ein neues Bein einsetzen, wer aber einen Organismus nach seinen Zwecken bilden will, muss die verborgenen Keime aufsuchen und studiren und durch sanfte kaum fühlbare Einwirkung zu entwickeln und zu kräftigen suchen: nur aus vorhandenen Keimen lassen sich neue Organe hervorbringen. Zwar dulden die niedern Organismen, die Pflanzen, und auch diese nicht alle, das Einsetzen einer fremden Knospe (beim Oculiren und Pfropfen), aber auch nur einer solchen, die den schon

*) Schmdt, Geschichte der Pädagogik IV, 410. Ebendaselbst steht auch die Antwort für diejenigen, welche die Existenz der Realschule beklagen, die da sprechen von den „Abwegen, die leider in der Gründung verschiedener Realschulen zu Tage getreten sind." S. diese Zeitschr. IV, 1.

vorgebildeten Organen, Säften etc. nahe verwandt ist, die höheren Organismen (die Thiere) erlauben selbst das nicht, sondern verlangen eine durchaus stetige Entwicklung.

Es gab eine Zeit, da man den menschlichen (kindlichen) Geist nicht als einen Organismus betrachtete, sondern als ein Gefäss, das man mit allen beliebigen Stoffen füllen könne. Gegen diesen Irrthum ist der Ruf nach Concentration gerichtet.

Aber in den heutigen Regulativen scheint die alte Auffassung wieder Wurzel geschlagen zu haben. Wir haben als Schüler (unter dem ersten Eindrucke von Lorinsers Auftreten) in den untern Classen mit 6, in Tertia 7 Stunden Lateinisch, mit 3—4 St. bz. 5 St. Griechisch auch das Unsrige gelernt und können es getrost auf Vergleiche ankommen lassen; es ist uns wohl Manches nicht so oft vorgesagt, manche Uebung nicht so systematisch eingetrichtert worden, dafür aber behielten wir frische Kraft, rege selbstthätige Aufmerksamkeit und Lust und Liebe zur Sache*). Jetzt wird der Schüler in den untern Classen übersättigt, er ist froh, wenn er die Schule hinter sich hat und nicht mehr an das „alte Lateinisch" zu denken braucht; und der Lehrer sucht durch mechanisches Einpauken, ermüdende Wiederholungen und harte Strafen den Mangel an Interesse auszugleichen. Glaubt man wirklich, dass die Fortschritte nach altem Sprichwort (Viel hilft viel!), welches treffend die Eigenthümlichkeit der Organismen bezeichnet, proportional der Stundenzahl sind?

Man pfropft dem jugendlichen Geiste mit dem zehnten Jahre Lateinisch, mit dem elften Französisch, mit dem zwölften Griechisch auf, treibt mit Gewalt die Reiser in die Höhe und verlangt, dass auch später alle Zweige fröhlich gedeihen. Ist der Erfolg befriedigend? Man kann wohl annehmen, dass in Städten, die neben dem Gymnasium noch andre höhere Schulen haben, ungefähr alle, die ins Gymnasium eintreten, wirklich studiren wollen. Wie viel Procent der Quintaner gelangen zum Abgangsexamen? Was ist aus den Uebrigen geworden?**) Und dabei klagt man

---

*) Ich erinnere mich noch, wie wir unsren Lehrer wider seinen Willen gedrängt haben, uns griechische Exercitien aufzugeben.

**) Die übereifrigen Lobredner der Sprach- (Gymnasial-) Bildung vergessen leicht, dass die geistige Spannkraft, die vorausgesetzt wird, wenn der Gymnasiast sich heitern Muthes durch jenes Fegfeuer durcharbeiten soll, auf den Universitäten (z. B. Halle) über mangelhafte logische und sprachliche Vorbildung der Studenten.

Der pädagogische Grundsatz, dass jeder Unterricht an bereits im Schüler vorhandene Vorstellungen etc. anknüpfen müsse, wird gegenwärtig allgemein anerkannt. Diese Anknüpfung ist nun bei fremden, zumal alten Sprachen nur in sehr beschränktem Masse möglich: der Schüler wird in ein völlig fremdes Gebiet geführt, wo er keine seiner Jugendbekannten wiederfindet. Man lindere also, wenn man den Knaben mit gewaltsamem Eingriffe in das fremde Land hinausstösst, das Unbehagen der Fremdheit dadurch, dass man ihm seine Jugendfreunde mitgibt, dass man die Fächer hegt und pflegt, die durchaus an schon bekannte Anschauungen anknüpfen und dem Organismus eine normale stetige Entwicklung sichern.

Unter diesen steht die Naturgeschichte obenan. Jeder neun- bis zehnjährige Knabe hat schon einen bedeutenden Vorrath von Anschauungen und Erfahrungen aus dem Reiche der Natur gesammelt, die zu sichten, zu verknüpfen und zu erweitern ihm eine angenehme, weil gesunde, Beschäftigung ist; die Naturgeschichte heimelt ihn an, frischt liebe Bilder aus der Kindheit wieder auf und bildet den Sprachen gegenüber den Gegensatz einer wohlthuenden Erholung.

Wenn gegen das Gebot der stetigen Entwicklung durch manche Fächer gefehlt werden muss, so halte man das Gebot wenigstens da, wo man kann, man unterbreche nicht den stetigen Gang des naturwissenschaftlichen Unterrichts d. h. man gewähre in allen Classen zwei Stunden für denselben. (Vgl. II, 147, Not. 3 u. 4.)

Die Concentration des Unterrichts würde also darin zu suchen sein, dass alle Fächer die Verbindung unter einander aufrecht erhalten und möglichst zusammenwirken, so wie es bei den

allein schon für seine Befähigung zu höheren Studien zeugt, dass diese Befähigung nicht ausschliesslich Frucht der Gymnasialstudien ist: sie verwechseln Ursache und Wirkung. Weil zur glücklichen Absolvirung des Gymnasialcursus eine höhere geistige Kraft Vorbedingung ist, so müssen diejenigen, die denselben, während viele ihrer Kameraden unterwegs verloren gehen, glücklich absolvirt haben, relativ geistig tüchtig sein.

Philologen mehr und mehr üblich wird, dem Schüler statt kritischer Untersuchungen über Varianten etc. ein möglichst vollständiges Bild aller Lebensverhältnisse der Alten zu bieten. Wir können nun zwar die Naturgeschichte des Plinius beim Unterrichte nicht brauchen, dennoch aber gibt es Anknüpfungspunkte genug, sei es in der Geschichte der Thiere, Culturpflanzen etc., sei es auch nur in der Namenerklärung. Während so der Philolog Naturwissenschaftliches, was bei seinem Unterrichte ihm entgegenkommt, nicht als etwas Fremdes von der Hand weist und geeigneten Falls den Naturgeschichtslehrer zu Rathe zieht, wird umgekehrt letzterer nicht selten der Unterstützung des Philologen bedürfen.

Ein alter Aberglaube spukt, wie ein mittelalterliches Gespenst, noch in vielen Köpfen, dass nämlich ein in der Mathematik oder Naturwissenschaft tüchtiger Schüler nicht viel in Philologie leiste und umgekehrt. Das ist nur insoweit wahr, als jede einseitige Vorliebe zur Vernachlässigung andrer Zweige führen kann. Wer gründlich studirt, wird im Gegentheil auch auf die Alten hingewiesen; man denke nur an Euklid und an die wissenschaftlichen Thier- und Pflanzennamen.

Dem deutschen Sprachunterrichte bietet die Naturgeschichte ein reiches Material zu passenden Stilübungen. Besonders innig schliesst sie sich an die Geographie an: zu dem Bilde eines Landes sind Flora und Fauna unentbehrliche Elemente, man würde aber gegen das Gesetz der Anschaulichkeit des Unterrichts verstossen, wenn man in der Geographie Thiere und Pflanzen aufzählen wollte, von denen sich ein Bild zu machen die Naturgeschichte den Schüler nicht befähigt hat. An die physische Geographie sei nur erinnert.

Die Hauptsache bleibt freilich die Concentration der Naturwissenschaften unter sich zu einer einzigen Naturwissenschaft. Man suche die Aufgabe nicht darin, viele Specialitäten (multa), Namen, Charaktere etc. zu lehren, sondern darin, ein klares, lebendiges Bild vom Zusammenwirken aller Naturkräfte und -körper zu einem Naturganzen (multum) dem Schüler vor die Seele zu stellen.

III. Was soll auf dem Gymnasium gelehrt werden?*)

Der Lehrstoff, zugleich in seiner Vertheilung auf die Classen**) des Gymnasiums, würde folgender sein:

Sexta.

In Sexta im Sommer Pflanzenmonographien nach der üblichen Weise zur Schärfung der Sinne, Uebung im Beschreiben, Gewöhnung an die (möglichst vereinfachte) Terminologie etc. Bei Gelegenheit, die sich oft bietet oder auch gesucht werden muss,***) besonders auf den möglichst häufigen Excursionen, Besprechungen über andre Naturerscheinungen.

Im Winter das Wichtigste aus der Anthropologie, etwa ein Vierteljahr. Theils ist der eigne Körper das Nächstliegende, theils erfordert die Rücksicht auf Gesundheitspflege, insbesondre auch auf Jugendsünden, gebieterisch eine möglichst frühe Belehrung. Einiges aus der Physik und Chemie,†) zumal der Verbrennungsprocess, ist schon auf dieser Stufe bei Gelegenheit der Athmung, Verdauung etc. zu besprechen.

Hierauf Monographie möglichst bekannter Thiere aus verschiedenen Classen mit besonderer Berücksichtigung des inneren††)

---

*) Ueber das Wie? eingehend zu sprechen, unterlasse ich, weil theils in Hellmichs dankenswerthem Aufsatze, wenn derselbe auch vorzugsweise die Realschule im Auge hat, doch das Meiste auch für Gymnasien anwendbar ist, theils in Rossmässlers genanntem Buche zumal über Verknüpfung der einzelnen Disciplinen und über Popularisirung chemischer und physikalischer Vorgänge das Nöthige zu finden ist.

**) Es scheint als ob an manchen Orten in Sexta und Quinta nicht eine so hohe geistige Reife vorausgesetzt werden kann, wie ich aus meiner Erfahrung angenommen habe. Man könnte alsdann den Cursus der Sexta auch auf Quinta ausdehnen, den der Quinta nach Quarta verlegen u. s. f. Doch kann ein Lehrer, der sich den Schülern zu accommodiren versteht, Vieles leisten, was auf den ersten Blick unmöglich scheint. Vgl. Rossmässler S. 115 ff.

***) Hierüber ist sehr beachtenswerth der Aufsatz von Fresenius im ersten Bande dieser Zeitschrift.

†) Vgl. Rossmässler, S. 115—122. — Dass viele Lehrer meinen, dies sei für Sexta zu schwer, kann ich mir in der Hauptsache nur daraus erklären, dass es ihnen aus der eignen Schulzeit als Lehrstoff der obersten Classen erinnerlich ist; daher wohl auch die Bedenken, Chemie vor der Physik zu treiben.

††) S. unten S. 20.

Baues. Die Beschreibung des Aeussern soll nicht etwa vernachlässigt werden, muss aber die Gefahr vermeiden, durch ausführliche Behandlung bekannter oder kleinlicher Dinge zu langweilen und nutzlos das Gedächtniss zu belasten. Ein Besuch beim Fleischer, Zergliederung eines Huhnes etc. leistet gute Dienste. Gerade durch die Vergleichung mit den Thieren erlangt der Knabe die rechte Vorstellung von der Thätigkeit der eigenen Organe.

Besonders lehrreich ist der Vogelkörper (Gans), der Kiel des Brustbeins mit den Flugmuskeln (Wo hätte Dädalus zum Fliegen die Muskelkraft hernehmen sollen!), die Umbildung der Hände*), die Lunge, die Luft in den Luftsäcken und Röhrenknochen, der Magen, das Auge, der Eierstock mit der Entwicklung der Eier etc.

Die Ringelnatter interessirt durch Zunge, Zähne, den Mangel der Gliederknochen, die Verwendung der Rippen zur Bewegung, die Verschmelzung der Herzkammern*), das kalte Blut, die einzige grosszellige Lunge etc.; der Frosch durch die Vereinfachung des Skelets, das Fehlen der Rippen (das Schlucken der Luft), das grosse Schwanzbein als Ueberrest des resorbirten Schwanzes der Larve, die Schallblasen, das Laichen, die Verwandlung etc.

Die Besprechung irgend eines Fisches bietet Veranlassung, die Auflösung des Sauerstoffs im Wasser aus bekannten Anschauungen (Zuckerwasser, schäumende Getränke) verständlich zu machen, die Schwimmbewegungen, die Vereinfachung der Lunge oder Luftröhre zur Schwimmblase und der Glieder zu (paarigen) Flossen, das venöse Herz etc. bieten weiteren bildenden Stoff.

In ähnlicher Weise, wenn auch etwas einfacher, werden die niederen Thierclassen behandelt. Von jedem Thiere werde nicht bloss eine Beschreibung, sondern die wirkliche allseitige Geschichte gegeben.

Wenn hiernach im Vierteljahre wenig über ein Dutzend Thierarten behandelt werden, so wird zwar die Specienkenntniss (wenigstens im eigentlichen Unterrichte) nicht eben gefördert, aber um so mehr das Interesse und die Einsicht in das Treiben und

---

*) Später, in Quarta, möge man die umgekehrte Auffassung geben; hier ist es pädagogisch richtiger, den menschlichen Körper als das Ursprüngliche zu betrachten.

Schaffen der Natur. Die Naturgeschichte spielt schon in Sexta eine achtungswerthe, des Gymnasiums würdige, in Wahrheit bildende Rolle. (Vgl. oben S. 2.) Die Specienkenntniss hat ja überhaupt, wenigstens im Gymnasium, nur eine untergeordnete Wichtigkeit: das Wortgedächtniss zu üben, hat der Gymnasiast Gelegenheit im Uebermasse.

Botanik in Quinta.

Die Botanik in Quinta ist wesentlich dem **Bestimmen** gewidmet und zwar nach einem natürlichen Systeme, wobei das Linnésche*) zur Unterstützung dient. Soll das Bestimmen für diese Stufe nicht zu schwer werden, soll insbesondre von Anfange an des Schülers Muth durch Erfolge gehoben werden, so muss man in der Auswahl der Pflanzen sehr vorsichtig sein; man muss durchaus den Schülern, falls diese die nöthigen Exemplare (für jeden Schüler wenigstens eins) besorgen, vorschreiben, welche Pflanze sie bringen sollen. Es ist nöthig, das die Blüthentheile deutlich sichtbar sind, dass die Frucht gleichzeitig zu sehen oder wenigstens bekannt ist, dass die Pflanze im Systeme keine Ausnahmestellung einnimmt u. s. w. Da den Quintanern die nöthige Specienkenntniss mangeln wird, so empfiehlt es sich, Schüler höherer Classen zu beauftragen. Vorausgeschickt wird, durch möglichst viele Keimpflanzen, Blätter, Stengel und Blüthen illustrirt, die Unterscheidung von Monokotylen und Dikotylen.**)

Geeignete Pflanzen sind z. B. Veronica triphyllos, Lamium album, Daphne Mezereum, Acer platanoides, Prunus Cerasus oder Padus, Iris pumila, Ribes rubrum, Luzula campestris, Ornithogalum umbellatum oder eine andre Liliacee, Vaccinium Myrtillus, Evonymus europaeus, Syringa vulgaris, Sambucus nigra, Ranun-

---

*) Ueber die illusorische grössere Verständlichkeit des Linnéschen Systems siehe den Anhang auf S. 25.

**) Da die gebräuchlichen Floren theils zu umfangreich, theils nicht auf die Fassungskraft der Quintaner berechnet sind, so habe ich selbst einen kurzen Leitfaden (zweite Auflage, Dresden 1869) drucken lassen, der die Schüler in den Stand setzt, in jedem Falle wenigstens die Familie zu bestimmen. Die Ordnungen (nach Bartling) und Familien sind synthetisch charakterisirt, doch ist zur Controle und um auch den Werth der analytischen Methode zu zeigen, eine (auch alle Ausnahmen berücksichtigende) analytische Tabelle (für die mitteldeutschen Dikotylen) beigefügt.

culus arvensis, Pisum sativum, Alisma Plantago, Malva Alcea, Oenothera biennis, Avena elatior, Geranium pratense, Heracleum Sphondylium, Helianthus annuus u. s. w., auch einige Repräsentanten der Kryptogamen, bei denen man jedoch vor der Hand auf Bestimmung wird verzichten müssen.

So erlangt der Schüler neben der Uebung im Bestimmen einige Species- und Familienkenntniss. Die lateinischen Namen werden etymologisch erklärt und fest eingeprägt.

Zoologie in Quinta, Quarta und Untertertia.

In der Zoologie halte ich ein solches Bestimmen in der Regel nur auf Excursionen für empfehlenswerth. Wer wird jedem Schüler in der Stunde einen Frosch oder Sperling in die Hände geben wollen? Ja selbst gemeine Gliederthierspecies z. B. Wespe, Florfliege, Bremse, dürften nicht leicht frisch in genügender Zahl zu beschaffen sein; und hätte man die Exemplare, so müsste man doch, um die Entwicklung anschaulich zu machen, zur Sammlung oder zu Abbildungen (Wandtafeln) greifen. Hat man nur ein Exemplar, so muss es der Lehrer selbst herumzeigen; soll das Thier von Hand zu Hand gehen, so sieht der Schüler nicht auf die Hauptsachen, zudem ist er noch geneigter, mit Thieren zu spielen als mit Pflanzen. Was er vollends mit lebendigen Gliederthieren (z. B. einer Wespe!) anfangen soll, ist schwer einzusehen.

Sonach eignet sich die Zoologie für das Winterhalbjahr.

Ich begreife nicht, wie Fahle (IV, 6) sich so missachtend über Schulsammlungen aussprechen kann. Allerdings soll diese keinen ausgestopften Bären enthalten, aber trotz aller lebenden Exemplare ist die Sammlung der wahre Lebensnerv des zoologischen Unterrichts.

Was für die Schulsammlung zu erstreben ist, möchte Folgendes sein:

Ein menschliches Skelet, ein Schädel. Die plastischen Nachbildungen von Herz, Auge etc., wie sie Professor Bock anfertigen lässt.

Wo möglich ein Affenschädel. Einige Fledermäuse, auch skeletirt. Schädel eines Maulwurfs oder Igels. Skelet eines Hundes oder eines anderen Thieres mittlerer Grösse. Schädel von Marder, Hund, Katze*), Pfote einer Katze oder noch lieber einer grossen Felis-Art.

Schädel von Eichhörnchen, Ratte, Wasserratte, Hase. Je ein ausgestopftes Exemplar von Mus und Hypudaeus, ein Hamster. Wo möglich ein ausgestopftes Gürtelthier.

Backenzahn von Elephant, Pferd, Kalb. Schädel von Pferd, Schwein, Widder, Reh —, überhaupt sind Schädel sehr brauchbar. Fuss von Pferd, Schwein, Kalb, Hirsch. Barte (sei es auch nur ein Bruchstück) eines Walfisches, wo möglich auch Stosszahn eines Narwals. Wo möglich eine ausgestopfte Didelphys, ein Schnabelthier etc.

Skelet eines grossen Vogels. Schädel mit Zungenbein eines Spechtes. Eine Sammlung ausgestopfter Vögel, die durch nichts zu ersetzen ist.**) Auch eine Eiersammlung ist wünschenswerth.

Skelet und Schädel einer Schildkröte. Skelet von Eidechse, Schlange, Frosch. Schädel und Klapper einer Klapperschlange. Die einheimischen Schlangen und die Blindschleiche in Spiritus, desgleichen die einheimischen Lurche mit Larven in verschiedenen Entwicklungsstadien. Eier von Eidechse, Ringelnatter, wo möglich auch von Krokodil und Schildkröte.

Skelet und möglichst grosser Schädel eines Knochenfisches. Die wichtigsten (alle wäre zu viel verlangt) einheimischen und einige Seefische (Dactylopterus, Pleuronectes, Diodon, Syngnathus, Hippocampus): ausgestopft und auf Pappe sind die Fische brauchbarer als in Spiritus. Gebisse, Eier und Hautstücke von Haifisch oder Roche. Ein ganzer (natürlich kleiner, junger) Haifisch ist wünschenswerth, zumal der Kiemen wegen, ebenso ein Skelet. Einige Schwimmblasen. Schlundknochen einiger Cyprinoiden. Gebiss von Petromyzon. Wo möglich Gastrobranchus und Amphioxus.

---

*) Man vergleiche mit dem wirklichen Schädel die Beschreibung Fahles in IV, 5, um den Nutzen der Sammlung zu würdigen.

**) Wer kann nicht nur seltene Vögel (Trappe, Schnepfe), sondern selbst gemeine (Singdrossel, Wasserhuhn) in der Freiheit genau genug beobachten? Selbst holen kann sie der Schüler nicht, sie schiessen zu lassen geht nur in beschränktem Umfange. Nachbildungen aus Papiermasse müssten Kunstwerke sein, um den Zweck zu erfüllen. Abbildungen sind weder zum Bestimmen noch überhaupt zum Erkennen der Charaktere zu brauchen; welche Abbildung zeigt z. B. die Kerbe im Schnabel der Pfriemschnäbler oder den Unterschied zwischen Spaltfuss und Wandelfuss?

Ein getrockneter Cephalopode (Loligo). Schale von Argonauta und Nautilus, letztere durchsägt. Einige Sepienbeine, einige Ammoniten und Belemniten. Einige Schneckenhäuser aus verschiedenen Familien, insbesondre auch Patella und Dentalium. Clio borealis in Spiritus. Die wichtigsten Muschelschalen. Teredo navalis in Spiritus. Eine Terebratula und Lingula. Wo möglich Salpa und Ascidia in Spiritus oder Glasnachbildung.

Die wichtigsten Crustaceen ausgestopft, bz. getrocknet, einige Rankenfüsser und Plattfüsser, wo möglich ein Limulus.

Ein grosser Skorpion und eine grosse (ausländische) Spinne. Einige einheimische Spinnen. Eiersäcke von Spinnen. Chelifer, Phalangium, Ixodes etc. Einige Skolopender und Bandasseln.

Mikroskopische Präparate von Augen der Insecten und Kruster, von Fussklauen einer Spinne, Tracheen von Insecten, Schuppen der Schmetterlinge, Rüssel und Stachel von Insecten, Zungen von Schnecken etc.

Die Insectensammlung darf sich nicht auf Käfer und Schmetterlinge*) beschränken (Einseitige Beschränktheit ist das Gegentheil von Bildung). Es muss Grundsatz sein, dem Insect die Puppe und wo möglich die Larve, unter Umständen (Ringelspinner, Florfliege, Mantis) auch das Ei beizufügen.

Die wichtigsten Käfer, zum Theil mit ausgespannten Flügeln. Ein grosser Käfer in seine Theile, Ringe, zerlegt. Die wichtigsten Schmetterlinge mit Puppe und Nahrungspflanze der Raupe, die praktisch wichtigsten Motten (Wachsmotte). Einige Blattwespen nebst Puppen, Holzwespen mit Puppen im Holze, Gallwespen mit ihren Gallen (Rosenäpfel), Schlupf- und Goldwespen, insbesondre Puppen von Mikrogaster und Chalciditen nebst ihrem Nahrungsthiere. Raubwespen nebst Nahrungsthieren. Ameisen (Männchen, Weibchen und Geschlechtslose nebst Puppen)

*) Man liebt es noch immer, Specienkenntniss von Käfern und Schmetterlingen als Ziel des Unterrichts zu betrachten, dagegen die übrige Insectenwelt todt zu schweigen. Man scheint es für bildender zu halten, Hipparchia Semele und Phaedra zu unterscheiden, als die Bedeutung der Fliegen im Haushalte der Natur zu kennen. So werden — nur weil es so hergebracht ist — die durch Lebensweise, Entwicklung und Organisation interessanten Familien der Cicaden, Schildläuse, Phryganeen, Hemerobien u. s. w. vernachlässigt, um Zeit zu behalten, dem Schüler den Unterschied von Carabus granulatus und cancellatus beizubringen.

mit ihren wichtigsten Gästen. Wespen mit ihren Nestern. Weibchen, Drohnen und Arbeiter der Honigbiene nebst Immenwolf, Wachsmotte. Ungesellige Bienen mit ihren Nestern.

Die wichtigsten Fliegen (Tipula, Asilus, Bombylius, Tabanus, Haematopota, Syrphus, Eristalis, etc.) mit ihren Puppen, insbesondre Puppen von Eristalis, Hippobosca und Melophila, Larven von Oestrus und Gastrus, Gallen der Gallmücken.

Einige Termiten und Holzläuse, Eintagsfliegen und Libellen mit Larven, Florfliege mit Larve und Eiern, Ameisenlöwe mit Larve und Puppe, Phryganea mit Larvengehäuse. — Von Orthopteren Acridium, Locusta, Acheta, Gryllotalpa zum Theil mit ausgespannten Flügeln, Phasma und Mantis, Forficula (zum Theil mit ausgespannten Flügeln).

Unter den Hemipteren sind angemessen Cimex baccarum und dissimilis, Lygaeus apterus, Acanthia, Hydrometra, Nepa und Notonecta (stets zum Theil mit ausgespannten Flügeln), Cicada orni mit Larve, Cercopis, einige Laternenträger, Gallen der Blattläuse, Schildläuse (ausländische, zumal Coccus cacti und lacca, mit ihren Producten).

Ein Blutegel mit getrocknetem Eiercocon. Von den Eingeweidethieren besonders Ascaris, Trichina (mikroskopisch), Echinorhynchus, Distoma, Taenia solium und serrata nebst Finne und Quese.

Einige Seeigel und Seesterne, wo möglich auch Holothurien und Haarsterne. — Einige Quallen nnd Actinien aus Glas*), zumal auch Röhrenquallen, die als schwimmende Colonien so lehrreich sind. Korallenstöcke aus verschiedenen Familien. Badeschwämme mit ihren Nadeln (mikroskopisch). Einige Polythalamienschalen (mikroskopisch).

Mag man einzelne der genannten Objecte für unnöthig, andre nicht genannte für nothwendig**) halten, in der Hauptsache wird wohl Jeder, der die Naturgeschichte als Bildungsmittel in dem auf Seite 2 angegebenen Sinne auffasst, mir beistimmen.

---

*) Wie sie recht hübsch von Blaschka in Dresden gefertigt werden und daselbst im königlichen Naturalienkabinet ausgestellt sind.

**) Ich selbst wüsste noch viel mehr oder minder Nützliches zu nennen.

Eine solche Sammlung ist natürlich nicht auf einmal zu schaffen, es ist sogar fraglich, ob man alle die gerade gewünschten Objecte überhaupt erlangen kann. Man wird natürlich die Naturalienhändler nicht entbehren können, vieles aber selbst und durch die Schüler sammeln und herrichten müssen, auch wohl häufig Geschenke verwenden können; aber hierbei ist vor dem Zuviel zu warnen, zumal haben gar häufig kostbare Geschenke für die Sammlung keinen positiven Werth und füllen nur die Räume: weise Auswahl ist nöthig. Vielleicht wäre es gut, von Zeit zu Zeit im Programm drucken zu lassen, welche Objecte für die Sammlung erwünscht sind: wohl Mancher würde derselben einen höchst nützlichen Gegenstand zukommen lassen, wenn er von dessen Wichtigkeit eine Ahnung hätte.

Vor dem Verderben der Sammlung habe ich nicht grosse Sorge, zumal wenn sie in einem trocknen sonnigen Zimmer aufbewahrt wird. Der Lehrer wird zur Erhaltung das Seinige thun, aber trotzdem wird die Sammlung, wie alles Irdische, allmälig zu Grunde gehen; man muss eben fleissig die verdorbenen Objecte durch neue ersetzen.

Mit einer solchen Sammlung lässt sich wahrhaft erspriesslicher, für Lehrer und Schüler angenehmer Unterricht ertheilen, durch den der Gymnasiast mit der Thierwelt vertraut wird.

Ich muss hier ganz entschieden Fahle widersprechen, der (IV, 4) behauptet, dass „auf den Gymnasien das Substrat dieses Wissens sich auf alle Naturkörper der nächsten Umgebung zu erstrecken hat, während die Universität die Producte und Erscheinungen aller Zonen in den Kreis ihrer Kenntnissnahme zu ziehen hat.“

Man würde die Bildung des Gymnasiasten schädigen, wollte man seinen Blick nur auf das Einheimische, auf die nächste Umgebung beschränken, ihm „die kleine Heimath als den Mittelpunkt der Erde oder der Welt erscheinen lassen,“ als ob jenseits der Landesgrenze Wüste und Barbarei liege.

„Man soll vom Nahen auf das Entfernte übergehen,“ heisst es, „darum zuerst das Einheimische.“ Aber nicht darauf kommt es an, was räumlich dem Schüler nahe liegt, sondern was ihm geistig nahe steht, was in seinem Sinne als geläufige Vorstellung vorhanden ist. Die doctrinäre Methodik vergisst, dass ins Gymnasium wohl schwerlich ein Schüler eintreten wird, der nicht z. B. mit dem Bilde eines Elephanten vertraut wäre, dem nicht Elephant, Strauss, Krokodil, Haifisch näher ständen, als Dutzende von Bembidium-Arten, die er mit dem Fusse zertritt und über die ihm auch der Lehrer nichts weiter zu sagen weiss als die Namen. Ist nicht die Bekanntschaft mit Kokospalme, Kaffeebaum und Indigo wichtiger und dem Interesse des Schülers näher gelegen, als die Unterscheidung der einheimischen Carex-Arten? Soll der Gymnasiast die Coschenille für Steine oder Pflanzensamen halten? Erst durch die organischen Wesen der heissen Zone kommt ihm der Reichthum der Schöpfung zum rechten Bewusstsein.

Die Erforschung der Localfauna und -Flora ist nicht Aufgabe des Gymnasiasten, sondern des Zoologen oder Botanikers. „Insectensammler“ (richtiger Käfersammler), „Moosforscher etc. sollen aus unsrer Schuljugend nicht werden. Dass die Lehrer dies in der Classe werden und unwillkürlich auch ihre Schüler in ihre Lieblingsbahn leiten, ist die ganz natürliche Folge unsrer verkehrten, nur auf das Beschreiben und Unterscheiden der Naturkörper gerichteten Unterrichtsmethode.“ „Die fast ausschliesslich beschreibende bisherige Unterrichtsweise muss immer zuletzt ihren Schwerpunkt in den Namen legen und macht die Schüler geradezu namensüchtig.“ Rossmässler, S. 36.

Fahle verlangt (IV,7) für das Gymnasium „im Leitfaden analytische Tabellen der Ordnungen, Familien, Gattungen und Arten aller in der naturhistorischen Provinz des Schülers vorkommenden Thiere und Pflanzen. Weiter nichts (!); denn was sonst in den Compendien beigegeben zu werden pflegt, soll der Lehrer nur mündlich entwickeln.“ — In einer solchen Provinz mögen vorkommen gegen 1500 Phanerogamen, 3000 Kryptogamen, 1200 Schmetterlinge, 2000 Käfer etc. Was eine wirklich vollständige analytische Tabelle zu bedeuten hat, erkennt man z. B. aus der Fauna austriaca von Redtenbacher u. A. So ein gewaltiges Werk soll ein Leitfaden sein für die Unterclassen des Gymnasiums! — Ohne Zweifel sind Diatomeen, Infusorien u. s. w. nicht zu den „allen Naturproducten der Provinz“ gerechnet, der Schüler soll eben nur einzelne Thierordnungen kennen lernen, als ob die übrigen vom Schöpfer nur aus Versehen erschaffen wären.

Nach gewöhnlicher Auffassung sollen die „anatomisch-physiologischen“ Beziehungen die dritte Unterrichtsstufe bilden. Dies ist an sich ein gesundes Princip. Aber will man dasselbe auf die Spitze treiben und das Anatomische und Physiologische auf den unteren Stufen ausschliessen, so wird man nicht vom kalten und warmen Blute, nicht vom Bau des Herzens, nicht vom Blutumlaufe, nicht von der Verwandlung der Lurche und Insecten, nicht vom Vogelei, nicht vom Unterschiede zwischen Kalbsbrust und Gänsebrust etc. reden dürfen, also sich und den Schülern, die von Kindheit auf mit dergleichen Dingen vertraut sind, einen unnatürlichen Zwang anthun. Auch die „analytische Tabelle“ möchte sich schwerlich ohne etwas Physiologie herstellen lassen: ohne Physiologie sucht der Schüler die Insectenlarven unter den Würmern, die Froschlarven unter den Fischen, Cypris unter den Muscheln u. s. w. Aber selbst wenn zoologische Bestimmungen möglich wären, so würden die ersten Jahrescurse an einer entsetzlichen Monotonie leiden, besser geeignet den Schüler abzuschrecken als ihn zu interessiren, und völlig geeignet, den Gegnern des naturgeschichtlichen Unterrichts die Waffe in die Hand zu drücken.

Will man im Ernst mit dem Naheliegenden beginnen, so muss der menschliche Körper den Anfang bilden. Der eigne Körper ist offenbar das Nächste, mit ihm vergleicht schon das Kind den thierischen, es vergleicht die Vorderbeine und Flügel mit den Armen, es hat schon Gänse- und Hühnermagen, auch wohl Kälber- und Schweinemagen gesehen, und fragt, wie der menschliche beschaffen sei u. s. w. — kurz es treibt schon vergleichende Anatomie und Physiologie. Warum will man diese Bildungselemente abweisen? warum den Knaben warten lassen (das Warten ermüdet!) unter dem Vorgeben, dass er das nicht verstehe, während sein Bewusstsein ihm das Gegentheil sagt? — Darum empfehle ich schon in Sexta Anthropologie und ein angemessenes Eingehen auf Anatomie und Physiologie. (S. oben S. 11.)

Aus dem Gesagten ergibt sich, dass ich regelmässige Bestimmungen von Thieren als besonderen Unterrichtsstoff einer Classe verwerfe*) und gleich auf den für Sexta angegebenen

*) Die Synopsis (sowie die kleineren Werke) von Leunis liefert in richtigem Takte ausser den Beschreibungen noch reichen brauchbaren Stoff

vorbereitenden Cursus eine sich an die Sammlung anschliessende Uebersicht des Thierreichs*) folgen lasse, am zweckmässigsten für Quinta die wirbellosen, für Quarta die Wirbelthiere. Ich bin völlig überzeugt, dass diese meine Ansicht, wie ich sie vor 18 Jahren festgestellt habe, dass man nämlich mit den niederen Thieren beginnen müsse, die richtige ist. In jüngeren Jahren ist nämlich das Interesse für die kleineren Thiere stärker als später, der Knabe ist geneigter, ohne nach dem Nutzen des Thieres zu fragen, seine Specienkenntniss zu erweitern. Später tritt das praktische Interesse, die Stellung der Thiere zu dem Menschen, kräftiger hervor. Auch ist bei den Wirbelthieren eine wissenschaftlichere Behandlung, wie sie mit zunehmendem Alter besser durchführbar wird, lohnender und angemessener, als bei den niederen Thieren. Endlich ist es besser, dass zwischen der Anthropologie in Sexta und deren — mit der Uebersicht der Wirbelthiere zu verbindender Wiederholung — eine längere Zeit zwischenliegt. Ich bitte, bei Erörterung dieser Frage die Vorschläge, die ich oben für die Schulsammlung gemacht habe, vergleichend zu prüfen.

Die Uebersicht der Wirbelthiere in Quarta wird eingeleitet mit einer Wiederholung und Erweiterung der Anthropologie, theils wegen der hohen Wichtigkeit des Gegenstandes, theils weil einiges als für Sexta zu schwer übergangen werden musste, der Schüler wohl auch manches vergessen hat.

Für Untertertia bleibt, auch wenn die Verhältnisse es nicht nöthig machen, den Cursus der Quinta nach Quarta und den der Quarta nach Untertertia zu verschieben, noch genug Physiologie, Wiederholung und Erweiterung etc. übrig.

Eine solche Uebersicht, innig mit Thiergeographie verbunden, hat den grossen Vortheil, dass sie dem Schüler ein bestimmt abgeschlossenes Gesammtbild der Thier- (und Pflanzen-)welt liefert, ihn also auf einen höheren Standpunkt der Naturanschauung und -auffassung erhebt, ihn dem Ziele einer verständigen Ansicht des Naturganzen zuführt und sonach seine allgemeine Bildung wesentlich fördert.

---

und widerspricht so glücklicherweise dem aufgestellten Principe, wonach das Bestimmen die Hauptsache sein soll.

*) Vgl. I, 207.

Botanik in Quarta und Tertia.

Die Botanik in Quarta und Tertia liefert in ähnlicher Weise eine Uebersicht des Gewächsreiches. Hier ist es freilich nicht thunlich, eine bestimmte systematische Ordnung streng einzuhalten, weil man immer von dem zufälligen Vorhandensein frischen Materials, das ich in der Botanik nur sehr ungern entbehre, abhängig ist. Man kann den Schülern aufgeben, Vertreter der zu besprechenden Familien mitzubringen, aber Ungunst der Witterung etc. kann dies verhindern: für solche Stunden ist Mikroskop und Physiologie etc. am Platze. Die Uebersicht wird, wie in der Zoologie, auf zwei (Sommer-) Semester vertheilt, und nach meiner Ansicht wird man am passendsten in Quarta vorzugsweise die Dikotylen, in Tertia die Monokotylen und Kryptogamen behandeln.

Die Bestimmungen werden daneben fortgesetzt und können sich nun über alle Pflanzen erstrecken. Besonderes Gewicht ist auf die Verwendung der Gewächse zu legen, zumal bei den ausländischen.

Auf eine Sammlung gepresster und aufgeklebter Pflanzen, soweit sie nicht etwa an den Wänden des Lehrzimmers angebracht werden können, lege ich nicht viel Werth, weil sie bloss den Habitus der Pflanzen zur Anschauung bringen und ihre Verwendung beim Unterrichte unbequem ist. Dagegen sind Holzarten, Früchte und Samen (Kokosnuss, Paranuss, Erdeichel, Teichnuss, Kakaobohne, Baumwollenkapsel, Stechapfel, Krähenauge), die wichtigsten Droguen, Gewürze etc. sehr am Platze. Auch eine Sammlung plastischer Pilznachbildungen und mikroskopische Präparate sind empfehlenswerth. Trotz alledem wird man aber Abbildungen nicht entbehren können.

Sonach werden in den vier untersten Classen des Gymnasiums die Sommersemester (in der Hauptsache) auf Botanik, die Wintersemester auf Zoologie verwendet. Soll der Unterricht als gelungen gelten, so muss der Schüler in der Botanik eine ziemlich grosse Specienkenntniss, in der Zoologie wenigstens die der wichtigsten Arten*), in beiden eine befriedigende Kenntniss

*) Specienkenntniss wird in der Zoologie durch die Jugendanschauungen und das praktische Leben mehr gefördert, als in der Botanik; die Schule wird also auf letztere mehr bedacht sein müssen.

der Familien (bez. Ordnungen), vor allem aber eine angemessene Einsicht in die Organisation und Entwicklungsgeschichte und Uebersicht über das Ganze der organischen Schöpfung erlangt haben. Gleichzeitig ist der Physik und Chemie vorgearbeitet: mit den Luftarten, mit der Kohle und dem Verbrennungsprocess, mit den Erscheinungen der Diffusion und Absorption u. s. w. ist der Schüler bekannt geworden. Auch der physischen Geographie sind zahlreiche Anknüpfungspunkte geboten.

In den folgenden Jahren wird zwar manches, zumal Namenkenntniss wieder verloren gehen, aber die gewonnene Einsicht bleibt und die vergessenen Einzelheiten treten bei etwaiger Auffrischung sofort wieder vor die Seele.

Mineralogie etc.

Für Obertertia verwerfe ich die physische Geographie, weil sie (als Fach, denn die Elemente gehören in die Geographie) zu schwer ist, insbesondre an die mathematische und physikalische Vorbildung zu hohe Anforderungen stellt. Wenn dieselbe nicht nach Prima verlegt werden kann, so möchte ich sie wenigstens für das Winterhalbjahr der Untersecunda aufsparen, wo sie sich in naturgemässer Weise an die Geognosie anschliesst und überdies eine Art Abschluss der Geographie bildet.

Will man also das Sommersemester nicht auf Botanik verwenden, so bleiben beide Semester von Obertertia und das Sommersemester der Untersecunda für Mineralogie und Chemie. Die Rücksicht auf die für Obertertia offenbar schwierige Krystallographie spricht zwar für Verlegung der Mineralogie in die obersten Classen, aber übrigens ist dieselbe leicht genug und wegen ihrer innigen Verwandtschaft mit der Chemie und ihrer Stellung als erste umfassende Anwendung derselben kaum von dieser zu trennen. Offenbar muss sie aber der Geognosie vorausgehen. Und wo soll in Prima die Zeit herkommen?

Die Mineralogie wird, ohne Vorausschickung eines allgemeinen Theils, eingeleitet durch Monographien hervorragender Mineralien; diese sind nach allen Seiten, auch nach ihrer chemischen Zusammensetzung und technischen Verwendung und Verarbeitung, zu besprechen. Etwa 12—18 gut gewählte Mineralien, die in den ersten 3—4 Monaten besprochen werden mögen, genügen. Dergleichen sind z. B. Steinsalz, Schwefelkies (Pyrit), Flussspath, Bleiglanz, Honigstein, Arsenkies, Schwefel, Kalkspath, Magneteisenerz, Eisenspath, Quarz, Aragonit, Gips, Rotheisenerz.

Wenn hiernach z. B. der Pyrit allein (mit den nöthigen Repetitionen) fast drei Unterrichtsstunden in Anspruch nimmt, so ist diese Zeit doch sehr gut angewendet. Die Stoffe, die aus dem Pyrit dargestellt werden (Schwefel, Eisenvitriol, Schwefelsäure, Blutstein), sind zu besprechen, jedoch nur soweit, wie sie bei Ausführung der Processe zur Anschauung kommen und in ihren nächsten Verwendungen; man hüte sich aber vor zu grossen Abschweifungen, weil die Gedanken des Schülers sich auf das eine Mineral concentriren müssen. Das specifische Gewicht wird (einmal!) vor den Augen der Schüler bestimmt; die Härte erst durch Vergleich mit Glas und Kiesel, dann mit der Härtescala; aus der hohen Härte erklären sich die Funken am Stahle und aus diesen der Name Kies; Glanz, Farbe und Strich werden zur Schärfung des Auges ausgebeutet. Aus der Krystallographie sind natürlich Würfel, Oktaeder und Pentagon-Dodekaeder anschaulich zu behandeln, aus einem aus Kartoffel geschnittenen Würfel das Oktaeder oder Pentagon-Dodekaeder herzustellen, von einem Krystallsysteme ist aber noch keine Rede: der Schüler muss erst das Bedürfniss einer Krystallographie fühlen, ehe man ihm dieselbe entgegenbringt.

Auf diesen Vorbereitungscursus folgt dann Krystallographie, darauf Uebersicht des Mineralreichs. Im Wintersemester der Untersecunda Geognosie*) und physische Geographie.

Die Chemie wird wohl am besten in den mineralogischen Unterricht eingeflochten, zumal in den Vorcursus, wo wegen der

---

*) Dass (nach Hellmich IV, S. 88) auf keiner preussischen Realschule erster Ordnung Geognosie als solche getrieben wird, scheint mir nur durch Verkennung des Zwecks dieser Schulen erklärlich. (S. Schmidt, Gesch. der Päd. IV, 409 u. 410.)

Und wenn nun nach Hellmichs Zusammenstellung (ib. S. 86) unter 70 preussischen Realschulen erster Ordnung nicht weniger als 20 in Sexta gar keine Naturgeschichte haben, so ist zu begreifen, dass diese Schulen ihre Bestimmung nicht nach Wunsch erfüllen. Will man über den Werth der Realschulen als Bildungsanstalten Erfahrungen sammeln, so muss man zuvor den Naturwissenschaften eine einheitliche, stetige und vollständige Behandlung gewähren.

Beschränkung auf wenige Objecte die Gelegenheit zu chemischen Experimenten am günstigsten ist. Z. B. bei Besprechung des Steinsalzes wird Natrium in Wasser verbrannt, Chlorgas und Salzsäure entwickelt, beim Schwefelkies schweflige Säure, Schwefelwasserstoff, Dinte u. s. f. Die Mischungsgewichte können gleich anfangs Anwendung finden.*)

Es ist das Hauptgewicht in der Mineralogie nicht darauf zu legen, dass der Schüler viele Mineralien kennen lernt oder auch nur sieht, sondern, dass er mit wenigen, aber den wichtigsten, genau bekannt wird und dass er einigen Einblick in die chemische Technologie erlangt: es ist durchaus nöthig, dass der auf dem Gymnasium gebildete junge Mann der die Neuzeit beherrschenden technischen Industrie nicht ganz fremd gegenüberstehe.

Der Unterrichtsplan**) wäre demnach folgender:

	Sommer	Winter
VI.	Pflanzenmonographien	Anthropologie und Thiermonographie.
V.	Pflanzenbestimmungen	Wirbellose Thiere.
IV.	Dikotylen	Wirbelthiere.
III^b	Mono- und Akotylen	Anatomisch-Physiologisches.
III^a	Mineralogie (Vorschule)	Mineralogie
II^b	Mineralogie und Geognosie . . .	Physische Geographie.

Ein solcher Unterricht wirkt selbst auf die übrigen Fächer günstig ein, weil er zu denselben einen wohlthuenden Gegensatz bildet und so die Geisteskräfte erfrischend anregt.

Anhang.

Linnésches oder natürliches System beim Bestimmen?

Wer von Bestimmung nach dem Linnéschen Systeme spricht, meint in der Regel nur die Feststellung der Classe und Ordnung, die in der That durch einfache — also präsumtiv leichte — Merkmale charakterisirt sind. Man braucht aber nur eine alte Auflage eines Linnéschen Werkes mit späteren zu vergleichen oder auch nur die Tabelle in Leunis' Synopsis zu studiren, um zu sehen, dass die Einfachheit grossentheils nur scheinbar ist. Nichts ist dagegen einfacher, als eine Crucifere, Papilionacee, Composite, Orchidee etc. zu erkennen, was Linné selbst zugibt; erklärt er

*) Damit soll nicht gesagt sein, dass nicht später noch einmal Chemie vorkommen dürfe.

**) S. die zweite Note auf S. 11.

doch das natürliche System für das der Zukunft und begnügt sich nur, weil allgemeine, alle Gattungen umfassende, Merkmale zur Zeit noch nicht gefunden und einzelne Gattungen (allermeist ausländische und seltene) schwierig unterzubringen, mit seinem „Nothhelfer.“*)

In der That bedeutet bei Linné**) XX, 1 nur Orchideen, XIX nur Compositen, XV Cruciferen, XVII, 3 Papilionaceen, XIV „Lippen- und Maskenblumen“ etc., auch die Unterscheidung von XII und XIII ist eine Concession an das natürliche System. Der natürlichen Verwandtschaft zu Liebe stellt man Viola u. a. nicht in XIX, Genista u. a. nicht in XVI, Lepidium ruderale nicht in II, und warum soll der Schüler Oxalis in X, aber Erodium in XVI suchen? Der Schüler wird Bellis und Erigeron in XIX suchen, nicht weil sie fünf verwachsene Antheren haben, sondern weil sie Compositen sind; er wird — ganz correct — Evonymus in IV, Reseda odorata in XIII, Delphinium Consolida in XIII, 1, Myosurus in X, XI, Lychnis dioica und Urtica dioica in XXII u. s. w. vergeblich suchen. Ich erinnere mich, wie ich als Schüler (ohne Kenntniss des natürlichen Systems) Acer campestre erst mittelst des Registers in XXIII fand und finden konnte.

Nun ist es zwar bequem, eine Pflanze zu bestimmen, wenn man weiss, dass sie in I, VII***), IX zu suchen ist, aber wie, wenn sie in die ungeheure V gehört? Ausser solchen Ausnahmefällen hat man zur Aufsuchung der Gattung ganz dieselbe Beobachtungs- und Gedankenreihe durchzumachen, wie bei Bestimmungen nach dem natürlichen Systeme, nur dass man den grossen Vortheil der Unterscheidung von Monokotylen und Dikotylen preisgibt.

Es sei z. B. Veronica zu bestimmen, so hat man nach dem Linnéschen Systeme (Leunis' Synopsis § 212) folgenden Gedankengang: 1. Zwitter, 2. 2 Staubfäden, 3. ein Griffel, 4. Kraut, 5. beblättert, 6. Krone einblättrig, 7. ohne Sporn, 8. oberständiger

---

*) Genera plantarum, Einleitung § 9.

**) Genera plantarum, Vorwort zu XIV, XV, XVII, XIX, XX, sowie Einleitung und Anhang.

***) Obendrein zeigen die beiden einzigen Gattungen der VII (Aesculus und Trientalis) gar oft nicht sieben Staubfäden.

Frkn., 9. eine Kapsel 10. Krone radförmig. Dagegen nach dem natürlichen Systeme (meines Leitfadens): 1. Dikotyle, 2. monopetal, 3. weniger Staubfäden als Kronentheile, 4. Krone unregelmässig, 5. 2fächrige Kapsel, 6. Anthere doppelt, 7. Krone flach.

Oder Acer nach Leunis: 1. 8 Staubfäden, 2. 1 (?)*) Griffel, 3. Blüthe vollständig, 4. beblättert, 5. polypetal, 6. Baum. — Dagegen 1. Dikotyle, 2. polypetal, 3. weder Schmarotzer noch schwimmend, 4. ein oberständiger Frkn., 5. Frucht mehrfächrig, 6. 2theilige Spaltfrucht.

Oder Ribes nach Leunis: V, 1*), Blüthe vollständig, Krone 3—5blättrig, oberständig, Stamm aufrecht. Dagegen: Dikotyle, polypetal, Frkn. unterständig, 5 Staubfäden, Strauch.

Man sieht, der Unterschied liegt in der Hauptsache nur in der Trennung der Monokotylen und Dikotylen; diese zu unterscheiden, macht aber, von einigen sehr wenigen Pflanzen abgesehen, selbst dem Sextaner keine Mühe, weil diese Unterscheidung unmittelbar der Anschauung zu entnehmen ist, sie gewährt aber dem Knaben Befriedigung, weil die Verschiedenheit des Keimens ein so höchst durchgreifender Unterschied ist: man braucht nur dem Schüler, ohne ein Wort zu sprechen, einige Keimpflanzen vorzulegen, um ihn von der totalen Verschiedenheit der Monokotylen und Dikotylen zu überzeugen. Hat nun derselbe einige Blätter und Blüthen und an einem Stück spanischen Rohres den so sehr auffälligen Unterschied in der Holzbildung gesehen, so wird er beim Bestimmen nicht leicht fehlgreifen.

Was sonst noch von Charakteren im natürlichen Systeme Verwendung findet, wird, wie jede Bestimmungstabelle und auch die aufgeführten Beispiele zeigen, ebensogut im Linnéschen Systeme gefordert, sobald man nicht mit der trivialen und noch dazu zum Theil incorrecten Bestimmung der Classe zufrieden ist, sondern die Gattung verlangt.

---

*) Nach Hermann Wagner hat Acer zwei Griffel; auch bei einigen andern Pflanzen ist es schwer zu entscheiden, ob man einen oder mehrere Griffel anzunehmen hat.

Das Beweisverfahren in den inversen Rechnungsarten.

Von Oberlehrer Dr. Boerner in Ruhrort.*)

I.

In den gebräuchlichsten Lehrbüchern der elementaren Arithmetik werden zwei gänzlich verschiedene Beweisverfahren angewandt.**) Die Beweise für die directen Rechnungsarten führen aus der Definition der letzteren mit Nothwendigkeit zum Resultate, ohne die Bekanntschaft mit demselben vorauszusetzen; diejenigen für die indirecten Rechnungsarten dagegen haben das Resultat zum Ausgangspunkte und beweisen nur seine Richtigkeit. Der pädagogische Grundsatz von der Einheit der Methode in der Behandlung desselben Gebietes fordert entschieden die Aufhebung dieses Dualismus und das mit um so mehr Grund, als das zweitgenannte Verfahren ganz und gar unzulänglich ist.

Die Voraussetzung des Resultates giebt dem Beweise den Charakter des Gekünstelten und bereitet dem nach heuristischer Methode unterrichtenden Lehrer ein unliebsames und schwer zu überwindendes Hinderniss. Es hebt die Schwierigkeit nicht, wenn Helmes (I. §. 22) im Anschluss an die Regel für die Beweise der Subtraction („Prüfe, ob die Summe aus Subtrahendus und Differenz gleich ist dem Minuendus“) sagt: „Das Gesetz oder der Lehrsatz selbst aber wird ohne Weiteres aus dem entsprechenden Gesetz oder Lehrsatz der Addition derselben Zahlform zu entnehmen sein; wie damit in der Addition verfahren

---

*) Dieser Aufsatz ist nach des Verfassers Mittheilung angeregt durch Dr. Zerlangs kleinere Mittheilung „über mathematische Beweisführung“ (III. 1. Hft. S. 24—27). Die Red.

**) So bei Kambly, Aschenborn, Helmes, Wiegand; in dem an wenigen Schulen im Westen eingeführten Leitfaden: „Fundamentalsätze der allgemeinen Arithmetik in systematischer Zusammenstellung (erschienen Siegen bei Vorländer); in dem an der Realschule in Frankfurt a. O. gebrauchten Lehrbuche von Richter (erschienen Frankfurt a. O. bei Harnecker 1863) u. s. w.

wurde, so wird es auch in der Subtraction sein;" denn diese Analogie kann erst zum Verständniss gebracht werden, nachdem die einzelnen Gesetze bewiesen sind. Ist einmal der Vorzug der heuristischen Methode im Unterrichte anerkannt, so ist die gerügte Beweisführung zu verwerfen. Der einzige Umstand, der sie den genannten Gründen zum Trotz halten könnte, wäre die Unmöglichkeit, eine andere aufzustellen. Diese Unmöglichkeit existirt nicht, wie Herr Dr. Zerlang im 1. Hefte des Jahrganges III (1872), S. 24—27 dieser Zeitschrift (Kleinere Mittheilungen: „Ueber mathematische Beweisführung.") an einem Beispiele nachgewiesen hat.

Gegen die von Herrn Dr. Zerlang vorgeschlagene Beweisführung in den inversen Operationen und für die bis dahin gebräuchliche sind im 2. Hefte des Jahrganges einige Herren aufgetreten. Ich glaube, dass die dort angeführten Bedenken nicht zutreffen und dass die neue Methode vor der alten entschieden den Vorzug verdient.

Darin bin ich mit den Herren einverstanden, dass die bisherigen Beweise der wissenschaftlichen Schärfe genügen, bin aber ebenso überzeugt, dass sie die Anforderungen, welche die neuere Pädagogik an einen Beweis zu stellen berechtigt ist, in keiner Weise erfüllen. Zu diesen Anforderungen gehört aber vor Allem, dass der Beweis eine Ableitung des Resultates aus dem Gegebenen ermögliche.

Der Unterschied der beiden Beweisarten scheint mir bedeutender zu sein, als Herr Prof. Schröder annimmt, da er schon in der Verschiedenheit des Ausgangspunktes sich kund gibt. Die neue Methode geht von der Definition der inversen Operationen, die alte von der Definition der durch die Operationen erzeugten Zahlformen aus. Darum kann die Richtigkeit der Bemerkung Herrn Meyer's, dass die alte Beweisart die Definition des Quotienten (z. B.) in das rechte Licht setze, in gewissem Sinne zugegeben werden; da sie jedoch stillschweigend voraussetzt, dass die Definition des Quotienten für das betreffende Capitel den geeigneten Ausgangspunkt bilde, so hängt die Entscheidung über den relativen Werth der einen und der anderen Methode von der grösseren oder geringeren Berechtigung ihres Ausgangspunktes ab.

Ich meine, der Definition der Zahlform sei die Definition der **Rechnungsart** schon aus Gründen der Consequenz voranzusetzen, da man bei den directen Operationen ebenso verfährt. Zwingender aber ist der logische Grund: Die Operation ist zunächst zu definiren, weil sie die Ursache, das Resultat die Wirkung ist.

Untersucht man nun die Definitionen der inversen Operationen genauer, so wird man mit Nothwendigkeit auf die Zerlang'sche Beweisart hingeführt.

Die Begriffe der inversen Operationen fallen unter den Begriff „Rechnen." Der Begriff „Rechnen" erhellt aus der Definition: „**Rechnen heisst, aus zwei Zahlen** (a u. b) **eine neue Zahl bilden.**" Die möglichen Bildungsweisen zerfallen in zwei Abtheilungen: Die Zahl a kann entweder als ein Element betrachtet werden, durch dessen $b$malige Verwerthung nach vorgeschriebenem Gesetz die neue Zahl erzeugt wird, oder sie kann als ein Complex von nach vorgeschriebenem Gesetze vereinigten Elementen betrachtet werden, deren Anzahl oder Grösse durch b gegeben ist und deren resp. Grösse oder Anzahl die neue Zahl sein soll. Die erstere Bildungsweise befolgen die directen, die letztere die indirecten Rechnungsarten. Das Gesetz für die Vereinigung der Elemente schreibt die jedesmalige directe Operation vor. Die Aufgabe der indirecten Rechnungsarten (deren es somit für jede directe Operation streng genommen zwei gibt) wird also im Wesentlichen darin bestehen, a in der Zahlform der betreffenden directen Rechnungsart derart darzustellen, dass b in dieser Zahlform die Anzahl resp. die Grösse der Elemente bezeichnet.

Zur jedesmaligen Umformung der Zahl a dienen wenige einfache Gesetze. Die Beziehung jeder indirecten zu der zugehörigen directen Rechnungsart hat einen zweifachen arithmetischen Ausdruck, jenachdem man von der directen zur indirecten Operation oder umgekehrt übergeht. Dadurch ergeben sich 2 Folgerungen (andere Formen derselben Beziehung), die das einzige Material bilden, dessen man für die scharfe Ableitung sämmtlicher Sätze benöthigt ist. Bei der Subtraction, Division und Wurzelrechnung leisten noch zwei andere, unmittelbar aus den erwähnten Folgesätzen sich ergebende Lehrsätze (über Umformung der betreffenden Zahlform ohne ihren Werth zu ändern) durch Vereinfachung des Beweisverfahrens in vielen Fällen wesentliche Dienste.

Das angegebene Princip ist bei allen indirecten Rechnungsarten durchführbar. Die folgende Darstellung soll zeigen, wie die durch das bisherige Beweisverfahren nur nothdürftig geschlossene Lücke in den Lehrbüchern ausgefüllt werden kann. Ich habe die Entwickelung ausführlich gegeben aus folgenden Gründen: 1) Es ist auffallend, dass gerade die Anfänge der Arithmetik in den meisten Lehrbüchern mehr als kurz behandelt sind*), und dass sie bei dieser Magerheit häufig noch die nöthige Gliederung in der Anordnung vermissen lassen. Darüber dürfte aber doch wohl Uebereinstimmung herrschen, dass Beides, Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit, besonders in den Anfangsgründen einer Wissenschaft unentbehrlich ist. **) Im Interesse der Unmittelbarkeit der Erkenntniss ist jeder Satz aus seinen obersten Gründen abgeleitet worden. **) Die indirecte Ableitung der einen Form durch die andere regt die Denkthätigkeit des Schülers zu wenig an und befördert deshalb die Oberflächlichkeit. Mit Nutzen kann eine derartige Umwandlung der verschiedenen Formen in einander am Schlusse eines Abschnittes, nachdem die Sätze fest eingeprägt worden sind, vorgenommen werden, um die Einsicht in den innigen Zusammenhang der bewiesenen Gesetze zu fördern.

2) Es liess sich bei der Einfachheit und Natürlichkeit des angewandten Princips erwarten, dass eine systematische Anordnung der Sätze möglich sei. Die Vermuthung hat sich überall bestätigt und damit ist der weitere Vorwurf, der dem neuen Verfahren gemacht worden ist, „dass es etwas Willkürliches habe,“ als unbegründet erwiesen. Beachtet man die systematische Aufeinanderfolge der Sätze, so findet man vielmehr, dass feste Principien in der Anwendung der durch die Erklärung der betreffenden inversen Operationen und die Eigenschaften ihrer Zahlformen gebotenen Hilfsmittel vorhanden sind.

Die Anordnung selbst ergab sich naturgemäss aus folgender Erwägung: Ist die Definition einer neuen Rechnungsart aufgestellt (und sind die Formverwandlungen der neuen Zahlform, die möglich sind, ohne ihren Werth zu ändern, entwickelt), so

*) Helmes u. a. machen davon eine rühmliche Ausnahme.

**) Vergl. die Ausführungen von Helmes in seiner Vorrede zur Arithmetik, S. IX.

muss 1) die neue Rechnungsart der Reihe nach auf die bis dahin bekannten Zahlformen und müssen 2) die sämmtlichen nun bekannten Rechnungsarten der Reihe nach auf die neue Zahlform angewandt werden.

Bei der Division z. B. würde also das Wesentliche der Aufgabe darin bestehen: 1) einen Quotienten, dessen Bestandtheile (beide oder einzeln) a) Summen, b) Differenzen, c) Producte sind, in der Form a) einer Summe, b) einer Differenz, c) eines Productes von einzelnen Quotienten; 2) a) eine Summe, b) eine Differenz, c) ein Product von Quotienten in der Form eines Quotienten; 3) einen Quotienten, dessen Bestandtheile Quotienten sind, in der Form eines Quotienten mit veränderten Bestandtheilen darzustellen.

Da das Wesentliche des neuen Verfahrens darin liegt, dass es die gegebenen Zahlen als Form der entsprechenden directen Rechnungsart darzustellen sucht, so scheint sie mir den Zusammenhang der inversen mit den directen Operationen inniger zu wahren, als das alte Verfahren, ohne in den Anschein des Künstlichen und Willkürlichen zu gerathen.

Ich kann mir zum Schlusse die Bemerkung nicht versagen, dass ich nicht meine, dass der erste arithmetische Unterricht in streng wissenschaftlicher Weise betrieben werden soll. Ich halte es vielmehr für dringend nöthig, dass der Lehrplan in den mathematischen Disciplinen (ich habe vorzugsweise die preussischen Schulen im Auge) dahin geändert werde, dass sowohl in der Geometrie als auch in der Arithmetik ein besonderer streng systematisch ertheilter propädeutischer Unterricht vorausgehe. In der Arithmetik hat die Schwierigkeit, welche die Forderung einer bedeutenden Abstraction bereitet, längst das Bedürfniss klar gelegt, indem die Beweise sehr häufig nur sehr nebensächlich und oberflächlich behandelt werden. Der propädeutische Cursus soll die Wahrheiten anschaulich aber doch streng entwickeln; an ihn schliesst sich der eigentliche wissenschaftliche Unterricht an, der die auf anschauliche Weise gewonnenen Wahrheiten in streng wissenschaftlicher Form begründet. In der Programmabhandlung der Realschule in Frankfurt a/O. Ostern 1873, in welcher ich die 4 Species mit absoluten Zahlen nach den weiter oben erörterten Principien ausführlich und streng systematisch behandelt habe, habe ich in fortlaufenden Zusätzen zu den einzelnen Lehrsätzen (überschrieben: Veranschaulichung) den Versuch gemacht, zu zeigen, wie etwa ein solcher propädeutischer Unterricht in der Arithmetik anschaulich (im engsten Sinne des Wortes) betrieben werden könne.

I. Subtraction.*)

A. Erklärung der Subtraction und charakteristische Eigenschaft der Differenz.

Erklärung:

Wenn $a + b = s$ . . . . (1)

so ist $s - b = a$ . . . . (2)

Setzt man aus (1) statt des Werthes s die Summe $a + b$ in (2), und aus (2) statt des Werthes a die Differenz $s - b$ in (1) ein, so folgt:

Folgesatz 1: $\mathbf{(a + b) - b = a}$

Folgesatz 2: $\mathbf{(s - b) + b = s}$

Lehrsatz 1:

$$\mathbf{a - b = (a + c) - (b + c)}$$

Bedingung. $b < a$; folgl. $b + c < a + c$

Beweis. Es sei $* \, a - b = d$

dann ist n. E. $a = b + d$

$$a + c = (b + d) + c$$
$$a + c = (b + c) + d. \text{ Erkl.}$$
$$* \, (a + c) - (b + c) = d$$
$$\overline{\qquad a - b = (a + c) - (b + c)}$$

Lehrsatz 2:

$$\mathbf{a - b = (a - c) - (b - c)}$$

Bed. $b < a$; $c < b$ folgl. $c < a$

Bew. Es sei $* \, a - b = d$

dann ist n. Erkl. $a = b + d$ F. 2.

$$(a - c) + c = [(b - c) + c] + d$$
$$(a - c) + c = [(b - c) + d] + c$$
$$a - c = (b - c) + d$$
$$* \, (a - c) - (b - c) = d$$
$$\overline{a - b \qquad = (a - c) - (b - c)}$$

*) Die im Folgenden mit den Beweisen angeführten Lehrsätze etc., stehen immer hinter den Zeilen, auf welche sie angewandt werden sollen.

B. Anwendung der Subtraction auf Summen.

Lehrsatz 3:

$$\begin{aligned} &\mathbf{(a + b) - c} \\ &= \mathbf{1)\ (a - c) + b} \\ &= \mathbf{2)\ a + (b - c)} \end{aligned}$$

Bed. $c < a + b$.

Bew. 1) Ann. $c < a$

$$\begin{aligned} &(a + b) - c \text{ F. 2.} \\ &= \{[(a - c) + c] + b\} - c \\ &= \{[(a - c) + b] + c\} - c \text{ F. 1.} \\ &= (a - c) + b. \end{aligned}$$

2) Ann. $c < b$

analog Bew. 1.

Lehrsatz 4:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a - (b + c)} \\ &= \mathbf{1)\ (a - b) - c} \\ &= \mathbf{2)\ (a - c) - b.} \end{aligned}$$

Bed. $b + c < a$, folgl. $b < a$, $c < a$

Bew. 1) $a - (b + c)$ L. 2.

$$\begin{aligned} &= (a - b) - [(b + c) - b] \text{ F. 1.} \\ &= (a - b) - c \end{aligned}$$

2) analog Bew. 1.

Lehrsatz 5:

$$\begin{aligned} &\mathbf{(a + b) - (c + d)} \\ &= \mathbf{1)\ (a - c) + (b - d)} \\ &= \mathbf{2)\ (a - d) + (b - c)} \end{aligned}$$

Bed. $ac + d < + b$.

Bew. entweder durch Anwendung von L. 4 u. L. 3 oder unmittelbar, wie folgt:

1) Ann. $c < a$; $d < b$.

$$\begin{aligned} &(a + b) - (c + d) \text{ F. 2.} \\ &= \{[(a - c) + c] + [(b - d) + d]\} - (c + d) \\ &= \{[(a - c) + (b - d)] + (c + d)\} - (c + d) \text{ F. 1.} \\ &= (a - c) + (b - d) \end{aligned}$$

2) Ann. $d < a$; $c < b$.

analog. Bew. 1.

Anm. L. 3 u. L. 4 können als Folgesätze von L. 5 bewiesen werden.

C. Anwendung der Addition und Subtraction auf Differenzen.

Lehrsatz 6:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{c} \\ = 1)\ &(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \mathbf{b} \\ = 2)\ &\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \end{aligned}$$

Bed. $b < a.$

Bew. 1) $(a - b) + c$ F. 1.

$= \{[(a - b) + c] + b\} - b.$

$= \{[(a - b) + b] + c\} - b.$ F. 2.

$= (a + c) - b.$

2) Ann. $c < b.$

$(a - b) + c$ Bew. 1.

$= (a + c) - b$ L. 2.

$= [(a + c) - c] - (b - c)$ F. 1.

$= a - (b - c)$

Lehrsatz 7:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a} - \mathbf{b}) - \mathbf{c} \\ = 1)\ &\mathbf{a} - (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ = 2)\ &(\mathbf{a} - \mathbf{c}) - \mathbf{b} \end{aligned}$$

Bed. $b < a$; $c < a - b$, folgl. $c < a$

Bew. 1) $(a - b) - c$ L. 1.

$= [(a - b) + b] - (c + b)$ F. 2.

$= a - (b + c)$

2) $(a - b) - c$ Bew. 1.

$= a - (b + c)$

(entweder direct $= (a - c) - b$ oder nach L. 2.)

$= (a - c) - [(b + c) - c]$ F. 1.

$= (a - c) - b.$

Lehrsatz 8:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \\ = 1)\ &(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{c} \\ = 2)\ &(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Bed. $c < b.$

Bew. 1) entweder nach Vertauschung der Summanden durch Anwendung von L. 6 oder unmittelbar, wie folgt:

$a + (b - c)$ F. 1.

$= \{[a + (b - c)] + c\} - c$

$= \{a + [(b - c] + c]\} - c$ F. 2.

$= (a + b) - c$

2) entweder aus Bew. 1. nach L. 3 oder unmittelbar:

Ann. $c < a$

$$\begin{aligned} & a + (b - c) \text{ F. 2.} \\ = & [(a - c) + c] + (b - c) \\ = & (a - c) + [c + (b - c)] \text{ F. 2.} \\ = & (a - c) + b. \end{aligned}$$

Lehrsatz 9:

$$\begin{aligned} & \mathbf{a - (b - c)} \\ = & \mathbf{1)\ (a + c) - b} \\ = & \mathbf{2)\ (a - b) + c} \end{aligned}$$

Bed. $c < b$; $b - c < a$, folgl. $b < a + c$

Bew. 1) $a - (b - c)$ L. 1.

$$\begin{aligned} & = (a + c) - [(b - c) + c] \text{ F. 2.} \\ & = (a + c) - b. \end{aligned}$$

2) Ann. $b < a$

$$\begin{aligned} & a - (b - c) \text{ Bew. 1.} \\ = & (a + c) - b \text{ L. 3.} \\ = & (a - b) + c. \end{aligned}$$

Lehrsatz 10:

$$\begin{aligned} & \mathbf{(a - b) + (c - d)} \\ = & \mathbf{(a + c) - (b + d)} \end{aligned}$$

Bed. $b < a$, $d < c$, folgl. $b + d < a + c$.

Bew. entweder durch Anwendung von L. 8 u. L. 6 oder unmittelbar:

$$\begin{aligned} & (a - b) + (c - d) \text{ F. 1.} \\ = & \{[(a - b) + (c - d)] + (b + d)\} - (b + d) \\ = & \{[(a - b) + b] + [(c - d) + d]\} - (b + d) \text{ F. 2.} \\ = & (a + c) - (b + d) \end{aligned}$$

Anm. L. 6 u. L. 8 können als Folgesätze von L. 10 bewiesen werden.

Lehrsatz 11:*)

$$\begin{aligned} & \mathbf{(a - b) - (c - d)} \\ = & \mathbf{(a + d) - (b + c)} \end{aligned}$$

*) Der Satz ist aufgeführt, um die Vollständigkeit in der Analogie mit den Sätzen über Division nachzuweisen. Führt man den Begriff „entgegengesetzter Werth einer Differenz“ hier ein, so überträgt sich die Analogie sogar auf den Wortlaut. Lehrsatz 11 lautet dann als Regel: Eine Differenz wird von einer Differenz subtrahirt, indem man ihren entgegengesetzten Werth (nach Lehrsatz 10) addirt.

Bed. $b < a$, $d < c$; $c - d < a - b$
folgl. $b + c < a + d$.

Bew. entweder durch Anwendung von L. 9 u. L. 7 oder unmittelbar:

$$\begin{aligned}&(a - b) - (c - d) \text{ L. 1.}\\ &= [(a + d) - (b + d)] - [(c + b) - (d + b)]\\ &= [(a + d) - (b + d)] - [(b + c) - (b + d)] \text{ L. 2.}\\ &= (a + d) - (b + c).\end{aligned}$$

Anm. L. 7 u. L. 9 können als Folgesätze von L. 11 bewiesen werden.

II. Division.

A. Erklärung der Division; charakteristische Eigenschaft des Quotienten.
(Vergl. I. A.)

Erklärung:

Wenn $ab = p$ . . . . (1)

so ist $\frac{p}{b} = a$ . . . . (2)

Setzt man aus (1) statt des Werthes p das Product ab in (2) und aus (2) statt des Werthes a den Quotienten $\frac{p}{b}$ in (1) ein, so folgt:

Folgesatz 1: $\frac{\mathbf{a \cdot b}}{\mathbf{b}} = \mathbf{a}$

Folgesatz 2: $\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p}$.

Lehrsatz 1:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{bc}}$$

Bed. b F.*) von a.

Bew. Es sei $* \frac{a}{b} = q$

dann ist n. Erkl. $a = b \cdot q$

$$\begin{aligned}ac &= (bq)c\\ ac &= (bc)q\\ * \frac{ac}{bc} &= q\\ \hline \frac{a}{b} &= \frac{ac}{bc}.\end{aligned}$$

*) F. bedeutet im Folgenden „Factor."

Lehrsatz 2:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}}{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}}$$

Bed. b F. v. a, c F. v. b, folgl. c F. v. a.

Bew. Es sei $* \frac{a}{b} = q$

dann ist $a = b \,.\, q$ F. 2.

$$\frac{a}{c} \,.\, c = \left(\frac{b}{c} \,.\, c\right) q$$

$$\frac{a}{c} \,.\, c = \left(\frac{b}{c} \,.\, q\right) c$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \,.\, q \text{ Erkl.}$$

$$* \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = q$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$$

Lehrsatz 3:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}} = \mathbf{1}.$$

Bew. $\frac{a}{a} = \frac{a \cdot 1}{a}$ (F. 1) $= 1$

Lehrsatz 4:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{1}} = \mathbf{a}$$

Bew. $\frac{a}{1} = \frac{a \cdot 1}{1}$ (F. 1) $= a$

B. Anwendung der Division auf Summen, Differenzen, Producte.

a) Summen und Differenzen.

Lehrsatz 5:

$$\frac{\mathbf{a} \pm \mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \pm \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$

Bed. c F. v. $a \pm b$.

Bew. Ann. c F. v. a u. v. b.

$$\frac{a \pm b}{c} \text{ (F. 2)} = \frac{\frac{a}{c} \,.\, c \pm \frac{b}{c} \,.\, c}{c}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}\right)c}{c} \text{ (F. 1)} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

b) Producte.

Lehrsatz 6: (Vergl. I L. 3)

$$\frac{\mathbf{a \cdot b}}{\mathbf{c}} = \mathbf{1)}\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \,.\, \mathbf{b} = \mathbf{2)}\ \mathbf{a} \,.\, \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$

Bed. c F. v. $a \,.\, b$.

Bew. 1) Ann. c F. v. a.

$$\frac{a \cdot b}{c} \text{ (F. 2)} = \frac{\left(\frac{a}{c} \,.\, c\right) . \, b}{c}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{c} \,.\, b\right)c}{c} \text{ (F. 1)} = \frac{a}{c} \,.\, b.$$

2) Ann. c F. v. b.

analog Bew. 1. durch Zerlegung von b in Factoren.

Lehrsatz 7: (Vergl. I. L. 4.)

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b \cdot c}} = \mathbf{1)}\ \frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{\mathbf{c}} = \mathbf{2)}\ \frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}}{\mathbf{b}}$$

Bed. bc F. v. a, folgl. b F. v. a, c F. v. a

Bew. 1) $\frac{a}{b \cdot c}$ (L. 2) $= \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{b \cdot c}{b}}$ (F. 1)

$$= \frac{\frac{a}{b}}{c}$$

2) analog Bew. 1.

Lehrsatz 8: (Vergl. I. L. 5.)

$$\frac{\mathbf{a \cdot b}}{\mathbf{c \cdot d}} = \mathbf{1)}\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{d}} = \mathbf{2)}\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{d}} \cdot \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}.$$

Bed. cd F. v. ab.

Bew. Entweder durch Anw. v. L. 7 u. L. 6 oder unmittelbar:

1) Ann. c F. v. a, d F. v. b.

$$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} \text{ (F. 2)} = \frac{\left(\frac{a}{c} \cdot c\right)\left(\frac{b}{d} \cdot d\right)}{c \cdot d}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}\right) cd}{cd} \text{(F. 1)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}$$

2) Ann. c F. v. b, d F. v. a

analog Bew. 1.

Anm. L. 6 u. L. 7 können als Folgesätze von L. 8 bewiesen werden.

C. Anwendung der vier Species auf Quotienten.

a) Addition und Subtraction.

Lehrsatz 9:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \pm \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a} \pm \mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$

Bed. c F. v. a u. v. b; folgl. c F. v. $a \pm b$.

Bew. $$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} \text{(F. 1)} = \frac{\left(\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}\right) c}{c}$$

$$= \frac{\frac{a}{c} \cdot c \pm \frac{b}{c} \cdot c}{c} \text{(F. 2)} = \frac{a \pm b}{c}$$

Lehrsatz 10:

$$\mathbf{a} \pm \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{ac} \pm \mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$

Bed. c F. v. b; folgl. c F. v. $ac \pm b$.

Bew. $$a \pm \frac{b}{c} \text{(F. 1)} = \frac{\left(a \pm \frac{b}{c}\right) c}{c}$$

$$= \frac{ac \pm \frac{b}{c} \cdot c}{c} \text{(F. 2)} = \frac{ac \pm b}{c}$$

Lehrsatz 11:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \pm \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{ad} \pm \mathbf{bc}}{\mathbf{bd}}$$

Bed. b F. v. a, d F. v. c; folgl. bd F. v. ad u. v. bc.

Bew. $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} \text{(F. 1)} = \frac{\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) bd.}{b \cdot d}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) d \pm \left(\frac{c}{d} \cdot d\right) b}{b \cdot d} \text{(F. 2)} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Anm. L. 9 u. L. 10 können als Folgesätze von L. 11 bewiesen werden.

b) Multiplication und Division.

(Vergl. I. C.)

Lehrsatz 12:

$$\frac{a}{b} \cdot c = 1)\ \frac{a \cdot c}{b} = 2)\ \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

Bed. b F. v. a, folgl. auch von ac.

Bew. 1) $\frac{a}{b} \cdot c$ (F.1) $= \dfrac{\left(\frac{a}{b} \cdot c\right) b}{b}$

$= \dfrac{\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) c}{b}$ (F. 2) $= \dfrac{a \cdot c}{b}$

2) Ann. c F. v. b.

$\frac{a}{b} \cdot c$ (Bew. 1) $= \frac{a \cdot c}{b}$ (L. 2)

$$= \frac{\frac{a \cdot c}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\frac{b}{c}}$$

Lehrsatz 13:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = 1)\ \frac{a}{b \cdot c} = 2)\ \frac{\frac{a}{c}}{b}$$

Bed. b F. v. a, c F. v. $\frac{a}{b}$, also auch v. a

Bew. 1) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ (L. 1) $= \dfrac{\frac{a}{b} \cdot b}{c \cdot b}$ (F. 2)

$= \dfrac{a}{b \cdot c}$

2) Ann. b F. v. $\frac{a}{c}$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ (Bew. 1) $= \dfrac{a}{b \cdot c}$ (L. 2)

$$= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{bc}{c}} = \frac{\frac{a}{c}}{b}$$

Lehrsatz 14:

$$a \cdot \frac{b}{c} = 1)\ \frac{ab}{c} = 2)\ \frac{a}{c} \cdot b.$$

Bed. c F. v. b, folgl. auch v. $a \cdot b$.

Bew. 1) wie L. 12, 1 oder nach Vertauschung der Factoren durch Anwend. v. L. 12.

2) Ann. c F. v. a.

Entweder aus Bew. 1 nach L. 6 oder unmittelbar:

$$a \cdot \frac{b}{c} \text{ (F. 2)} = \left(\frac{a}{c} \cdot c\right) \frac{b}{c}$$
$$= \frac{a}{c} \cdot \left(c \cdot \frac{b}{c}\right) \text{ (F. 2)} = \frac{a}{c} \cdot b.$$

Lehrsatz 15:

$$\frac{\mathbf{a}}{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}} = 1) \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b}} = 2) \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot c.$$

Bed. c F. v. b; $\frac{b}{c}$ F. v. a; folgl. b F. v. ac.

Bew. $1) \frac{a}{\frac{b}{c}} \text{ (L. 1)} = \frac{a \cdot c}{\frac{b}{c} \cdot c} \text{ (F. 2)} = \frac{a \cdot c}{b}$

Ann. b F. v. a

$$= 2) \frac{a}{b} \cdot c.$$

Lehrsatz 16:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}$$

Bed. b F. v. a, d F. v. c; folgl. bd F. v. ac.

Bew. Entweder durch Anwendung von L. 14 u. L. 12 oder unmittelbar:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \text{ (F. 1)} = \frac{\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) bd}{bd}$$
$$= \frac{\left(\frac{a}{b} \quad \cdot\right)\left(\frac{c}{d} \cdot d\right)}{b \cdot d} \text{ (F. 2)} = \frac{ac}{bd}$$

Anm. L. 12 u. L. 14 können als Folgesätze von L. 16 bewiesen werden.

Lehrsatz 17:

$$\frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}{\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}$$

Bed. b F. v. a, d F. v. c. $\frac{c}{d}$ F. v. $\frac{a}{b}$

Bew. Entweder durch Anwendung von L. 15 u. L. 13

oder unmittelbar:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \text{ (L. 1)} = \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot d}}{\frac{b \cdot c}{b \cdot d}} \text{ (L. 2)} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

Anm. L. 13 u. L. 15 können als Folgesätze von L. 17 bewiesen werden.

Vorstehende Sätze sind für die ursprünglichen Definitionen der beiden inversen Operationen bewiesen worden; sie ändern sich nach Erweiterung dieser Definitionen nicht.

(II. Hälfte folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

Zum Beweisverfahren in der Mathematik. (III, 26. 167. 459.)

Von E. Meyer in Landsberg a/W.

Hr. Dr. Zerlang hatte im 1. Hefte des III. Jahrgangs pag. 26 behauptet, dass der Kambly'sche Beweis von §. 19 (Arithmetik) in keiner Weise der wissenschaftlichen Schärfe genüge, dass aus diesem Beweise zwar die Richtigkeit des Quotienten (besser der Formel) folge, nicht aber die des Lehrsatzes, ja dass es nur eine scheinbare Beweisführung sei. Diese Behauptung suchte ich im 2. Hefte desselben Jahrganges pag. 167 zu widerlegen. Im 5. Hefte des III. Jahrganges stellt nun Hr. Zerlang von neuem die Behauptung auf, dass das von Kambly eingeschlagene Beweisverfahren unrichtig sei und bringt gegen meine Ausführungen drei Bedenken vor, ein logisches, didaktisches und formales.

1) Ein logisches. Hr. Zerlang findet durch logische Betrachtung den Satz: ein richtiges Resultat braucht nicht von einer richtigen Auflösungsmethode herzustammen. Dieser Satz ist unzweifelhaft richtig und bleibt bestehen, mag man nach Kambly oder Zerlang beweisen. Ich vermag nicht einzusehen, was dieser Satz mit unsrer Frage, ob K.'s Beweis richtig sei, zu thun hat.*)

---

*) Hierbei kann ich jedoch nicht unterlassen zu bemerken, dass es den Anschein hat, als wolle Hr. Z. diesen logischen Satz erst durch einen Syllogismus erhärten; denn er bringt dreimal einen Schluss derselben Form, und zwar für diesen Fall so:

Jede richtige Auflösungsmethode gibt ein richtiges Resultat.
Auch einige nichtrichtige Auflösungsmethoden geben richtige Resultate.
Ein richtiges Besultat braucht nicht von einer richtigen Auflösungsmethode herzustammen.

Dies ist, wie bekannt, die sogenannte zweite Figur; es lässt sich aber in diesem Falle, da beide Prämissen bejahend sind, wie ebenfalls bekannt, gar kein Schluss ziehen. Der, welchen Hr. Z. zu ziehen scheint, ist weiter nichts als die Conversion des Untersatzes:

Einige a sind b. Conversion: Einige b sind a.
Einige durch falsche Methode erlangte Resultate sind richtige Resultate.
Einige richtige Resultate sind durch falsche Methode erlangte Resultate.

Doch wozu tant de bruit pour une omelette? Wer wird erst beweisen, was Niemand läugnet? *Ἐξ ἀληθῶν μὲν οὖν οὐκ ἔστι ψεῦδος συλλογίσασθαι, ἐκ ψευδῶν δ' ἔστιν ἀληθές.* Aristot. Analyt. pr. II. 2. pag. 53 b. 7. Aus Wahrem lässt sich nichts Falsches schliessen, aber aus Falschem Wahres.

2) Ein didaktisches. Ein Beweis, der nur die Richtigkeit der Formel beweise, genüge vielleicht im günstigsten Falle den Minimalforderungen an seine Fixirung und Unterbringung im System, nicht für den Unterricht. Der Verf. nimmt als Beispiel Kambly I. Anh. I. §. 16, 2.

Einen rein periodischen (echten) Decimalbruch verwandelt man in einen gemeinen Bruch, indem man als Zähler die Periode und als Nenner soviel Neunen schreibt, als die Periode Ziffern hat, z. B.:

$$0{,}\overline{702}\ldots = \frac{702}{999}.$$

Warum, fragt er, genügt hier nicht 702 gibt durch 999 dividirt $0{,}\overline{702}\ldots$ Hier ist die Achillesferse der Z.'schen Auffassung. Die Division genügt allerdings (siehe weiter unten), freilich nur für diese Einzelbehauptung. Dass diese Behauptung ihren Lehrsatz nicht deckt, darin liegt der Fehler. Mit den Beziehungen aber zwischen Lehrsatz und Formel hat der Beweis nichts zu schaffen. Die Sache liegt so:

A) Die Formel ist gegeben; wir kleiden sie in Worte; dann ist es unsere Sache, nicht mehr und nicht weniger zu sagen als die Formel sagt. Der Verf. meint, der Schüler, wenn er bewiesen sähe $\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$ bilde gern die Regel: Man dividirt x^2 durch x und $-y^2$ durch $-y$, und, da der Beweis stimme (!), so glaube er mit seiner Regel im Recht zu sein. Er ist auch im Recht für alle Fälle von der Form $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$; er kann aber nicht zu dem Satz gelangen: Binome werden dividirt u. s. w., weil er da ja die Beziehungen zwischen Divisor und Dividend ausser Acht liesse, sondern zu dem Satz: Durch die Differenz zweier Zahlen dividirt man die Differenz ihrer Quadrate u. s. w. Jene Begründung „da der Beweis stimme" zeigt wiederum deutlich die schiefe Auffassung. Was hat der Beweis mit dieser Formelübersetzung zu thun?

B) Der Lehrsatz ist gegeben; wir setzen ihn um in die mathematische Zeichensprache. Hier gilt nun ebenfalls, genau das wiederzugeben, was der Lehrsatz sagt. Für den angezogenen Fall übersieht nun der Verf., dass durch die Behauptung $0{,}\overline{702}\ldots = \frac{702}{999}$ der Lehrsatz nicht gedeckt wird. Wer zu dem Satze: „Jeder rein periodische u. s. w." diese Formel aufstellt, der hat sehr incorrect aus der Wörtersprache in die Zeichensprache übersetzt, denn die Behauptung ist nur ein ganz specieller Fall und sagt nur, dass sich bei dem Bruche $0{,}702\ldots$ die behauptete Eigenschaft findet. Für diese Sonderbehauptung würde aber in der That eine ausgeführte Division genügen. Die Behauptung zu unserm Satse müsste aber heissen:

$$0,\overline{a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_n} = \frac{a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_n}{9\;9\;9\;\ldots\;\;(n\,\text{mal})}.$$

Auch hier würde eine ausgeführte Division genügen. Genügen? Ich meine, sie würde uns besser den innern Zusammenhang erkennen lassen als jener beliebte Beweis, der doch mehr oder weniger ein Kunstgriff ist, welcher uns zwar zeigt, dass es so ist, aber nicht warum es so ist, und der wohl nur deswegen so allgemein recipirt ist, weil auf der Stufe, auf welcher dieser Satz gelehrt wird, ein Beweis, hergeleitet aus der Eigenschaft der Zahlen, zu schwierig ist.

Die Allgemeinheit, welche den Buchstaben beigelegt wird, bewirkt, dass $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ sich mit der Behauptung vollkommen deckt: Eine (beliebige) Summe wird dividirt etc.; diese Formel ist eben weiter nichts als der betreffende Lehrsatz in mathematischer Zeichensprache, und wer sie beweist, beweist daher eo ipso den Lehrsatz. $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ beweist fürs Allgemeine noch nichts (cf. $2 \cdot 2 = 2^2$) wol aber $a \cdot b = b \cdot a$. Dass übrigens Kambly dies Verhältniss sehr wohl durchschaut, geht daraus hervor, dass er ausdrücklich sagt „z. B. $\overline{702}\ldots = \frac{702}{999}$." Ein solches Beispiel, obwohl incorrect, empfahl sich aus didaktischen Gründen, und genügte, da hier die bestimmten Zahlen, wie jeder sofort erkennt, für allgemeine gelten.

3. Ein formales. Jeder Satz, wie Hr. Z. will, soll als Aufgabe aufgefasst werden, also hier: wie dividirt man $a + b$ durch c. Gut! Will denn nun aber Hr. Z. wirklich lösen lassen

$$\frac{6+9}{3} = \frac{\frac{6 \cdot 3}{3} + \frac{9 \cdot 3}{3}}{3} = \frac{\left(\frac{6}{3} + \frac{9}{3}\right)3}{3} = \frac{6}{3} + \frac{9}{3}$$

oder nicht vielmehr sofort

$$\frac{6+9}{3} = \frac{6}{3} + \frac{9}{3}?$$

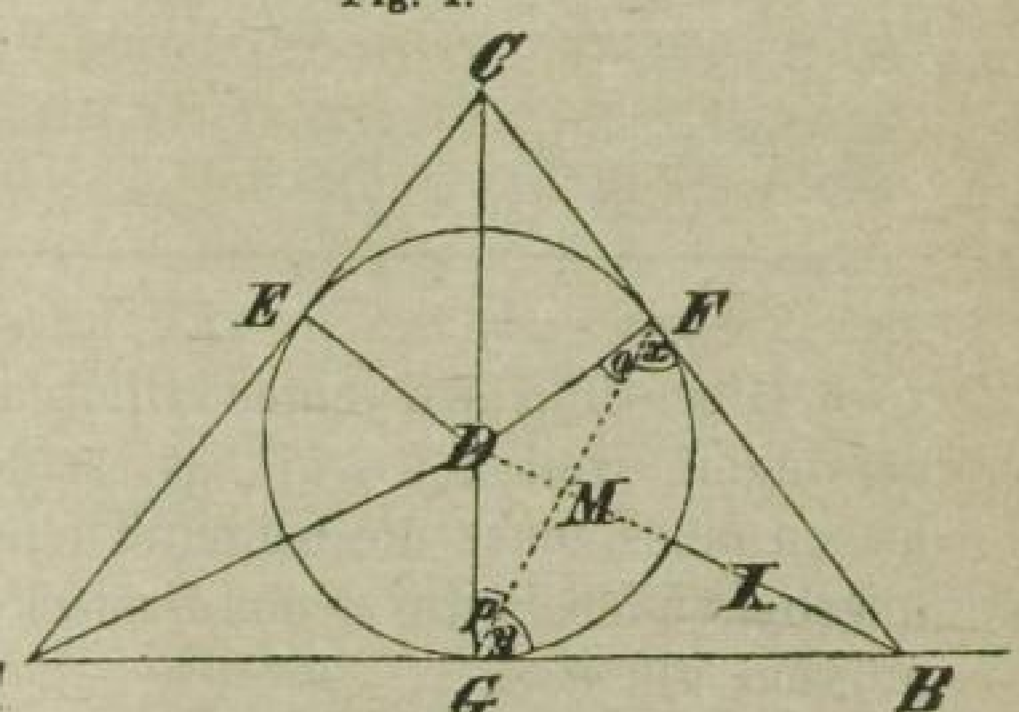
Dies zugegeben, so ist doch nichts klarer, als dass der Beweis weiter nichts nöthig hat als nachzuweisen, dass diese Lösung $\frac{6+9}{3} = \frac{6}{3} + \frac{9}{3}$ richtig ist.

Nun will ich durchaus nicht läugnen, dass es ungemein interessant und lehrreich ist, zu erfahren, wie man zu dieser Lösung gekommen; und glaubt der Verf., dass sein Weg der sei, den der erste Entdecker gegangen, so mag er den Schüler immerhin damit bekannt machen, aber verlangen, dass er ebenso löse und sich der kürzeren Lösung enthalte, die sich mit der zunehmenden Erkenntniss ergab, ist unbillig. Noch unbilliger aber ist es, vom Beweise der Richtigkeit einer Lösung zu verlangen, dass er uns zeige, wie man zu der Lösung gekommen. Uebrigens fühlt der Verf. wohl selbst, wie viel seiner Vermuthung zur Gewissheit fehlt. Glaubhafter ist mir, dass durch Betrachtung specieller Zahlenbeispiele der Satz vorläufig als Erfahrungssatz gewonnen wurde und erst später seine wissenschaftliche Begründung gefunden hat. Diese war, nachdem der Satz $c.\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)=a+b$ bekannt war in Verbindung mit $c.\frac{a+b}{c}=a+b$ dann nicht schwer.

Der Tadel gegen die Verschiebung der Behauptungen in K. II §. 68 u. 69 ist durchaus gerecht und auch ich habe beim Unterrichte die betreffenden Beweise geändert; besonders im §. 69 also:

Beh. 2: die Halbirungslinie von $\angle B$ trifft D (Fig. 1).

Fig. 1.



Beweis:

$\underline{DF = DG}$ (wie bewiesen)

$\underline{\angle o = p}$ (§. 51).

$\underline{\angle x = y}$ ($\angle DGB = DFB = R$ n. Vor.)

$\overline{BG = BF}$ (§. 54) d. h.:

$\triangle BFG$ ist gleichschenklig, daher muss BX die Mitte der Basis, nämlich M, treffen und senkrecht auf der Basis stehen (§. 64). Die Senkrechte aber aus der Mitte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks (DFG) trifft die Spitze (§. 65. 3), also trifft BXM den Punkt D, q. e. d.

Von einer solchen Verschiebung des Beweisobjects könnte in unserm Falle nur dann die Rede sein, wenn man wirklich lösen liesse $\frac{6+9}{3}=\frac{\frac{6\cdot 3}{3}+\frac{9\cdot 3}{3}}{3}=$ u. s. w. und einen dementsprechenden Lehrsatz aufstellte.

Der Gedanke, welcher Hrn. Z. offenbar geleitet hat, ist der: Der Beweis soll nicht bloss darthun, dass etwas nothwendig so sei, sondern er soll uns auch einen Blick ermöglichen in den innern Zusammenhnng dieses Seins. Nehmen wir ein Beispiel:

Dem grössern Winkel eines Dreiecks liegt auch die grössere Seite gegenüber (§. 56).

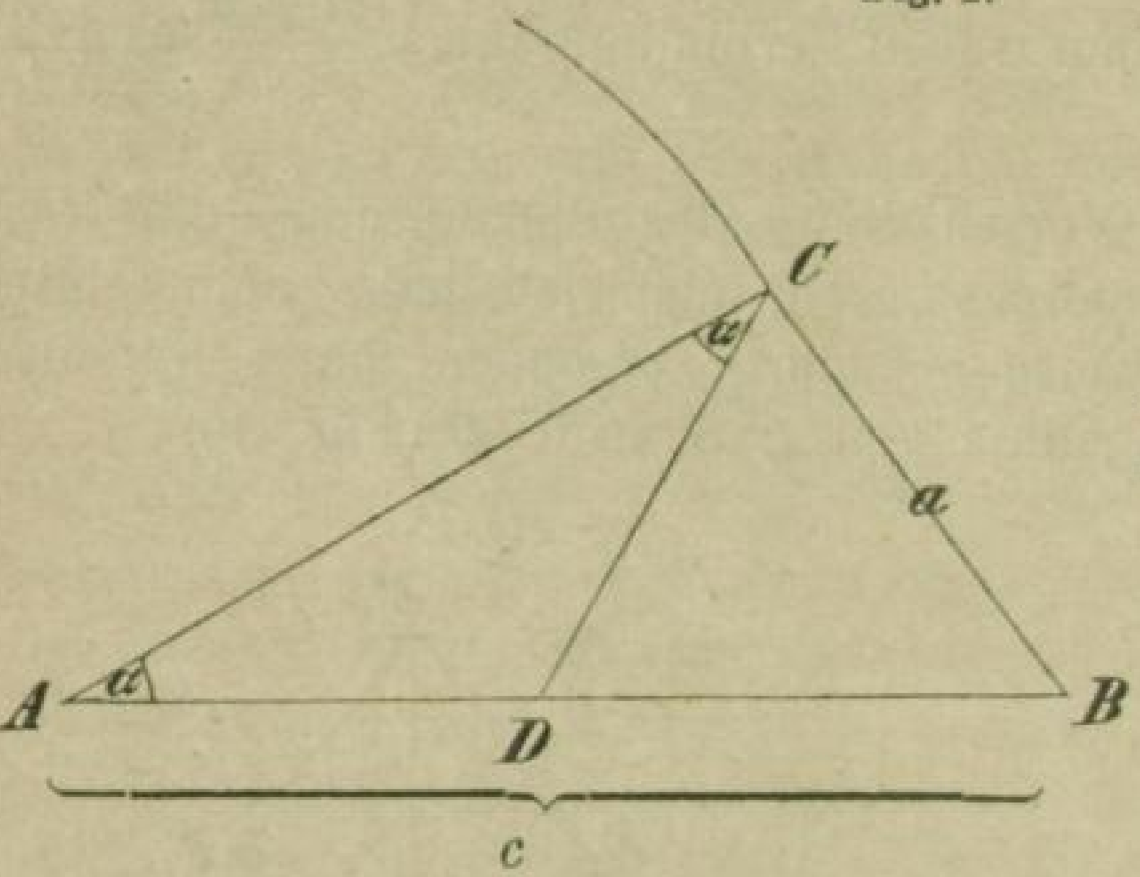
Vor. $\angle \gamma > \alpha$ (Fig. 2).

Beh. $c > a$.

1. Beweis (indirect) wie im Kambly. Der Beweis zeigt, dass die Behauptung stattfinden muss, aber den innern Grund, warum sie stattfindet, ersehen wir nicht.

2. Beweis. Da $\angle \gamma < \alpha$, so muss, wenn man den $\angle \alpha$ an CA in C nach rechts anträgt, der freie Schenkel zwischen CA und CB fallen, in die Richtung CD, nun ist

Fig. 2.



$$DB + DC > a$$
$$DB + DA > a$$
$$c > a, \text{ q. e. d.}$$

Hier thun wir einen Blick in den innern Zusammenhang, wie deswegen, weil $\angle \gamma > \alpha$ ist, seine Gegenseite sich stets so zerlegen lassen muss, dass die beiden Theile als Seiten mit der dem $\angle \alpha$ gegenüberliegenden Seite a ein Dreieck bilden können, mithin grösser sein müssen als a.

Zum Schluss noch einige Bemerkungen.

1) Unverständlich ist mir die Schlussbemerkung der Redaction „der Schüler schliesst einfacher so: $\frac{1+1}{3} = \frac{\frac{3}{3}+\frac{3}{3}}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Wer so schliessen kann, schliesst offenbar sofort: $\frac{1+1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.*)

Hr. Z. sagt in dem folgenden Beispiele (besser in einer Classe von Aufgaben) führe ein falsches Verfahren stets zu einem richtigen Resultate.

5 Gänse kosten 7 Thlr.; was kosten 8 Gänse?

5 Gänse : 7 Thlr. = 8 Gänse : x Thlr.

---

*) Allerdings! Wir meinten nur das nächst Einfachere im Gegensatz zu dem Complicirten (Gesuchten):

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 3}{3} = \frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)3}{3}.$$

Psychologisch scheint uns unsere Bemerkung (III, 462) insofern richtig zu sein, als dem Setzen eines Theils der Einheit immer das Theilen selbst (= Zerlegen d. E. in gleiche Theile) in der Vorstellung vorausgehen muss. Dieser Denkprocess ist aber angezeigt in: $\frac{1+1}{3} = \frac{\frac{3}{3}+\frac{3}{3}}{3}$ $\left(= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$.

D. Red.

Das nennt der Verf. mit Unrecht falsch. Jeder Verkauf (Tausch) beruht darauf, dass der Werth der gegebenen Sache dem der empfangenen gleich ist und nur auf diese Werthe kommt es an:

Werth von 5 Gänsen : (dem ihm gleichen) Werth von 7 Thlr. = Werth von 8 Gänsen : (dem ihm gleichen) Werth von X Thlr. = 1 : 1.

Uebrigens hätte schon die Erwägung, dass in jeder Proportion die inneren Glieder vertauscht werden dürfen, den Verf. stutzig machen sollen. Ist

5 Gänse · 8 Gänsen = 7 Thlr. · x Thlr.

richtig, so muss auch

5 Gänse · 7 Thlr. = 8 Gänse · x Thlr.

richtig sein. Und in der That. Im eigentlichen Sinne (wie ihn Hr. Z. nimmt) ist die erste Proportion gerade so widersinnig wie die zweite*); das Verhältniss, in welchem Gänse zu einander stehen, kann man gar nicht mit dem Verhältnisse, in welchem Thaler zu einander stehen, vergleichen. Aber auf die Gänse und Thaler kommt es hier auch gar nicht an, sondern lediglich auf ihre Werthgrössen.

3) Die citirte Stelle des Aristoteles (Analyt. post. I, 27, pag. 86, a, 31) ist zwar sowohl vom lat. als auch deutschen Uebersetzer (Bekker u. Zell) in dem Zerlang'schen Sinne genommen; dagegen sprechen aber ganz ausdrücklich und unzweideutig beide Scholiasten (Themistios und Philoponos) und die Lehre des Aristoteles selbst. Ein Beweis, der das „warum" zeigt, muss stets den des „dass" mitenthalten. Die Stelle muss heissen: „Genauer und vorzüglicher ist eine Wissenschaft als eine andere, nämlich die, welche zugleich Wissenschaft des dass und des warum ist; nicht aber ist besser, gesondert genommen, eine Wissenschaft des „dass" als die des „warum"." Hierin liegen die beiden Sätze: 1. die beste Wissenschaft ist die des „dass" u. „warum". 2. die Wissenschaft des „dass" ist geringer als die des „warum".

---

*) Das möchten wir — wenn wir uns eine Bemerkung erlauben dürfen — entschieden bestreiten. Die erstere Proportion ist richtiger, weil natürlicher. Es ist naturgemässer, Gleichartiges (gleichartige Grössen) in Verhältniss zu setzen, als Ungleichartiges. Daher sollte man, — soweit man überhaupt noch mit Proportionen, die ja mit Recht immermehr antiquirt werden, rechnet — nie schreiben lassen:

5 Pfd. : 20 Gr. = 3 Pfd. : x Gr.,

sondern: 5 Pf. : 3 Pf. = 20 Gr. : x Gr.

Das Vertauschen der inneren Glieder aber setzt stillschweigend das Fortlassen der Benennung voraus. D. Red.

Zwei Entgegnungen

auf Dr. Benders „Neuer Beweis, dass $7 = 13$" (IV, 356.*))

1.

Von E. Meier in Landsberg a. W.

Gegen den im 5. Hefte dieses Jahrganges vorgetragenen Beweis, dass $7 = 13$ ist, erwidere ich:

1) Durch die Auflösung jener Gleichung ist keineswegs bewiesen, dass $7 = 13$ ist. Man verwechsle doch ja nicht eine Bestimmungsgleichung mit einer identischen. Was heist denn $\frac{x + 5}{x - 7} - 5 = \frac{4x - 40}{13 - x}$ auflösen anderes, als einen Werth von x finden, welcher der gegebenen Bedingung genügt?

Findet man nun in irgend einer Bestimmungsgleichung $7 - x = 13 - x$, so folgt doch daraus nicht, dass $7 = 13$ ist, sondern nur, dass $7 = 13$ sein müsste, wenn irgend ein endlicher Werth von x der gegebenen Bedingung genügen soll (d. h. mit andern Worten, dass kein endlicher Werth von x dieser Bedingung genügt).

2) Obgleich ich die von dem Verf. angefügte Warnung vollkommen billige, so kann ich doch jenem Beispiele keinen grossen Werth beilegen, da sich deren ja unendlich viele mit der grössten Leichtigkeit bilden lassen.

2.

Von Scherling.

Im 5. Hefte des IV. Jahrgangs dieser Zeitschrift unterhält uns Herr Dr. Bender mit einem alten mathematischen Curiosum, einem sog. Beweis, dass $7 = 13$ sei, und knüpft daran als Nutzanwendung die Mahnung: dass es nothwendig sei, in der Lehre von den quadratischen Gleichungen den Ausdruck $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ zu discutiren.

Wir haben nicht geglaubt, dass es heut zu Tage noch nothwendig sei, eine solche Mahnung an die Lehrer ergehen zu lassen. Sodann sehen wir nicht ein, in welcher Beziehung die weiteren Be-

*) Obgleich wir bei der Aufnahme der oben citirten Bem. Dr. Benders ebenfalls wissenschaftliche und didaktische Bedenken hatten, so glaubten wir doch, dieselbe nicht zurückweisen zu dürfen, in der Erwartung, es werde sich hieran eine für Manche fruchtbare Discussion knüpfen.
D. Red.

merkungen zum vorliegenden Beispiele stehen sollen. Das Resultat von x aus der von ihm betrachteten Gleichung $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$ soll doch nicht aus der allgemeinen Auflösung der quadratischen Gleichungen hergeleitet werden, indem man den Coefficienten von x^2 gleich 0 setzt? Das wäre jedenfalls „ein grosser Fehler“! Denn die vorliegende Gleichung führt auf $(4x - 40) \cdot 6 = 0$, ist also gar keine quadratische Gleichung. Selbst wenn man bei der Auflösung dieser Gleichung ganz schablonenmässig verfährt, verschwindet das Glied x^2 durch Subtraction; es kann also nicht einmal von einer „scheinbaren quadratischen Gleichung“ die Rede sein. Wir sind der Meinung, dass heutzutage jeder Lehrer der Mathematik seinen Schülern bei Durchnahme und Einübung der Auflösung der Gleichungen von vornherein, schon bei den Gleichungen des ersten Grades zweierlei einschärfe: 1) mit Auflösung von Klammern nicht zu voreilig zu sein, vielmehr so lange, als es angeht, durch Absonderung gemeinschaftlicher Factoren Zusammenziehungen von Gliedern vorzunehmen, 2) niemals durch eine Grösse zu dividiren, deren Werth möglicher Weise $= 0$ sein könnte, vielmehr, wenn sich eine solche auf beiden Seiten einer Gleichung als Factor befinden sollte, die Gleichung auf Null zu reduciren und diesen gemeinschaftlichen Factor abzusondern. Bei Beachtung dieser zweiten Regel werden die Schüler niemals auf solche falsche Schlüsse, wie $7 = 13$, kommen.

In einem Punkte aber stimmen wir mit Herrn Dr. B., wiewohl mit einer kleinen Abänderung, überein, nämlich dem, es möchten die Verfasser von Lehrbüchern der Algebra oder von Sammlungen algebraischer Aufgaben die scheinbar einfachen (nicht scheinbar quadratischen!) Gleichungen nicht unter denen des ersten, sondern unter denen des zweiten Grades aufführen. Eine Gleichung, die auf die Form führt, wie $ax^2 - x = 0$ ist keine einfache, sondern eine quadratische; denn sie hat zwei Wurzeln, die sich aus der Umformung $(ax - 1) \cdot x = 0$ ergeben. Von solchen Beispielen ist selbst die sonst so ausgezeichnete Sammlung von Bardey nicht frei; wir führen beispielsweise aus den Gleichungen 1. Grades folgende an:

Nr. 293 führt auf $5x - 10x^2 = 0$, also $x = 0$ oder $= \frac{1}{2}$.

Ebenso gelten auch Nr. 316, 337—340 für $x = 0$.

Da ich nun einmal auf die quadratischen Gleichungen gekommen bin, so erlaube ich mir, hier meine Methode der trigonometrischen Auflösung, welche von der gewöhnlichen etwas abweicht, mitzutheilen.

Zur trigonometrischen Auflösung quadratischer Gleichungen.

Von Demselben.

Wir betrachten a und b als absolute Zahlen, die Vorzeichen also als die geltenden.

1) Es sei $x^2 - ax + b = 0$ aufzulösen, wenn $b < \frac{a^2}{4}$. Es ist

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \sqrt{1 - \overline{\sin\alpha^2}}$

also $4 \overline{\sin\alpha^2} - 4 \cdot \overline{\sin\alpha^4} = \overline{\sin 2\alpha^2}$.

Multiplicirt man mit der willkürlichen Zahl r^2 und ordnet, so kommt

$$(2r \overline{\sin\alpha^2})^2 - 2r(2r \overline{\sin\alpha^2}) + r^2 \overline{\sin 2\alpha^2} = 0.$$

Diese Gleichung mit der gegebenen verglichen, führt auf

$$2r \overline{\sin\alpha^2} = x,$$

$$2r = a \quad \text{oder} \quad r = \frac{a}{2},$$

$$r^2 \overline{\sin 2\alpha^2} = b \quad \text{oder} \quad \frac{a^2}{4} \overline{\sin 2\alpha^2} = b,$$

$$\text{also} \quad \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a},$$

$$\text{daher dann} \quad x = a \overline{\sin\alpha^2}.$$

Die beiden letzten Gleichungen geben die Auflösung. Da aber $2x$ doppelt bestimmt ist, gibt es zwei Werthe für x.

2) $x^2 + ax + b = 0$, wenn $b < \frac{a^2}{4}$ ist.

Man hat sofort aus voriger Auflösung

$$\sin 2\alpha = -\frac{2\sqrt{b}}{a}; \quad x = -a \cdot \overline{\sin\alpha^2}.$$

3) $x^2 + ax - b = 0$ aufzulösen.

Man hat $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \overline{\operatorname{tg}\alpha^2}}$; also

$$\overline{\operatorname{tg}\alpha^2} + 2 \operatorname{tg}\alpha \cdot \cot 2\alpha - 1 = 0$$

$$\text{und} \quad (r \operatorname{tg}\alpha)^2 + 2r \cot 2\alpha\, (r \operatorname{tg}\alpha) - r^2 = 0.$$

Diese Vergleichung führt auf

$$r \operatorname{tg}\alpha = x; \quad r = \sqrt{b}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$$

$$\text{also} \quad x = \operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{b}.$$

Durch $\operatorname{tg} 2\alpha$ ist wiederum 2α doppelt bestimmt, also auch x; die in den vorigen Nummern gemachten Beschränkungen fallen aber weg.

4) Für $x^2 - ax - b = 0$ ergibt sich sofort

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\sqrt{b}}{a}; \quad x = \operatorname{tg}\alpha . \sqrt{b}.$$

5) Wenn in den Formen $x^2 \mp ax + b = 0 b > \frac{a^2}{4}$ ist, so sind bekanntlich die Wurzeln von der Form $m \pm i\sqrt{n}$, die durch die trigonometrische $r\ (\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ ersetzt werden kann, indem man

$$m = r \cos\varphi$$

$$\text{und } \sqrt{n} = r \sin\varphi$$

setzt, so dass $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{n}}{m}$ bedeutet, und $r = \frac{m}{\cos\varphi}$ wird.

Die Gleichung, welche diese Wurzeln hat, findet man durch Ausführung des Products

$$[x - r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \cdot [x - r(\cos\varphi - i\sin\varphi)] = 0.$$

Die Ausführung gibt

$$x^2 - 2r\cos\varphi .\ x + r^2 = 0.$$

Diese Gleichung mit der gegebenen verglichen, führt auf

$$\cos\varphi = \pm \frac{a}{2\sqrt{b}},$$

wodurch φ bestimmt ist, und man erhält nun

$$x_1 = \pm \frac{a}{2} + i .\ \sqrt{b} \sin\varphi.$$

$$x_2 = \pm \frac{a}{2} - i .\ \sqrt{b} .\ \sin\varphi.$$

Die Bruchdivision*).

Von J. Kober.

In der Recension Bd. I, 423 habe ich tadelnd geäussert: „Die Division durch einen Bruch wird nur**) nach der ziemlich verrufenen Umkehrungsmethode gelehrt. Weder die Regel „Zähler in Zähler, Nenner in Nenner,“ noch das Gesetz, dass man mit dem Zähler dividirt und mit dem Nenner multiplicirt, noch, dass man mit dem einen Factor den Zähler dividirt, mit dem andern den Nenner multiplicirt, sind ausgebeutet.“

Mir gilt die Bruchrechnung nicht blos als ein Handwerkszeug für die Ausführung höherer Rechnungen, sondern als selbständiges Bildungsmittel. Jeder Unterricht soll bilden. Dies thut er aber am besten, wenn er den Gegenstand möglichst vielseitig beleuchtet, alle Fäden verfolgt, die die Theile unter einander verbinden. Ein gründliches Verständniss, wie es gründlicher Unterricht erstrebt, befähigt den Schüler, statt alle Aufgaben nach einer Schablone zu fertigen,

*) Zu diesem Aufsatze vgl. IV, 222—227. bes. S. 227. D. Red.

**) Ich bitte, dieses Wörtchen nicht zu übersehen. Der Verf.

für jeden Fall das passendste Verfahren zu erkennen: erst dann beherrscht er den Stoff.

Daher musste es eine Schrift, die, wie die recensirte, Methode lehren will, für geboten erachten, den Gegenstand mehrseitig zu beleuchten, und sich nicht mit einer einzigen (noch dazu mechanischen) Regel begnügen.

Nach der Umkehrungsmethode wird der Schüler z. B. also schreiben und verfahren:

$$1)\ 9\tfrac{9}{11} : 1\tfrac{1}{11} = \tfrac{108}{11} : \tfrac{12}{11} = \tfrac{108}{11} \times \tfrac{11}{12} = 9.$$

$$2)\ \frac{24}{95} : \frac{12}{19} = \frac{24}{95} \times \frac{19}{12} = \frac{2}{5}.$$

$$3)\ \frac{22\,a^2b^3c}{39\,p^4qr} : \frac{11\,a^2b^3}{3\,p^4r} = \frac{23\,a^2b^3c}{39\,p^4qr} \times \frac{3\,p^4r}{11\,a^2b^3} = \frac{2c}{13q}.$$

In Beispielen, wie Heis §. 25, 24—32 schreibt der Schüler, der die Brüche erst umkehrt, ganze Seiten voll Nebenrechnungen. Das nenne ich Unfug. Dass ein Mathematiker diese Beispiele in der angegebenen Weise rechnen würde, ist mir nicht denkbar.

Nicht die Regel ist praktisch, die sich am einfachsten ausspricht und für die meisten Fälle anwendbar ist, sondern diejenige, deren Ableitung aus den Begriffen der Grundoperationen am anschaulichsten ist, und die den Schüler mit möglichst grossem Nutzen für die Bildung des Denkens und mit möglichst wenig Mühe, Zeit und Schreiberei zum Ziele führt. Wenn nun die Aufgabe des Dividirens ist, aus dem Producte und dem einen Factor den andern zu finden, so ergibt sich in $\frac{24}{95} : \frac{12}{19}$ sehr einfach, dass 12 mit 2 und 19 mit 5 multiplicirt, d. h. 12 in 24 und 19 in 95 dividirt werden muss.

Von dem Schüler der höheren Schule muss man verlangen, dass er stets auf den Grundbegriff der Division zurückzugehen vermag, dass er sich stets die Frage vor die Seele hält: Womit muss ich den Divisor mulipliciren (oder was muss ich mit dem Divisor multipliciren), um den Dividend zu erhalten? So gelangt er auf die Regel: „Zähler in Zähler, Nenner in Nenner."

Geht eine dieser Divisionen nicht auf, so muss ihm schon aus der Multiplication bekannt sein, dass es einerlei ist, ob man den Zähler dividirt oder den Nenner multiplicirt, ob man den Nenner dividirt oder den Zähler multiplicirt, kurz jeder nicht aufgehende Factor tritt auf die entgegengesetzte Seite des Bruchstrichs.

Z. B. $\frac{5\,a^2bc^5}{12\,d^3e^4} : \frac{10\,a^2b^3}{3\,c^3d^2e^6}$ ergibt das Resultat sofort, ohne dass der Schüler nur eine einzige Ziffer oder einen einzigen Buchstaben als Ausrechnung oder Nebenrechnung zu schreiben hätte. Man dividirt mit 3 in 12, mit dem Factor 5 (aus der 10) in 5, mit 2 geht der Zähler nicht zu dividiren, so multiplicirt man den Nenner 4 und erhält als Resultat 8 im Nenner. Die Buchstaben behandelt man einzeln in alphabetischer Ordnung: a^2 in a^2 geht einmal, fällt also weg; b^3 in b geht nicht vollständig, es bleibt mit b^2 der Nenner zu multipliciren, also kommt b^2 in den Nenner, c^3 geht nicht im Nenner, multiplicirt also den Zähler u. s. f.

Dass der Zähler des Divisors den Dividenden dividirt, der Nenner multiplicirt ist nicht eine das Gedächtniss belastende Regel, sondern eine, dem Schüler nicht vorzuenthaltende, Einsicht, die ihm auch bei der Umkehrungsmethode zum geistigen Eigenthum werden muss.

Der Fall, dass die Nenner gleich sind, z. B. $\frac{6}{7} : \frac{2}{7}$, wird als der einfachere vorausgeschickt. Der Schüler frage: Womit muss ich $\frac{2}{7}$ multipliciren, um $\frac{6}{7}$ zu erhalten? und wird nicht leicht fehlgreifen. Er hat dann ein einfaches Verfahren und eine so einfache Ableitung, dass er gar keine Regel zu merken braucht

Die Umkehrung d. h. die Verwandlung der Division in Multiplication ist nur in zusammengesetzten Quotienten und Producten vortheilhaft z. B. Heis, §. 24, 24—26.

Nachschrift d. Red. für die geneigten Leser.

Ich darf wohl nur auf meinen Aufsatz IV, 222—227 hinweisen, aus dem deutlich ersichtlich ist, dass auch mir die Bruchrechnung nicht blos als ein „Handwerkszeug für die Ausführung höherer Rechnungen“ gilt. Die ganze dort gegebene Lection fordert vom Schüler schon ein ganz anständiges Maass von Denken. Ich muss bitten, in meinem letzten dort (S. 227) gesperrt gedruckten Satze: „Eine praktische Regel . . . . . . fördert“ die Worte **„im Unterrichte klar entwickelt und vom Schüler völlig verstanden“** — nicht zu übersehen!

Uebrigens berücksichtige auch ich die vom Verfasser mit Recht betonte Regel „Zähler i. Z., Nenner i. N.“ S. a. a. O. S. 225, letzte Z. u. — Die Forderung, praktische Regeln zu entwickeln, muss ich aber entschieden aufrecht erhalten! —

Ueber das Wort „Gegenwinkel.“

Von Demselben.

Die Benennung der Winkel in der Parallelentheorie ist noch ziemlich verchieden. „Wechselwinkel“ ist so ziemlich allgemein im Gebrauch und dürfte wol auch keinen Anstoss erregen. Aber „Gegenwinkel“ hat den grossen Fehler, dass man dieses Wort, analog der „Gegenseite,“ für „gegenüberliegende Winkel“ anwenden möchte, so dass also Gegenseite und Gegenwinkel einander entsprechen würden.

Der Name „conjugirte W.“ ist, wie mancher andere vorgeschlagene, zu lang, auch wohl nicht recht anschaulich begründet, die Benennung „innere Winkel“ passt auch für die innern Wechselwinkel.

Eher möchte ich mich mit Zieglers Vorschlag (III, 190) einverstanden erklären, nämlich gleichliegende (corresp.), ungleichliegende (innere Wechselw.) und halbgleichliegende (innere Gegenwinkel und gemischte Wechselw.); aber ohne Bedenken ist dieser Vorschlag auch nicht.

Ich glaube fast, es ist nur durch Bildung eines ganz neuen kurzen Wortes zu helfen und erlaube mir, den Collegen die Frage vorzulegen, ob ein solches, etwa das Wort „Anwinkel“ Zustimmung finden würde.*)

Ein Brief an den Herausgeber.

(Ad II, 212 u. IV, 273.)

Herr Redacteur! Die Gründe, welche H. Dr. Schwarz dafür angibt, den Multiplicator beim Schreiben vor den Multiplicand zu setzen, (welche ja auch Ihnen früher „sehr zutreffend“ erschienen,) haben mich, schon ehe ich den Aufsatz (II, 112 Ihrer vorzüglichen Zeitschrift) des H. Dr. S. gelesen, veranlasst, den Multiplicator vor den Multiplicand zu schreiben. Sie haben auch diese Gründe in Ihrem Aufsatze (IV, 273) nicht vollständig widerlegt, dagegen allerdings einen triftigen Gegengrund angeführt.

Erlauben Sie mir nun dem „usus est tyrannus“ das „usus est optimus magister“**) (ich übersehe dabei die etwas veränderte Bedeutung von usus nicht) gegenüberzustellen und ausserdem darauf aufmerksam zu machen, dass schon beim Erlernen des Einmaleins ($1 \times 7 = 7$; $2 \times 7 = 14$; $3 \times 7 = 21$;) der erste Factor als Multiplicator aufgefasst wird, sowie dass in einem Beispiele wie etwa 3×5827 (od. 5827×3) wohl kein Lehrer anders wird rechnen lassen als 3×7, 3×2, 3×8, 3×5.

Würden Sie vielleicht die Gefälligkeit haben auf diese Einwendungen (unter Verschweigung meines Namens) etwa im Briefkasten zu antworten, so dürfte dies wohl ausser mir allen jenen Lesern Ihrer vorzüglichen Zeitschrift angenehm sein, die sich etwa mit dem Vorschlage des H. Dr. S. befreundet haben. Mit vorzüglicher Hochachtung Ihr ergebenster Dr. T. B.

---

*) Dieser Ausdruck ist bereits in Oesterreich längst gebräuchlich. Vgl. Gernerth, Grundlehren der ebenen Geom. Wien 1873. §. 27. S. 10 u. Močnik geom. Anschauungslehre (Wien 1873) S. 20. Die Red.

**) Dieses geflügelte Wort finde ich allerdings nicht im Büchmann, dagegen (3. Aufl.) S. 121 „Rerum omnium magister usus“ Caes. b. civ. 2, 8. Der Herausgeber.

Antwort des Herausgebers: Hochgeschätzter Herr B.! Ich habe die Ehre auf Ihren Brief zu erwidern, dass ich zu denen gehöre, welche immer redlich bemüht sind, zu lernen und von den Schlacken alter (eingerosteter) Irrthümer sich zu befreien. So ist es denn gekommen, dass ich nach wiederholter aufmerksamer Lectüre des schätzbaren Aufsatzes (II, 112) unsers geehrten Mitarbeiters Dr. S. u. nach reiflicher Ueberlegung zu dem in IV, 274 ausgesprochenen Resultate gelangt bin und ich habe mich nicht gescheut, diese Ueberzeugungs-Metamorphose zu bekennen. Sollt ich irren, — so würde ich auch gerne diesen Irrthum zugestehen.

Vorerst muss ich aber dringend bitten, meine Behauptung mit schärferen Waffen zu bekämpfen. Denn die gebrauchten sind doch gar zu stumpf und verrostet, als dass es sich der Mühe lohnte, den Hieb zu pariren. — Ich habe in meinem Aufsatze IV, 274 meine Ansicht hinreichend klar ausgesprochen und ich bitte, erst den dort angeführten „triftigen Gegengrund," welcher psychologischer Natur ist und daher alle andern Gründe aufwiegen dürfte, recht wirkungsvoll zu bekämpfen, ja — wenn möglich — zu vernichten. Ich werde mich freuen, wenn Ihre Gegengründe so kräftig und überzeugungsfähig sind, dass ich durch sie bekehrt werde. Uebrigens hat die Sache am Ende nur theoretischen aber wenig praktischen Werth.

Ihr ergebener H.

Zwei Schüleraufgaben.

Von Dr. Pick.

1.

In der Walachei bedient man sich hin und wieder der Finger, um das Product zweier einzifferiger Zahlen, die grösser als 6 sind, zu finden und erspart durch diesen fast possirlichen Vortheil das Memoriren der schwierigeren Hälfte des Ein-mal-Eins. Das Verfahren ist folgendes:

Man gibt den Fingern beider Hände der Reihe nach die Werthe 6, 7, 8, 9, 10, also dem Daumen 6, Zeigefinger 7 u. s. w. Hat man nun zwei dieser Zahlen z. B. 8×9 zu multipliciren, so legt man die betreffenden Finger, hier Mittelfinger der einen und Goldfinger der andern Hand, an einander und multiplicirt die Anzahl der übrigbleibenden Finger der einen, hier 2, mit der der andern, hier 1, also $2 \times 1 = 2$. Zu diesem Producte gibt man so viel Zehner zu, als Finger an beiden Händen zu dieser Multiplication nicht benutzt worden sind (inclus. der zusammengesetzten), also $3 + 4 =$ 7 Zehner. Somit ist das Product 72.

Es ist zu beweisen, dass dieses Verfahren allgemein richtig ist.

Man verallgemeinere das Verfahren für die Grundzahl 9 des allgemeinen Numerationssytems.

2.

Ein Kegel mit dem Halbmesser r der Grundfläche und der Höhe h aus einem Stoffe, dessen Dichte s ist, wird mit der Basis nach abwärts in eine Flüssigkeit von der Dichte s' getaucht. Wie tief taucht er ein? Es ist die Formel auf elementarem Wege zu finden d. h. etwaige Gleichungen höheren Grades sind durch Kunstgriffe auf Gleichungen, die sich elementar lösen lassen, zurückzuführen. Die gefundene Endgleichung ist zu discutiren.

Literarische Berichte.

Boyman, Dr. J. R., Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien, Realschulen und andere höhere Lehranstalten. Zweiter Theil: Ebene Trigonometrie und Geometrie des Raumes. Dritte verbesserte Auflage. Köln und Reuss 1873.

Diese dritte Auflage ist „im Wesentlichen ein unveränderter Abdruck der (Ostern 1866 erschienenen) zweiten Auflage.“ Wenngleich nun das Buch in seiner zweiten Auflage von anderer Seite schon hinlänglich gewürdigt worden ist, so fühlen wir uns doch veranlasst, Einiges über diese neue Auflage zu sagen.

In der Trigonometrie hielt der Verf., wie er im Vorwort zur ersten Auflage sagt, eine ausführliche Betrachtung der sechs Functionen für nothwendig. Ob nun 16 volle Seiten für diesen Zweck nicht zu viel sind, möchten wir zu bedenken geben. Die Betrachtung der Cotangente, welche allein drei Seiten einnimmt, konnte wenigstens bedeutend abgekürzt und die der Secanten und Cosecanten, da sie als blosse reciproke Werthe der Cosinus und Sinus nur selten zur Anwendung kommen, füglich übergangen werden. Bei der Betrachtung der Tangente geben wir ferner zu erwägen, ob es nicht bedenklich sei, zwei diametral gegenüberliegende Tangenten an dem Kreise einzuführen und die Durchschnitte des beweglichen Schenkels mit der zweiten in die Betrachtung hinein zu ziehen? Wird der Anfänger nicht geneigt sein, zu glauben, die trigonometrischen Tangenten müssten im zweiten Quadranten positiv sein? und muss er es nicht für einen Act der Willkür halten, wenn gesagt wird: „man kann (also nicht: man muss) aber das Tangentenverhältniss für diesen Quadranten auch auf die erste Tangente zurückführen“ u. s. w.? Bei der Darstellung des Verfassers tritt der Uebergang aus dem Positiven in das Negative durch ∞ hindurch nicht hervor, wie er es doch plausibel machen will durch seine Angabe der Grenzwerthe $\tan 0^0 = +0$, $\tan 90^0 = \pm\infty$ u. s. w. In § 12 tritt ganz unvermittelt der Bogen für den Winkel ein, indem der Verf. sagt: „wenn $\sin\omega = a$ ist, so ist offenbar $\sphericalangle\ \omega$ der Winkel oder der Bogen, dessen sin $= a$ ist" oder kurz ausgedrückt $\omega = \text{arc}\ (\sin = a)$. Vorher ist nirgends gesagt, dass man die Functionen auch auf die Bögen beziehen könne und in welchem Sinne dies zu geschehen habe. Dass der Verf. in der Folge immer sich dieser in der höheren Mathematik gebräuchlichen Ausdrucksweise schon hier bedient, ist nur zu billigen. Die Entwickelung der goniometrischen Gleichungen ist scharf und klar. Eine grössere Reihe von Aufgaben zur Einübung des Gebrauchs derselben, mit Angabe der Resultate, ist beigegeben. In der eigentlichen Trigonometrie müssen wir es als einen Luxus bezeichnen, dass der Verf. alle Dreiecksgleichungen doppelt oder dreifach schreibt, $\sin\beta = \frac{b}{c}$ ist dasselbe, wie $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Der Schüler muss vom Anfang an daran gewöhnt werden, aus einer vorliegenden Dreiecksgleichung durch blosse Buchstabenvertauschung neue zu bilden oder dieselbe Gleichung mit vertauschten Buchstaben zu lesen, ohne sie zu schreiben. Aus ähnlichem Grunde ist es in der Trigonometrie auch als ein Luxus anzusehen, wenn aus der Aufgabe: aus einer Seite und zwei Winkeln die übrigen Stücke zu finden, zwei Aufgaben gemacht werden; in der Planimetrie hat dies allerdings seine Vorzüge. Das gleichschenklige Dreieck hätte kürzer abgethan und lieber das reguläre Polygon etwas eingehender behandelt werden können. Für das schiefwinklige Dreieck gibt der Verf. nur den Sinussatz, den Cosinussatz, den wir lieber den allgemeinen Pythagoräer nennen, und den Tangentensatz. Den Sinussatz schreiben wir lieber in der Form $\frac{a}{\sin\alpha} = d$ (Durchmesser des umgeschriebenen Kreises) und benutzen dieses d als Hülfsgrösse bei allen Aufgaben, in denen eine Seite mit ihrem Gegenwinkel in Betracht kommt. Bei dem allgemeinen Pythagoräer vermissen wir die zweite bequeme und symmetrische Form

$$c^2 = (a+b)^2\, \overline{\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2} + (\mathrm{a}-\mathrm{b})^2 \cdot \overline{\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2}.$$

Wir vermissen ferner die bei vielen Aufgaben mit Vortheil anzuwendende, von Brockmann so genannte „separirte Tangentenformel," die wir lieber den „Satz von 4 aufeinander folgenden Stücken" nennen und in folgender Fassung den Schülern darbieten:

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot c - \sin\beta \cdot a = a \cdot \cos\beta \cdot tg\,\alpha$$

indem man so zuerst die vier aufeinander folgenden Stücke durchwandert und nachher wieder rückwärts mit Ueberspringung der mittleren Seite geht. Weiter vermissen wir den Wollweide'schen Satz $\frac{a \pm b}{c}$ u. s. w., und den Tangentendreiecks-Satz, welcher eine Pelation zwischen dem Halbmesser ϱ des eingeschriebenen Kreises und den Dreiecksseiten ausdrückt und zu der Hülfsgrösse ϱ führt, mit deren Hülfe die Winkel nach der Gleichung $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}$ bequem zu finden sind. Der Verf. berechnet nach alter Weise aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite entweder mittelst des Tangentensatzes und des Sinussatzes oder mittelst eines Hülfswinkels φ, der in gar keiner Beziehung zum vorliegenden Dreieck steht und hat in beiden Fällen 8 Aufschlagungen nöthig; auch gibt er in dem beigefügten Musterbeispiele zuerst diesen Hülfswinkel φ selbst an, anstatt sogleich aus dem log sin φ den log cos φ zu bestimmen, wofür noch eine 9. Aufschlagung zu rechnen wäre. Nach unserer vorher angegebenen Gleichung $c^2 = [(a+b) \sin \frac{1}{2} \gamma]^2 + [(a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma]^2$ hat man, wenn man ohne Gauss'sche Logarithmen rechnet, nur 7 Aufschlagungen und mit Gauss'schen Logarithmen nur 5 Aufschlagungen nöthig. Will man mit einem Hülfswinkel rechnen, so setze man $\frac{(a-b) \cos \frac{1}{2} \gamma}{(a+b) \sin \frac{1}{2} \gamma} = \operatorname{tg} \varphi$, dann ist $c = \frac{(a+b) \cdot \sin \frac{1}{2} \gamma}{\cos \varphi}$, wo in der ersten Gleichung nicht $\frac{\cos \frac{1}{2} \gamma}{\sin \frac{1}{2} \gamma}$ in $\cot \frac{1}{2} \gamma$ zusammengezogen wird, weil man den ganzen Nenner der ersten Gleichung als Zähler für die zweite erhält, den Logarithmus desselben also noch einmal benutzen kann. Der hier gebrauchte Hülfswinkel ist aber kein fremdartiger, sondern, wie aus dem Tangentensatz hervorgeht, $= \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$; und der Aufschlagungen sind nur 6 nöthig. Nebenbei bemerken wir, dass der Verf. stets schreibt z. B. $39^{\mathrm{m}}\ 1^{\mathrm{dm}}\ 4^{\mathrm{cm}}$ statt des kurzen $39{,}14^{\mathrm{m}}$. Warum es verschmäht wurde, die wichtige Hülfsgrösse $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ schon bei der Entwickelung der Functionen der halben Dreieckswinkel einzuführen, ist uns unerfindlich. Lobend müssen wir dagegen erwähnen, dass der Verf. bei der Aufgabe: aus b, c, β die übrigen Stücke zu finden, auch die Gleichung

$$a = c \cdot \cos \beta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin \beta^2}$$

entwickelt hat, weil wir aus Erfahrung wissen, dass vielen Schülern erst durch diese Gleichung das volle Verständniss über die mögliche Zweideutigkeit des Resultats aufging. Durch Einführung der Hülfsgrösse $d = \frac{b}{\sin \beta}$ verwandelt sich übrigens diese Gleichung in die bequemere $a = c \cdot \cos \beta \pm \sqrt{\frac{(d+c)(d-c)}{d}}$, bei deren Gebrauch man nur 8 Aufschlagungen nöthig hat, während man bei der ursprünglichen deren 10 machen muss. — Die Entwickelung der Gleichungen für den Flächeninhalt ist mit einer überflüssig grossen Breite durchgeführt, der Verf. hat es auch hier für nöthig erachtet, c, α, β und c, α, γ als zwei verschiedene Aufgaben zu behandeln. Während wir uns also über die Arbeit an und für sich nur lobend äussern können, bedauern wir, dass der Verf. mehrere nicht blos interessante, sondern praktisch wichtige Relationen übergangen und dem Schüler bei der Entwickelung der Grundgleichungen wenig oder gar keine Selbstthätigkeit überlassen hat. Als Ersatz für letzteren Uebelstand dient nun allerdings die gut geordnete und mit Geschick ausgewählte Sammlung von Uebungsbeispielen, denen der Verf. ganz mit Recht die Resultate beigefügt hat, damit der Schüler erkenne, ob er sein Resultat nicht überhaupt richtig, sondern auch in der angemessensten und kürzesten Form gefunden habe.

Weit weniger Ausstellungen haben wir über die Geometrie des Raumes zu machen, deren Lehren mit schon oben gerühmter Klarheit und Fasslichkeit, noch dazu unterstützt durch vortreffliche Figuren vorgetragen sind. Auch hier sind es die zahlreichen und gut gewählten Uebungsaufgaben, die hinter jedem Hauptabschnitt eingefügt sind, durch welche sich das Buch vortheilhaft vor manchem andern auszeichnet. Es bestehen diese aus a) Aufsuchung geometrischer Oerter, b) Constructionsaufgaben, c) Rechnungsaufgaben. Gern hätten wir es gesehen, wenn aus der darstellenden Geometrie (Projectionslehre) wenigstens so viel aufgenommen worden wäre, dass die Schüler befähigt gemacht würden, den orthogonalen Grund- und Aufriss eines Körpers in seiner einfachsten Stellung gegen die Projectionsebenen zu zeichnen, was ihnen bei der Lösung von Aufgaben sehr zu statten kommen würde. Aufgefallen ist uns ferner, dass der Verf. gar keine Notiz von dem Wittstein'schen Prismatoid nimmt, dessen Inhaltsgleichung $J = \frac{1}{3} h \left(\frac{G+g}{2} + 2M\right)$ vom allgemeinsten Gebrauch für Körper ist, die parallele Endflächen ohne Zwischenecken haben, selbst, wenn sich eine oder beide Endflächen auf eine Gerade oder einen Punkt reduciren, insbesondere also für Keile, deren Schneide mit dem Kopf parallel geht, für Pyramidenstumpfe, schräg abgestumpfte dreiseitige Prismen und 4seitige Parallelepipeda, Obelisken u. s. w. Für letztgenannten Körper entwickelt der Verf. die Gleichung, ohne zu sagen, was man einen Obelisken nennt und wodurch sich derselbe vom Pyramidenstumpf unterscheidet. Uebrigens ist auch der Schluss der Entwickelung des Obelisken recht unklar, wie man es sonst bei dem Verf. nicht gewöhnt ist. Bei dem sphärischen Dreieck ist der sphärische Excess unerwähnt geblieben. Werthvoll ist die Beigabe über Maxima und Minima der Oberflächen und Volumina mit den Uebungsaufgaben. Als Anhang zur Stereometrie ist die Entwickelung der nothwendigsten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie mit ausgerechneten Uebungsbeispielen aus der mathematischen Geographie beigegeben.

Chr. Scherling.

STeinhauser, Anton, die Netze der Poinsot'schen Körper zum Behufe der Darstellung ihrer Modelle aus Pappe. Mit 5 Tafeln. Graz 1871.

Derselbe, über die geometrische Construction der Stereoskopbilder*). Ein Beitrag zur centralen Projection. Für Techniker und Physiker bearbeitet. Mit 22 Figuren. Graz 1870.

Das erste, nur 22 Seiten zählende Werk wird denjenigen, welche sich mit den Poinsot'schen regulären Körpern näher beschäftigen wollen, eine willkommene Gabe sein. Diese Körper sind in der 2. Aufl. der Stereometrie von Heis und Eschweiler einer ausführlicheren Untersuchung unterworfen und im 3. Bande des genannten Werkes ist die Berechnung derselben gegeben worden. Das Verständniss dürfte wesentlich erleichtert werden durch das Selbstanfertigen der Netze und der Modelle, wozu das kleine Werk eine sehr gute Anleitung gibt. Es verdient Anerkennung, dass der Verfasser die von Wiener eingeführten deutschen Bezeichnungen: zwölfeckiges Sternzwölfflach, sterneckiges Zwanzigflach und sterneckiges Zwölfflach beibehalten hat.

Das zweite Werkchen, 52 Seiten Text enthaltend, soll eine Lücke in den Lehrbüchern der Perspective, bezüglich der Construction von Stereoskopbildern ausfüllen, und den Techniker oder jeden sich mit darstellender Geometrie Beschäftigenden befähigen, auf theoretischer Basis solche Bilder mit vollstem Verständnisse zu construiren. Die Frage, ob dem Verfasser dies gelungen, müssen wir bejaen. Der reine Techniker, der sich über das in Rede stehende Thema mühelos Aufklärung verschaffen will, findet dieselbe in dem Buche, wenn er nur die die graphische Darstellung besprechenden Partieen überschlägt; er verliert dabei den Zusammenhang nicht. Aus diesem Grunde kann das Werkchen auch jedem Stereoskopfreunde empfohlen werden.

Wir geben nur noch eine Uebersicht des Inhaltes. Nach einer Einleitung über das einäugige und zweiäugige Sehen und über Stereoskopbilder im Allgemeinen, wird in der 1. Abtheilung die geometrische Construction der Stereoskopbilder besprochen und durch gute Figuren erläutert. Die 2. Abtheilung lehrt die Erzeugung der Stereoskopbilder durch Photographie, die 3. Abtheilung handelt von den Hülfsmitteln zur Besichtigung der Bilder. Zur Betrachtung der Bilder mit gekreuzten Sehaxen gibt der Verfasser einen neuen einfachen Apparat an. In der 4. Abtheilung werden noch zwei Maasstabellen zur geometrischen Construction von Stereoskopbildern für das gewöhnliche Brewster'sche Stereoskop gegeben. Chr. Sch.

*) Vgl. den Ausstellungsbericht IV, 441. D. Red.

Sidler, Dr. G. Trisection eines Kreisbogens und die Kreisconchoide. Besonderer Abdruck aus den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern. 1873.

Dieses 35 Seiten Text und 37 Figuren auf 4 Tafeln enthaltende höchst interessante Werkchen nimmt seinen Ausgang von der Hippauf'schen Lösung der Trisection, welche im III. Jahrgang dieser Zeitschrift S. 215 ff. mitgetheilt wurde und später in einem besondern Abdruck bei Teubner in Leipzig erschienen ist. Der Verfasser reproducirt zunächst in § 1 die Hippauf'sche Lösung ganz kurz und führt für die Trisectionscurve den kurzen bezeichnenden Namen Kreisconchoide ein, geht aber dann weiter als Hippauf und liefert eine vollständige Monographie dieser Curve in meist ganz elementarer Weise. In § 2 lehrt der Verfasser andere Erzeugungsarten der Kreisconchoide, von denen die eine auf die von Jouanne im Jahre 1870 bekannt gemachte Lösung der Trisection führt, indem sich die Kreisconchoide als Fusspunktencurve der Perpendikel, die von einem Pol O auf die variabeln Tangenten eines Kreises, dessen Durchmesser gleich der Entfernung seines Mittelpunkts vom Pol O ist, darstellt. Dieselbe Curve hat auch C. Albrich in Hermannstadt, nach seiner Mittheilung im III. Jahrgang d. Zeitschrift S. 537, in einem Programm entwickelt, als deren Coordinatengleichung $(x^2 + y^2 - 2\,ax)^2 = a^2\,(x^2 + y^2)$ angegeben ist,*) wo a die halbe Entfernung des festen Pols O vom Mittelpunkte des Kreises oder den Radius der circularen Basis (nach Hippauf) ist. Im weitern Verfolg dieser Betrachtungen findet unser Verfasser die Kreisconchoide als die Curve, die ein mit einem Kreise vom Radius r fest verbundener und vom Centrumdesselben um $2\,r$ abstehender Punkt P beschreibt, wenn dieser Kreis auf einem gleich grossen Kreise rollt. In § 3 werden auf elementarem Wege mehrere Constructionen der Normalen und die Eigenschaften derselben, die doppelt berührenden Kreise, die Maxima und Minima der Ordinaten und Abscissen und der Doppelpunkt betrachtet. In § 4 wird auf einfache Weise gezeigt, dass die Evolute der Kreisconchoide die Brennlinie ist, welche durch Reflexion der vom Pole O ausgehenden Strahlen von einem mit dem Grundkreise concentrischen Kreise von halb so grossem Durchmesser erzeugt wird. Demnächst wird der Krümmungsmittelpunkt für irgend einen Punkt der Conchoide aufgesucht und gezeigt, dass dieser der andere Brennpunkt eines Kegelschnitts ist, dessen einer der Pol O ist. In § 5 werden der Flächeninhalt und die Bogenlänge erörtert, was allerdings nicht ganz ohne Integralrechnung möglich war. Die interessantesten Resultate dieses § sind: 1) die Gesammtfläche der

*) Wohl durch einen Druckfehler war $+ 2\,ax$ statt $- 2\,ax$ angegeben. Denn die Polargleichung ist $\frac{u + a}{2a} = \cos\varphi$. Da nun $\cos\varphi = \frac{x}{u}$ und $u^2 = x^2 + y^2$ ist, so ergiebt sich leicht $x^2 + y^2 - 2ax + a\,\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ und hieraus die oben angegebene Form.

Curve d. h. die Summe der innern und äussern Conchoidenflächen ist das Dreifache der Fläche des Grundkreises, 2. die Kreisconchoide hat mit einer Ellipse, deren Halbaxen die Symmetrieaxe und der darauf senkrechte Radiusvector sind, gleichen Flächeninhalt und gleichen Umfang.

Hiemit sei das kleine Werk allen Mathematikern bestens empfohlen: wir sind überzeugt, dass die Lectüre desselben ihnen ebensoviel Freude machen wird, wie uns selbst. CH. SCHERLING.

I. NAGEL, Dr. CHR. H. Ebene Geometrie. Zweite Abtheilung. Die Fundamentalsätze der neuern Geometrie. Ulm 1873.

II. MAIER, A. Prof. Neuere Geometrie. Für höhere Lehranstalten. Beilage zum Programm des Grossherz. Realgymnasiums zu Karlsruhe. 1873.

I. Dieses Büchelchen ist eine Beigabe zu des Verfassers längst bekanntem und geschätztem, im vorigen Jahre in 13. Auflage erschienenem Lehrbuche der ebenen Geometrie. Der Verfasser glaubte die neuere Geometrie, „weil sie eine so bedeutende Ausdehnung und auch in praktischer Beziehung, in der zeichnenden Geometrie, so vielseitige Anwendung gewonnen habe, nicht mehr ignoriren zu dürfen.“ Er hält indess dafür, dass viele Abschnitte derselben, z. B. die Lehre von den Involutionen, den Standpunkt der elementaren Behandlungsweise, wie sie für Gymnasien und Realschulen nach der Fassungskraft der Schüler erforderlich sei, überschreiten, und verweist diese in solche Lehranstalten, welche auch die höheren Zweige der ebenen Geometrie, Kegelschnitte und andere höhere Curven zu ihrem Gebiete rechnen. Daher gibt er in seinem nur $2^1/_4$ Bogen enthaltenden Werkchen nur die harmonische Theilung und *a*) ihre Anwendung auf geradlinige Figuren, *b*) ihre Anwendung auf den Kreis. — Wenn wir dem geehrten Herrn Verfasser darin beistimmen, dass eine weise Beschränkung nöthig sei, sofern eine gründliche Vorbildung für höhere Studien erreicht werden soll, so geht er nach unserer Ansicht etwas zu weit, wenn er die projectivischen Punktreihen und Strahlenbüschel und was damit zusammenhängt, ganz ausschliesst; er traut nach unserer Erfahrung den Realschülern 1. O. zu wenig Fassungsgabe zu. Aus dem Dargebotenen werden die Schüler kaum eine Ahnung von der Methode der neueren Geometrie bekommen, um so weniger, als Alles nach der alten Euklidischen Methode behandelt wird. — Wir haben aber noch einige sachliche Bemerkungen zu machen. Im 9. Satz definirt der Verfasser die Transversale als eine Gerade, welche die drei Seiten eines Dreiecks schneidet. Die neuere Geometrie fasst den Begriff der Transversale viel allgemeiner auf. Uebrigens sieht sich der Verfasser in einer Anmerkung genöthigt, die früher gegebene, alte Definition einer

Transversale im Dreieck zu desavouiren: es wäre besser gewesen, wenn er nach dem Vorgange anderer neuerer Lehrbücher diesen engsten Begriff einer Transversale im Dreieck aufgegeben und dafür das Wort Mittellinie angenommen hätte. In demselben Satze gebraucht der Verfasser den Ausdruck Linie, wo er Strecke sagen müsste. Den Satz des Menelaus bietet er in der Productenform dar, und findet sich veranlasst, derselben einen geometrischen Sinn unterzulegen, nämlich „rechtwinkliges Parallelepipedon." Später aber gibt er auch den Pascalschen Satz u. s. w., wo mehr als drei Factoren vorkommen; da muss er natürlich eine Erklärung schuldig bleiben. Es ist besser, wie wir früher schon erklärt haben, diesen und die verwandten Sätze als ein Product der Verhältnisse der bezüglichen Strecken darzubieten, wo alles Verfängliche und Bedenkliche wegfällig wird, weil Verhältnisse Zahlen sind. Was der Herr Verfasser im 20. Satz als ein vollständiges Viereck erklärt, nennt die neuere Geometrie vollständiges Vierseit; zwischen beiden macht dieselbe einen Unterschied. Im Uebrigen ist das kleine Werk innerhalb der gesteckten Grenzen vollständig und es waltet darin die bei dem Herrn Verfasser bekannte Schärfe und Klarheit.

II. Einen ganz andern Eindruck macht Nr. 2. Der Verfasser steht auf der Höhe der neuern Geometrie und hat aus dem weiten Gebiete derselben dasjenige, was für die Schüler höherer Realschulen — wir meinen die preussischen Realschulen 1. O. — wenn auch nicht gerade leicht, doch überhaupt fasslich ist, zu einem wohlgeordneten Ganzen zusammengestellt. Kenntniss der Trigonometrie und Stereometrie wird vorausgesetzt. Das Schriftchen enthält 79 Seiten Text und 110 Figuren auf 2 Tafeln, denen wir eine bessere Ausführung gewünscht hätten. Der 1. Abschnitt handelt von den projectivischen Punktreihen und Strahlenbüscheln. In demselben gibt der Verfasser *A.* die Grundbegriffe, nämlich den Begriff der perspectivischen oder Centralprojection, des unendlich fernen Punktes (nicht der unendlich fernen Punkte), den die neuere Geometrie nicht entbehren kann, obgleich man versucht hat, denselben durch einen nicht eben angemessenen Witz in dieser Zeitschrift zu beseitigen. Daran reihen sich die unendlich ferne Gerade einer Ebene und die unendlich ferne Ebene des Raumes; der Begriff einer Punktreihe und eines Strahlenbüschels und ihre Beziehungen auf einander in projectivischer und perspectivischer Hinsicht, Congruenz und Aehnlichkeit derselben. Aufgefallen ist uns, dass der Verfasser die Theile, in welche eine unbegrenzte Gerade durch einen auf ihr liegenden Punkt geschieden wird, als zwei verschiedene Strahlen bezeichnet, während sie doch nur entgegengesetzte Richtungen desselben Strahles sind. Die letztere Auffassung scheint uns dem Begriff eines unendlich fernen Punktes mehr zu entsprechen. *B.* handelt von den Doppelverhältnissen. Nach dem Vorgange anderer Schriftsteller nennt unser Verfasser ein Doppelverhältniss auch ein anharmonisches. Ein Doppelverhältniss kann doch auch harmonisch sein; daher kann ein anharmonisches

Verhältniss erst als Gegensatz zum harmonischen seine richtige Bedeutung erhalten. Der Unterabschnitt *C.* behandelt die harmonischen Punktreihen und Strahlenbüschel. Der Verfasser betrachtet nur den absoluten Werth des Doppelverhältnisses, was wir für diese Stufe des Unterrichts nicht missbilligen; nur in einer Anmerkung macht er darauf aufmerksam, dass der Werth des harmonischen Doppelverhältnisses bei Berücksichtigung der Vorzeichen $= -1$ zu setzen sei. Unter *D.* wird das vollständige Vierseit und das vollständige Viereck kurz behandelt. In gedrängter, aber doch alles Wesentliche umfassender Weise werden sodann die Involutionen vorgetragen.

Im zweiten Abschnitt wird der Kreis in seinen projectivischen und harmonischen Verhältnissen betrachtet, und zwar *A.* die projectivischen Strahlenbüschel im Kreise und die projectivischen Punktreihen seiner Tangenten; *B.* der Pascalsche und Brianchon'sche Satz, *C.* Pol und Polare, *D.* Polarisation und Reciprocität.

Der dritte Abschnitt endlich behandelt die Kegelschnitte *A.* als Kreisprojectionen, *B.* die Mittelpunkte und Durchmesser derselben, *C.* die Brennpunkte, *D.* die Gleichungen der Kegelschnitte und den Inhalt der Ellipse.

Durch strenge Consequenz, Schärfe und Kürze des Ausdrucks ist es dem Verfasser möglich geworden, auf so wenigen Blättern so vieles mitzutheilen, was vollkommen ausreichend ist, um einen mit Bleistift, Lineal und Zirkel bewaffneten Leser in die neuere Geometrie einzuführen; daher können wir das Werkchen Allen, die sich einführen lassen wollen, insbesondere auch den Lehrern an höheren Realschulen als Leitfaden für ihre Schüler bestens empfehlen.

Chr. Scherling.

Bisching, A. (Prof. d. Naturgeschichte an der Ober-Real-Schule Wieden und der allgemeinen Waarenkunde an der 1. öffentl. höhern Handelslehranstalt in Wien), Leitfaden der allgemeinen Waarenkunde zum Gebrauche für Handels- und Gewerbeschulen sowie zum Selbstunterrichte. 238 S. gr. 8., mit eingedruckten Holzschnitten. Wien 1873. A. Hölder. Becks Universitäts-Buchhandlung. Pr. 2 fl. 80 Xr. (ca. $1\frac{2}{3}$ Thlr.)

Das vorliegende Werk ist in seiner Art etwas Neues. Denn wenn auch für Waarenkunde bereits grössere Werke vorhanden sind, so sind sie doch meist veraltet und nicht für den Bedarf einer Schule eingerichtet; auch behandeln sie meist nur einen oder den andern Theil des gesammten Feldes dieser Wissenschaft und selten stehen sie völlig auf der Höhe des Wissens unserer Zeit. Es ist dies auch schwer, da die Waarenkunde so verschiedenartige Gegenstände umfasst, dass selten ein Gelehrter alle ihre Theile gleichmässig auszuführen im Stande ist. Um es dennoch zu erreichen, schlug Verf. den einzig dazu führenden Weg ein, er berieth sich in allen den Theilen, wo er sich nicht völlig zu Hause fühlte, wo seine Quellen ihn im Stiche liessen, wie bei so manchen neueren Fragen der Fall ist, mit denen, welche über die Frage allein ein massgebendes Urtheil fällen können, er suchte die Geschäftsleute auf, welche den Stoff herstellen oder verarbeiten, befragte Fachleute, welche sich eingehend damit beschäftigen und suchte in jeder Hinsicht durch eingehende Nachforschungen zu erfahren, wie unsere Kenntnisse über verschiedene Waaren sich etwa erweitert haben. Eine dem Werke vorgesetzte kurze Vorrede vom Prof. des Faches an der Wiener technischen Hochschule lässt uns einen Blick in die geschichtliche Entwickelung der Waarenkunde thun und weist hin auf ihre Wichtigkeit in den Schulen, vorzugsweise den Handelschulen, wo man dem Gegenstande noch bei weitem zu wenig Aufmerksamkeit zuwendet, sei es nun aus Mangel an Lehrbüchern, Lehrkräften oder aus andern Umständen.

Was nun das Buch selbst betrifft, so gibt Verf. zuerst eine kurze Einleitung, in der er den Stoff benennt und die wichtigsten Eigenschaften namhaft macht, auf welche es bei der Kenntniss der Waaren ankommt. Verf. konnte sich dabei kurz fassen, da der Cursus der Waarenkunde schon eine Summe von naturhistorischen, physikalischen und chemischen Kenntnissen voraussetzt.

Die Anordnung der betrachteten Stoffe ist nach den drei Naturreichen vorgenommen. Es werden die aus dem Mineralreiche entnommenen Waaren zuerst betrachtet, die aus dem Pflanzen- und Thierreiche folgen im zweiten Abschnitt.

Den Anfang macht Verf. mit den Schmucksteinen, die er in Edelsteine ersten, zweiten, dritten und vierten Ranges eintheilt, an welche er noch Halbedelsteine anreiht. Alle Mineralien, welche in irgend einer Weise zu Galanteriegegenständen benutzt werden, finden wir in dieser Aufzählung. Sie werden kurz charakterisirt, es wird der Fundort, bei den schon längere Zeit in Gebrauch befindlichen einiges Historische, manches über den Ort und die Art der Verarbeitung angegeben, sowie über den Werth.

In ähnlicher Weise, der Wichtigkeit der Sache halber jedoch weit eingehender, behandelt Verf. sodann die Metalle und Erze. Hier war besondere Veranlassung, auf in neuerer Zeit zur Anwendung gekommene Legirungen Rücksicht zu nehmen.

Die Thonwaaren bilden einen weiteren Abschnitt, die Glaswaaren den vierten, worauf die Bau-, Verzierungs- und Sculpturmaterialien folgen, die Schleif- und Polirmittel, Zeichen- und Farbewaaren, Mineralsäuren, Salze, Zünd- und Brennstoffe.

Aus den organischen Naturreichen werden zuerst Nahrungs- und Genussmittel, einschliesslich der Gewürze, betrachtet. Wir begegnen unter dieser Rubrik den mannichfachsten Mehl- und andern Früchten, sowie den häufigsten im Haushalte vorkommenden Gewürzen. Die darauf folgenden

Gährungsproducte umfassen die einschlagenden Getränke und den Essig. Sehr ausführlich werden die Spinnstoffe behandelt, und zwar gibt Verf. hier auch eine Uebersicht vieler Sorten von Gespinnsten und Geweben. Er nennt auch die neuesten einschlagenden Stoffe, welche zum Theil eine besondere Wichtigkeit zu erlangen versprechen. Das Papier wird hier behandelt. Ein kleiner Abschnitt wird den gerbstoffhaltigen Körpern, ein grösserer den Farbstoffen gewidmet.

Die genannten Gebiete nimmt Verf. mit grosser Ausführlichkeit vor, so dass man in den meisten Fällen aus dem Buche über einen noch fremden, in der Technik verwendeten Stoff sich Raths erholen kann. Die Beschreibungen enthalten das Wesentlichste, ohne starke Voraussetzungen bezüglich der Vorkenntnisse zu machen. Wir können uns deshalb als Grundlage für den Unterricht in der Waarenkunde mit Benutzung einer entsprechenden Waarensammlung, welche durch die Anschauung das in den Beschreibungen oft nur kurz Gegebene erläutert, kein besseres Hilfsbuch denken. Wir halten es indessen auch für den Selbstunterricht vorzüglich geeignet für jeden, der in das Wesen der Waarenkunde eindringen will, ohne dieselbe gerade zu seinem Hauptstudium zu machen, so insbesondere für den Lehrer an Real- und Bürgerschulen. Der Lehrer der Haushaltungskunde, der Chemie und Technologie wird vielfach Neues in dem Werke finden und aus dem Fleisse, mit dem Verf. seinen Stoff zusammengetragen hat, Nutzen für sich und seinen Unterricht schöpfen können. Durch Hinweisung auf zahlreiche historische Momente wird das Werk noch überdies belebt und belehrend. Recht praktisch sind auch die Hinweisungen auf die in den k. k. Cabinetten verwahrten Seltenheiten bei Besprechung der Edelsteine. Mancher Wien künftig besuchende Lehrer wird es dem Verf. Dank wissen, darauf aufmerksam gemacht worden zu sein.

Wir empfehlen daher in jeder Hinsicht das Werk, obschon es sich bescheidener Weise nur Leitfaden nennt, als ein kleines recht brauchbares Handbuch.

Wien. Dr. Carl Rothe.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dgl.)

Von der Unterrichts-Ausstellung auf der Wiener Weltausstellung.*)

Erxleben's geologische Bilder**).

Der Anschauungsunterricht in der Naturgeschichte der unorganischen Naturproducte hat mit einer grösseru Schwierigkeit zu kämpfen, als der in der Organographie, nämlich, dass er sich direct auf die Betrachtung der Naturkörper beziehen muss, und in den wenigsten Fällen von Abbildungen Gebrauch machen kann. Alle auch noch so sorgfältig ausgeführten Bilder von Mineralien etc. weichen weit ab von dem, was die Wirklichkeit bietet; das Gesetz der Aggregation, welches das Individuum sowohl als die Gruppe derselben charakterisirt, die scheinbare Willkürlichkeit und Vielgestaltigkeit an einer und derselben Art lassen keine andere Unterlage zu, als die der Naturproducte selbst. Genügen in vielen Fällen beim Unterrichte in den Anfangsgründen der Zoologie und Botanik Wandtafeln, so verlangt die Mineralogie schon eine Sammlung von Mineralien, wenn sie mit einigem Erfolge bei den Schülern gelehrt werden soll. Dasselbe ist in noch weit grösserem Massstabe der Fall bei der Gesteinslehre und Geologie. Wie weit würde ein Lehrer kommen, wenn er seinen Schülern z. B. Granit und Porphyr beschreiben wollte, ohne ihnen durch ein untergelegtes Handstück das deütlich zu machen, was er ihnen vorzutragen hat?

In der Geologie sollte man freilich glauben, dass die Abbildung von Petrefacten als organischer Reste leichter zu benützen sein möchten, allein gerade hier macht sich ein ähnlicher Umstand geltend wie bei den Mineralien; die Abbildung ist nach einem bestimmten, best erhaltenen Individuum genommen, andere Individuen sind in anderer Lage, mehr oder weniger gut erhalten, zur Versteinerung gekommen; kommt nun noch dazu, dass der Zeichner die Abbildung kunstgerecht verbessert, so kommt der Lernende zu keiner klaren Vorstellung, wie der Gegenstand in der Natur eigentlich aussieht, er lernt eine fremde Sprache, ohne die Schriftzeichen recht lesen zu können! Gerade die vorher erwähnte Eigenschaft der Petrefacten macht oft selbst Eingeweihten Schwierigkeiten, und wenn es verhältnissmässig leicht ist, Fachschüler in das Verständniss von Mineralien und Gesteinen einzuführen, so macht die Anleitung zum Bestimmen von Petrefacten in den meisten Fällen Schwierigkeiten. Man kann um so weniger von einem Erstling in dieser Disciplin verlangen, dass er selbst ein etwa vorhandenes Naturproduct mit einer Abbildung in Uebereinstimmung bringe. Wenn man unmöglich verlangen kann, dass der Schüler mit dem Lehrbuch auch einen Kasten Mineralien, Gesteine etc. herumschleppt, so gehört es offenbar dazu, dass der Lehrer ihm doch zu

*) Der Bericht über die geographischen (incl. astronom.-geogr.) Lehrmittel folgt im 2. Heft.

**) Wir bitten die Leser dieser Zeitschrift (Lehrer und Fachleute) um ähnliche Mittheilungen resp. Beschreibungen neuer Lehrmittel. D. Red.

seiner Abbildung im Buche den Naturkörper selbst vor die Augen führt. Die Lehranstalt muss oder soll wenigstens die betreffenden Gegenstände unter ihren Lehrmitteln besitzen. Die Beschaffung von Mineralien hat keine besonderen Schwierigkeiten, da man mehr oder weniger umfangreiche Sammlungen zu mässigem Preise erlangen kann, hinsichtlich der geologischen Sammlungen ist dies aber nicht so leicht, denn es beschäftigen sich weit weniger Leute mit der Zusammenstellung derselben, und die Anschaffung ist unter Umständen auch mit grösseren Kosten verbunden.

Eine sehr praktische, in jeder Beziehung empfehlenswerthe Idee scheinen mir daher die von Emil Erxleben, Apotheker zu Landskron in Böhmen, zusammengestellten **geologischen Bilder** zu besitzen. In 3 Tableaux finden wir hier die Hauptformationen der Erde in ihrer Aufeinanderfolge dargestellt, zugleich ist aber jede Formation mit den betreffenden Leitfossilien ausgestattet. Der Grund der Tableaux ist nämlich nach Art der Fraas'schen Wandtafeln in bestimmten Farben, welche zugleich Mächtigkeit und Störung der Lagerung andeuten, in die Formationen eingetheilt. Der jeweilige Raum einer Formation ist mit den entsprechenden Gesteinsarten und charakteristischen Petrefacten beklebt, eine Etiquette unter jedem Stücke gibt die Erklärung. Als Zugabe enthält der obere Rand 3 nett entsprechende geologische Landschaftsbilder.

Mit dieser Idee sind folgende praktische Eigenschaften verknüpft.

1) Die Bilder können zu jedem Leitfaden benutzt werden.

2) Sie nehmen als Sammlung, weil sie aufhängbar sind, weniger Raum weg.

3) Sie lassen keine Verwechslung der Gegenstände zu, da dieselben festgemacht sind.

4) Sie machen den Schüler nicht nur mit den geognostischen (paläontologischen) Naturproducten vertraut, sondern sie veranschaulichen ihm auch, wie (verschieden) dieselben in den Formationen wechselten, und wie diese aufeinanderfolgen.

5) Der Lehrer kann sich auf die Richtigkeit der Bestimmung hinlänglich verlassen.

6) Ist der Preis (15 fl. ö. W.) ein sehr moderirter.

Letzterer Punkt dürfte sich für spätere Zeiten noch viel günstiger gestalten als es gegenwärtig der Fall ist. Denn je mehr Lehranstalten sich mit den Erxleben'schen Bildern versehen, desto niedriger kann ihr Preis gestellt werden. Je weiter dieselben aber Verwendung finden, desto mehr kann die Idee dem Bedürfnisse des einzelnen Institutes angepasst werden.

Herr Erxleben, der kein lucratives Geschäft mit seinen Bildern zu machen gedenkt, sondern nur von dem Wunsche geleitet wird, sich im Interesse seines Lieblingsstudiums nützlich zu machen, wird gerne jedem praktischen Rathschlag und erfüllbaren Wunsch nachkommen.

Ich glaube mit gutem Gewissen die Aufmerksamkeit der Herren Professoren an den Mittelschulen auf vorerwähntes Lehrmittel lenken zu sollen und dieses ihnen empfehlen zu dürfen. Das Anerkennungs-Diplom, welches die Weltausstellungs-Jury Herrn Erxleben für seine geologischen Bilder zuerkannte, spricht dafür, dass auch andere Fachmänner meine Ansicht theilen.

Prag. Dr. Gustav C. Laube,
Prof. an der Technik.

Anm. d. Red. Wir haben uns nachträglich durch eigene Anschauung von den praktischen und instructiven Eigenschaften dieses Lehrmittels überzeugt und stimmen dem Herrn Verfasser bei.

Verordnung des österreichischen Ministeriums für Cultus und Unterricht vom 4. Januar 1874

an sämmtliche k. k. Landesschulbehörden, mit welcher ein Normal-Verzeichniss der physikalischen Sammlung einer Mittelschule und die zugehörige Dotation festgestellt wird. *)

Das vor mehr als 20 Jahren zur Richtschnur für die Anlage physikalischer Sammlungen an Mittelschulen herausgegebene Inventar entspricht dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft in den meisten Stücken nicht mehr.

Aus diesem Grunde, und weil in Folge des in den letzten Jahren eingetretenen Lehrerwechsels an einer und derselben Anstalt sehr verschiedene Anschauungen über Unterrichtsbedürfnisse zur Geltung gekommen sind, wird im folgenden ein neues Verzeichniss aufgestellt, das den Mittelschulen bei den Anschaffungen Maas und Ziel zu geben hat.

Die darin enthaltenen Apparate sind in zwei mit A und B bezeichnete Gruppen getheilt, von denen die erste schon für den Unterricht in den unteren Classen unentbehrlich ist, die zweite aber für den Unterricht in den höheren Classen zu dienen hat, und auch dem Lehrer es ermöglicht, zuweilen kleinere wissenschaftliche Untersuchungen auszuführen.

Um eine solche Sammlung instandzuhalten, um die Kosten der nothwendigen Reparaturen, einiger Nachschaffungen und des Experimentir-Materials zu bestreiten, wird eine jährliche Dotation von zweihundert (200) Gulden für eine vollständige Mittelschule und von hundert (100) Gulden für eine unvollständige festgesetzt.

Die Beschaffung einer oder der anderen periodischen Fachschrift (etwa Poggendorf's Annalen, Berichte der Berliner physikalischen Gesellschaft) ist Sache der Bibliotheks-Verwaltung.

Weil vorausgesetzt werden kann, dass die Anstalten, deren Organisation seit längerer Zeit vollzogen ist, sich im Besitze der nothwendigen Lehrmittel entweder schon befinden, oder hierzu nur geringfügiger Ergänzungen bedürfen, so werden blos jene Anstalten, bezüglich welcher diese Voraussetzung bei weitem nicht zutrifft, ihre nunmehr normirten Bedürfnisse nachzuweisen haben und zwar durch Vorlage eines Verzeichnisses der fehlenden und auch nicht durch vorhandene Apparate ersetzbaren Objecte. Die Mittel zur Vervollständigung sehr lückenhafter Sammlungen werden in mehreren jährlich anzuweisenden grösseren Theilsummen nach Thunlichkeit bewilligt werden; wo es nur immer angeht, ist jedoch die Einrichtung so zu treffen, dass die allmähliche Deckung in der feste Jahresdotation gefunden wird. In Folge dieser Anordnungen werden ausserordentliche Dotationen künftig ganz entfallen.

Ich**) ersuche die k. k. Landesschulbehörden das hiernach Erforderliche zu veranlassen und die Directoren der Mittelschulen auf das beigeschlossene mit einigen Erläuterungen versehene Verzeichniss aufmerksam zu machen.

Erläuterungen.

I. Bei dem Anlegen des Verzeichnisses musste angesichts der beträchtlichen Zahl von Mittelschulen, für welche die Staatsverwaltung Sorge zu

---

*) Die Redaction glaubt durch Aufnahme von Lehrmittelverzeichnissen einige besonders für Lehrer der Physik interessante und lehrreiche Mittheilungen zu bieten, besonders da die betr. Staaten (Oesterreich und Sachsen) bezügl. der physik. Lehrmittel auf der Weltausstellung zu Wien sich ausgezeichnet haben. (Vgl. d. Bericht IV, 436—444.) Die sächsische (ähnliche) Normalsammlung folgt im 2. Heft.

**) d. h. der Unterrichtsminister.

D. Red.

tragen hat, die grösstmögliche Schonung des Aerars angestrebt werden. Diese gebotene Rücksicht bekundet sich unter Wahrung alles Wichtigen und Nothwendigen vor allem in dem Beseitigen des Unnöthigen, das zu tändelnden Versuchen Anlass bietet, und in dem Auslassen des Entbehrlichen, das durch andere und einfachere Apparate ersetzt werden kann.

So z. B. ist ein besonderer Influenzapparat nicht eben nothwendig, da man alle Influenzerscheinungen mindestens eben so gut mit zwei Elektroskopen demonstriren kann. Ein gewöhnlicher Inductionsapparat kann leicht aus dem Neef'schen Hammer und einer Inductionsspule combinirt werden, man braucht also den Neef'schen Hammer blos einmal. Ampère's rotirenden Strom kann man leicht zur Demonstration der Induction verwenden, indem man in den einen Stromkreis das Element, in den anderen den Multiplicator einschaltet, und beide gegen einander bewegt. Statt für jeden einzelnen Fall einen eigenen Rotationsapparat anzuschaffen, richte man die optischen Scheiben, die Sirenenscheibe, den Wheatstone'schen Spiegel so her, dass jedes auf die eine Centrifugalmaschine gesetzt werden kann. Fernrohre sind an mehreren Apparaten vorhanden, indessen reichen zwei gute Ablese-Fernrohre für alle gewöhnlichen Zwecke aus. Man kann dieselben zur Spiegelablesung, zu Beugungsversuchen verwenden, aus ihnen mit Hilfe einiger Träger einen Spektralapparat construiren, indem man das eine Ocular durch eine Spalte ersetzt, man kann mit ihnen das Goniometer justiren u. s. f.

Ein solches Verfahren bietet für ein geringes Opfer an Bequemlichkeit den Vortheil, dass der Schüler den Apparat aus seinen Elementen entstehen sieht und bei der Einfachheit der Zusammenstellung nicht durch nebensächliches Beiwerk beirrt wird. Wie gewiss die Geschichte der Wissenschaft nachweist, dass mit kleinen und rohen Mitteln Grosses geleistet worden ist, so gewiss ist es, dass mit den grössten und feinsten Mitteln selbst nur für Unterrichtszwecke nichts Rechtes geleistet wird, wenn der, dem sie zur Verfügung stehen, aus irgend einem Grunde unterlässt, eben Vorhandenes zu verwenden und Theile von Apparaten zweckmässig zu combiniren.

Dem Grundsatz verständigen Sparens entspricht es auch, dass der eine Sammlung einrichtende oder ergänzende Lehrer die einfachen Unterrichts- und Demonstrations-Apparate nach eigener Angabe von Handwerkern des Ortes ausführen lässt, um so, höchstens auf Kosten der Eleganz, zweckmässige und dauerhafte Vorrichtungen zu gewinnen.

Es ist zu empfehlen, in der Regel nur jene Apparate, welche nicht an Ort und Stelle ausgeführt werden können, und bei deren Anfertigung es auf Präcision und besondere Sachkenntniss ankommt, von Mechanikern, u. z. von Specialisten ohne Vermittlung zu beziehen.

II. Soll ferner der physikalische Unterricht gemäss einer der Aufgaben der Mittelschulen formell bildend sein, so muss das Ziel, nämlich die Gedanken nach den Dingen einzurichten, stets im Auge behalten werden. Der Schüler muss lernen, in den gewöhnlichsten ihn umgebenden Vorgängen Gesetze zu finden und dieselben deductiv zu begreifen.

Man wende also Apparate nicht an, wo keine nöthig sind. Was sich an einer einseitig verschlossenen Glasröhre, an einem umgekehrten Trinkglase zeigen lässt, demonstrire man nicht mit Zaubertrichter und Zauberkanne. Alle Apparate seien so einfach als möglich, damit die Aufmerksamkeit der Schüler auf den Kern der Sache gerichtet bleibe und sollen in der Regel erst dann angewandt werden, wenn es nöthig wird, eine qualitativ schon bekannte Erscheinung zum Zwecke des genaueren Studiums und der Messung zu isoliren, und befreit von fremden Elementen darzustellen.

Werden auch mitunter hübschere und elegantere Apparate vorgeführt, um die Freude am Lernen zu erhöhen, so soll doch nicht die Unterhaltung auf Kosten der Fruchtbarkeit des Unterrichtes die Oberhand gewinnen.

Bei solchem Verfahren wird die Kluft zwischen den alltäglichen Gedanken des Schülers und den wissenschaftlichen Betrachtungen bald kleiner werden. Versteigt sich aber der Unterricht, und wird er mit künstlichen Mitteln geführt, so kann es bei weniger regen Köpfen eintreten, dass beide Gedankenkreise gar nie mit einander in Berührung kommen.

Was die materiellen physikalischen Kenntnisse betrifft, welche die Schule theils für die Bedürfnisse jedes Gebildeten, theils als Grundlage für den höheren Unterricht zu bieten hat, so werden sich dieselben auf das Principielle beschränken müssen. Deshalb sind wohl die wichtigsten Messapparate in das Normal-Verzeichniss aufgenommen, solche Instrumente aber ausgeschlossen, welche erst durch eine längere complicirte Versuchsreihe ein Resultat liefern, die also nur dort vorgeführt werden können, wo der Unterricht schon auf breiterer Grundlage und mit grösserem Zeitaufwand ertheilt wird.

Normal-Verzeichniss der physikalischen Sammlung einer Mittelschule.

I. Utensilien.

		Mittlerer Preis in Gulden öst. W. *)
A. 4 einfache Tischstative aus weichem Holz mit hebbarer Platte, 2 von 5', 2 von 2' Höhe	fl.	16 —
3 einfache eiserne Träger mit Klemmen	„	9 —
B. Hobelbank	„	20 —
Drehbank	„	50 —
Werkzeuge zu beiden	„	40 —
Glasblasetisch	„	30 —

II. Mechanik.

A. Metermaas	„	2 —
Nonius (linear)	„	1 —
Quadrant mit Nonius	„	3 —
Haspel	„	2 —
Winde	„	2 —
Hebel	„	2 —
Schraube ohne Ende	„	10 —
Schraube	„	3 —
Rollen und Flaschenzüge	„	15 —
Kräftenparallelogramm nach Frick	„	4 —
Modell der Waage mit allen Correctionen	„	15 —
Gewichte zu statischen Versuchen	„	6 —
Atwood'sche Fallmaschine	„	60 —
Fadenpendel (mehrere auf Stativ)	„	2 —
Stossmaschine mit Holzkugeln	„	15 —
Centrifugalmaschine mit Nebenapparaten	„	50 —

---

*) Für die Umrechnung in Thaler (od. Mark) zum Zweck der Vergleichung wolle man rechnen 3 Mark = 1 Thlr. = 1 fl. 70 Xr., oder 10 fl. = ca. 6 Thlr., da zur Zeit, als die Verordnung erschien, die Valuta so war. D. Red.

	Mittlerer Preis in Gulden öst. W.
B. Chemische Wage mit Grammgewichtsatz	fl. 100 —
Sphärometer	„ 15 —
Einfaches Kathetometer	„ 100 —
Modell des Reversionspendels, zugleich zur Demonstration der Trägheitsmomente	„ 20 —
4 Schmidt'sche Kreisel	„ 29 —

III. Hydrostatik und Hydrodynamik.

A. Communicationsgefäss	„ 2 —
Haldat'scher Apparat	„ 8 —
Auftriebapparat	„ 2 —
Hohlwürfel mit genau hinein passendem Massivwürfel für hydrostatische Versuche	„ 3 —
2 Scalenaräometer sammt Hülse	„ 4 —
Gewichtsaräometer	„ 8 —
Modell der hydraulischen Presse	„ 60 —
Libelle	„ 3 —
Segner'sches Rad	„ 14 —
4 Pyknometer	„ 2 —
B. Oerstedt's Compressionsapparat	„ 60 —
Weissbach's Ausflussapparat mit einfachen und verzweigten Ausflussansatzröhren	„ 40 —
Plateau's Drahtnetze	„ 3 —

IV. Aërostatik und Aërodynamik.

A. Torricelli'scher Apparat	„ 1 —
Apparat für das Mariotte'sche Gesetz	„ 6 —
Einfaches Barometer	„ 10 —
Heronsball	„ 2 —
Heronsbrunnen	„ 4 —
Saugpumpe	„ 12 —
Druckpumpe	„ 12 —
Compressionsluftpumpe	„ 12 —
Luftpumpe mit Nebenapparaten	„ 150 —
B. Fortin'sches Barometer	„ 60 —
Apparat für die Spannkraft der Dämpfe	„ 30 —
Aneroid	„ 30 —

V. Akustik.

A. Scheibensirene mit der diatonischen Scala zur Centrifugalmaschine	„ 6 —
Polychord mit verschiebbarem Steg und mit Gewichtsspannung	„ 15 —
Zeichnungen für Wellen	„ 4 —
3 Stimmgabeln C, C, c	„ 15 —
Labialpfeifen	„ 10 —
Zungenpfeife mit Glaswänden	„ 6 —
Klangfiguren-Apparat	„ 36 —
Interferenzröhre	„ 3 —
Wheatstone'scher Spiegel zur Centrifugalmaschine . . .	„ 2 —
König'scher Brenner	„ 1 —
B. Sirene mit Zählwerk	„ 30 —
Orgeltisch	„ 20 —

VI. Wärme.

		Mittlerer Preis in Gulden öst. W.	
A.	Ring und Kugel für die Ausdehnung	fl. 3	—
	Apparat für die Ausdehnung der Stäbe	„ 18	—
	Drahtgitterserie	„ 1	—
	Pneumatisches Feuerzeug	„ 6	—
	Gewöhnliches Thermometer	„ 5	—
	Siedepunktapparat	„ 2	—
	Kryophor	„ 2	—
	Heizbares Dampfmaschinenmodell	„ 100	—
	Platinschale für Leidenfrost's Versuch	„ 5	—
	August's Psychrometer	„ 14	—
B.	2 feine Thermometer mit arbiträrer Scala	„ 30	—
	Melloni'scher Apparat (ohne Multiplicator)	„ 100	—
	Dumas' Dampfdichtenapparat	„ 24	—
	Depretz's Apparat für die Leitungsfähigkeit	„ 30	—

VII. Optik.

A.	Schulapparat für Brechung und Reflexion	„ 10	—
	2 grosse Linsen von 3′ Brennweite für Projection in Holzfassung	„ 4	—
	2 Linsen, 3″ Brennweite von gleicher Adjustirung	„ 2	—
	Zerstreuungslinse von 1′ Brennweite (gefasst)	„ 1	50
	Zerstreuungslinse von 3″ Brennweite (gefasst)	„ 1	—
	3 gute Flintprismen	„ 30	—
	Hohlspiegel (Glas)	„ 3	—
	Convexspiegel	„ 3	—
	Stroboskopische Scheiben	„ 3	—
	Stereoskop	„ 5	—
	3 Cuvetten für Fluorescenz	„ 10	—
	Uranglaswürfel	„ 1	50
	Wellenmaschine (Fessel)	„ 50	—
	Lichteinlassapparat mit Projectionsvorrichtung	„ 100	—
	Schirm für Projection	„ 4	—
	Spiegelsextant	„ 12	—
B.	Achromatisches Prisma auf Stativ	„ 20	—
	2 Ablesefernrohre	„ 40	—
	Kleineres Hartnack'sches Mikroskop	„ 100	—
	Interferenzspiegel	„ 30	—
	Beugungsobjecte mit einer Fassung für das Fernrohr	„ 30	—
	Genaue Plangläser. 2 Paare (Steinheil)	„ 48	—
	Quarzprisma, Axe parallel zur Kante (Steeg)	„ 15	—
	Quarzprisma Axe senkrecht zur Kante	„ 15	—
	Nörrembergs Polarisationsapparat	„ 50	—
	2 Nikols	„ 20	—
	2 Quarzkeile parallel der Axe	„ 4	—
	2 Quarzkeile senkrecht zur Axe	„ 4	—
	Quarzplatte, parallel der Axe	„ 2	—
	$\frac{\lambda}{4}$-Platte	„ 1	—
	Krystallobjecte für Axenbilder	„ 5	—
	4 Quarze senkrecht zur Axe, rechte und linke	„ 4	—
	Gekühlte Gläser	„ 2	—
	Newton'sches Glas	„ 10	—
	Einfaches Spektrometer mit Gauss'schem Ocular, zugleich Goniometer	„ 200	—

VIII. Elektricität und Magnetismus.		Mittlerer Preis in Gulden öst. W.
A. Elektrisirmaschine (Winter) mit Nebenapparaten	„	50 —
Elektrophor	„	10 —
Duplicator nach Benet, bestehend aus zwei Goldblattelektroskopen	„	15 —
Zerlegbare Franklintafel	„	2 —
Massflasche	„	2 —
Flaschenbatterie	„	8 —
Oberflächenconductor	„	10 —
Geissler'sche Röhren	„	2 —
Volta'sche Säule	„	10 —
Fechner's Elektroskop für die Volta'schen Fundamentalversuche	„	30 —
Bunsen'sche Batterie, 20 Elemente	„	60 —
Smee'sche Batterie, 6 Elemente	„	24 —
Voltameter	„	2 —
Wasserzersetzungsapparat	„	4 —
Elektromagnet	„	5 —
Ampère's rotirender Strom	„	6 —
Ampère's rotirender Magnet	„	6 —
Ampère's Fundamentalapparat	„	16 —
Ruhmkorff	„	100 —
Magnetstäbe	„	5 —
Magnetnadel mit horizontaler Axe	„	2 —
Magnetnadel mit verticaler Axe	„	2 —
4 Spulen für Induction, 2 Haupt- und 2 Nebenspulen	„	8 —
10 Drahtklemmen	„	2 —
Neef'scher Hammer	„	16 —
Multiplicator mit kurzem Draht	„	16 —
Multiplicator mit langem Draht	„	16 —
B. Tangentenboussole	„	40 —
Wiedemann's Spiegelboussole	„	36 —
Wheatstone's Rheostat	„	15 —
Siemens'sche Widerstandseinheit	„	2 —
Holtz'sche Maschine	„	40 —
Diamagnetischer Apparat	„	150 —
Siemens'sche Widerstandssäule	„	50 —
Rheochord	„	20 —

Der Gesammtwerth der mit A. bezeichneten Gruppe beträgt in runder Summe 1600 fl., der mit B. bezeichneten 1800 fl.

Zum Repertorium neuer Entdeckungen, Erfindungen etc.

a) Geognosie.

(Von Engelhardt.)

Die Untersuchungen von Maschke über die Abscheidung von krystallisirter Kieselsäure aus wässerigen Lösungen haben ergeben, dass bei etwa 180° C. und darüber sich freie Kieselsäure aus wässerigen, alkalischen Lösungen als Quarz ausscheide, unterhalb 180° zuerst als Tridymit, dann als krystallisirtes und endlich als amorphes Kieselsäurehydrat in hintereinanderfolgenden noch zu bestimmenden Temperaturgrenzen und dass als höchst wahrscheinlich gelten könne, dass sich Quarz unter keinen Umständen bei gewöhnlicher oder wenig erhöhter Temperatur und bei gleichzeitig vorhandenem gewöhnlichen Druck aus wässerigen Lösungen zu bilden vermag. (Poggend. Ann. 1872. Hft. 4.)

Agassiz hat ca. 4 Meilen östlich vom Cap Frio aus der Tiefe von 45 Faden einen Krebs geholt, der zwischen Serolis und Trilobiten steht. Er hat ihm den Namen Tomacaris Peirecei gegeben. (Naturf. N. 30.) Die Meinungen darüber sind verschieden. Die Darwinianer jubeln, dass Barrande's Ansicht widerlegt sei; andere vermuthen Oberflächlichkeit der Untersuchung Agassiz's. Auf der Naturforscherversammlung zu Leipzig (s. Tageblatt S. 61 f.) z. B. machte Prof. Claus darauf aufmerksam, dass die Angaben von Agassiz über den Bau jenes Krebses vollkommen unzureichend seien, um sich eine genauere Vorstellung von demselben zu machen, die äussere Formähnlichkeit genüge nicht, um die Verwandtschaft mit den Trilobiten darzuthun, selbst die genaueste Forschung des Organismus würde es schwer, vielleicht unmöglich machen, die Identität mit Trilobiten festzustellen, so lange man nichts über die Gliedmaassen der petreficirten Ueberreste wisse. Erwäge man auf der andern Seite die grosse Unwahrscheinlichkeit, dass Organismen der ältesten Formationen, die aus allen späteren Formationen verschwunden sind, in der Gegenwart noch lebend gefunden würden, ferner die eminente Tragweite einer solchen Thatsache, so müsse die Seichtigkeit befremden, mit der Agassiz in seinem für die Oeffentlichkeit bestimmten Briefe an Perce ohne vorausgegangene genaue wissenschaftliche Feststellung diesen gewiss höchst merkwürdigen Organismus als unzweifelhaften Verwandten der Trilobiten in die Welt gesandt habe. Das grosse Publicum, in Erstaunen gesetzt durch die Entdeckung eines lebenden Trilobiten, werde gewiss später bitter enttäuscht werden.

Heer in Zürich hatte im 1. Bande seiner Flora fossilis arctica nachgewiesen, dass die schwarzen Schiefer von Kome auf der Nordseite der Halbinsel Noursoak der Kreide angehören. Damals hatte er wenige Arten vor sich gehabt. Auf der schwedischen Expedition vom Sommer 1870 sammelte Prof. Nordensciöld mit Dr. Nordström eine grosse Zahl von fossilen Pflanzen an den genannten, wie an mehreren andern Orten und vertraute sie Heer zur Untersuchung an. Bis jetzt sind davon 45 Species bestimmt worden (24 Filices, 2 Rhizocarpeen, 2 Equisetaceen, 5 Cycadeen, 8 Coniferen, 3 Monocotyledonen, 1 Dicotyledon). Unter den Farren dominiren die Gleichenien durch Arten- wie Individuenzahl, unter den Blüthenpflanzen die Cycadeen und Nadelhölzer (Zamites arcticus, Pinites Crameri, Sequoia Reichenbachi u. s. w.); die Monocotyl. sind selten und nur in Fragmenten vorhanden; von Dicotyled. sind nur ein Paar Blattfragmente vorhanden, die uns die älteste bis jetzt bekannte dicotyledonische Pflanze zur Kenntniss bringen (Populus). Die Glora kann als subtropisch bezeichnet werden, wofür die zahlreichen Fleichenien, Marattiaceen, die Cycadeen und Dictiophyllum sprechen und stimmt in klimatischer Beziehung mit der unteren Kreideflora Europas überein, was darauf hindeutet, dass damals noch keine zonenweise Vertheilung der Wärme über unsere Erde stattgefunden hat. — Auf der Südseite der Halbinsel Noursoak kommt ein ähnlicher schwarzer Schiefer vor, dessen Pflanzenreste (45 Spec.) ihn ebenfalls der Kreide, aber einer jüngeren Stufe zuweisen (11 Filices, 1 Cycadee, 7 Coniferen, 3 Monocotyled., 24 Dicotyl). Auffallend ist hier, dass die Dicotyl. vorherrschen (z. B. Ficus, Populus, Myrica, Sassafras, Magnolia, Panax, Sapindus, Rhus). Diese Schichten schliessen sich somit an die obere Kreide Europas an. (Nach Zeitschr. d. d. geol. Gesellschaft. 1871. Hft. 1.)

In der Kreideformation Englands sind zwei neue Zapfen (Pinites hexagonus und Sequocites ovalis) gefunden worden. (Zeitschr. f. d. ges. Naturw. 1872 Julih.)

Nach Dawson und Harrington tritt im NW. und Südtheile der Insel Prince Edward Island im Liegenden der Trias sehr charakteristisch das Rothliegende auf, dessen Flora vollkommen mit der des untern Rothliegenden in Deutschland übereinstimmt. Es kommen z. B. vor Walchia gracilis, W. robusta, Pecopteris arborescens, P. rigida, Neuropteris pinnatifida, Calamites Suckowii, C. Cisti, C. arenaceus, C. gigas. „Leider beachten die nordamerikanischen Paläontologen die europäische Literatur zu wenig und benennen ihre Arten mit neuen Namen, wenn dieselben auch unverkennbar mit europäischen übereinstimmen und führen damit einen der Fortschritte der Wissenschaft hemmenden Ballast in dieselbe ein.“ (Zeitschr. f. ges. Naturw. Julih. 1872.)

Zu Nevada ist durch Clayton die Primordialfauna aufgeschlossen worden. Hier kommt sie in Kalksteinen vor, während sie in Böhmen an die thonigen Schiefer von Ginetz und Skrey und in den Vereinigten Staaten (zw. New-York u. d. Rocky Mountains) an die sandigen und schiefrigen Platten des Potsdamsandsteins gebunden sind. Clayton beschreibt Arten der Gattungen Lingula, Obolella, sowie solche der Trilobitengattungen Paradoxites, Conocephalus, Arion, Crepicephalus. (Jahrb. f. Min. und Geol. 1872. Hft. 6.)

Die von Regensburg über Hemau nach Nürnberg führende Eisenbahn durchschneidet bei Undorf ein Braunkohlenlager, dessen Alter in das obere Miocän fällt und der tortonischen Stufe zu entsprechen scheint. Ueber dem jurassischen plumpen Felsenkalke liegt zunächst ein bläulicher Thon von ziemlich bedeutender Mächtigkeit, dann ein durch Bitumen gefärbter kohliger Thon, in welchem Braunkohlenflötze eingelagert sind. Die Braunkohle tritt hier in mannigfachen Modificationen auf und durchläuft von der typischen Braunkohle, vom Liquit an, alle Stufen bis zum harten Gagat oder zur weichen Erdkohle. Von den fossilen Pflanzen werden immergrüne Eichen, Gleditschia, Potamogeton genannt, von den Thierresten Mastodon, Rhinoceros, hirschartige Wiederkäuer, Fische, Planorbis, Simnaeus, Helix und Ancylus. (Jahrb. f. Min. 1872. Hft 6.)

Inmitten der k. k. Hofburg zu Wien ist beim Graben eines Brunnens ein Stosszahn von Elephas primigenius gefunden worden. (Verh. d. k. k. geol. Reichsanst. 1872. N. 11.)

b) Zoologie.

(Von Ackermann.)

Anwendung der Spektralanalyse zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Blutcirculation. Spritzt man wenige Gran eines Lithionsalzes unter die Haut eines Thieres, so ist die Gegenwart dieses Stoffes schon nach 4 Minuten in der Galle und der Glasflüssigkeit des Auges nachzuweisen; nach 10 Minuten bereits in allen Körpertheilen, selbst, wenn auch nur spurweise, in der Krystalllinse. Bei Staarblinden, welche vor der Operation 20 Gran kohlensaures Lithion eingenommen hatten, ergab sich, dass das Lithium nach 3½ Stunden in alle Theile des Körpers gelangt war und sich in jedem Theile der Krystalllinse vorfand. (Roscoe, Spektral-Analyse. Anhang. 2. Aufl. 1873.)

Zahl der rothen Blutkörperchen bei verschiedenen Thierclassen. Neue, nach einer präciseren Methode angestellte Zählungen der Blutkörperchen haben ergeben, dass die Zahl der Blutkörperchen bei den Säugethieren in einem Cubikmillimeter Blut zwischen 3½ und 18 Millionen schwankt. Bei den Vögeln kommt auf dieselbe Blutmenge eine kleinere Zahl, nämlich durchschnittlich 3 Millionen, im Maximum 4 Millionen, im Minimum 1½ Millionen. Bei den Fischen sinkt die Zahl der rothen Blutkörperchen tiefer und zwar kommen auf die Knochenfische 700,000 bis 2 Millionen, bei den Knorpelfischen 140,000 bis 230,000. (Nach früheren Zählungen von Prof. Welcker hat der Mensch im Cub.-Mill. Blut 5 Mill., das Lama 13,9 Mill., die Ziege 9, 72 Mill., der Siebenschläfer 8, 41 Mill., Buchfink 3,6 Millionen Blutkörperchen.) (Naturf. VI. 88.)

Anatomische Untersuchungen der Gattung Limulus haben ergeben, dass dieselbe weder zu den Arachniden, noch, wie ältere Zoologen glauben, zu den Crustaceen gerechnet werden darf, sondern vielmehr ein ganz besonderer Typus ist, welcher den Arachniden durch verschiedene Analogien verwandt ist und auch einige Züge der Organisation den Krustenthieren entlehnt. Das Eigenthümliche und Ueberraschende in der Organisation besteht darin, dass das Centrum des Nervensystems im Innern der grossen Baucharterie liegt und die meisten Nerven auf einer beträchtlichen Strecke ihrer Bahn gleichfalls in verschiedenen Arterien eingeschlossen sind. (Naturf. VI. S. 76—79.)

Ueber den Ursprung des Guano. Nach Habel und Edwards stellt das Guano nicht die Excremente von Vögeln dar, sondern ist das Resultat der Anhäufung von Körpern der Pflanzen und Thiere, die meistentheils sehr klein sind und zu der Gruppe gehören, die Häckel Protisten nennt. Er ist erst später vom Meeresgrund aufgestiegen und chemische Veränderungen haben die ursprüngliche Masse umgewandelt. (Ntf. V. 7.)

Einfluss farbiger Lichtstrahlen auf die Respiration von Thieren. Setzt man die Kohlensäure, welche ein Hund während einer bestimmten Zeit unter weissem Glase ausathmet, = 100, so ist die Menge unter schwarzem Glase = 82,07, unter violetem = 87,73, unter rothem = 92, unter blauem = 103,77, unter grünem = 106,03, unter gelbem = 126,83. Noch bedeutender ist der Unterschied bei Vögeln. Die gelben Strahlen, welche erwiesenermaassen bei den Pflanzen (vergl. die Mittheilung in einem der früheren Hefte) die Aufnahme von Kohlensäure am meisten begünstigen, sind also auch bei der Athmung der Thiere, bei der Kohlensäureausscheidung, die wirksamsten. (Ebda. 16.)

Bastarde zwischen Hasen und Kaninchen sind nach mehrjährigen Beobachtungen von Gayot unter sich wieder fruchtbar und zwar ohne dass die Fruchtbarkeit wieder abzunehmen scheint. Bis zur sechsten Generation haben sich unter diesen Mischlingen 2 Varietäten entwickelt, der gewöhnliche Leporide und der langhaarige Leporide, von denen der erstere in anatomischer Beziehung vollständig zum Kaninchen zurückgekehrt war, der zweite sich blos dem Hasen näherte, ohne ihm vollständig gleich zu sein, was vielleicht in dem Umstande begründet ist, dass die Bastarde nicht in vollkommener Freiheit sich entwickelten. Eine neue Species, Leporide oder Halbhase, existirt also nicht. (Ebda. 27.)

Ueber die Lage des Schwerpunkts bei den Insecten hat F. Plateau Messungen vorgenommen, die ihn zu folgenden Resultaten führten: Der Schwerpunkt eines Insekts liegt in der senkrechten Meridianebene, welche durch die Längsachse des Körpers geht. Er nimmt bei derselben Species und unter Voraussetzung desselben Geschlechts und gleicher Stellung nahezu eine identische Lage an. Bei verschiedenen Geschlechtern ist auch die Lage des Schwerpunkts eine andere, nämlich bei den Weibchen weiter zurückgeschoben als bei den Männchen. Beim Stehen liegt er an der Basis des Bauches oder im hinteren Theile der

Brust, in der Regel in der Mitte der Körperlänge, während des Gehens verschiebt er sich, doch um eine unmessbare Grösse. Bei den Insecten, deren Flügel in der Ruhe in derselben Stellung sich befinden, wie während des Fliegens, beobachtet man keine Verschiebung, bei denen jedoch, deren Flügel in der Ruhe zusammengefaltet oder gekreuzt sind, stets eine merkliche Verschiebung und zwar von hinten nach vorn, wenn die Thiere aus der Ruhe in die Stellung beim Fliegen übergehen. Während des Fluges schwankt der Schwerpunkt continuirlich um eine mittlere Lage. Bei den Wasserinsecten liegt er näher der unteren Körperfläche als der oberen. (Ntf. V. 14.)

Das Leuchten der Seefedern. Die Leuchtorgane der phosphorescirenden Pennatuliden bestehen aus acht Fäden, welche der äusseren Oberfläche des Leibes der Polypen und Zooiden (der geschlechtslosen, demselben Stocke angehörenden Individuen) anliegen. Diese Fäden bestehen vorzugsweise aus einer in Zellen eingeschlossenen Substanz, welche alle Charaktere der Fette besitzt; sie sind so weich, dass jeder Druck sie zerstört und eine anatomische Untersuchung unmöglich ist. Es ist wahrscheinlich, dass das Leuchten hervorgerufen wird durch eine Oxydation dieser Fettsubstanz. (Ntf. V. 19.)

Sonderbare Eigenheit einer Schlange. An einer aus Nordcarolina (Fort Macon) stammenden Schlange, der Cyclophis aestivus, hat man die sonderbare Gewohnheit beobachtet, dass sie ihren Kopf und 2—3 Zoll ihres Körpers über den Boden warf und sich so in einer fixirten Stellung Stunden lang ganz steif hielt. Sie glich in dieser Stellung völlig dem Schössling einer grünen, saftigen Pflanze. (Nft. VI.)

Lebende Trilobiten. Die Nachricht Agassiz's über den Fund eines lebenden Trilobiten (Tomocaris Percei) ist nach Claus verfrüht, indem die Natur des aufgefundenen Organismus als Trilobit nicht erwiesen sei. Denn die Angaben Agassiz's über den Bau jenes Krebses seien vollkommen unzureichend, um sich eine genauere Vorstellung von demselben zu machen; die äussere Formähnlichkeit könne die Verwandtschaft mit den Trilobiten nicht darthun; auch wisse man nichts über die Gliedmaassen der petreficirten Ueberreste. (Zeitschr. ges. Nat. VI. 201.) Vgl. oben S. 78.

Die Einmiether von Eichengallen d. h. solche Gallinsecten, welche weder die Galle selbst erzeugt haben, noch Parasiten von den gallenerzeugenden Larven sind, kommen nach Beobachtungen von G. Mayr in folgenden verschiedenen Weisen vor: 1) Sie leben in der Larvenkammer der gallenerzeugenden Larven, wodurch letztere in der Jugend zu Grunde gehen. 2) Die Kammer der letzteren ist zerstört, ebenso ein Theil des umgebenden Zellengewebes; an deren Stelle findet sich ein Hohlraum, der durch membranöse Scheidewände in Kammern abgetheilt ist, in deren jeder eine Einmietherlarve lebt. 3) Die natürliche Höhlung gewisser Gallen wird von Synergen bewohnt und sogar erweitert, in welchem Falle die Gallwespe ohne Störung zur Entwickelung gelangt. 4) Die Kammern der Einmiether sind im Parenchym der Galle vertheilt, in welchem Falle die Kammer des rechtmässigen Gallinsects unversehrt bleiben kann; doch geht dies auch als Larve zu Grunde und dann verschwindet die Kammer, wie es scheint, weil viele Einmietherkammern um das Gallencentrum radienartig gestellt sind. — Im Ganzen wurden von Dr. Mayr 3 Gattungen in zahlreichen Arten (darunter 10 neue) erzogen und zwar die Gattungen Synergus, Sapholytus und Ceroptres. (Ebd. 538—9.)

Die Rebenblattlaus, Phylloxera vastatrix, kommt nach neuen Beobachtungen in zwei verschiedenen Formen vor, nämlich als ungeflügelte, stets an der Wurzel bleibende und als sehr vereinzelte, geflügelte Individuen. Die letzteren gleichen in ihrer Gestalt einer Cicade. Die ungeflügelten überwintern an den Wurzeln, legen vom Frühjahre an Eier und zwar während eines Zeitraums von 6—7 Monaten. Männchen kennt man noch nicht. Im Sommer finden sich in den Colonien ganz vereinzelte Larven mit Flügelstümpfen, welche sich zu geflügelten Individuen entwickeln. An einzelnen Orten hat man an den Blättern und Wurzeln eigenthümliche Gallen beobachtet, in denen Blattläuse lebten, identisch mit den in den Wurzeln lebenden; man glaubt, dass sie aus Eiern der Geflügelten entstanden seien. — Was die durch das genannte Insect verursachte Krankheit betrifft, so wird sie dadurch hervorgerufen, dass die Thiere ihren Schnabel in die Wurzel einstechen, um sich von dem Safte zu ernähren. Die angestochenen Wurzeln zeigen sich weich und faulig, ihr Gewebe ohne Festigkeit. (Einige Beobachter schreiben die Krankheit nicht dem oben genannten Insect zu, sondern behaupten, dieses stelle sich erst ein, wenn die Wurzel schon krank sei.) (Zeitschr. ges. Nat. XXXX 941—3.)

Mathematische Bibliographie des Jahres 1873.

(Januar bis Ende März.)

Adam, geometrische Analysis und Synthesis. Eine Sammlung von 636 Plan-Constructionsaufgaben mit einer geom. Lösung. Potzdam. Stein. $1^1/_3$ Thlr.

Bibliothek, polytechnische. Monatl. Verzeichniss der in Deutschland und dem Auslande neu erschienenen Werke aus den Fächern der Mathematik und Astronomie, der Physik und Chemie, der Mechanik und des Maschinenbaues etc., 12 No. Lpz. Quandt und Händel. 1 Thlr.

Diesterweg's elementare Geometrie für Volksschulen und Anfänger überhaupt. Neu bearb. von Langenberg. 4. Aufl. Frankfurt. Diesterweg. 12 Sgr.

Dötsch, die hyperbolischen Functionen und deren Beziehungen zu den Kreisfunctionen. Prämiirte Abh. Nürnberg. Ebner. 6 Sgr.

Feld und Serf, Leitfaden für geometrischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Nebst einer Sammlung von Aufgaben. 2. Aufl. Mainz. Kunze. 12 Sgr.

Gandtner, die Elemente der analytischen Geometrie für den Schulunterricht bearb. 3. Aufl. Lpz. Siegismund und Volkening. 10 Sgr.

Hauck, Lesebuch der Arithmetik für Gewerb-, Handels und Realschulen. 1. Thl. 2. Aufl. Nürnberg. Korn. $7^1/_2$ Sgr.

Helmes, die Elementarmathematik nach den Bedürfnissen des Unterrichts streng wissensch. dargestellt. 1. Thl. Die Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. Hannover. Hahn. 28 Sgr.

Hofmann, Resultate zu dessen Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. Bayreuth. Grau. $1^1/_5$ Thlr.

Leroy, die darstellende Geometrie (géométrie descriptive). Mit 62 Taf. Deutsch von Kauffmann. 3. Aufl. Stuttgart. Bach und Kitzinger. $4^2/_3$ Thlr.

Lieber, geometrische Constructionsaufgaben. Unter Mitwirkung von F. v. Lühmann. 2. Ausg. Berlin. Simion. $^3/_4$ Thlr.

Löbnitz, Rechenbuch für die unteren Gymnasialclassen, Real- und höh. Bürgerschulen. 7. Aufl. Hildesheim. Gerstenberg. 8 Sgr.

Moshammer, constructive Geometrie in der Ebene, als Vorschule zur darstellenden Geometrie des Raumes. Wien. Seidel. 16 Sgr.

Pflanz, Geometrie-Hefte. No. 1. Geometrische Formenlehre und Constructionen. Leipzig. Pönicke. $2^1/_2$ Sgr.

Raydt, Formenlehre oder Vorbereitung zur Planimetrie. 2. Aufl. Lingen. Stavenhagen. 5 Sgr.

Schrön, 7stellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 und der trig. Functionen etc. 12. Ster.-Ausg. Braunschweig. Vieweg. $1^1/_4$ Thlr.

Specht, die Formenlehre der Geometrie. 2. Aufl. Dorpat. Gläser. 1 Sgr.

Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Unänderlichen. 2. Aufl. Halle. Nebert. $1^3/_4$ Thlr.

Wenz, Zusammenstellung der wichtigsten arithmetischen Sätze in Formel, Wort und Beispiel. München. Ackermann. $4^1/_2$ Sgr.

Westermann, die Elementar-Mathematik in experimentaler Behandlung. Mitau. Behre. 10 Sgr.

Zirndorfer, Lehrsätze der Stereometrie für den Schulunterricht zusammengestellt. 2. Aufl. Frankfurt a/M. Jäger. 10 Sgr.

(April bis Juni.)

Albrich, logarithmisch-trigonometrische Rechentafeln zur mechanischen Ausführung aller Arten log. und trig. Rechnungen. 3 Tafeln. Hermannstadt. Michaelis. 3 Thlr.

Bachmann, Lehr- und Uebungsbuch der Elementararithmetik. Nördlingen. Beck. 28 Sgr.

Bahnson, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 1. Thl. enth. A. Erklärungen aus der Geometrie. B. Planimetrie. 2. Aufl. Hamburg. Rudolphi. 18 Sgr.

Bothe, Sammlung von Rechenaufgaben für höhere Schulen. 1 Heft. Die 4 Species in ganzen Zahlen. Dresden. Kubel. 6 Sgr. 2. Heft. Die 4 Species in gebrochenen Zahlen und die Decimalbrüche. $7^1/_2$ Sgr.

Boymann, Lehrbuch der Mathematik für Gymn., Realschulen und andere höhere Lehranstalten. 2. Thl. Ebene Trig. und Geom. des Raumes. 3. Aufl. Cöln und Neuss. Schwann. $^3/_4$ Thlr.

Brettner, Lehrbuch der Geometrie für Gymn., Realsch. und höhere B., neubearb. von Prof. Dr. Fiedler. 7. Aufl. Ratibor. Wichura. 16 Sgr.

Conradt, genetische Entwickelung der Elemente der Arithmetik. Colberg. Post. 5 Sgr.

—, über die Relation zw. den Entfernungen einer beweglichen Ebene von 4 festen Punkten. Eine analyt-geom. Untersuchung. Ebda. $7^1/_2$ Sgr.

Deter, Formelbuch, enth. die wichtigsten analyt., geom., goniom., trig. und stereom. Formeln. Berlin. Weber. 6 Sgr.

Fischer, Uebungstafeln zum Schulrechnen. Für die Hand der Schüler. Stuttgart. Steinkopf. 4 Sgr.

Gauss, F. G., 5stellige vollst. logarithm. und trigonometr. Tafeln. Zum Gebrauch für Schulen und Praxis bearb. 2 Thle. Berlin. Rauh. Inhalt: 1. Ster.-Druck. 3. Aufl. 20 Sgr. 2. Für Decimaltheilung des Quadranten. 2 Thlr.

—, 4stellige log. trig. Wandtafel. Ebda. 5 Sgr.

—, dasselbe mit Decimaltheilung des Quadranten. $7^1/_2$ Sgr.

Gernerth, Grundlehren der ebenen Geometrie nebst zahlreichen Constructions- und Rechenaufgaben. Wien. Gerold. 24 Sgr.

Gruhl, Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Mit einem Anh.: Aufgaben von J. Töplitz. Berlin. Weidmann. $1^2/_3$ Thlr.

Hartmann, genetischer Leitfaden für den Unter. in der Planimetrie in Form methodisch geordneter Fragen und Aufgaben. Bautzen. Rühl. 8 Sgr.

Hentschel, Aufgaben zum Zifferrechnen. Für Volksschulen entworfen und nach unterrichtl. Grundsätzen geordnet. I., 1. 29. Aufl. $1\frac{1}{2}$ Sgr. — I., 2. 29. Aufl. 2 Sgr. — II., 1. 26. Aufl. 2 Sgr. — II., 2. 20. Aufl. 2 Sgr. Lpz. Merseburger.

—, Rechenfibel, umfassend die Zahlen von 1—100. 52. Aufl. Ebda. $1\frac{1}{2}$ Sgr.

Job, Lehrbuch der Planimetrie. 2. Aufl. Dresden. Adler. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Klein, Elemente der analyt. Geometrie und höheren Analysis mit bes. Berücksichtigung physikalischer Aufg. Dresden. Naumann. $\frac{1}{2}$ Thlr.

—, Leitfaden zu den Elementen der Geometrie. Ebda. 12 Sgr.

Kentenich, praktische Rechenschule. 7. Aufl. Ausgabe für Elsass und Deutsch-Lothringen. Köln. Schwann. $6\frac{1}{3}$ Sgr.

Kopetzky, methodisch geordnete Rechenaufgaben. Wien. Sallmayer. $2\frac{1}{2}$ Sgr.

Largiadér, Anleitung zum Körpermessen. 2. Aufl. Zürich. Schulthess. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Loeser, praktisches Rechenbuch für Schulen. 2. Aufl. Weinheim. Ackermann. $2\frac{1}{2}$ Sgr.

Matthiessen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allg. Arithmetik und Algebra von Dr. Ed. Heis. Praktischer Leitfaden für Lehrer und Studirende. 2 Bde. Köln. Du Mont-Schauberg. $4\frac{1}{3}$ Thlr. Inhalt: 1. Allg. Arithm. Gleichungen vom 1. und 2. Grad. 2. Gleichungen höh. Grads, Progressionen, Combinationen und Anwendung der Algebra auf Geometrie. $4\frac{1}{3}$ Thlr.

Müller, Ohrtmann, Wangerin, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 2. Bd. Jahrgang 1869 und 70. Berlin. Reimer. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Ohlert, praktischer Lehrgang der Geometrie für Mittelschulen. 4 Aufl. Königsberg. Bon. 7 Sgr.

Pflanz, Handbuch der Geometrie für Lehrer von Fortbildungsschulen etc. 1. Abth. Geometrische Formenlehre und Construction. Lpz. Pönicke. 10 Sgr.

Quitzow, Anweisung zum systematischen Rechnen und Auflösung zu dem prakt. Rechenbuch. 2. Aufl. Güstrow. Opitz. 1 Thlr.

Riecke, Oberstudienrath, mathematische Unterhaltungen. 3. Heft. Stuttgart. Aue. 10 Sgr. (I—III: 2 Thlr.)

Salomon, Sammlung von Formeln, Aufgaben und Beispielen aus der Arithmetik und Algebra. Neu hersg. von Prof. Zampière. Wien. Gerold. $1\frac{5}{6}$ Thlr.

Schleusing, Beitrag zur Integralrechnung, enth. die Integration einiger algebr. und transcendenter Functionen. Berlin. Weidmann. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Schrön, 7stellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1—108000 und der trig. Funct. aller Winkel von 10 zu 10 Secunden. Ungarische 12. Ausg. Braunschweig. Vieweg. $1\frac{3}{4}$ Thlr.

Sonndorfer, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Classen der Mittelschulen. 1. Thl. Geometrie der Ebene. 2. Aufl. Wien. Braumüller. 2 Thlr.

Spitz, Lehrbuch der allg. Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. 2. Thl. Combinationslehre, binom. Lehrsatz, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Rechnungsarten, die sich auf die menschl. Sterblichkeit gründen, höhere Gleichungen und Determinanten, nebst 500 Beisp. und Uebungsaufg. 2. Aufl. Lpz. Winter. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

—, Anhang dazu. Die Resultate und Andeutungen zur Aufl. der in dem Lehrbuch befindl. Aufgaben. 2. Aufl. Ebda. 8 Sgr.

Stahl, die Massfunctionen der analytischen Geometrie. Berlin. Calvary. 12 Sgr.

Stolzenburg, Leitfaden für den arithmetischen Unterricht in den mittleren Classen höherer Lehranstalten. Potzdam. Gropius. 6 Sgr.

Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 1. Thl. Von den ältesten Zeiten bis Ende des 16. Jahrh. 2. Aufl. Zürich. Orell. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Thomae, ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkt der Geometrie der Lage betrachtet. Halle. Nebert. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Unglaube, die gemeinen Brüche. Berlin. Wiegandt. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Vogler, über Ziele und Hilfsmittel geometrischer Präcisions-Nivellements. München. Lit. art. Anstalt. 1 Thlr.

(Juli bis August.)

Adam, Lehr- und Handbuch der Flächen- und Körperrechnung zum Schul- und Selbstunterricht. 3. Aufl. Langensalza. 12 Sgr.

Becker und Paul, Aufgaben für den Rechenunterricht. Frankfurt. Auffarth. 28 Sgr.

Büttner, die Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin. Stubenrauch. 20 Sgr.

Fischer, die Kegelschnitte nebst einer kurzen Einleitung in die analytische Geometrie. Halle. Schmidt. 12 Sgr.

Foth, Anfangsgründe der Zahlen- und Raumgrössenlehre. Im Auftrage der königl. General-Inspection der Artillerie zum Gebrauch als Leitfaden bei dem math. Unterr. in den Reg.-Schulen der Artillerie verf. 2. Aufl. Hannover. Meyer. 20 Sgr.

Gasser, kurzer Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie. Für Seminare. Frankfurt. Jäger. $12\frac{1}{2}$ Sgr.

Grabau, über die Naumann'sche Conchospirale und ihre Bedeutung für die Conchyliometrie. Lpz. Engelmann. 25 Sgr.

Grohmann, kleine Geometrie. Wiederholungsbuch für geom. Unterricht in Volksschulen. Berlin. Oehmigke. 3 Sgr.

Grube, Leitfaden für das Rechnen nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode. 5. Aufl. Berlin. Enslin. 18 Sgr.

Grünfeld, Rechenbuch. 19. Aufl. Schleswig. Bergas. 12 Sgr.

Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form. Erlangen. Besold. 28 Sgr.

Harms, die erste Stufe des mathematischen Unterrichts in einer Reihenfolge methodisch geordneter arithm. und geom. Aufgaben. 1. Abth. Arithm. Aufg. 3. Aufl. Oldenburg. Stalling. $12\frac{1}{2}$ Sgr.

Hellwig, Tetraedrometrie und Trigonometrie oder Darstellung der Eigenschaften des Tetraeders mit Berücksichtigung der entsprechenden Verhältnisse am Dreieck. Erfurt. Villaret. 15 Sgr.

Jürgens, zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Heidelberg. Winter. 10 Sgr.

Junker, Sehnentafel für den Radius $= 500$ von $1'$—90^0. Lpz. Scholtze. 15 Sgr.

Kehr, Sem.-Dir., praktische Geometrie für Volks- und Fortbildungsschulen sowie für Seminarvorbereitungsanstalten. 4. Aufl. Gotha. Thienemann. 1 Thlr.

Köhler, logarithmisch-trigonom. Handbuch enth. die Log. der Zahlen 1—108000 auf 7. Dec. etc. Lpz. Tauchnitz. 27 Sgr.

Legendre, die Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Aus dem Franz. von A. L. Crelle. 6. Aufl. Berlin. Bernhardi. 2 Thlr.

Löser, praktisches Rechenbuch für Schulen. Weinheim. Ackermann. 13 Sgr.

Mocnik, Anfangsgründe der Geometrie in Verbindung mit dem Zeichnen. 15. Aufl. Prag. Tempsky. 15 Sgr.

—, geometr. Anschauungslehre. 11. Aufl. Wien. Gerold. 12 Sgr.

—, Lehrbuch der Arithmetik. 15. Aufl. Prag. Tempsky. 16 Sgr.

Nagel, Aufgaben zum Zifferrechnen. Wien. Lechner. 13 Sgr.

Nagel, ebene Geometrie. 2. Abth. Fundamentalsätze der neuen Geometrie. Ulm. Wohler. 12 Sgr.

—, Lehrbuch der ebenen Geometrie zum Gebrauch beim Unterricht in Real- und Gymnasialanstalten. 14. Aufl. Mit dem vorigen 1 Thlr., ohne dasselbe 20 Sgr.

—, Materialien zur Selbstbeschäftigung der Schüler bei dem Unterricht in der ebenen Geometrie. 5. Aufl. Ebda. 12 Sgr.

Pollak, Sammlung algebraischer Aufgaben. 4. Aufl. Augsburg. Rieger. 25 Sgr.

Rätz, Geometrie für Künstler und Handwerker oder prakt. Anwendung der Geometrie und des geom. Zeichnens auf die techn. Gewerbe. 7. Aufl. Berlin. Imme. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Rühlmann, logarithmisch-trigonometrische und andere für Rechner nützliche Tafeln. Lpz. Arnold. 20 Sgr.

Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis. 5. Aufl. Jena. Frommann. 3 Thlr.

Schubert, Lehrbuch der Geometrie für Bürgerschulen. Wien. Beil. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Seeger, die Elemente der Geometrie für den Schulunterricht bearb. 2. Aufl. Schwerin. Hildebrand. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Stambach, der topographische Distanzenmesser und seine Anwendung. Aarau. Christ. 10 Sgr.

Stier und Sammler, Rechenhefte für die Unterclassen von Realschulen und Gymnasien. 3 Hefte. Chemnitz. Focke. 25 Sgr.

Streissler, die geometrische Formenlehre in Verbindung mit der Grössenlehre, dem geom. Orte und dem Linearzeichnen. Triest. Schimpff. 20 Sgr.

Torney, Leitfaden zum Unterricht in der Arithmetik. Reval. Kluge. 18 Sgr.

Wittstein, Lehrbuch der Elementarmathematik. 1. Thl. 2. Abth. Planimetrie. 6. Aufl. Hannover. Hahn. 20 Sgr.

Worpitzky, mathematische Wandtafel. Berlin. Weidmann. 20 Sgr.

(September bis October.)

Bachmann, die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Akadem. Vorlesgn. Lpz. Teubner. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

Batschinsky, Theorie der arithm. und anderer verwandten Reihen. Lpz. Schmaler. 15 Sgr.

Battig, Aufgaben für das Kopfrechnen. 2. Aufl. Berlin. Oppenheim. 3 Sgr.

—, Aufgaben für das Zifferrechnen. Ebda. 5 Sgr.

—, Wegweiser für den gesammten Rechen-Unterricht. Ebda. 15 Sgr.

Böhm, kleines logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 3. Aufl. Innsbruck. Wagner. 10 Sgr.

Böhme, Anleitung zum Unterricht im Rechnen. 6. Aufl. Berlin. Müller. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Boymann, Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien, Realschulen etc. 1. Thl. Geometrie der Ebene. 6. Aufl. Köln. Schwann. 20 Sgr.

Dühring, kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Gekrönte Preisschrift. Berlin. Grieben. 3 Thlr.

Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analyt. Geometrie. 2. Thl. A. G. des Raumes von Schlömilch. 3. Aufl. Lpz. Teubner. $1^2/_3$ Thlr.

Frombeck, über Fourier'sche Integrale und Analogien derselben. Wien. Gerold. 8 Sgr.

Harms, das abgekürzte Rechnen und das Rechnen mit abgekürzten Zahlen. Oldenburg. Stalling. 5 Sgr.

Hartmann, genetischer Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie, in Form methodisch geordneter Fragen und Aufg. bearb. 1. Heft. Die Lage gerader Linien. Bautzen. Rühl. 6 Sgr.

Hesse, die Determinanten elementer behandelt. 2. Aufl. Lpz. Teubner. 12 Sgr.

Hippauf, Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis. Ebda. 12 Sgr.

Hüdel, Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der allg. Arithmetik. 1. Thl. Eichstätt. Krüll. 10 Sgr.

Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allg. Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Lpz. Teubner. $1^2/_3$ Thlr.

Jordan, Taschenbuch der praktischen Geometrie. Eine Sammlung von Resultaten der niederen und höheren Vermessungskunde. Stuttgart. Metzler. $3^5/_{12}$ Thlr.

Koppe, die Arithmetik und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht. 9. Aufl. Essen. Bädeker. 27 Sgr.

Ligowski, Sammlung 5stelliger logarithm., trig., nautischer und astron. Tafeln nebst Erklärungen und Formeln der Astronomie mit bes. Rücksicht auf die Nautik. Kiel. $2^2/_3$ Thlr.

Martius-Matzdorf, die körperliche Ecke oder der Raumwinkel in verallgemeinerter Auffassung und mit stereosk. Darstellung. Berlin. Springer. 16 Sgr.

Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauch an Gymn. und Realsch. Berlin. Reimer. 15 Sgr.

Moltke, Decimalbruchtabellen zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalen und umgekehrt. Lpz. Bänsch. 20 Sgr.

Müller, zeichnende Geometrie. Esslingen. Weychardt. 12 Sgr.

—, Uebungsstoff für das geom. Zeichnen. Mit 20 lith. Bl. 2. Aufl. 10 Sgr.

Neumann, Lehrbuch der allg. Arithm. und Algebra für höhere Lehranstalten. Theoret. Leitfaden zu der Aufg.-Sammlung von Heis. Lpz. Langewiesche. 28 Sgr.

Orelli, Lehrbuch der Algebra für Industrie- und Gewerbeschulen. 2. Aufl. Zürich. Schabelitz. $2^2/_3$ Thlr.

Rummer, die Buchstabenrechnung und Lehre von den Gleichungen. 4. Aufl. Heidelberg. Groos. $1^1/_3$ Thlr.

Schlegel, System der Raumlehre. 1. Thl. Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden, der Ebene. Lpz. Teubner. $1^1/_3$ Thlr.

Schlesinger, die Unterrichtsmethode der darstellenden Geometrie im Sinne der neueren Geometrie an Realschulen. Wien. Mayer. 5 Sgr.

Schrader, Lehrbuch der Planimetrie. Für Realsch., Gymn. und Prov. Gewerbeschulen. Halle. Schrödel. 1 Thlr.

Sonderhof, ein Beitrag zur höheren Geodäsie. Lpz. Teubner. 20 Sgr.

Spitz, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst einer Sammlung von 730 Uebungsaufg. 5. Aufl. Lpz. Winter. 26 Sgr.

—, Anhang dazu. Die Resultate und Andeutungen zur Aufl. 5. Aufl. Ebda. 12 Sgr.

Stegemann. Grundriss der Differential- und Integralrechnung mit Anwendungen. 2. Aufl. Hannover. Helwing. $2^2/_3$ Thlr.

Wlach, die Erfindung der Quadratur des Kreises auf Grundlage des sechsmaligen Umgehens des Halbmessers. Prag. Hunger. 24 Sgr.

Wolff, Lehrbuch der Geometrie. 2. Thl. Stereometrie und sphär. Trigonometrie. 5. Aufl. Berlin. Reimer. 1 Thlr.

Zehme, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. 5. Aufl. Hagen. Butz. 18 Sgr.

Ziegler, Fundamente der Stereometrie in neuer und verb. Durchführung zum heurist. Unterrichte. München. Lindauer. 15 Sgr.

(October bis Ende 1873.)

Aschenborn, Lehrbuch der Geometrie mit Einschluss der Coardinaten-Theorie und der Kegelschnitte. 2. Aufl. Berlin. Decker. 2 Thlr. 8 Sgr.

Bardey, methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 7000 Aufg. enth. über alle Theile der Elementarmathematik. 3. Aufl. Leipzig. Teubner. 27 Sgr.

Batschinsky, Theorie der arithmetischen und anderer verwandten Reihen. 2. Heft. Leipzig. Schmaler. 15 Sgr.

Canitz, Katechismus der niederen Arithmetik. 2. Heft. Gemeine Brüche. Bautzen. Rühl. 4 Sgr.

Durège, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderl. Grösse. Mit bes. Berücks. der Schöpfungen Riemanns. 2. Aufl. Leipzig. Teubner. $1\frac{3}{4}$ Thlr.

Féaux, Buchstabenrechnung und Algebra nebst Uebungsaufgaben. 6. Aufl. Paderborn. Schöningh. 20 Sgr.

Fischer, Leitfaden zum Unterricht in der Elementargeometrie. 1. Cursus. 10. Aufl. Leipzig. Mauke. 6 Sgr.

Fossler, die Aritmetik in systematisch geordneten Aufgaben für Schulen und zur Selbstbelehrung. 1. Thl. 2. Aufl. Karlsruhe. Gutsch. 5 Sgr.

Gauss, C. F., Werke. 4. Bd. Hersg. von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 6 Thlr.

—, F. G., 5stellige vollst. logarithm. und trig. Tafeln. Zum Gebrauch für Schulen und Praxis. 4. Aufl. Berlin. Rauh. $\frac{2}{3}$ Thlr.

—, dasselbe. Kleine Ausgabe. Ebda. $\frac{5}{12}$ Thlr.

—, A. F. G. Th., die Hauptsätze der Elementarmathematik. Bunzlau. Kreuschner. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

Grünfeld, Sammlung methodisch geordneter Aufgaben zur Benutzung beim Unterricht in der Arithmetik. 1. Thl. Schleswig. Bergas. 15 Sgr.

Helmes, die Elementarmathematik nach den Bedürfnissen des Unterrichtes streng wissenschaftlich dargestellt. 2. Thl. Planimetrie. 2. Aufl. Hannover. Hahn. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Immel, die Elemente der Raumlehre in Verbindung mit dem geometr. Zeichnen. München. Lindauer. 12 Sgr.

Jordan, Geometerkalender. Mit astron. Ephemeriden. Stuttgart. Wittwer. 1 Thlr.

Koppe, die Planimetrie für den Schul- und Selbstunterricht. 12. Aufl. Essen. Bädeker. 21 Sgr.

Krause, zur Transformation der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Heidelberg. Winter. 10 Sgr.

Kühn und Kuznik, Aufgaben zum Zifferrechnen. 6 Hefte. Breslau. Korn. à $1\frac{1}{2}$ Sgr.

Mayer, Leitfaden zum Unterrichte in der elementaren Mathematik. 6. Aufl. von H. Müller. 2. Abth. Arithmetik. München. 1 Thlr.

Niemtschik, über die Construction der einander eingeschriebenen Linien 2. Ordnung. Wien. Gerold. 6 Sgr.

Ohlert, Lehrbuch der Planimetrie. 2. Aufl. Elbing. Neumann. 1 Thlr.
Ott, der logarithmische Rechenschieber. Prag. Calve. 12 Sgr.
Reidt, die Elemente der Mathematik. 2. Thl. Planimetrie. 2. Aufl. Berlin. Grote. 16 Sgr.
Reuschle, Elemente der Trigonometrie mit ihrer Anwendung in der mathemat. Geogr. Stuttgart. Schweizerbart. 1 Thlr.
Sass, Buchstabenrechnung und Algebra nebst einem Anhang enth. die brigg. Log. von 1—10000 und die Log. der trig. Zahlen. 5. Aufl. Altona. Schlüter. 24 Sgr.
Salmon, analytische Geometrie der höheren ebenen Curven. Deutsch bearb. von Prof. Fiedler. Leipzig. Tenbner. $3\frac{1}{3}$ Thlr.
Schellen, Aufgaben für das theoret. und prakt. Rechnen. 10. Aufl. Münster. Coppenrath. 20 Sgr.
Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. 2. Aufl. Braunschweig. Vieweg. 3 Thlr.
—, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 1. Thl. Aufg. zur Differentialrechnung. 2. Aufl. Leipzig. Teubner. 2 Thlr.
Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende. 1. Bd. Die 7 algebraischen Operationen. Ebda. $2\frac{2}{3}$ Thlr.
Schumann, Lehrbuch der Elementarmathematik in Gymnasien und Realschulen. 2. Aufl. von Gantzner. Berlin. Weidmann. 20 Sgr.
Sinram, Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Thl. Hamburg. Meissner. 18 Sgr.
Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 8. Aufl. Potzdam. Stein. 25 Sgr.
Steck und Bielmayr, Lehrbuch der Arithmetik. 3. Aufl. Kempten. Kösel. 12 Sgr.
—, Sammlung von arithm. Aufg. in systemat. Ordnung. Ebda. 8 Sgr.
Streckfuss, Lehrbuch der Perspective zum Schulgebrauch und Selbstunterricht. 2. Aufl. Breslau. Trewendt. $4\frac{2}{3}$ Thlr.
Stubba, Lehrbuch der Geometrie. Leipzig. Kummer. 27 Sgr.
Weissenborn, das Hyperboloid bei Räderwerken. Mit 2 Steint. Eisenach. Bacmeister. $7\frac{1}{2}$ Sgr.
Winter, der Rechenschüler. 1. Heft. Die 4 Grundrechnungsarten mit gleichbenannten Zahlen. Leipzig. Wöller. 2 Sgr.

Mathematische und naturw. Universitäts-Seminare. *)

1) Reglement für das mathematische Seminar an der Universität zu Berlin.

§. 1. Das mathematische Seminar ist ein öffentliches, mit der Universität verbundenes Institut, welches den Zweck hat, denjenigen Studirenden der mathematischen Wissenschaften, die bereits eine gewisse Summe von Kenntnissen sich erworben haben, zur selbstthätigen Anwendung derselben Anleitung zu geben und sie durch literarische Unterstützung weiter auszubilden, damit künftig durch sie die mathematischen Studien erhalten, fortgepflanzt und gefördert werden mögen.

§. 2. Die Direction des Seminars führen in der Regel zwei von dem Minister der Unterrichts-Angelegenheiten damit beauftragte Professoren

*) Vergl. IV. 77, 160, 162, 373—374, 444—446. Die Red.

der philosophischen Facutät, welche die Uebungen der Seminaristen abwechselnd leiten.

§. 3. Als ordentliche Mitglieder dieses Instituts sind nur diejenigen immatriculirten Studirenden zuzulassen, welche sich vorzugsweise der Mathematik widmen und mindestens schon ein Jahr auf der hiesigen, oder einer anderen Universität studirt haben. Ausländer können unter denselben Bedingungen aufgenommen werden, als Inländer.

§. 4. Die Aufnahme erfolgt auf Grund eines von den Directoren anzustellenden Colloquiums und einer von dem Aspiranten einzureichenden schriftlichen Probearbeit, wodurch zu ermitteln ist, ob er regen wissenschaftlichen Sinn und diejenigen Vorkenntnisse besitzt, welche nöthig sind, um an den Uebungen des Seminars mit Nutzen Antheil nehmen zu können. Die schriftliche Probearbeit kann ausnahmsweise erlassen werden, wenn das Colloquium hinreichende Gewähr für die wissenschaftliche Tüchtigkeit des Aspiranten gibt.

§. 5. Die Anzahl der ordentlichen Mitglieder darf nicht mehr als zwölf betragen. Die Directoren sind jedoch befugt, auch über diese Zahl hinaus einige Studirende, welche die nöthige Vorbildung besitzen, als ausserordentliche Mitglieder an den Uebungen des Seminars Theil nehmen zu lassen.

§. 6. Sollte ein Mitglied sich der thätigen Theilnahme an den Uebungen des Seminars ungeachtet vorgängiger Warnung entziehen, so steht den Directoren das Recht zu, dasselbe von der Theilnahme an dem Seminar auszuschliessen.

§. 7. Die Versammlungen des Seminars finden wöchentlich einmal Statt, zu einer Zeit, welche so zu wählen ist, dass sie nach Bedürfniss bis auf 2 Stunden und darüber ausgedehnt werden können.

§. 8. Die wissenschaftlichen Uebungen der Seminaristen sind theils mündliche, theils schriftliche. Die mündlichen Uebungen bestehen in freier Besprechung über bestimmte mathematische Probleme und Fragen, welche von den Directoren gestellt, oder von den Seminaristen selbst aufgeworfen werden können, und in freien Vorträgen der Seminaristen über das, was sie selbst gearbeitet, oder über Abhandlungen, welche sie durchstudirt haben. Die schriftlichen Arbeiten bestehen theils in kleineren Ausarbeitungen von Sätzen und Aufgaben, welche von den Directoren gestellt und in der Regel so gewählt werden, dass sie sich in fortlaufender Reihenfolge über ein bestimmtes Gebiet der Mathematik verbreiten und zusammen eine genauere Erkenntniss desselben vermitteln; theils grösseren Arbeiten, deren Themata aus beliebigen Fächern entnommen von den Directoren vorgeschlagen, oder von den Seminaristen selbst gewählt werden. Die schriftlichen Arbeiten sind von den Seminaristen an die Directoren abzugeben und werden von diesen beurtheilt.

§. 9. Denjenigen Seminaristen, welche sich durch Fleiss und rege Theilnahme an den mündlichen Uebungen, sowie durch die gelieferten schriftlichen Arbeiten besonders auszeichnen, werden auf Grund eines am Schlusse jedes Semesters von den Directoren einzureichenden motivirten Berichts von dem Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten Geld-Prämien bewilligt. In diese halbjährigen Berichte werden zugleich die Nachrichten über die in dem verflossenen Semester angestellten Uebungen, über die eingelieferten Arbeiten und über den Zustand des Seminars aufgenommen.

§. 10. Zum Gebrauch für die mündlichen Uebungen im Seminar, sowie für die Studien und Arbeiten der Mitglieder wird eine Handbibliothek der besten und nützlichsten mathematischen Schriften angelegt und erhalten, deren möglichst freie Benutzung unter Controle der Directoren den Seminaristen gewährt wird.

Berlin, den 7. October 1864.

Der Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten.

In Vertretung:
gez. Lehnert.

---

2) Ordnung für das mathematisch-naturwissenschaftliche Seminar der Universität zu Basel.

§. 1. Das mathematisch-naturwissenschaftliche Seminar hat den Zweck; Studirende, welche sich der Mathematik oder den Naturwissenschaften widmen, bei der selbständigen Bearbeitung wissenschaftlicher Aufgaben anzuleiten und zu unterstützen.

§. 2. An dem Seminar können sich die immatriculirten Studirenden der philosophischen und der medicinischen Facultät betheiligen, welche wenigstens ein Semester mehrere mathematische oder naturwissenschaftliche Collegien gehört haben.

§. 3. Sämmtliche Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaften an der philosophischen und der medicinischen Facultät, welche sich dazu verständigen, den Studirenden bei wissenschaftlichen Arbeiten an die Hand zu gehen, werden als Lehrer des Seminars betrachtet.

§. 4. Die Lehrer des Seminars wählen für je zwei Jahre einen Vorsteher.

§. 5. Die Anmeldung des Studirenden zur Betheiligung an dem Seminar geschieht bei den Lehrern, deren Anleitung derselbe wünscht, oder bei dem Vorsteher.

§. 6. Zur Aufmunterung des Fleisses oder zur Erleichterung bei den durch die Arbeiten veranlassten Unkosten können für eingelieferte Arbeiten Prämien in Form von Geld, Apparaten oder Büchern ertheilt werden. Dabei sollen nur solche Studirende berücksichtigt werden, welche sich auch sonst durch Fleiss im Besuche der Vorlesungen und der Uebungen auszeichnen.

Bemerkung zu meinem Aufsatze Kleinigkeiten aus der Schulstube.

(IV. 328.)

Soeben werde ich darauf aufmerksam gemacht, dass sich das von mir (Jahrg. IV, S. 328, dieser Ztschr.) angegebene Beweisverfahren für die Sätze von den Logarithmen bereits in der von mir im J. 1869 in der Zeitschrift für das Gymn.-Wesen eingehend recensirten Arithmetik von Reidt findet. Ich füge hinzu, dass ich, wie ich jetzt sehe, mir dies Verfahren damals als besonders bemerkenswerth angezeichnet, aber auch, dass ich es seitdem völlig vergessen habe, so dass ich erst im vor. Sommer bei Gelegenheit der Anzeige des Worpitzkyschen Lehrbuches darauf gekommen bin. Auch das Verfahren für geometrische Constructionsaufgaben hat, wie ich höre (denn ich selbst habe das Programm noch nicht gelesen) H. Reidt im vor. Osterprogramme besprochen. Meine Angabe sollte ja auch nichts besonders Neues bieten; jeder Lehrer wird bei dieser oder jener Aufgabe das Verfahren angewendet haben; so findet es sich, wie ich sehe, auch bei Reidt Planimetrie, pag. 72, No. 26, pag. 74, Nr. 1 angedeutet. Nur auf die allgemeine Anwendbarkeit glaubte ich hinweisen zu sollen, wie ich es im Unterricht wohl seit 10 Jahren gethan, und angeben zu dürfen, wie ich mir dies Verfahren immer mehr ausgebildet habe. Uebrigens ist es mir nur angenehm, mit einem so tüchtigen Methodiker, als welcher sich H. Reidt durch seine trefflichen Bücher bewährt hat, in diesen Punkten zusammenzutreffen, bedaure es auch nicht, dass er mir in der Veröffentlichung zuvorgekommen ist.

Züllichau. Dr. Erler.

Briefkasten.

(Alphabet. geordnet.)

J. B. in L.: „Zur Berechnung der Bildweite optischer Linsen" gelegentlich, da, wie Sie selbst sagen — das Thema bereits „klassisch behandelt" ist von J. M. in IV. 279 (Heft 4).

Dr. van B. in Kaiserslautern: Aufsatz über Proportionen und Schlussrechnung erhalten; ein noch ganz zeitgemässes Thema.

Hr. Dr. D. in Wesel: Aufsatz über Aufl. kub. und biquadr. Gleichungen zwar nicht zu verschmähen, aber — ein so recht gediegner „schulmässiger" Aufsatz über Determinanten mit Rücksicht auf Hesse, Hattendorf und Dölp wäre viel nöthiger und erwünschter.

Dr. F. in Altona: Druckfehler notirt. Von Wernicke folgt die 2. Lief. Rec. von Thomson-Tait I. erwünscht.

Hr. Dan. H. in Schässburg (Siebenbürgen): Aufsatz soll nun Aufnahme finden. Doch schien uns das Thema schon sehr „ausgetreten" und gleichwohl nicht von einer neuen interessanten Seite beleuchtet. Doch nehmen wir den Aufsatz auf, um dadurch „Seminarlehrern" Gelegenheit zu einer Discussion zu geben.

Dr. K. in Wiesbaden: Physik erhalten und an B. befördert. „Kleine Versuche" sehr passend und angenehm. Fortsetzung des Rep. erwünscht.

E. M. in Landsberg a. W: Wie Sie sehen, aufgenommen. Danke für die Anregung.

Dir. P. in Landskron (Böhmen): Wie Sie sehen, besorgt. Objekt habe ich mir angesehen.

Hr. Dr. S. in Gumbinnen: Recens. von S. in O. erhalten. „Ignorirter Brief" nicht erinnerlich. Den 1. Thl. von Sp. allg. Ar. habe ich nicht. Besprechung des Bewussten und zwar der 1. Lief. (Bg 1—10) schon jetzt erwünscht. Bitte darum. Buchhändler angewiesen Ihnen den Rest zuzusenden.

Hr. S., Studienlehrer in München: Wir bitten um Entschuldigung, dass wir Ihre Versetzung nach M. vergessen hatten, und die Sendung nach K. schickten.

Dr. W. in Berlin: Ihr in Aussicht gestellter Aufsatz über gewisse dunkle Punkte in der allgemeinen Arithmetik, namentlich über die — Definition der Null — wäre willkommen zugleich als Erläuterung mancher Stellen Ihres trefflichen Buches.

Z. in W.: Sehr erwünscht Feldzug gegen verkehrte Fragstellung nach Analogie von: „Der erste König von Rom hiess wie?" Bitte um Ihre fernere Theilnahme.

Das Beweisverfahren in den inversen Rechnungsarten.

(Schluss.)

II. Die inversen Operationen der Potenzrechnung.*)

Vom Oberlehrer Dr. Boerner in Ruhrort.

III. Wurzelrechnung.

A. Erklärung der Wurzelrechnung; charakteristische Eigenschaften der Wurzel.

(Vgl. I. A; II. A.)

Erklärung:

Wenn $a^n = b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$

so ist $\sqrt[n]{b} = a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$

Setzt man aus (1) statt des Werthes b die Potenz a^n in (2) und aus (2) statt des Werthes a die Wurzel $\sqrt[n]{b}$ in (1) ein, so folgt:

Folgesatz 1: $\sqrt[n]{a^n} = a$

Folgesatz 2: $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b.$

Lehrsatz 1:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$$

Bew. Es sei $* \sqrt[m]{a^n} = w,$

dann ist

$$a^n = w^m$$

$$(a^n)^p = (w^m)^p$$

$$a^{np} = w^{mp}$$

$$* \sqrt[mp]{a^{np}} = w$$

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mn]{a^{np}}$$

Lehrsatz 2:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}$$

---

*) S. I. Hft. 1. S. 28—43. D. Red.

Bew. Es sei $* \sqrt[m]{a^n} = w,$

dann ist
$$a^n = w^m$$
$$a^{\frac{n}{p} \cdot p} = w^{\frac{m}{p} \cdot p}$$
$$\left(a^{\frac{n}{p}}\right)^p = \left(w^{\frac{m}{p}}\right)^p$$
$$\sqrt[p]{\left(a^{\frac{n}{p}}\right)^p} = w^{\frac{m}{p}} \quad \text{(F. 1.)}$$
$$a^{\frac{n}{p}} = w^{\frac{m}{p}}$$
$$* \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}} = w$$
$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[\frac{m}{p}]{a^{\frac{n}{p}}}$$

Lehrsatz 3:
$$\sqrt[m]{\mathbf{a}^n} = \left(\sqrt[m]{\mathbf{a}}\right)^n$$

Bew.
$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{\left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right]^n}$$
$$= \sqrt[m]{\left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^n\right]^m} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

B. Anwendung der Wurzelrechnung auf Producte, Quotienten und Potenzen.

a) Producte.

(Vgl. 2. L. 5.)

Lehrsatz 4:
$$\sqrt[n]{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}} \cdot \sqrt[n]{\mathbf{b}}$$

Bew.
$$\sqrt[n]{a \cdot b} \text{ (F. 2.)} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n}$$
$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n} \text{ (F. 1.)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Lehrsatz 5:
$$\sqrt[mn]{\mathbf{a}} = 1)\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{\mathbf{a}}} = 2)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{\mathbf{a}}}$$

Bew. 1) $\sqrt[mn]{a}$ (F. 2) $= \sqrt[mn]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}$ (L. 2)
$$= \sqrt[\frac{mn}{n}]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{n}{n}}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

2) analog Bew. 1)

b) Quotienten.

(Vgl. II. L. 5.)

Lehrsatz 6:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Bew. $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \text{ (F. 2)} = \sqrt[n]{\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}}$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n} \text{ (F. 1)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Lehrsatz 7:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = 1)\ \sqrt[m]{a^n} = 2)\ \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Bew. $$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} \text{ (L. 1)} = \sqrt[\frac{m}{n}\cdot n]{a^n}$$

$$= 1)\ \sqrt[m]{a^n} \text{ (L. 3)} = 2)\ \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

c) Potenzen.

(Vgl. I. L. 3, II. L. 6.)

Lehrsatz 8:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \text{ s. L. 3.}$$

Bew. $$\sqrt[m]{a^n} \text{ (L. 2)} = \sqrt[\frac{m}{m}]{a^{\frac{n}{m}}}$$

$$= a^{\frac{n}{m}}$$

C. Anwendung der Multiplication, Division, Potenzirung und Radicirung auf Wurzeln,

a) Multiplication und Division.

(Vgl. II. C. a.)

Lehrsatz 9: (Vgl. II. L. 9.)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Bew. $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ (F. 1)} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n}$$

$$= \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n . \left(\sqrt[n]{b}\right)^n} \text{ (F. 2)} = \sqrt[n]{ab}$$

Lehrsatz 10. (Vgl. II. L. 9.)

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Bew. $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ (F. 1)} = \sqrt[n]{\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}} \text{ (F. 2)} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

b) Potenzirung und Radicirung.
(Vgl. I. C. u. II. C. b.)

Lehrsatz 11. (Vgl. II. L. 12.)

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = 1) \sqrt[n]{a^m} = 2) \; a^{\frac{m}{n}}$$

Bew. $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ (L. 3)} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (L. 8)}$$

$$= a^{\frac{m}{n}}$$

Lehrsatz 12. (Vgl. II. L. 13.)

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = 1) \sqrt[mn]{a} = 2) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

Bew. $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \text{ (L .1)} = \sqrt[m.n]{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n} \text{ (F. 2)}$$

$$= 1) \sqrt[mn]{a} \text{ (L .5)} = 2) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

IV. Logarithmenrechnung.

Die Beweise der Logarithmenrechnung sind in allen mir bekannten Lehrbüchern der Arithmetik dem Wesen nach scharf, der Form nach aber mangelhaft. Indem nämlich das Zeichen log möglichst vermieden wird (durch Ausführung der nöthigen Umwandlungen in der Form der Potenzrechnung), werden sie unzusammenhängend und für den Schüler zu künstlich. Daher kommt es denn, dass in keiner Rechnungsart mehr als in dieser, die

Gesetze vom Schüler meist nur noch mechanisch erfasst werden. Man kann dem Uebelstande abhelfen, wenn man die Bedeutung des ungewohnten Zeichens von vorn herein durch Formulirung der zwei auch hier wieder auftretenden Folgerungen aus der Definition fest einzuprägen sucht und das Zeichen selbst in den Beweisen consequent durchführt.

A. Erklärung der Logarithmirung und Eigenschaft des Logarithmus.

(Vgl. I. A, II. A, III. A.)

Erklärung.

Wenn $a^n = p$ . . . . (1)

so ist ${}^a\log p = n$ . . . . (2)

Setzt man aus (1) statt des Werthes p die Potenz a^n in (2) und aus (2) statt des Werthes n den Logarithmus ${}^a\log p$ in (1) ein, so folgt:

Folgesatz 1: $\mathbf{{}^a\log a^n = n}$

Folgesatz 2: $\mathbf{a^{{}^a\log p} = p}$

Lehrsatz 1:

$$\mathbf{{}^a\log 1 = 0}$$

Bew. ${}^a\log 1 = {}^a\log a^0$ (F. 1) $= 0$

Lehrsatz 2:

$$\mathbf{{}^a\log a = 1}$$

Bew. ${}^a\log a = {}^a\log a^1$ (F. 1) $= 1$

Lehrsatz 3:

$$\mathbf{{}^a\log 0 = -\infty}$$

Bew. $${}^a\log 0 = {}^a\log \frac{1}{\infty}$$

$$= {}^a\log \frac{a^0}{a^\infty} = {}^a\log a^{-\infty} \text{ (F. 1)}$$

$$= -\infty$$

Lehrsatz 4:

$$\mathbf{{}^b\log p = {}^a\log p \,.\, {}^b\log a}$$

Bew. $${}^b\log p \text{ (F. 2)} = {}^b\log\left(a^{{}^a\log p}\right) \text{ (F. 2)}$$

$$= {}^b\log\left[\left(b^{{}^b\log a}\right)^{{}^a\log p}\right]$$

$$= {}^b\log\left(b^{{}^a\log p \,.\, {}^b\log a}\right) \text{ (F. 1)}$$

$$= {}^a\log p \,.\, {}^b\log a$$

B. Anwendung der Logarithmirung auf Producte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln.

a) Producte und Quotienten.

Lehrsatz 5:

$$^{a}\log(\mathrm{p}\,.\,\mathrm{q}) = {}^{a}\log \mathrm{p} + {}^{a}\log \mathrm{q}$$

Bew. $^{a}\log(p\,.\,q)$ (F. 2) $= {}^{a}\log\left(a^{^{a}\log p}\,.\,a^{^{a}\log q}\right)$

$$= {}^{a}\log a^{^{a}\log p + {}^{a}\log q} \quad \text{(F. 1)}$$
$$= {}^{a}\log p + {}^{a}\log q$$

Lehrsatz 6:

$$^{a}\log \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} = {}^{a}\log \mathrm{p} - {}^{a}\log \mathrm{q}$$

Bew. $^{a}\log \frac{p}{q}$ (F. 2) $= {}^{a}\log \frac{a^{^{a}\log p}}{a^{^{a}\log q}}$

$$= {}^{a}\log a^{^{a}\log p - {}^{a}\log q} \quad \text{(F. 1)}$$
$$= {}^{a}\log p - {}^{a}\log q$$

b) Potenzen und Wurzeln.

Lehrsatz 7:

$$^{a}\log(\mathrm{p}^{\mathrm{n}}) = \mathrm{n}\,.\,{}^{a}\log \mathrm{p}$$

Bew. $^{a}\log(p^{n})$ (F.2) $= {}^{a}\log\left[\left(a^{^{a}\log p}\right)^{n}\right]$

$$= {}^{a}\log a^{n\,.\,{}^{a}\log p} \quad \text{(F. 1)} = n\,.\,{}^{a}\log p$$

Lehrsatz 8:

$$^{a}\log \sqrt[n]{\mathrm{p}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\,{}^{a}\log \mathrm{p}$$

Bew. $^{a}\log \sqrt[n]{p} = {}^{a}\log\left(p^{\frac{1}{n}}\right)$ (L. 7)

$$= \frac{1}{n}\,{}^{a}\log p.$$

V. Subtraction und Division der algebraischen Zahlen.

A. Subtraction.

Nachdem die den Zusammenhang der positiven und negativen Zahlen ausdrückende Gleichung

$$(+\,a) + (-a) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

(die man auch als Definition der entgegengesetzten Zahlen an die Spitze des Abschnittes, der von diesen handelt, stellen kann,) erwiesen ist und die Begriffe der Addition und Subtraction dahin erweitert sind, dass die entwickelten Gesetze auf algebraische Zahlen ihre unveränderte Anwendung finden, ergeben sich aus (1) sofort die beiden Formeln:

$$0 - (+a) = -a \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$0 - (-a) = +a \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Setzt man aus (1) statt 0 die Summe $(+a) + (-a)$ in (2) und (3) ein, so folgt

Folgesatz. $[(+\mathbf{a}) + (-\mathbf{a})] - (+\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$

$[(+\mathbf{a}) + (-\mathbf{a})] - (-\mathbf{a}) = +\mathbf{a}$

Die Gleichung (1) und der Folgesatz genügen, um die jedesmalige zweckmässige Form-Veränderung des Minuendus vorzunehmen.

Lehrsatz 1:

$$(\pm \mathbf{a}) - (+\mathbf{b}) = (\pm \mathbf{a}) + (-\mathbf{b})$$

Bew. $(\pm a) - (+b)$

$= [(\pm a) + 0] - (+b)$ Gl. (1)

$= [(\pm a) + (+b) + (-b)] - (+b)$ F.

$= (\pm a) + (-b)$

Lehrsatz 2:

$$(\pm \mathbf{a}) - (-\mathbf{b}) = (\pm \mathbf{a}) + (+\mathbf{b})$$

Bew. $(\pm a) - (-b)$

$= [(\pm a) + 0] - (-b)$ Gl. (1)

$= [(\pm a) + (+b) + (-b)] - (-b)$ F.

$= (\pm a) + (+b)$

B. Division.

Die Zerlegung des Dividendus geschieht mit Hülfe der Sätze über die Multiplication algebraischer Zahlen.

Wir setzen allgemein

$$a = b \cdot c;\; c = \frac{a}{b}$$

Lehrsatz 1:

$$\frac{+\mathbf{a}}{+\mathbf{b}} = +\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

Bew. $\frac{+a}{+b} = \frac{+bc}{+b} = \frac{(+b)(+c)}{+b} = +c = +\frac{a}{b}$

Lehrsatz 2:

$$\frac{-\mathbf{a}}{-\mathbf{b}} = +\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

Bew. $\frac{-a}{-b} = \frac{-bc}{-b} = \frac{(-b)(+c)}{-b} = +c = +\frac{a}{b}$

Lehrsatz 3:

$$\frac{+\,\mathrm{a}}{-\,\mathrm{b}} = -\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

Bew. $\frac{+\,a}{-\,b} = \frac{+\,bc}{-\,b} = \frac{(-\,b)\,(-\,c)}{-\,b} = -\,c = -\,\frac{a}{b}$

Lehrsatz 4:

$$\frac{-\,\mathrm{a}}{+\,\mathrm{b}} = -\,\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

Bew. $\frac{-\,a}{+\,b} = \frac{-\,bc}{+\,b} = \frac{(+\,b)\,(-\,c)}{(+\,b)} = -\,c = -\,\frac{a}{b}$.

Was die Einordnung der negativen Zahlen anlangt, so dürfte es sich empfehlen, dieselben erst einzuführen, nachdem die 4 Species mit absoluten Zahlen vollständig behandelt sind.*) Die Lehre von den absoluten Zahlen bildet ein Ganzes und darf nicht zerrissen werden, wenn die Einsicht des Schülers in ihre Gesetze und deren gegenseitige Beziehungen eine tiefer gehende und ihre Würdigung ihrer Bedeutung gemäss sein soll. In vielen Lehrbüchern erscheinen diese Sätze nur als untergeordnete Hülfsmittel für die Entwickelung der Regeln über algebraische Zahlen (woraus sich die geringe Vollständigkeit in der Behandlung dieser Abschnitte erklärt). Diese Herabsetzung eines wichtigen Theiles der Elementararithmetik verleiht demselben in den Augen des Schülers den Schein des Nebensächlichen und verhindert wohl am meisten die richtige Einsicht in die Lehre von den entgegengesetzten Zahlen. Man vergesse nicht, dass die negative Zahl, welche die Auffassung jedes vielgliedrigen Ausdrucks als einer algebraischen Summe ermöglicht, im Grunde nur die Bedeutung eines die Rechnung verallgemeinernden und deshalb erleichternden Symbols hat, dessen Einführung so lange nicht nöthig ist, als die Summe der additiven Theile die der subtractiven an Grösse übertrifft. Daraus folgt dann weiter, dass die meisten Uebungsbeispiele, welche in den Aufgabenbüchern für die vier Species mit algebraischen Zahlen aufgestellt sind, gerechnet werden können, ohne den Begriff der negativen Zahl einzuführen, dass also an Uebungsmaterial kein Mangel ist. (Heis hat bekanntlich die gewünschte Anordnung des Materials.)

*) Helmes hat diese Anordnung.

Ueber Bruchrechnung*) an Lehrerseminarien.

Von Daniel Hoehr,
Lehrer am Gymnasium und dem damit verbundenen Seminar zu Schässburg in Siebenbürgen.

§, 1. Zerlegung und Zusammensetzung von Einheiten.

Die beiden Gleichungen

$$4 \,.\, 6 = (2 \,.\, 4) \,.\, (6 : 2) \;\ldots\ldots\; 1)$$

$$4 \,.\, 6 = (4 : 2) \,.\, (2 \,.\, 6) \;\ldots\ldots\; 2)$$

gestatten eine und dieselbe Deutung:

Der Werth des Productes zweier Zahlen bleibt sich gleich, wenn man den einen Factor mit derselben Zahl multiplicirt, durch welche man den andern Factor dividirt.

Versteht man aber unter 6 eine höhere Einheit, eine Einheit der Grösse „4 Sechser," so

a) sagt die Gleichung

$$4 \,.\, 6 = (2 \,.\, 4) \,.\, (6 : 2) \;\ldots\ldots\; 1)$$

---

*) Wir haben gezögert, diesen Aufsatz, der ein ziemlich ausgetretenes Thema behandelt, aufzunehmen. Die Behandlung desselben ist jedoch für Lehrerseminare (— in Oesterreich „Lehrerbildungsanstalten" genannt —) noch immer zeitgemäss, da, wie die Erfahrung und die einschlägige Literatur (vgl. I, 515—517. II, 121—122. III, 42—49 u. 402—404. IV, 222—223.) beweisen, der mathematische Unterricht auf jenen Anstalten häufig der Gründlichkeit ermangelt. (Vgl. über das Rechenbuch von Hentschel unsere Anmerkung IV, 223.) Weiss doch jeder Gymnasial- und Realschullehrer, wie sehr den aus der Volksschule in die Mittelschule eintretenden Schülern ein tieferes Verständniss selbst der einfachsten Operationen, bei sonst bedeutender Rechengeläufigkeit, abgeht. Nur wäre zu wünschen gewesen, dass der Herr Verfasser das Thema erschöpfender behandelt hätte. Deshalb wollen wir die Seminarlehrer zu einer Discussion dieser Arbeit hiermit eingeladen haben. — D. Red.

Der Werth der Grösse „4 Sechser“ bleibt sich gleich, wenn man den Werth jeder ihrer Einheiten in 2 gleiche Theile (2 Dreier) theilt und mit Beibehaltung aller dieser Theile eine 2mal so grosse Anzahl halb so grosser Einheiten zählt:

4 Sechser = 8 Dreier.

Eine derartige Theilung mit Beibehaltung aller daraus hervorgehenden Theile heisst ein Zerlegen. Das Dividiren durch einen unbenannten Divisor ist dagegen ein Theilen mit Beibehaltung bloss eines Theiles, dessen Grösse der Quotient angibt.

b) sagt die Gleichung

$$4 \,.\, 6 = (4 : 2) \cdot (2 \,.\, 6) \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

Der Werth der Grösse „4 Sechser“ bleibt sich gleich, wenn man aus den Werthen je zweier ihrer Einheiten den Werth je einer höhern Einheit zusammensetzt und somit eine halb so grosse Anzahl 2mal so grosser Einheiten zählt:

4 Sechser = 2 Zwölfer.

§. 2. Zerlegung der Einer einer Zahl.

In jeder Division, durch welche man einen mehrzifferigen Quotienten erhält, sind die aufeinander folgenden Theildividenden jedesmal aus Einheiten einer andern, nächst niederen Klasse zusammengesetzt, deren Rang mit dem Range der entsprechenden Quotientenziffer übereinstimmt, wenn der Divisor eine von den Zahlen der Reihe 2, 3, 4, 5, 6, ... ist. So dividirt man z. B. in der Aufgabe

$$\begin{array}{l} 2597 : 8 = 324 \\ \;\;19 \\ \;\;\;37 \\ \;\;\;\;5 \end{array}$$

erst 25 Hundert durch 8 und erhält 3 Hundert,
dann 19 Zehner „ 8 „ „ 2 Zehner,
dann 37 Einer „ 8 „ „ 4 Einer.

Dabei wird der erste Rest 1 Hundert in Einheiten der niederen Klasse zerlegt und mit den herabgesetzten 9 Zehnern vereinigt zu 19 Zehnern. Ebenso wird der zweite Rest 3 Zehner in Einheiten der niederen Klasse zerlegt und mit den herabgesetzten 7 Einern vereinigt zu 37 Einern.

Der zuletzt von der Division ausgeschiedene Rest von 5 Einern bezeichnet in dieser Form den durch 8 untheilbaren Bestandtheil des Dividenden. Um den Quotienten genau angeben, um die Division abschliessen zu können, ändert man das bisherige Verfahren der Zerlegung und der damit zusammenhängenden Vervielfältigung der Anzahl der zu dividirenden Einheiten bei dem letzten Rest ab nach der Regel:

> Jede Einheit des Dividenden wird in so viele gleiche Theile zerlegt (gedacht), als der Divisor angibt.

Selbstverständlich kann der Divisor, wenn er eine Anzahl von Theilen angeben soll, nur eine von den Zahlen der Reihe 2, 3, 4, 5, 6 . . . . . . sein.

In dem obigen Beispiel wird mit Rücksicht auf den Divisor 8 jeder Einer des letzten Restes in 8 gleiche Theile zerlegt und je einer (1 : 8) dieser Theile 1 Achtel $\left(\frac{1}{8}\right)$ genannt. Man erhält demnach (vgl. §. 1. Gleichung 1) durch Zerlegung eines Einers

$$1 \,.\, 1 = (8 \,.\, 1) \,.\, (1 : 8) = 8 \,.\, \frac{1}{8} = \frac{8}{8}$$

durch Zerlegung sämmtlicher Einer des Restes 5

$$5 \,.\, 1 = (8 \,.\, 5) \,.\, (1 : 8) = 40 \,.\, \frac{1}{8} = \frac{40}{8}.$$

Wird nun in dem obigen Beispiel weiter dividirt, so ergibt sich

$$40 \text{ Achtel} : 8 = 5 \text{ Achtel}$$

$$\text{d. i.} \qquad 5 : 8 = \frac{5}{8} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \; 1)$$

womit die Division

$$2597 : 8 = 324\frac{5}{8}$$

ihren Abschluss findet. In ähnlicher Weise ergibt sich

$$9 : 7 = 1\frac{2}{7} \text{ d. i. 1 und 2 Siebentel.}$$

wenn man nach der obigen Regel bloss den Divisionsrest 2 zerlegt, dagegen

$$9 : 7 = \frac{9}{7} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \; 2)$$

wenn man den ganzen Dividenden zerlegt.

Die Gleichungen 1) 2) zeigen zunächst, dass der Quotient einer Division auch dann genau angegeben werden kann, wenn der unbenannte (oder aus zerlegbaren Einheiten zusammengesetzte benannte) Dividendus kleiner ist, als der Divisor, oder im entgegengesetzten Falle die Division nicht aufgeht.

§. 3. Bruchheinheiten. Brüche.

Die gleichen Theile (aliquote Theile) einer Grösse erhalten entweder willkürliche, oder solche Bezeichnungen, welche minder oder mehr bestimmt darauf hindeuten, in wie viele gleiche Theile das „Ganze“ zerfällt.

Dass „1 Zoll“ ein aliquoter Theil von „1 Fuss“ ist, erfährt man nicht schon durch die (willkürliche) Bezeichnung „Zoll.“

Minder willkürlich ist die Bezeichnung „1 Decimeter“ mit Rücksicht darauf, dass „Deci“ aus dem Zahlwort decem = zehn gebildet wurde, in der Zusammensetzung „Decimeter“ aber nicht 10 Meter, sondern einen von den 10 gleichen Theilen eines Meters bezeichnet.

Dagegen kann man von Einheiten, wie

$\frac{1}{5}$ = 1 Fünftel = 1 Fünf-Theil = einem von allen 5 gleichen Theilen; $\frac{1}{8}$ = 1 Achtel = 1 Acht-Theil — . . . sagen, dass sie ausdrücklich als aliquote Theile dargestellte Einheiten sind und daher erklären:

> Eine Grösse, deren Einheit ausdrücklich als ein aliquoter Theil dargestellt wird, heisst ein Bruch.

Beispiel. $\frac{7}{8}$ Elle $= 7 \cdot \frac{1}{8}$ Elle $= 7 \,.\, (1$ Elle $: 8)$

Ein Bruch enthält demnach zweierlei Angaben:

a) In wie viele gleiche Theile ein Ganzes (ursprünglich die Einheit 1) zerlegt wird, gibt der mit der angehängten Silbe „tel“ gesprochene, unter den Bruchstrich gesetzte „Nenner“ des Bruchs an.

b) Wie viele solcher Theile (Bruchheinheiten) gezählt worden, gibt der über den Bruchstrich geschriebene „Zähler“ an.

Demnach kann weder Zähler noch Nenner benannt sein. Die einem Bruch beigesetzte Benennung ist die Benennung des bei der Bildung der Bruchheinheit durch den Nenner dividirten Ganzen. Unbenannte oder gleichbenannte Brüche heissen gleichnamig, wenn sie gleiche Nenner haben.

Eine Bruchheinheit kann man so oft mal nehmen (zählen), als man überhaupt die Einheit einer Grösse zählen kann. So können z. B. auch $\frac{9}{8}$ Elle, $\frac{25}{8}$ Elle . . . also mehr Achtel-Elle gezählt werden, als $\left(\frac{8}{8}\right)$ in einer Elle enthalten sind, wenn man z. B. eine Länge von mehr als einer Elle mit der Länge $\frac{1}{8}$ Elle messen will. $\left(\frac{7}{3}\right.$ Europa's, $\frac{24}{5}$ des Erdhalbmessers.$\left.\right)$

§. 4. Gleichheit von Bruch und Quotient.

Die Gleichungen 1) 2) in §. 2. bezeichnen ferner die Regel: Der Quotient einer Division ist einem Bruche gleich, worin der (unbenannte) Dividend als Zähler, der (unbenannte) Divisor als Nenner gesetzt wird.

Rechnungsvortheile. Z. B. in dem Falle

$$7 \text{ Ellen} : 8 = \frac{7}{8} \text{ Elle}$$

statt ausführlich: 1 Elle = 8 Achtel E.
7 Ellen = 56 „ „
56 Achtel Ellen : 8 = 7 Achtel E.

Ferner: $\frac{24}{7} = 24 : 7 = 3\frac{3}{7}$. Regel für die Verwandlung eines unechten Bruchs in eine gemischte (eventuell ganze) Zahl.

Anleitung zur Feststellung der Regel für die Verwandlung einer ganzen Zahl in einen Bruch mit vorher bestimmtem Nenner gibt §. 1. Gleichung 1. Z. B.

$$5 = \frac{?}{9}$$

$$5 \,.\, 1 = (9 \,.\, 5) \,.\, (1 : 9) = 45 \,.\, \frac{1}{9} = \frac{45}{9}.$$

Haben Dividend und Divisor gleiche Benennung, so ist in dem Producte

$$\text{Dividend} = \text{Quotient} \times \text{Divisor}$$

der mit dem Quotienten gleichbedeutende Bruch der (unbenannte) Multiplicator des benannten Divisors.

$$4 \text{ Meter} : 5 \text{ Meter} = 4 : 5 = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} \,.\, 5 \text{ Meter} = 4 \text{ Meter.} \quad (\text{§. 5. Erkl.})$$

§. 5. Der Bruch als Multiplicator.

Zerfällt eine Einheit in eine anderswie bereits bestimmte Anzahl aliquoter Theile (1 Dutzend = 12 Stück; 1 Thlr. = 30 Sgr.), so ist bei der Berechnung (Resolution) eines Bruchtheils einer solchen Einheit nicht 1, sondern eine Zahl (Resolutionszahl) durch den Nenner des Bruches zu dividiren, mit dessen Zähler dann der erhaltene Quotient multiplicirt wird. In derartigen Fällen wird zwischen den Bruch und die demselben (statt der Benennung der zu resolvirenden Einheit) beigesetzte Zahl das Multiplicationszeichen (§. 4. Schlussgleichung) geschrieben. Z. B.

$$\left.\begin{cases} \frac{2}{3} \text{ Thlr.} = 2 \,.\, (1 \text{ Thlr.} : 3) \\ \frac{2}{3} \cdot 30 \text{ Sgr.} = 2 \,.\, (30 \text{ Sgr.} : 3) \end{cases}\right\} = 20 \text{ Sgr.}$$

Ebenso ist, wenn eine beliebige Zahl z. B. 14 als höhere Einheit aufgefasst wird:

$$\frac{3}{7} \,.\, 14 = 3 \,.\, (14 : 7) = 3 \,.\, 2 = 6.$$

Demnach kann auch

$$\frac{2}{3} \text{ Thlr.} = \frac{2}{3} \cdot 1 \text{ Thlr.}$$

$$\frac{5}{6} \text{ Dutzend} = \frac{5}{6} \cdot 1 \text{ Dutzend} = \frac{5}{6} \cdot 12 \text{ St.} = 10 \text{ St.}$$

gesetzt werden.

Auch in solchen Fällen ist der Zähler des Bruches der Multiplicator eines aliquoten Theiles, und wenn man in Zahlenverbindungen, wie $\frac{2}{3} \cdot 30$, $\frac{3}{7} \cdot 14$ das Product $2 \cdot \frac{1}{3}$, $3 \cdot \frac{1}{7}$ d. h. den Bruch $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ selbst als Multiplicator bezeichnet, so geschieht diese Bezeichnungsweise mit Vorbehalt der Erklärung:

> Ein als Multiplicator gesetzter Bruch deutet zwei Rechnungen an: a) eine Division des Multiplicanden durch den Bruchnenner, b) eine Multiplication des erhaltenen Quotienten mit dem Bruchzähler.

Geht die Division durch den Bruchnenner nicht auf, so deutet man dieselbe in Bruchform an, z. B.

$$\frac{7}{9} \cdot 14 = 7 \cdot \frac{14}{9}$$

und berechnet das Product $7 \cdot \frac{14}{9}$ nach der Regel $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \,.\, b}{c}$.

Der obigen Erklärung zufolge ist eine $\frac{1}{2}$ mal so grosse Zahl die Hälfte einer (damit verglichenen) Zahl, eine $\frac{1}{3}$ mal so grosse Zahl 1 Dritttheil einer (damit verglichenen) Zahl . . .

§. 6. Division und Multiplication der Brucheinheit.

An die Besprechung der Reihe

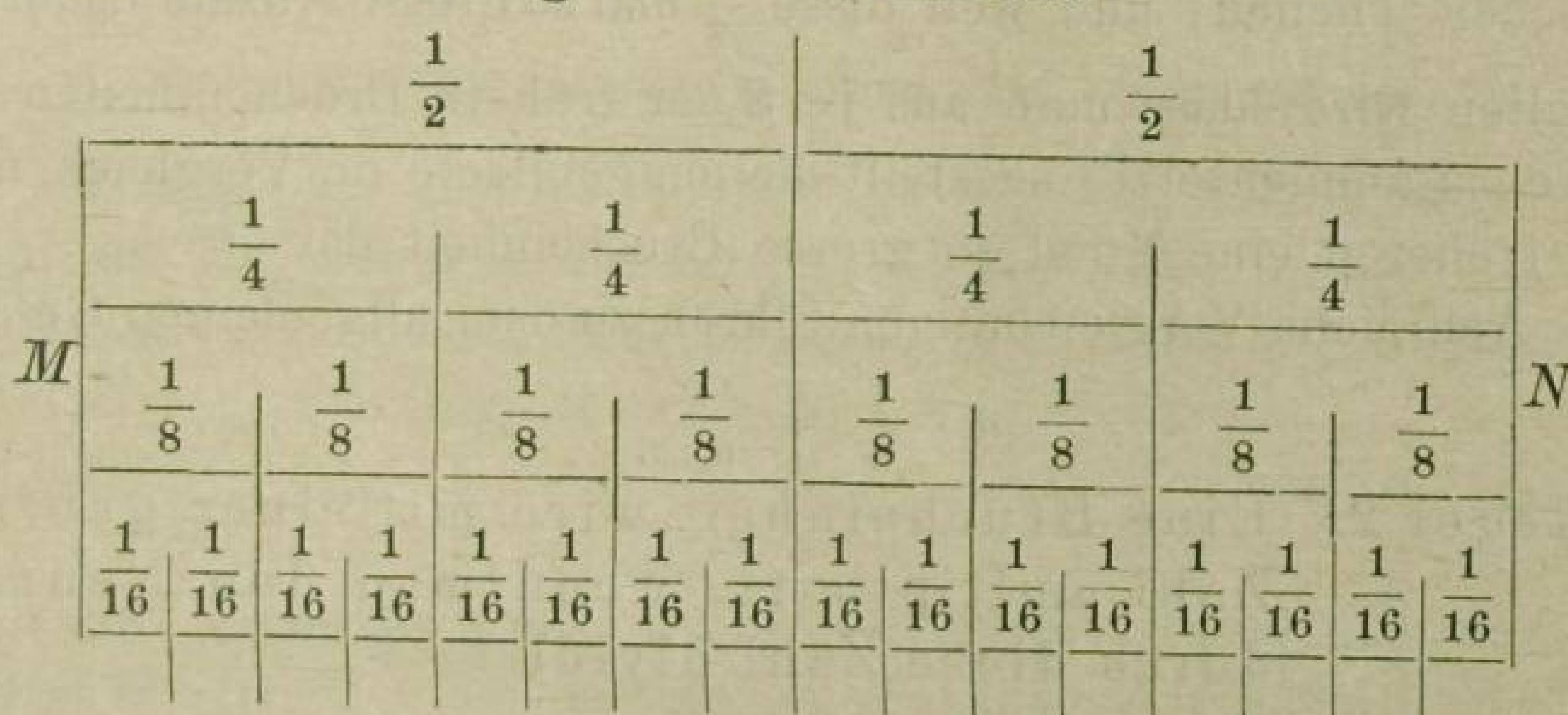
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \cdots\cdots$$

knüpft sich die Frage: Wie ändert sich der Werth einer Brucheinheit, wenn der Nenner derselben

a) mit einer ganzen Zahl multiplicirt,

b) durch eine ganze Zahl dividirt wird?

Zieht man (in Ermangelung eines der bekannten Apparate, an denen gleiche Stablängen aus verschiedenen aliquoten Theilen zusammengesetzt werden können) auf einem Lineal vom Ende M bis zum Ende N mehrere, etwa vier gerade Linien und theilt dieselben der Reihe nach in 2, 4, 8, 16 gleiche Theile, so sind alle diese Theile Brucheinheiten (aliquote Theile) des nämlichen Ganzen d. i. der Länge MN des Lineals.



1) Die Vergleichung z. B. von $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{8}$ zeigt, dass

$$\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{4 \,.\, 2} = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

ist. In Worten: $\frac{1}{2}$ ist einer unter sämmtlichen 2 gleichen Theilen eines Ganzen. Wird der Nenner 2 mit 4 multiplicirt, so ist die neugebildete Brucheinheit $\frac{1}{8}$ einer unter 4 mal so vielen gleichen Theilen, und weil diese 4 mal so grosse Anzahl dadurch erhalten wird, dass man jede der früheren Brucheinheiten in 4 gleiche Theile theilt, so stellt die neugebildete im Vergleich mit der früheren eine $\frac{1}{4}$ mal so grosse (§. 5.) Brucheinheit dar.

Durch ähnliche Vergleichungen ergibt sich als gemeinsames

Gesetz:

$$\frac{1}{a} : n = \frac{1}{n \cdot a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a}.$$

Regel 1. Eine Bruchheinheit wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man mit dieser Zahl den Nenner multiplicirt.

2) Ist der Nenner durch eine ganze Zahl ohne Rest theilbar, so lässt sich die Brucheinheit ohne Veränderung ihres Zählers mit dieser ganzen Zahl multipliciren. Z. B.

$$8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16 : 8} = \frac{1}{2}.$$

In Worten: $\frac{1}{16}$ ist einer unter sämmtlichen 16 gleichen Theilen eines Ganzen. Wird der Nenner 16 durch 8 dividirt, so ist die neugebildete Brucheinheit $\frac{1}{2}$ einer unter $\frac{1}{8}$ mal so vielen (§. 5.) gleichen Theilen, und weil diese $\frac{1}{8}$ mal so grosse Anzahl dadurch erhalten wird, dass man aus je 8 der frühern Brucheinheiten je eine zusammensetzt, so stellt die neugebildete im Vergleich mit der früheren eine 8 mal so grosse Brucheinheit dar.

Aehnliche Vergleichungen führen zu dem allgemeinen Gesetz

$$n \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a : n}.$$

Regel 2. Eine Brucheinheit wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Nenner durch diese Zahl dividirt. —

§. 7. Zerlegung und Zusammensetzung von Brucheinheiten.

Durch die getheilte Länge MN in §. 6. wird ferner veranschaulicht:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{2} = \frac{8}{16} \text{ oder } \overbrace{1 \cdot \frac{1}{2} = (8 \, . \, 1) \, . \left(\frac{1}{2} : 8\right)}^{\text{§. 1. Gl. 1.}} \overbrace{= \quad 8 \, . \, \frac{1}{8 \, . \, 2}}^{\text{§. 6. R. 1.}} = \frac{8 \, . \, 1}{8 \, . \, 2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \quad \text{„} \quad 3 \cdot \frac{1}{4} = (2 \, . \, 3) \, . \left(\frac{1}{4} : 2\right) = (2 \, . \, 3) \cdot \frac{1}{2 \, . \, 4} = \frac{2 \, . \, 3}{2 \, . \, 4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n \, . \, a}{n \, . \, b}$$

Regel 1. Der Werth eines Bruches bleibt sich gleich, wenn man mit einer und derselben Zahl Zähler und Nenner multiplicirt.

$$\text{b) } \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \text{ oder } 8 \cdot \frac{1}{16} \overbrace{= (8:8) \,.\, \left(8 \cdot \frac{1}{16}\right)}^{\S.\ 1.\ \text{Gl. } 2.} \overbrace{= (8:8) \,.\, \frac{1}{16:8}}^{\S.\ 6.\ \text{R. } 2.} = \frac{8:8}{16:8}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad ,, \quad 6 \cdot \frac{1}{8} = (6:2) \,.\, \left(2 \,.\, \frac{1}{8}\right) = (6:2) \,.\, \frac{1}{8:2} = \frac{6:2}{8:2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}.$$

Regel 2. Der Werth eines Bruches bleibt sich gleich, wenn man Zähler und Nenner durch eine und dieselbe Zahl dividirt.

Nach Regel 1. werden Brucheinheiten zerlegt insbesondere bei der Berechnung des Generalnenners und bei der Division eines Bruches durch eine ganze Zahl (§. 9.). Nach Regel 2. werden Brucheinheiten zusammengesetzt bei dem sogenannten Heben der Brüche.

§. 8. Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Weil bei der Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl zur Brucheinheit ein zweiter Multiplicator hinzutritt, die Ordnung dieser beiden Multiplicationen aber für den Werth des Productes gleichgiltig ist

$$2 \cdot \frac{3}{8} = 2 \,.\, 3 \,.\, \frac{1}{8} = 3 \,.\, 2 \,.\, \frac{1}{8},$$

so kann, wenn der Multiplicator des Bruches im Nenner aufgeht, zuerst die Brucheinheit mit diesem Multiplicator (nach §. 6. R. 2), dann das Ergebniss mit dem Zähler des Bruches (nach der Hauptregel $a \,.\, \frac{b}{c} = \frac{a \,.\, b}{c}$) multiplicirt werden:

$$2 \cdot \frac{3}{8} = 3 \,.\, \left(2 \,.\, \frac{1}{8}\right) = 3 \cdot \frac{1}{8:2} = \frac{3}{8:2} = \frac{3}{4}$$

kurz $2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8:2} = \frac{3}{4}$.

Statt daher nach der Hauptregel zu multipliciren und nachher zu heben

$$2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{2 \,.\, 3}{8} = \frac{(2 \,.\, 3):2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

wobei mit dem Zähler zwei entgegengesetzte, einander aufhebende und daher überflüssige Rechnungen vorgenommen werden, rechnet man in derlei Fällen mit Vortheil nach der Regel:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Nenner durch diese Zahl dividirt.

§. 9. Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Wenn bei der Division eines Bruches durch eine ganze Zahl der Divisor im Zähler des Dividenden nicht aufgeht, so verfährt man, wie in andern ähnlichen Fällen, z. B.

2 Jahre : 3 = 24 Monate : 3 = 8 Monate,

man zerlegt den Dividenden, den Bruch insbesondere (Regel in §. 2.) in eine so vielmal so grosse Anzahl kleinerer Einheiten, als der Divisor anzeigt. Nach §. 7. Regel 1. geschieht dieses, indem man mit einer dem Divisor gleichen Zahl Zähler und Nenner des Dividenden multiplicirt. Z. B.

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{5 \,.\, 3}{5 \,.\, 4} : 5$$

$$= \frac{(5 \,.\, 3) : 5}{5 \,.\, 4}$$

$$\text{kurz } \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{5 \,.\, 4} = \frac{3}{20}.$$

Will man in solchen Fällen die beiden mit dem Zähler des Bruches vorzunehmenden Rechnungen als entgegengesetzte, einander aufhebende und daher überflüssige Rechnungen vermeiden, so dividirt man nach der Regel:

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man mit dieser Zahl den Nenner multiplicirt.

Nachträgliche Bemerkung. Mit Bezug auf die in dem vorstehenden Aufsatz gebrauchten Ausdrücke „$\frac{1}{4}$ mal so gross," „$\frac{1}{8}$ mal so viele" erlaube ich mir die nachfolgenden Bemerkungen.

Hat beim Unterricht die Gleichung

$$\frac{a}{b} \cdot z = a \,.\, (z : b)$$

ihre Erklärung gefunden, so steht fortan nichts mehr im Wege, Gleichungen, wie

$$36 = 3 \,.\, 12$$

$$4 = \frac{1}{3} \,.\, 12$$

gleichförmig zu übersetzen mit

36 ist 3mal so gross, als 12

4 ist $\frac{1}{3}$mal so gross, als 12,

eine Ausdrucksweise, durch welche (die Erklärung der Multiplication mit einem Bruch vorausgesetzt) jede den beabsichtigten Sinn störende Deutung ausgeschlossen wird, während z. B. von den beiden Angaben

a) 36 ist 3mal so gross, als 12 . . . . gross ist

b) 4 ist 3mal so klein, als 12 . . . . klein ist,

die letztere eine Deutung gestattet, derzufolge diese Angabe unwahr ist. Denn:

Die Zahl „so gross, als 12“ stimmt mit der Zahl 12 eben so genau überein, als die Zahl „so klein, als 12.“ Hiermit wird die Richtigkeit der Gleichung

Die Zahl „so gross, als 12“ = der Zahl „so klein, als 12“

und damit die Möglichkeit zugegeben, dass nach dem Satz: „Gleiches mit Gleichem multiplicirt gibt Gleiches“ geschlossen werden kann

3mal (so gross, als 12) = 3mal (so klein, als 12)

d. i. 3mal 12 = 3mal 12

und das ist wohl 36, aber nicht auch 4.

Die geometrische Bedeutung des Schwerpunktes.

Von F. C. Fresenius.

(Mit 4 Figuren im Text.)

Wo in der Geometrie der Schwerpunkt vorkommt, wundert man sich stets, dass ein Begriff von so ausgesprochen geometrischer Natur erst, wie auch sein Name zeigt, durch die Hinterthür einer physikalischen Betrachtung hereingekommen ist.

Man musste erst den sämmtlichen Punkten eines Gebildes Schwere beilegen und zwar gleiche — dann gab es einen Punkt, durch dessen Unterstützung das ganze Gebilde vor dem Fallen geschützt war. Hier bedurfte es gewissermassen eines Experiments um zur Definition zu gelangen.

Oder es hiess wissenschaftlicher: Der Schwerpunkt ist der Angriffspunkt der Resultirenden aus den parallelen Kräften, welche auf alle Punkte eines Gebildes wirkend gedacht sind. Auch der gleichfalls physikalische Begriff der Momente wird wohl hereingezogen. Aber auch von hier aus öffnet sich kein Weg zu einer geometrischen Definition. Wenn Kambly (Planimetrie §. 146) sagt: Der Durchschnittspunkt der Transversalen eines Dreiecks heisst der Schwerpunkt des Dreiecks, weil die Fläche um ihn herum gleichmässig vertheilt ist, so fragt der Schüler mit Recht, was das heisse: die Fläche ist um einen Punkt herum gleichmässig vertheilt, und auch die Verweisung der beistehenden Nummer auf den Satz, dass Dreiecke von gleicher Basis und Höhe gleich sind, reicht nicht aus, ihn zu befriedigen. Denn, sagt er: wenn uns auch die drei Transversalen den Gefallen thun, das Dreieck in je zwei gleiche Theile zu theilen, thut es denn auch eine andre Linie durch den Schwerpunkt? Eine Linie durch denselben parallel zu einer Seite wird vielmehr zwei Flächenstücke liefern, die sich wie 4 zu 5 verhalten.

Recurrirt man endlich auf einen Satz etwa folgender Art: Durch den Schwerpunkt gelegt habe jede Linie die Eigenschaft, dass das Mittel der Entfernungen aller Punkte diesseits und jenseits derselben sich aufhebe, so ist dem Anfänger damit noch immer wenig geholfen, weil die Auffindung dieser Mittel im Allgemeinen seine Kräfte übersteigen und Integralrechnung in Anspruch nehmen wird.

Im Folgenden ist es mir, glaube ich, gelungen eine auch für den Schüler völlig zugängliche Betrachtungsweise aufzufinden, welche, wenn sie auch den Vorwurf des Zerstückelten und Unbeholfenen nicht vermeidet, doch von Schritt zu Schritt verständlich sein und nebenher einigen Ertrag an neuen Anschauungen liefern mag.

Dass sich schon Andre auf diesem Wege versucht haben, musste ich wohl vermuthen, da er so nahe liegt; dass solche von Möbius in seinem „barycentrischen Calcul“ (Einleitung) genannt sind, habe ich wieder einmal erst gefunden, als ich mit der nachfolgenden kleinen Arbeit fertig war. Indess, obschon mir diese Werke nicht zugänglich sind, kann ich doch annehmen, dass ihre Auseinandersetzungen nicht wohl so elementar gefasst sein werden, und die Darlegung der meinigen in dieser Zeitschrift darum doch noch gerechtfertigt sein dürfte.

In der Stereometrie ist dem Schüler, sobald er die Berechnung des Kegels, des ganzen und parallel abgestumpften, erlernt hat, ein Satz zugänglich, welcher lautet:

Der Körper, welcher durch Rotation eines Dreiecks um eine in seiner Ebene und ausser seinen Grenzen liegende Achse entsteht, hat den Inhalt eines Prisma, dessen Grundfläche das Dreieck, dessen Höhe die Peripherie des Kreises ist, welchen der Transversalenschneidepunkt des Dreiecks während der Rotation beschreibt.

Der Beweis kann bekanntlich so geführt werden, dass zuerst dieser Rotationskörper als die Differenz zweier Rotationskörper erkannt wird; den Subtrahend bildet ein abgestumpfter Kegel, den Minuend die Summe zweier andrer. Die dabei vorkommenden Formeln enthalten nur die Werthe der Perpendikel von den drei Dreiecksecken zur Achse und Stücke der Achse. Mit eben diesen Werthen lässt sich der Inhalt des Dreiecks ausdrücken, wenn man es als Differenz zweier Flächen betrachtet, deren Minuend wiederum die Summe zweier Paralleltrapeze, deren Subtrahend ein drittes Paralleltrapez ist. Erkennt man nun noch (aus dem bekannten Verhältniss der Transversalenstücke), dass das Perpendikel aus dem Transversalenschneidepunkte zur Achse das arithmetische Mittel zwischen den drei Perpendikeln aus den Dreiecksecken zur Achse ist, so lässt sich nach einer leichten Anordnung die Wahrheit der These durch Gleichbeweisung der sie ausdrückenden Formeln aufzeigen.

Es ist dies bekanntlich ein einfacher Fall der sogenannten Guldin'schen Regel. Ein noch einfacherer wäre der gewesen, dass ein Rechteck, in welchem 2 Seiten der Achse parallel, um diese rotirend einen Körper erzeugt hätten.

Nehmen wir nun an in diesem Satz, welcher die Lage und den Ort der Achse in Bezug auf das rotirende Dreieck während des Beweises ganz offen liess: die Achse gehe durch den Transversalenschneidepunkt selbst, so ergibt sich, dass der Rotationskörper Null wird. Denn die Peripherie eines Kreises als Factor des Körperinhalts wird Null, wenn der kreisbeschreibende Punkt in die Achse fällt.

Wir müssen uns diese Thatsache so versinnlichen, dass der Theil des körpererzeugenden Dreiecks, welcher in diesem Falle jenseits der Axe zu liegen kommt, als mit dem negativen Zeichen behaftet, durch Rotation ein Körpergebilde erzeugt, welches von dem Körper, den das diesseitige Dreiecksstück hervorbringt, in Abzug gebracht werden muss.

Auf diese Betrachtung gestützt, wollen wir einmal unser Ziel vorgreifend andeuten:

Alle Flächenräume, lineare Gebilde oder Punktgruppen, welche einer Ebene angehören, besitzen einen Punkt, der die Eigenschaft hat, dass für jede durch denselben in der Ebene gelegte Achse das Rotationsgebilde Null wird.

Als Definition des Schwerpunkts lässt zwar dieser Satz auch noch zu wünschen übrig: Einmal ist auszustellen, dass er vorläufig nur auf ebne Gebilde beschränkt ist, zweitens, dass er nicht genetisch lautet, sondern der zu definirende Begriff von einem aussen liegenden Versuch abhängig gemacht ist.

Indessen gründet er sich auf rein Geometrisches und ist relativ einfach.

Nun zur Einzeldurchführung, welche hier nöthig ist, weil wir mit den Schülern stets vom Concreten zum Allgemeinen fortschreiten wollen.

1) Punktgruppen.

Die Lage des Schwerpunkts (wir wollen ihn immer hinfort so nennen) für zwei Punkte ist auf der Mitte der Verbindungslinie derselben.

So entspricht sie der aufgestellten Regel; denn durch diese Mitte gelegt, enthält die Achse entweder beide Punkte selbst — dann sind die beiden von ihnen durch Rotation erzeugten Kreise zugleich Null, — oder die Punkte haben gleiche Entfernungen von der Achse, erzeugen also, der eine eine positive, der andre eine negative Peripherie von gleicher Grösse, zusammen ein Gebilde = Null.

Eine Schwierigkeit soll dabei nicht verschwiegen werden. Analog der Erzeugung höherer Gebilde müssten wir hier die vom Punkt durch Bewegung erzeugte Linie auch als Product zweier Factoren auffassen. Wir sind gewohnt, das Product zweier Linien als ein Flächenhaftes, das Product aus Fläche und Linie als das Körperliche anzusehen. Wenn aber die Linie Product aus Punkt und Linie erscheinen soll, so darf der Punkt nicht, wie er als Raumgrösse (lineare, flächenhafte oder körperliche — denn er kommt ja oft als Rudiment aller dieser vor*) —) genommen zu werden pflegt, als Null gelten, sondern als Eins. Diese Eins ist unbenannte Zahl, während die Zahlenwerthe, welche man den Linien beilegt, benannte Zahlen, d. h. mit der linearen Eigenschaft behaftete oder die lineare Masseinheit zählende Zahlen sind. In der That entspricht so der Punkt nicht der 1^{ten} sondern der 0^{ten} Potenz der linearen Einheit und alle vier Stufen liessen sich consequent durch die 4 Grade des Linearen, des Grundmassstabs, ausdrücken:

Der Punkt	ist	Lineareinheit	mit	dem	Exponenten	0.
Die Linie	„	„	„	„	„	1.
Die Fläche	„	„	„	„	„	2.
Der Körper	„	„	„	„	„	3.

Um wieder zum Thema zurückzukehren, lässt sich jetzt die

*) Wo die Linie als Rudiment der Fläche übrig bleibt, ist sie ja auch Null, obschon sie als Linie nicht raumlos ist, z. B. Ringfläche für $R = r$.

Umkehr zur Guldin'schen Regel ohne Weiteres aus unserm Satz folgern: Das Rotationsgebilde, welches von zwei auf derselben Seite einer Achse liegenden Punkten gebildet wird, ist gleich dem Product des erzeugenden Gebildes (hier der zwei Punkte $= 1 + 1 = 2$) mit der vom Schwerpunkt beschriebenen Peripherie.

Seien die Entfernungen der Punkte von der Achse a und b, so ist der Schwerpunkt um $\frac{a+b}{2}$ von ihr entfernt. Jene zwei Kreise $2a\pi + 2b\pi = 2\ [2\left(\frac{a+b}{2}\right)\pi]$ sind das Rotationsgebilde.

Für 3 Punkte liegt der Schwerpunkt (wie für die Dreiecksfläche) im Schneidepunkte der Transversalen des Dreiecks. Wie schon erwähnt, bildet das Perpendikel aus letzterem Punkt auf die Achse das arithmetische Mittel der drei Perpendikel aus den Ecken (hier den gegebenen Punkten).

Das Gebilde heisst hier $1 + 1 + 1 = 3$. Die Entfernungen seien a, b, c also ist $2a\pi + 2b\pi + 2c\pi = 3\ [2.\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\pi]$ das Rotationsgebilde. Für eine Achse durch den Schwerpunkt ist $\frac{a+b+c}{3} = 0$, also auch das Rotationsgebilde Null.

Um überhaupt für mehrere Punkte einer Ebene den Schwerpunkt zu suchen, haben wir zwei Mittel:

Entweder wir suchen für eine irgendwie ausserhalb der Punktgruppe liegende Achse (d. h. so liegende, dass kein Punkt jenseits zu liegen kommt) die Perpendikel und suchen aus ihnen das arithmetische Mittel. Der geometrische Ort des Schwerpunktes ist die zur Achse gezogene Parallele, welche um dieses Mittel von ihr entfernt ist. Bestimmt man das Mittel aller Perpendikel der Punktgruppe noch in Bezug auf eine andre äussere Achse, so ergeben die beiden geometrischen Oerter als ihren Durchschnitt den Schwerpunkt.

Oder man sucht den Schwerpunkt zweier Punkte, verbindet ihn mit dem 3. Punkt. Auf der Verbindungslinie liegt der Hauptschwerpunkt so, dass sich der Theil derselben, welcher dem einzelnen Punkt zugewendet ist, zum andern wie 2 zu 1 verhält (denn das bedingt die Lage des obengenannten Transversalschneidepunkts und führt zur richtigen Bestimmung jenes Mittelperpendikels). Dann wird der Schwerpunkt der 3 Punkte mit einem 4. Punkt verbunden und der Hauptschwerpunkt auf der Verbindungslinie so gefunden, dass ihr nach dem einzelnen Punkt gerichteter Theil sich zum Rest wie 3 zu 1 verhält u. s. w.

Der Beweis lautet, wenn die Perpendikel der n Punkte a, b, c, d . . . sind:

$$2a\pi + 2b\pi + 2c\pi + 2d\pi \ldots = n\left[2\frac{(a+b+c+d\ldots)}{n}\pi\right]$$

Geht die Achse durch den Schwerpunkt, so ist das Mittel der Perpendikel, also auch das Rotationsgebilde, d. h. die Summe aller Kreisperipherien Null. Der Uebergang von der geometrischen Bedeutung zur statischen ist ganz leicht: Setzt man statt des Wortes Perpendikel das Wort Moment, so hat man im Schwerpunkt den Angriffspunkt der Resultirenden von n gleichen parallelen Kräften.

2) Lineare Gebilde. Wenn für Punktgruppen der Weg der physikalischen und der rein geometrischen Betrachtungsweise des Begriffs „Schwerpunkt“ noch erträglich zusammengehen konnte, indem doch immer dieser Punkt als Summe aller andern Punkte auch im geometrischen Sinne gelten konnte, so hat eine solche Doppelauffassung für den Schwerpunkt der Linie schon wieder eine grössere principielle Schwierigkeit. So einfach es zwar lautet, in der geraden Linie lasse sich die Gesammtheit aller Punkte in dem Mittelpunkt vereinigt denken, so sträubt sich eigentlich doch schon unsre Elementaranschauung dagegen, die Linie als Summe von Punkten anzusehen. Es sei daher jener zweite, rein geometrische Weg auch hier gleich versucht:

Das Gebilde, welches die gerade Linie bei ihrer Rotation um eine äussere mit ihr in einer Ebene liegende Axe erzeugt, ist im Allgemeinen ein Kegelmantel. Dabei sind die zwei Fälle des Cylindermantels und der Kreisringfläche inbegriffen. Geht die Achse durch den Mittelpunkt der Graden, so ist ohne Weiteres evident, dass die beiden Rotationsgebilde, das positive und negative, identisch sind, also das Gesammtgebilde Null.

Aber es ist auch für den Kegelmantel, der von einer ausserhalb der Achse liegenden Graden gebildet wird, bekannt, dass er gleichen Flächenraum behält, wenn nur die Länge der Seitenlinie (eben der erzeugenden Graden) und die Mittelperipherie (d. h. der Kreis mit dem Perpendikel von der Mitte der Erzeugenden zur Achse — als Radius) ihren Werth behalten. Also würde das Rotationsgebilde, welches von einer in der rotirenden

Ebene gelegenen Graden erzeugt wird, seinen Werth behalten, wenn die Grade in dieser Ebene irgendwie um ihren Mittelpunkt ohne dessen Ortsveränderung gedreht wird, z. B. auch in die Richtung parallel zur Achse. Daraus folgt, dass das Rotationsgebilde, welches irgend eine Gruppe grader Linien, welche einer Ebene angehören, durch Drehung um irgend eine Achse dieser Ebene bildet, gleich der Summe der Cylinderflächen sein muss, deren Seitenlinien jene Erzeugenden und deren Radien die entsprechenden Perpendikel aus den Mitten der Erzeugenden auf die Achse sind. Die Rücksicht, ob die erzeugenden Graden vereinzelt oder gruppenweise verbunden, vielleicht den Umfang einer geschlossenen Figur bildend vorhanden sind, kommt hier offenbar gar nicht in Frage.

Damit ist die Aufsuchung des Schwerpunkts für Gruppen von graden Linien auf die Frage nach dem Schwerpunkt für Parallele reducirt.

Zwei Parallele würden durch Rotation um eine gleichfalls parallele Achse in dem Fall ein Null werdendes Gebilde (2 Cylinderflächen mit entgegengesetztem Zeichen) hervorbringen, wenn die Entfernungen der positiven und negativen Erzeugenden von der Achse in umgekehrtem Verhältniss mit ihren Längen stünden. Denn der Ausdruck des Cylindermantels ist ja nur Product aus Seite und Radius und einer Constanten.

Wie also oben von Punktgruppen, so ist hier von Liniengruppen der Schwerpunkt zu finden: Zuerst werden von den Mittelpunkten aller einzelnen Linien Perpendikel zu einer beliebig gewählten äussern Achse construirt, jedes mit der Masszahl der dasselbe entsendenden Linie multiplicirt; dann wird die Summe dieser Producte durch die Summe aller Linien dividirt und mit dem Perpendikel, welches der so gewonnenen Masszahl entspricht, der geometrische Ort als zur Achse parallel construirt. Zwei geometrische Oerter, von zwei beliebigen Achsen her construirt geben den wahren Ort des Schwerpunkts.

Der Beweis dieser Regel liegt in folgender Betrachtung:

Sind die erzeugenden Linien $a, b, c, d \ldots$

die entsprechenden Perpendikel $m, n, p, q \ldots$ so ist die

Summe der Cylinderflächen $= 2\pi(am + bn + cp + dq \ldots) =$

$$2\pi\,(a + b + c + d \ldots)\left(\frac{am + bn + cp + dq \ldots}{a + b + c + d \ldots}\right)$$

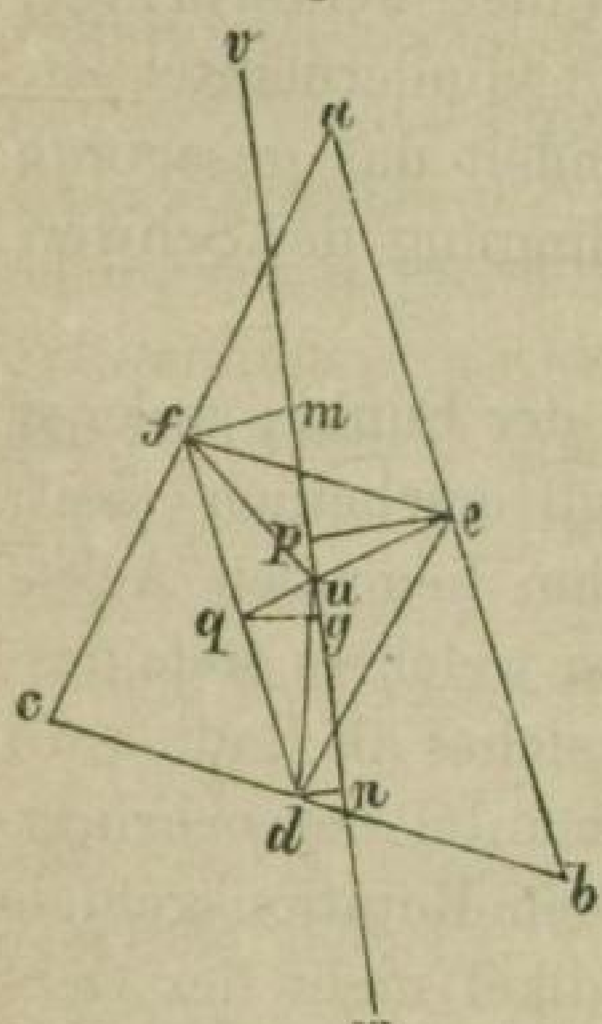
Also muss der Werth $\frac{am + bn + cp + dq \ldots}{a + b + c + d \ldots}$ einem einzigen Radius entsprechen können, welcher mit der einzigen Seitenlinie $a + b + c + d \ldots$ einen Cylinder hervorbringt, dessen Mantel gleich der Summe aller jener Cylindermäntel ist. Das Nullwerden dieses Quotienten also verwandelt das gesammte Rotationsgebilde in Null und liefert die Bedingung des Schwerpunkts.

Umgekehrt lässt sich auch zeigen, dass der Punkt, welcher als Achsenpunkt das Gesammtgebilde als Null erscheinen lässt, derselbe ist, für welchen bei einer ausser ihm liegenden Achse die Guldin'sche Regel in Kraft steht, d. h. von welchem stets dasjenige Perpendikel zur Achse gezogen wird, welches als Radius mit der Summe der Erzeugenden einen Cylindermantel hervorbringt, welcher der Summe aller Cylindermäntel oder dem Rotationsgebilde gleichwerthig ist. Denn wäre jenes Perpendikel nicht der richtige Radius des einen stellvertretenden Cylindermantels, so hätte (bei gleichbleibendem Werth der Seitenlinie) ein anderes Perpendikel die Eigenschaft, als Radius den stellvertretenden Cylindermantel zu erzeugen. Dieses andre gleich Null gesetzt müsste aber wiederum das Gesammtgebilde in Null verwandeln. Demnach wäre zugleich für verschiedene parallele Achsen ein Nullwerden möglich, ein Fall, dessen Ungereimtheit wir sogleich einsehen, wenn wir bedenken, dass sich bei jeder solchen Verschiebung der Achse die Radien der erzeugenden Gebilde der einen Seite zugleich vergrössern, die der anderen verkleinern müssten und so die Gleichheit der Resultate alterirt würde. Dass ein Schwerpunkt, d. h. ein Punkt von der bezeichneten geometrischen Eigenschaft für jede Gruppe grader Linien, also auch für jede krumme Linie — die ja stets als Complex unendlich kleiner Geraden betrachtet werden kann — existiren muss, wenigstens für die Gebilde der Ebene, lässt sich aus der angeführten Methode folgern. Doch wird die wirkliche Construction natürlich mitunter sehr umständlich sein.

Besonderes Interesse möchte noch der Umfang des Dreiecks bieten.

Das Dreieck sei abc (Fig. 1), die Punkte f, e, d sollen die Mitten seiner Seiten sein. Im Dreieck fed, welches durch Verbindung dieser Seitenmitten entstanden ist, seien die drei Winkel halbirt und die Halbirungslinien treffen sich in u. Nun lässt sich zeigen, dass u der Schwerpunkt des Umfangs $ab + bc + ca$ ist.

Fig. 1.



vw sei die beliebig durch u gelegte Achse. Von f, e, d, q seien die Perpendikel fm, dn, ep und qg zur Achse gezogen. Nun ist:

$$fm - qg : qg - dn = fg : qd = fe : de$$

also $fm \,.\, de - qg \,.\, de = qg \cdot fe - dn \,.\, fe$

$$qg = \frac{fm \,.\, de + fe \,.\, dn}{fe + de} \qquad 1)$$

$$dq : df = de : de + ef$$

also $$dq = \frac{de \,.\, ef}{de + ef} \qquad 2)$$

und $qg : pe = qu : ue = dq : de$ und statt qg und dq ihre Werthe aus 1) und 2) gesetzt:

$$\frac{fm \,.\, de + fe \,.\, dn}{fe + de} : pe = \frac{de \,.\, df}{de + ef} : de$$

also $$pe \,.\, df = fm \,.\, de + fe \,.\, dn$$

und da $$df = \frac{ab}{2},\ de = \frac{ca}{2},\ fe = \frac{cb}{2},$$

so ist auch $ab \cdot ep = ac \cdot fm + cb \cdot dn$

Denkt man sich die Linie ac um f, cb um d, ab um e gedreht, bis jede parallel der Achse vw ist, so wäre

$2\, ab\, \pi \cdot ep = 2\, ac\, \pi \cdot fm + 2\, cb\, \pi \cdot dn$ die Gleichung, aus welcher folgt, dass das Rotationsgebilde um irgend eine Achse durch u aus Cylindermänteln besteht, deren Summe Null ist.

Der Umfang des Dreiecks hat also seinen Schwerpunkt im Centrum des einem mit halbirten Seiten eingezeichneten Dreieck wiederum eingeschriebenen Kreises.

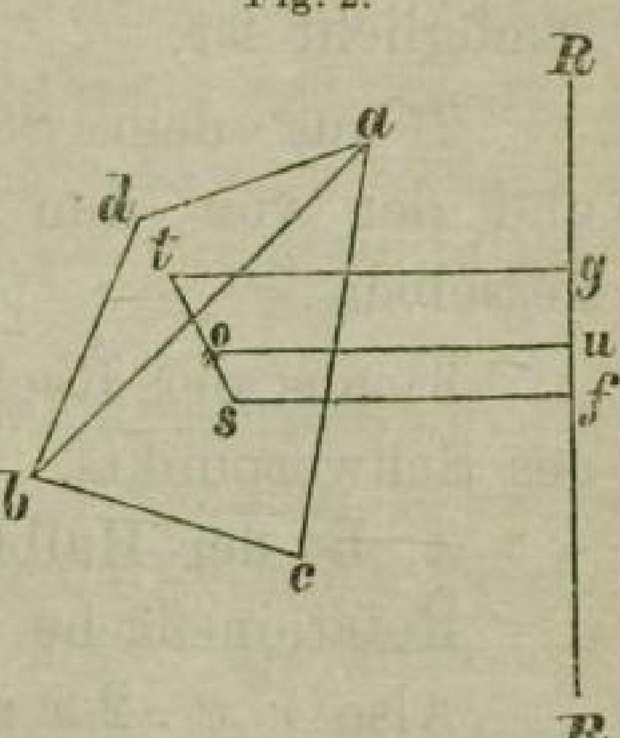
Merkwürdig ist noch, dass der Radius dieses Kreises einen Quotienten zum Werth hat, dessen Zähler der Flächeninhalt, dessen Nenner der Umfang des Dreiecks ist, für welches sein Centrum Schwerpunkt ist.

3) Flächen. Für die Dreiecksfläche ist im Eingang schon der Beweis dafür angedeutet, dass seine Rotation um eine äussere Achse in derselben Ebene einen Körper erzeuge, welcher als Product aus Dreiecksfläche und Weg des Schwerpunkts (hier des Transversalenschneidepunkts) ausgedrückt ist.

Es ist auch dort schon erwähnt, dass die Verlegung der Achse in den Schwerpunkt selbst den Werth des Rotationskörpers auf Null reduciren muss.

Es ist nicht schwer, direct zu erweisen, dass die beiden Rotationskörper, welche von dem positiven und negativen Theil der Dreiecksfläche bei einer beliebig durch den Transversalenschneidepunkt gezogenen Achse erzeugt werden, einander gleich sind. Doch ist dieser Beweis durch den erwähnten Schluss von dem allgemein gültigen Fall der Guldin'schen Regel auf den Nullfall überflüssig geworden.

Fig. 2.



Die Erweiterung zunächst für das Viereck soll nun folgen.

Das Viereck sei $abcd$, die Rotationsachse sei RR_1. Die Diagonale ab theilt das Viereck in die Dreiecke $abc = M$ und $abd = N$. M habe den Schwerpunkt s. N habe den Schwerpunkt t.

Verbindet man t mit s und theilt die Verbindungslinie in o so, dass $os : ot = N : M$ und zieht die Perpendikel tg, ou und sf zur Achse, so ist

$$ou - sf : tg - ou = os : ot = N : M$$

also
$$N = M \cdot \frac{ou - sf}{tg - ou}$$

und
$$tg - sf : tg - ou = ts : to = N + M : M$$

also
$$M = (N + M)\,\frac{tg - ou}{tg - sf}$$

Nach dem Vorigen erzeugt das Dreieck N durch Rotation den Körper $2\; tg\, \pi \cdot N = 2\; tg\, \pi\; M \frac{ou - sf}{tg - ou}$

Aber Dreieck M erzeugt $2\; sf\; \pi\; M$.

Also ist der aus $N + M$ erzeugte Körper

$$2\,\pi\, M \left(sf + tg\; \frac{ou - sf}{tg - ou}\right) =$$

$$2\,\pi \left(N + M\right) \frac{tg - ou}{tg - sf} \left(sf + tg\; \frac{ou - sf}{tg - ou}\right) =$$

$$2\,\pi\,(N + M)\; ou$$

Also ist o der Schwerpunkt des Vierecks, da er die Guldin'sche Regel befolgt.

Ganz in derselben Weise lässt sich der Schwerpunkt eines Fünfecks, Sechsecks etc. construiren und es wäre damit die Gültigkeit der Guldin'schen Regel für alle Flächenräume, die in einer Ebene mit der Achse liegen, erwiesen. Also lässt sich auch in jeder ebenen Fläche ein Punkt angeben, durch welchen gelegt die Achse einen auf Null reducirten Rotationskörper zur Folge hat, d. h. ein Schwerpunkt.

Als praktische Ergebnisse der Guldin'schen Regel für Geometrie lassen sich hier erwähnen, dass

1) aus einem linearen ebenen Gebilde und seinem Schwerpunkt die Complanation der durch Rotation erzeugten Fläche ermöglicht ist,

2) aus dem Schwerpunkt eines linearen ebenen Gebildes und der von ihm erzeugten Rotationsfläche die Rectification desselben,

3) aus der Rectification und Complanation die Bestimmung des Schwerpunkts.

Z. B. der Halbkreis $= r\ \pi$.

Rotationsfläche desselben $= 4\ r^2\ \pi$.

Also $r\ \pi \,.\, 2\ x\ \pi = 4\ r^2\ \pi$ gibt x (Entfernung des Halbkreisschwerpunkts vom Durchmesser) $= \frac{2\ r}{\pi}$

4) aus dem Flächeninhalt eines ebenen Gebildes und seinem Flächenschwerpunkt den Cubikinhalt des erzeugten Rotationskörpers,

5) aus dem Cubikinhalt eines solchen und dem Schwerpunkt des erzeugenden ebenen Gebildes die Quadratur des letzteren,

6) aus Quadratinhalt eines ebenen Gebildes und Cubikinhalt des erzeugten Rotationskörpers den Schwerpunkt zu finden.

Z. B. Halbkreisfläche $= \frac{r^2 \pi}{2}$, Kugel $= \frac{4\ r^3\ \pi}{3}$.

Also $\frac{r^2\ \pi}{2} \cdot 2 x \pi = \frac{4 r^3\ \pi}{3}$ und $x = \frac{4 r}{3 \pi}$ als Entfernung des Halbkreisflächenschwerpunktes vom Durchmesser.

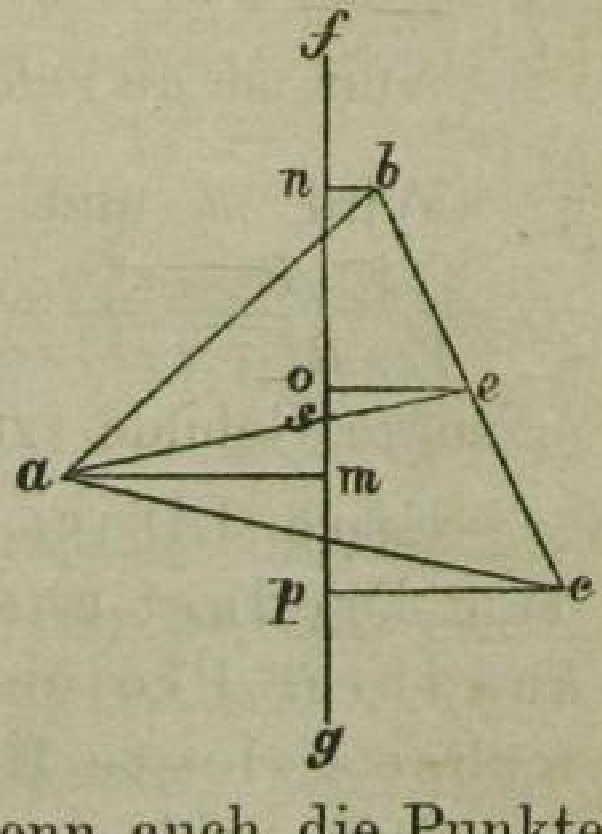
Ebenso ist für ein Stück Parabelfläche, da Quadratur und Cubatur einfache Resultate liefern, leicht die Lage des Schwerpunktes zu bestimmen.

Wenn man berücksichtigt, dass — noch einmal den Fall ins Auge gefasst, wo für irgend eins der genannten Gebilde die Achse durch den Schwerpunkt geht — auch schon bei dem geringsten Theil einer ganzen Drehung auf der positiven und negativen Seite der Achse gleichwerthige Flächen (resp. Körper) erzeugt werden und dass diese Flächen (Körper) gewissermassen als die Wege gelten können, zu welchen alle Punkte des erzeugenden Gebildes in einem kleinen Zeittheil veranlasst werden, so ist leicht einzusehen, dass diese Summe der Wege zugleich die Summe der Kräfte repräsentiren könne, welche diesseits und jenseits der Achse auf das Gebilde wirken (die Kräfte gleichmässig auf alle Punkte und einander parallel wirkend gedacht). Damit ist aber geradezu ausgesprochen, dass jede Achse durch den Schwerpunkt eine Linie ist, welche befestigt das Gleichgewicht aller parallelen Kräfte garantirt. Damit ist der geometrisch vermöge der Guldin'schen Regel definirte Punkt zugleich Angriffspunkt der Resultirenden aller auf die Punkte des Gebildes wirkenden parallelen Kräfte.

Es möchte die Kräfte des Schülers übersteigen, wollten wir unsre Betrachtung nun noch auf die Fälle ausdehnen, wo die erzeugenden Gebilde nicht mehr blos derselben rotirenden Ebene angehören, eine Erweiterung, welche uns allerdings auch auf die Auffindung der Schwerpunkte der Gebilde im Raume führen würde. Doch mögen noch ein paar Blicke über die vorhin gezogene Grenze das Nachdenken des Anfängers anspornen.

Liegen z. B. (Fig. 3) die 3 Punkte a, b, c in einer Ebene, die senkrecht zur Rotationsachse steht, so sei s, der Transversalendurchschnitt im Dreieck abc, zugleich die Projection der Achse. Ziehe durch s beliebig fg.

Fig. 3.



Nun ist $nb + pc = 2oe$

$oe : am = es : sa = 1 : 2$.

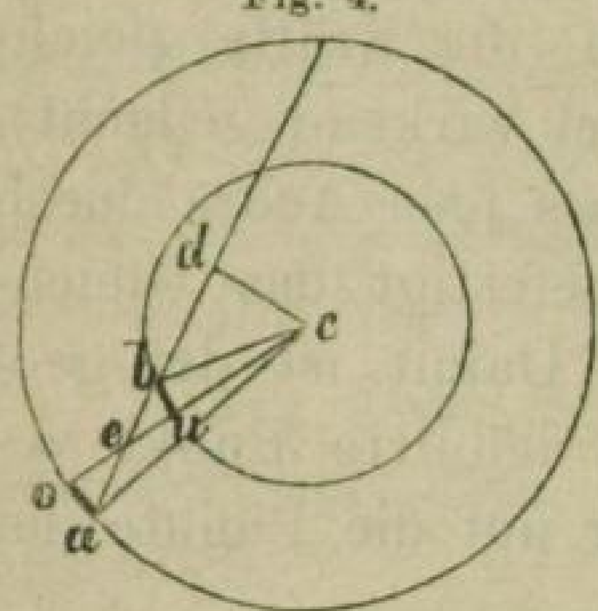
Also $nb + pc = am$ und

$2am\pi = 2nb\pi + 2pc \cdot \pi$.

Legt man durch s senkrecht zur Linie fg eine Ebene, so sind nb, cp, am ihren Projectionen auf diese Ebene gleich und Kreise mit solchen als Radius beschrieben würden abermals ein Rotationsgebilde = Null darstellen.

Es ändert sich nichts in dieser Sache, wenn auch die Punkte a, b, c nicht in der eben senkrecht zur Achse gedachten Ebene lägen, sondern z. B. in verschiedenen Höhen über derselben. Dann würde die eben besprochene Figur Projectionsfigur werden, die resultirenden Kreise aber würden ihre Grösse, also das Resultat auch seine Gültigkeit erhalten. Es sind die Projectionen der im Früheren bezeichneten Linien, auf irgend eine durch den Schwerpunkt gelegte Ebene, welche jetzt die Radien der Rotation bilden müssen.

Fig. 4.



Auch noch ein einfacher Fall der Rotation einer Linie mag hier folgen. Die Linie $ab = n$ (Fig. 4) beschreibt um c (die Projection einer senkrecht auf der Papierebene stehenden Achse) die Kreisringfläche $= (R^2 - r^2)\pi$, wenn R und r die Radien der Kreise um c sind. ab sei in e halbirt, ec sei $= m$, bu und ao seien Perpendikel auf oc, $cd = \varrho$ sei Perpendikel auf ad, bd sei $= s$, ou heisse p

Nun ist $ad^2 + dc^2 = ac^2$, d. h. $(n + s)^2 + \varrho^2 = R^2$

$bd^2 + dc^2 = bc^2$, d. h. $s^2 + \varrho^2 = r^2$

also $n^2 + 2ns + s^2 + \varrho^2 = R^2$

und $n^2 + 2ns = R^2 - r^2$ oder $s = \frac{R^2 - r^2 - n^2}{2n}$,

$ed^2 + dc^2 = ec^2$, d. h. $\left({}^{n} + s\right)^2 + \varrho^2 = m^2$

da aber $\varrho^2 = r^2 - \left(\frac{R^2 - r^2 - n^2}{2n}\right)^2$ so ist nach einigen Reductionen

$m^2 = \frac{2(R^2 + r^2) - n^2}{4}$ oder $m = ce = \frac{\sqrt{2R^2 + 2r^2 - n^2}}{2}$.

Nun ist $eu : eb = ed : ec$, d. h. $\frac{p}{2} : \frac{n}{2} = s + \frac{n}{2} : m$

Wird m und s nach ihren Werthen eingesetzt, so ist $p = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{2R^2 + 2r^2 - a^2}}$ und es ist das von ab bei der Rotation erzeugte Gebilde $(R^2 - r^2)\pi = 2m\pi p$, d. h.

Eine Linie erzeugt einen Flächenraum gleich dem Product aus dem Weg ihres Schwerpunktes und aus ihrer Projection auf eine durch Schwerpunkt und Achse gelegte Ebene.

Zum Schluss sei mir noch eine pädagogische Bemerkung erlaubt.

Wenn auch zugestanden werden muss, dass Betrachtungen wie die vorstehende im Gang des Unterrichts keinen Platz finden, so möchte ich ihnen doch — vielleicht einmal für eine Privatbeschäftigung mancher Schüler — das als Empfehlung zufügen, dass sie geeignet sind, die geometrische Phantasie anzuregen. Dass sich hier in den verschiedensten Arten von Gebilden ein Punkt findet, ein raumloser Ort, welcher in Bezug auf Raumerzeugung durch Bewegung die Eigenschaft hat, eine Mehrzahl von Punkten, ja Linien und gar Flächen zu repräsentiren, d. h. ihren gesammten Inhalt in sich zu concentriren, ist ein so neuer und seltsamer Gedanke für den Schüler, dass gewiss durch denselben seine Neugier zu allerlei weiteren Vermuthungen und Versuchen gelockt wird. Man kann über eine solche Versuchung verschiedener Meinung sein, kann namentlich fürchten, es werde der Faselei oder der leeren Grübelei Vorschub geleistet, der strengen Zucht der Wissenschaft Eintrag gethan oder werde der Fortschritt durch Allotria verspätet, wenn es dem Schüler erlaubt ist, sich eigne und neue Gesichtspunkte zu suchen. Ich nun pflege Alles willkommen zu heissen, was zur Selbstständigkeit und Productivität führt. Auf anderen Gebieten gebe ich zu, dass frühreife Production Schaden bringen kann. In dem Mathematischen kann sie mir kaum früh genug kommen, kaum genug begünstigt werden. Denn gesetzt auch, ein leichtfertiger Geist fühlt sich z. B. bei der hier behandelten Materie von seiner Phantasie fortgerissen, er sucht sich neue kecke Folgerungen z. B. auch der Körper beschreibe ein Rotationsgebilde, das sich aus seinem Volum und dem Wege seines Schwerpunktes als Factoren zusammensetzen liesse oder dergl., so wird er, da er einmal die Fähigkeit zur Lösung solcher Fragen auf dieser Stufe haben muss, unmöglich bei seiner blossen Vermuthung stehen bleiben können. Es treibt ihn, sie nachzuweisen, und wenn er dann mit seinem Versuch scheitert und die Grundlosigkeit seiner Hypothese einsieht, wie viel hat er gelernt und wie schön, dass er auch einmal ohne die leitende Hand des Lehrers einen wissenschaftlichen Spaziergang gemacht! Ich wüsste nicht, was irgend dabei für ein Wagniss wäre. Jede eigne Entdeckung bleibt ein positiver Gewinn, auch wenn sie negativer Natur war. Der Eifer und die selbsterlebte Freude, ein Problem von allen Seiten und von neuen Gesichtspunkten zu erfassen und durch alle Consequenzen zu verfolgen, ist der beste Gewinn, den der Lehrer dem Schüler mitgeben kann, besser als Kenntnisse und Fertigkeiten selbst, denn es ist die Quelle zu denselben. Und gerade in einer Wissenschaft, welcher methodische Zucht immanent ist, können der Freiheit die Flügel gefahrlos unbeschnitten bleiben.

Kleinere Mittheilungen.

Kleine Versuche, betreffend den Heronsball, die Feuerspritze und den Winkelheber.

Von Dr. Krebs.

Ich bin fern davon, behaupten zu wollen, dass das Arrangement der zu beschreibenden Versuche irgend etwas Neues enthalte, darf aber doch wohl annehmen, dass diese Mittheilungen dem Anfänger im Lehramt nicht völlig werthlos erscheinen werden. Es wäre überhaupt recht wünschenswerth, wenn die Physiker ihre kleinen Kunstgriffe, deren sie sich beim Experimentiren bedienen, publicirten; wenn sie auch nur eine unbedeutende Erleichterung gewähren oder dem Versuch eine gefälligere Form verleihen, vor Allem aber wenn die Methode besonders instructiv ist, dürften derartige Mittheilungen von dem praktischen Physiker mit Dank aufgenommen werden. Es verschlägt dabei nichts, wenn Viele denken, sie hätten das längst ebenso gemacht; wenn es nur für Einige neu und anregend ist; gibt es dagegen Fachgenossen, welche noch bessere, einfachere und instructivere Methoden kennen, so finden sie sich vielleicht durch solche Mittheilungen veranlasst, dieselben ihrerseits zu publiciren.

Die hier zu beschreibenden Versuche betreffen den Heronsball, die Feuerspritze und den Winkelheber.

Der einfachste Heronsball besteht aus einem zur Hälfte mit Wasser gefüllten Kochfläschchen, welches durch einen Gummistopfen verschlossen ist; durch das Loch des Stopfens geht eine Glasröhre, welche bis beinahe auf den Boden der Kochflasche reicht und oben in eine Spitze ausgezogen ist (Fig. 1).

Fig. 1.

Nun kann man das Wasser in einem Heronsball bekanntermassen zum Springen bringen, indem man entweder die innere Luft verdichtet, oder die äussere verdünnt.

Die Verdichtung der innern Luft erreicht man dadurch am einfachsten, dass man Luft in die Röhre hineinbläst, die Verdünnung pflegt man dadurch zu bewirken, dass man den Heronsball unter die Luftpumpe stellt und auspumpt. Die Luftverdichtung wird aber in der Praxis — bei der Feuerspritze — noch auf eine andere Art hergestellt, indem man nämlich Wasser in den Heronsball einpumpt. Man hätte danach 3 Arten um das Wasser des Heronsballs zum Springen zu veranlassen.

Die erste Art, durch Einblasen von Luft, gibt zu keiner weiteren Bemerkung Veranlassung.*) Was aber das Einpumpen von Wasser und das Verdünnen der äusseren Luft angeht, so möchte ich folgendes Verfahren empfehlen. Man steckt auf die Röhre des Heronsballs noch einen Gummistopfen (Fig. 2[a]) mit seiner breiten Grundfläche nach unten und führt ihn in den Hals eines tubulirten Kolbens: über den

Fig. 2a.

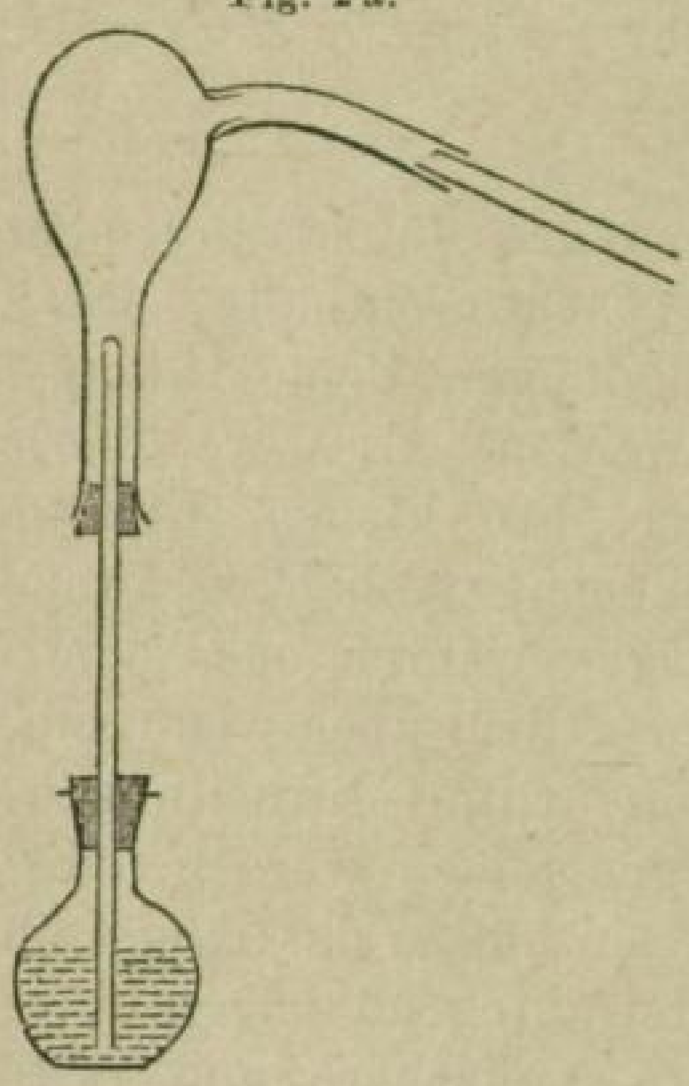
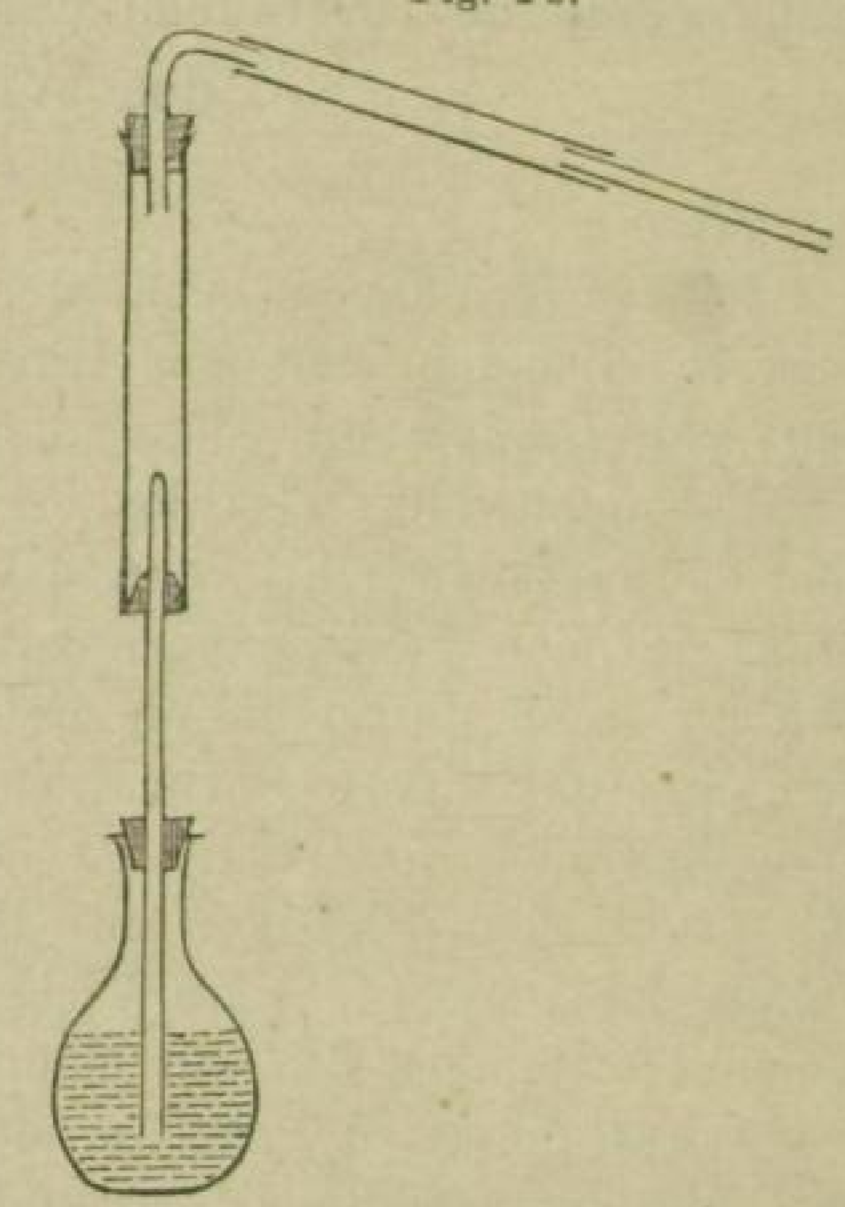
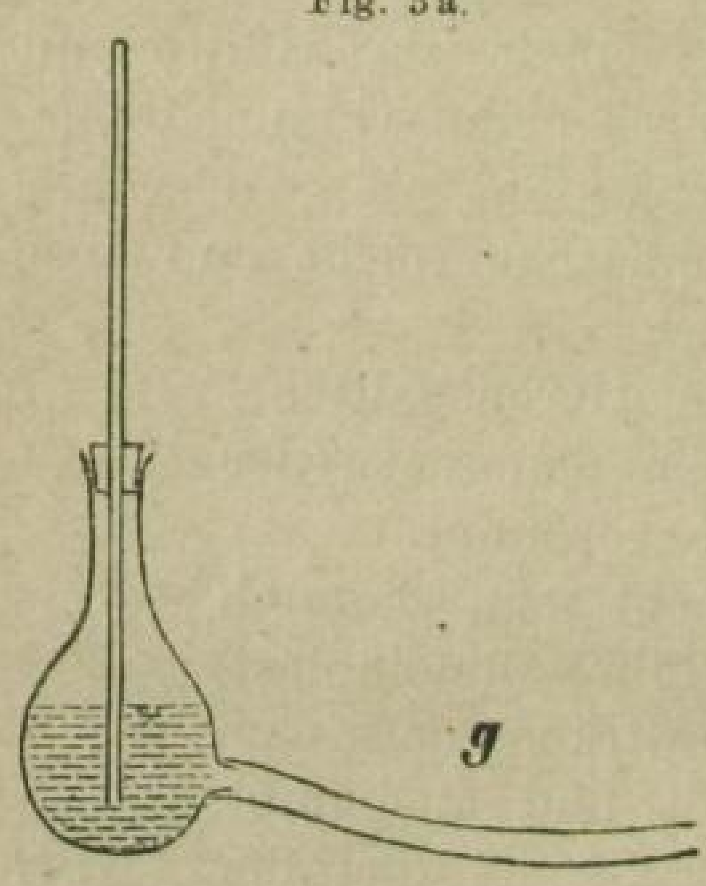


Fig. 2b.



Tubulus des Kolbens zieht man einen kurzen Gummischlauch und steckt eine kurze Glasröhre hinein. Zieht man am Ende der Glasröhre die Luft aus dem Kolben mit dem Munde aus, so springt der Heronsball. Statt eines tubulirten Kolbens kann man auch eine weitere Glasröhre verwenden, wie Fig. 2[b] zeigt; man ersetzt auf diese Art die Luftpumpe, obwohl es sehr angezeigt ist, diesen Versuch mit Benutzung der Luftpumpe zu wiederholen.

Fig. 3a.



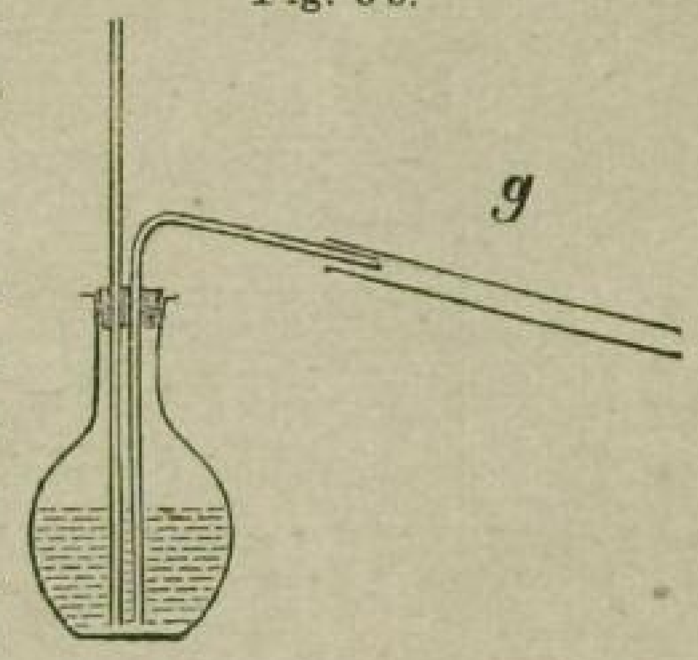
Den in Fig 2[a] tubulirten Kolben kann man auch gebrauchen um den Heronsball durch Einpumpen von Luft in Gang zu setzen. Man füllt den Kolben bis an den Tubulus mit Wasser (Fig. 3[a]) spannt ihn in einen Retortenhalter und verbindet den Gummischlauch g mit dem Steigrohr einer (jetzt so billig zu habenden gläsernen) Druckpumpe. Es wird gut sein,

*) Und doch! S. unsere Bem. hierüber im nächsten Heft. D. Red.

während der ersten Kolbenzüge die Spitze des Heronsballs zuzuhalten. Man bemerkt dabei zugleich, dass beim Abwärtsgehen des Pumpenkolbens der Strahl allmälig sich höher und höher hebt, beim Aufwärtsgehen aber wieder herabsinkt — ein Hinweis darauf, dass bei einer stetig arbeitenden Feuerspritze zwei Druckpumpen mit alternirendem Gang nothwendig sind*).

Statt eines tubulirten Kolbens kann man auch eine Kochflasche, wie Fig. 3^b zeigt, anwenden.

Fig. 3b.



Um die 3 Fälle bei einem Winkelheber, das Ausfliessen, das Stehenbleiben und das Zurückfliessen der Flüssigkeit zu zeigen, stelle man das freie Ende eines Winkelhebers (gebogene Glasröhre) tiefer als das Niveau der Flüssigkeit im Gefäss, sauge die Luft aus dem Heber und nehme den Mund weg — so wird das Wasser ausfliessen; hebt man jetzt das Ende des Hebers allmälig in die Höhe, so wird das Wasser immer schwächer fliessen und dann stehen bleiben; es tritt diess ein, wenn das Ende des Hebers ebenso hoch steht, wie das Niveau der Flüssigkeit im Gefäss; hebt man noch höher, so fliesst die Flüssigkeit zurück.

Elementarer Beweis, dass, wenn zwei Punkte in verschieden brechenden Mitteln liegen, eine Lichtwelle von dem einen Punkte nach dem andern in der kürzesten Zeit gelangt, indem sie den durch das Brechungsgesetz vorgeschriebenen Weg durchläuft.

Von Dr. E. Lottner, Prorector in Lippstadt.

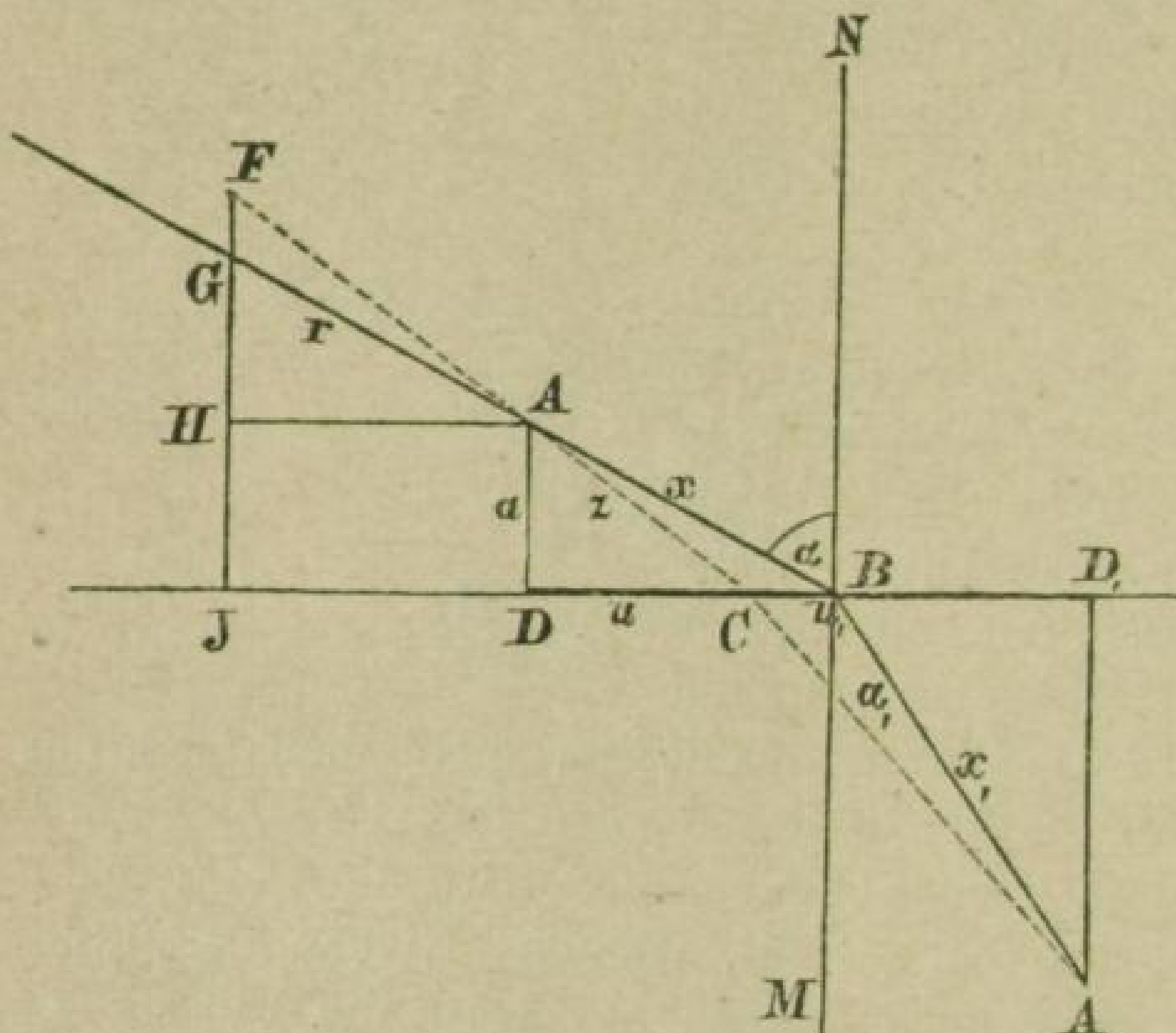
Es lässt sich bekanntlich sehr leicht elementar beweisen, dass, wenn in einem einfach brechenden Medium zwei Punkte an einer und derselben Seite einer spiegelnden Fläche gegeben sind, eine von dem einen ausgehende und die Fläche treffende Lichtwelle in der kürzesten Zeit zum andern Punkte gelangt, wenn sie den durch das Reflexionsgesetz vorgeschriebenen Weg verfolgt. Dagegen scheint ein elementarer Beweis dafür, dass eine das Brechungsgesetz befolgende Lichtwelle ebenfalls in der kürzesten Zeit von einem Punkte des einen Mediums zu einem des andern gelangt, nicht bekannt zu sein. Dies geht wenigstens aus einer Bemerkung (§ 197) des Koppe'schen Lehrbuchs der Physik hervor, wo ausdrücklich um Einsendung eines elementaren Beweises gebeten wird. Hierdurch veranlasst theilt Obgenannter einen solchen mit.

---

*) Man bek mmt jetzt sehr billige Feuerspritzen mit 2 Druckpumpen ganz von Glas.

Sei DD_1 die Trennungsfläche zweier verschieden brechender Mittel, ABA_1 der Weg, den eine Lichtwelle einschlägt, um von einem Punkte A nach einem Punkte A_1 zu gelangen, so dass also

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{v}{v_1}$$



wo v und v_1 die Geschwindigkeiten des Lichtes in beiden Mitteln sind.

Es soll nun bewiesen werden, dass zu diesem Wege die kürzeste Zeit gebraucht wird. Sei $AB = x$, $A_1B = x_1$, $AD = a$, $A_1D_1 = a_1$, $BD = y$, $BD_1 = y_1$, sei ferner C irgend ein anderer Punkt der Trennungsfläche, $AC = z$, $A_1C = z_1$, $CD = u$, $CD_1 = u_1$.

Behauptet wird also, dass

$$\frac{x}{v} + \frac{x_1}{v_1} < \frac{z}{v} + \frac{z_1}{v_1}$$

vorausgesetzt, dass

$$1)\quad \frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\alpha_1}{v_1} \text{ oder } \frac{y}{vx} = \frac{y_1}{v_1x_1} \text{ ist.}$$

Man verlängere CD um sich selbst*), so dass $JD = DC$, errichte in J ein Loth, ziehe durch A eine Parallele zu JB und verlängere AC und AB bezüglich bis F und G, nenne $AG = r$. Es muss dann, wie aus der Congruenz der Dreiecke FAH und ADC ersichtlich ist, $FA = AC = z$ sein. Offenbar ist $AF > AG$ also $z > r$.

Da das Verhältniss

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BJ}{BG} \text{ oder}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y+u}{x+r}$$

ist, so muss, wenn man im Nenner für die kleinere Grösse r die grössere z einführt,

$$\frac{y}{x} > \frac{y+u}{x+z} \text{ werden; mithin auch}$$

$$\frac{y}{vx} > \frac{y+u}{v(x+z)}$$

---

*) Ist leider in der Figur nicht genau. Man wolle dies bei der Lectüre des Aufsatzes berücksichtigen.

Ganz auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass umgekehrt

$$\frac{y_1}{v_1 x_1} < \frac{y_1 + u_1}{v_1(z_1 + x_1)} \text{ ist.}$$

Es folgt also aus der Gleichung 1), wenn man für die linke Seite etwas Kleineres, für die rechte etwas Grösseres setzt:

$$2)\quad \frac{y+u}{v(x+z)} < \frac{y_1 + u_1}{v_1(z_1 + x_1)}$$

Da $DD_1 = y + y_1 = u + u_1$ ist, so muss

$$y - u = u_1 - y_1 \text{ sein.}$$

Mit dieser Gleichheit multiplicirt man die Ungleichheit 2) und erhält

$$3)\quad \frac{y^2 - u^2}{v(x+z)} < \frac{u_1{}^2 - y_1{}^2}{v_1(z_1 + x_1)}$$

Aus den Dreiecken ADB, $A_1 D_1 B$, ADC, $A_1 D_1 C$ ergibt sich aber

$$x^2 = a^2 + y^2, \qquad x_1{}^2 = a_1{}^2 + y_1{}^2$$
$$z^2 = a^2 + u^2, \qquad z_1{}^2 = a_1{}^2 + u_1{}^2$$

Deshalb 4) $y^2 - u^2 = x^2 - z^2$, $u_1{}^2 - y_1{}^2 = z_1{}^2 - x_1{}^2$.

Also verwandelt sich 3) in

$$5)\quad \frac{x^2 - z^2}{v(x+z)} < \frac{z_1{}^2 - x_1{}^2}{v_1(z_1 + x_1)} \quad \text{oder}$$
$$\frac{x-z}{v} < \frac{z_1 - x_1}{v_1}$$

Daraus folgt $\frac{x}{v} + \frac{x_1}{v_1} < \frac{z}{v} + \frac{z_1}{v_1}$ *q. e. d.*

Sollte C auf die rechte Seite von B fallen, so würde man einfach durch Umkehrung der Figur dasselbe Resultat ableiten können.

Naturwissenschaftliches in nichtnaturwissenschaftlichen Schulbüchern.

Von Dr. Zerlang.

(Fortsetzung von IV, 222.)

In dem vielgebrauchten deutschen Lesebuche von C. Oltrogge (2. Aufl. Hannover 1866, Hahn'sche Hofbuchhandlung) findet sich in einem von dem Herausgeber herrührenden Aufsatze über das Weltgebäude auf Seite 368 wörtlich folgendes: Da die Sonne Licht und Wärme ausströmt, so denkt ihr vielleicht, sie sei eine ungeheure Feuerkugel, auf der keine Geschöpfe leben können. Indessen die Sonne erwärmt uns nicht, weil sie selbst heiss ist, — etwa wie ein Ofen, der im Winter ein kaltes Zimmer erwärmt; — denn dann müsste es um so wärmer auf der Erde werden, je näher sie der Sonne kommt, und die Gegenden, die ihr näher sind, also die höchsten Berge, müssten die meiste Hitze haben. Das ist nun aber gerade umgekehrt der Fall; denn bei uns ist es am wärmsten, wenn die Erde am weitesten von der Sonne entfernt ist, und auf den höchsten Bergen ist es so kalt, dass sie beständig mit Eis und Schnee bedeckt sind. Es ist demnach am wahrscheinlichsten, dass die Sonnenstrahlen nur dadurch die Erde erwärmen, dass sie die Wärme, die in derselben verborgen oder unentwickelt liegt, entwickeln, indem sie durch die Luft gehen, welche die Erde von allen Seiten umgibt, und je dünner diese Luft ist, desto weniger Wärme erzeugen sie, weshalb auf den höchsten Bergen die grösste Kälte herrscht, weil dort die Luft am dünnsten ist. Je höher aber die Sonne am Horizonte steht, je grader (senkrechter) also ihre Strahlen herunterfallen, desto wärmer ist es auf der Erde; die Wärme lässt in demselben Grade nach, in welchem sie schräger fallen. Daher ist es Mittags wärmer, als Abends und Morgens, und im Sommer wärmer, als im Winter; denn des Mittags um 12 Uhr steht die Sonne für den Tag am höchsten, und im Sommer kommt sie wieder weit höher herauf, als im Winter."

Seite 369 Zeile 30 findet sich: „Die Sonne steht an ihrem Orte still und dreht sich nur immer um sich selbst herum" und Seite 375 Zeile 29: „Sie bewegt sich nur um ihre Achse, bleibt also auf ihrem Platze stehen, und sie hat selbst Licht und Wärme, welche sie nicht für sich behält, sondern freundlich ausspendet."

Auf Seite 370 und 371 wird der Wechsel der Tag- und Nachtlängen und der Jahreszeiten durch die schiefe oder schräge Stellung der Erdachse zur Sonne erklärt.

Einer Berichtigung dieser halbwahren und unwahren und sich widersprechenden Angaben und ihrer Begründung bedarf es in dieser Zeitschrift nicht. Es genügt an ein paar Beispielen zu zeigen, wie wenig verbreitet klare Einsicht in Bezug auf die obigen Gegenstände und sichere Kenntniss derselben ist. Letztere schützt dann auch vor solchen Spielen der Phantasie, wie auf Seite 379 Zeile 28: „So lehrt uns doch die Vernunft: Auch dort (auf den Sternen) werden Geschöpfe sein, ähnlich den Menschen auf der Erde, vielleicht schon viel vollkommener, als wir, heilige Engel vielleicht."

Solchen Anschauungen begegnet man wohl in den Dichtungen Klopstocks; aber in eine Abhandlung über das Weltgebäude gehören sie nicht.

Auf Seite 371 Zeile 20 wird ein allerdings recht weit verbreiteter Irrthum wiederholt: „Mit den Jahreszeiten verhält es sich so, dass in der mittleren Gegend der Erde nördlich und südlich vom Aequator nur zwei, eine heisse Jahreszeit ohne Regen mit einer fast ununterbrochenen Regenzeit abwechselt. Diese Gegend der Erde heisst die heisse Zone." In Wirklichkeit ist nun die Sache grade umgekehrt, und die falsche Ansicht erklärt sich aus den in einem gemässigten Klima gewonnenen Anschauungen in Betreff der Vertheilung des Regens auf die Jahreszeiten. Heisst doch noch in dem ehemals spanischen Amerika die trockene Zeit verano (Sommer, Spätfrühling), die Regenzeit invierno (Winter). Die Regenzeit tritt für einen Ort unter den Tropen aber immer zu der Zeit ein, wenn die Sonne in das Zenith desselben kommt. Dann wird der sonst regelmässig wehende Passatwind immer schwächer, hört endlich ganz auf und macht veränderlichen Winden und Windstillen Platz. Der Passat führt nun nicht mehr beständig kühlere, trocknere Luft herbei; die steigende Hitze und Windstille begünstigen einen aufsteigenden Luftstrom, der die feuchte Luft in die Höhe führt, sie abkühlt und tägliche Nachmittagsgewitter erzeugt, bei welchen die heftigsten Platzregen herabstürzen. Die Nächte und Morgen sind aber meist heiter und klar. So wie die Sonne sich wieder vom Zenith entfernt, fängt der Passatwind wieder an zu wehen und bringt die trockne Zeit des Jahres, während welcher kaum jemals eine Wolke den reinen Glanz des Himmels trübt. (Vergl. Allgemeine Erdkunde von Hann, Hochstetter und Pokorny.)

Selbst die besten geographischen Lehrbücher z. B. das von Daniel ist in diesem Punkte nicht scharf genug und verleitet zu Missverständnissen.

Mögen diese Zeilen dazu beitragen, gangbare Schulbücher in Bezug auf ihre naturwissenschaftlichen Bestandtheile einer sorgfältigen Prüfung zu unterziehen, damit ein Schüler in der Stunde nicht dies, in der anderen das grade Gegentheil lerne.

Zwei Kleinigkeiten aus der Schulstube.

Vom Herausgeber.

1) Es ist jedem Lehrer der Mathematik sattsam bekannt, wie häufig in den math. Arbeiten der Schüler ein Fehler durch einen andern verdeckt oder ausgeglichen wird, so dass der Schüler bei doppelt fehlerhafter Auflösung einer Aufgabe dennoch das richtige Resultat bringt. Ein solcher eclatanter Fall passirte mir unlängst. Ich gab meinen Schülern (in der 4. Classe eines Realgymnasiums) die Gleichung Heis § 63. No. 39, welche in kürzerer Fassung lautet: „Es soll Jemand eine eincassirte Sa. von $5206\frac{1}{2}$ Thlr. mit der Post senden. Das Postgeld $= \frac{1}{8}\,\%$ wird sofort bei der Absendung abgezogen. Wie viel ist zu senden?"

Die Gleichung ist, wenn x die zu sendende Summe bezeichnet,

$$x = 5206\tfrac{1}{2} - \frac{x}{800}$$

oder

$$x + \frac{x}{800} = 5206\tfrac{1}{2}$$

woraus $x = 5200$ Thlr. folgt. Mehrere Schüler hatten aber (verleitet durch eine fehlerhafte Hilfe) angesetzt:

$$5206\tfrac{1}{2} - 5206{,}5 \cdot \tfrac{1}{800} = x$$
$$5206{,}5 - 6{,}5\,(08125) = x$$

und hatten für den Subtrahenden im linken Theile gewonnen (abgekürzt) 6,5 — was nun ebenfalls $x = 5200$ gibt. Derartige Vorkommnisse stellen immer die erneute Aufforderung, dass die Lehrer der Mathematik sich niemals mit dem Resultat begnügen sollen. Lieber weniger Aufgaben machen lassen, als viele und diese uncontrolirt lassen!

2) In den Wiener Volks- und Mittelschulen werden mehrere arithmetische Aufgabensammlungen gebraucht, von denen die von Teirich, Villicus und Schubert die bekanntesten und gebrauchtesten sind. Zu diesen Aufgabensammlungen gibt es aber keine Resultate. Auch bei den Rechenaufgaben der geometrischen Bücher (z. B. Močnik und Gernerth fehlen die Auflösungen. Der Lehrer ist also genöthigt, die betreffenden Aufgaben immer auszurechnen, was bekanntlich einen nicht geringen Zeitaufwand verursacht. Auf meine ausdrückliche Anfrage bei einer renommirten Wiener Verlagshandlung nach Resultaten zu einer der obgenannten Sammlungen, wurde mir die Antwort, dass in Oesterreich Resultate zu den Aufgaben zu geben, gar nicht gebräuchlich und auch unnöthig sei, denn — abgesehen von ihrer Schädlichkeit — zeige sich ja die Richtigkeit der von den Schülern gefundenen Resultate in der Uebereinstimmung derselben, d. h. also: wenn von fünfzig Schülern (so viele sitzen häufig in einer Klasse der Wiener Mittelschulen) 30 dasselbe Resultat haben, so ist anzunehmen (oder ist wahrscheinlich), dass dieses Resultat richtig sei. Ich frage nun: ist dies pädagogisch (methodisch und didaktisch) zulässig? Ich meines Theils muss diese Frage mit einem entschiedenen Nein beantworten. Können nicht von den 30 Resultaten 20 abgeschrieben sein? Oder ist nicht auch der Fall denkbar, dass alle 30 Schüler geirrt haben? Wie nun, wenn 25 dieses und 25 ein anderes Resultat bringen? Ist es pädagogisch zulässig, dass der Lehrer sich auf ein so unsicheres Fundament stütze und dass er sich vor den Schülern gewissermassen blossstelle, da er, falls er die Aufgabe nicht selbst gelöst hat, vor den Schülern seine Unwissenheit und Unsicherheit zugeben muss? Und wie nun, wenn ihm die Kürze der Zeit nicht erlaubt, die Aufgaben in der Lehrstunde durchzunehmen? So viel mir bekannt ist, gibt es zu den meisten Aufgabensammlungen in Deutschland Resultate. Nur sollten dieselben von den Verlagshandlungen (oder noch besser von den Verfassern) auf ausdrückliche Bitte der betreffenden Lehrer gratis abgegeben werden, wie dies z. B. in der Verlagshandlung von B. G. Teubner in Leipzig mit den Resultaten zu der Bardeyschen Sammlung geschieht. So wird den Schülern die Anschaffung der Resultate unmöglich gemacht — man müsste denn der Meinung sein, dass die Resultate, wie bei Heis, den Aufgaben anzufügen seien. — Es wäre nicht überflüssig, ja sogar recht interessant, wenn sich hierüber die Lehrer in dieser Zeitschrift aussprächen.

Literarische Berichte.

J. Kroymann's ausführliches Lehrbuch der Algebra*) für den Unterricht in gehobenen Volksschulen, höheren Bürgerschulen, Realschulen, Gewerbeschulen und Vorbereitungsanstalten für polytechnische Schulen, sowie für den Selbstunterricht, bearbeitet von C. Davids, Lehrer in Altona. 7. Auflage. Altona, Johann Friedrich Hammerich. 1872. 274 S. in gr. 8. Preis 1 Thlr.

Mit dem Namen Algebra bezeichnet der Verfasser oder Bearbeiter dieses Buches nicht blos die Lehre von den algebraischen Bestimmungsgleichungen, sondern die allgemeine Arithmetik überhaupt. Dieselbe steht nach seiner Meinung in Verbindung mit der Mathematik, zu deren Untersuchungen sie mit hilft, scheint also selbst nicht für einen Zweig derselben gelten zu sollen. In der That ist es auch weniger eine mathematische Wissenschaft, als eine Kunst, welche der Verfasser in seinem Buche lehrt, denn er gibt vorwiegend nur eine praktische Anleitung zum Verständniss der betreffenden Lehren und zur Uebung in ihrer Anwendung, indem er dieselben an bestimmten Beispielen erläutert. Allgemeine Beweise und ein wissenschaftliches System in strenger Durchführung darf man also in dem Buche — von einzelnen Ausnahmen abgesehen, — nicht suchen; der Verfasser nimmt die Verification der Gesetze durch Zahlenbeispiele für eine Begründung derselben, begnügt sich sogar bei neuen Begriffen mit einer Art von Veranschaulichung und hält sich in sachlicher Beziehung oder doch in der Ausdrucksweise trotz der 7. Auflage nicht völlig frei von Fehlern. So wird z. B. der Satz $a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$ damit bewiesen, dass $x^2 . x^3 = xx.xxx = x^5$ sei, nnd $x^0 = 1$ wird mit der Ableitung $x^0 = x^{m-m} = \frac{x^m}{x^m}$ abgethan. „Da aber $\frac{x^m}{x^m}$ auch $= 1$, wie ebenfalls $\frac{3^4}{3^4} = 1$, so lehrt dies Beispiel,

*) Die Besprechung dieses Lehrbuches, sowie auch des folgenden Uebungsbuches von Feld-Serf ist zwar verspätet, doch gewiss immer noch lehrreich und nützlich. D. Red.

dass eine jede Grösse in der Potenz Null = 1 ist." Dass hier ein neuer Begriff eingeführt wird, dessen Berechtigung und Bedeutung abzuleiten sei, dass die vorhergegangene Erklärung der Potenz als eines Productes aus lauter gleichen Factoren die Anwwendung des Satzes $x^{m-n} = x^m : x^n$ überhaupt nur für den Fall gestattet, dass $m > n$ ist, und dass somit hier ein logischer Fehler begangen wird, bleibt völlig unbeachtet. Wohin ein solches Verfahren führen kann, zeigt gleich darauf der Zusatz „Aber $0^0 = 0$, denn 0 ist keine Grösse." Dem Verfasser gegenüber möge hierzu die Bemerkung gestattet sein, dass 0^0 zu den sogenannten vieldeutigen Symbolen gehört, welche alle möglichen Werthe haben können, und deren Werth im bestimmten einzelnen Fall die Differentialrechnung vermitteln lehrt.

Die vorstehenden, einer einzelnen Parthie des Buches entnommenen Beispiele werden hinreichen, den allgemeinen Mangel desselben an wissenschaftlichem Werthe zu kennzeichnen; nur dafür, dass der sprachliche Ausdruck nicht überall correct ist, mögen noch ein paar Beispiele als Beleg angeführt werden. Ich wähle folgende Stellen aus:

S. 38: „Die Zahl 9 ist rational, wenn daraus die Kubikwurzel gezogen werden soll." S. 45: „Die einzelnen in der Gleichung enthaltenen Grössen heissen die Glieder." „Dem Werthe nach unterscheidet man analytische und algebraische Gleichungen." S. 55: „Man bezeichne die Meilen seines Weges mit x." S. 61: „1 Tag: e Meilen $= d + x$ Tagen gibt $de + ex$ Meilen macht A." Sachlich falsch ist z. B. auch die Behauptung auf S. 87, dass die Gleichungen $a^2 + xy + y^2 = 8$ und $x^2 - xy + y^2 = 27$ einander widersprechend seien. Es wird darüber weiter gesagt: „Wenn diese Gleichungen keinen inneren Widerspruch enthalten sollen, so muss die kleinere Zahl, nämlich 8, wenigstens $\frac{1}{3}$ der andern ausmachen." Freilich bezeichnet der Verf. die imaginären Grössen auch mit der Benennung unmögliche Grössen, aber an anderen Stellen des Buches kennt und erwähnt er doch selbst imaginäre Wurzelwerthe. Erwähnt mag ferner noch der falsche Gebrauch des Divisionszeichens : werden, wie in $2a : 14ab = 7b$. In der Einleitung steht „Das Zeichen der Division ist : (in oder durch)."

Auch den Titel eines ausführlichen Lehrbuchs verdient das vorliegende Werk seinem Inhalte nach nicht, vielmehr beschränkt sich dasselbe meist auf das Nothdürftigste und behandelt wichtige Gebiete nicht selten, wenn man so sagen darf, fabrikmässig. So umfasst z. B. der Abschnitt „die vier Species mit Potenzgrössen, negative Exponenten, der Exponent 0" nur etwa $1\frac{1}{3}$ Seite, die Lehre von den Wurzeln wird, abgesehen von dem praktischen Ausziehen derselben und den Uebungsbeispielen auf etwa demselben Raume abgethan, die Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung umfasst 13 Zeilen, u. s. w. Die Ausführlichkeit des Werkes besteht in der Breite der Erörterungen, der vollständigen Ausführung der erläuternden Beispiele und in der Zugabe eines umfangreichen Uebungsmaterials. Das Buch ist vorwiegend eine Aufgaben-Sammlung mit, den einzelnen Abschnitten verausgeschickten, ausgerechneten Beispielen und Erläuterungen des Verfahrens. Den nicht ausgerechneten Aufgaben sind die Resultate unmittelbar beigefügt. Die Auswahl ist im Ganzen zweckmässig, die Einkleidung jedoch häufig gekünstelt.

Die Bearbeitung des Stoffes im Einzelnen zeigt in ihrer Art pädagogisches Geschick; exempla docent. Nur ist das, was uns der Verfasser bietet, an Schulen weniger die Aufgabe des Lehrbuches, als die des Lehrers, und wir müssen daher bezweifeln, dass die vorliegende Schrift für alle auf dem Titel genannten Anstalten passend sei, ganz abgesehen davon, dass diese nicht sämmtlich auf die Vermittelung logischer Bildung ihrer Schüler durch eine allgemeinere und strengere, kurz wissenschaftlichere Behandlung des Gegenstandes verzichten werden. Am ehesten dürfte das Buch für gehobene Volksschulen, und zwar insbesondere als Anleitung für jüngere Lehrer derselben zu gebrauchen sein; die „methodischen Winke" in dem Vorwort, mit Anweisungen, wie z. B. „Beim Unterricht halte man auf ungetheilte Aufmerksamkeit," geben der Vermuthung Raum, dass der Verfasser auch diesen Gebrauch vorzugsweise im Auge gehabt habe. Auch zum Selbstunterricht solcher, welche die Arithmetik und Algebra blos als Instrument für praktische Zwecke benutzen und erlernen und auf eine möglichst bequeme und rasche Manier, mit Verzicht auf eine wissenschaftliche Einsicht in das System, dazu gelangen wollen, kann das Buch mit Erfolg gebraucht werden.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass eine Tafel der briggischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10,000 auf sechs Decimalen beigegeben ist.

A. Feld und V. Serf, **Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra*) an höheren Lehranstalten.** Zweite Auflage. Mainz, C. G. Kunze's Nachfolger. 1871. 264 S. in 8. Preis 18 Sgr.

Die ersten zwölf Paragraphen dieser Aufgaben-Sammlung enthalten unter der Ueberschrift „Buchstabenrechnung" die Beispiele zu den sogenannten vier Species. Die reichhaltige Fülle, auf welche die Verfasser nach der Vorrede neben der Beschränkung auf das unumgänglich Nöthige bedacht gewesen sind, scheint dem Ref. hier

*) Von dieser Sammlung liegt bereits die 3. Auflage (1874) vor. Sie unterscheidet sich von der 2. (laut Vorrede vom Novbr. 1873) im Wesentlichen nur durch Einführung des Marksystems an die Stelle des alten Münzsystems. D. Red.

zu fehlen, mindestens reichen die gegebenen Aufgaben zu einer Abwechselung in verschiedenen Cursen in keiner Weise hin. Am schlechtesten sind die Addition und die Subtraction weggekommen, welche in zwei Paragraphen mit zusammen nur 99 einzelnen Beispielen abgethan werden. Gerade beim Eintritt in ein bisher fremdes Gebiet ist aber eine reiche Auswahl von Uebungsstoff besonders zu wünschen. Beispiele für das Rechnen mit positiven und negativen Zahlen fehlen in diesem ganzen Abschnitt; ebenso wird eine durchgeführte systematische Abtheilung der Aufgaben nach den zu übenden Sätzen, wie sie sich z. B. bei Heis findet, vermisst. In einer Aufgaben-Sammlung für den Gebrauch der Schule sollte nach Ansicht des Ref. besonderes Gewicht auf eine eingehende Gliederung des Stoffes im Einzelnen gelegt und der — in dem vorliegenden Werke an sich nicht fehlende — Fortschritt von Satz zu Satz auch äusserlich überall leicht erkennbar gemacht werden. Späterhin, in den Abschnitten über Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, ist dies auch insofern geschehen, als die Verfasser nicht nur die verschiedenen Rechnungsregeln verschiedenen Paragraphen zugewiesen, sondern auch durch Ueberschriften den Inhalt der letzteren kurz angegeben haben; nur in dem ersten Abschnitt fehlt diese Einrichtung. Die auf denselben folgenden über Theilbarkeit der Zahlen (Zerlegung in Primfactoren u. s. w.), sowie über das Rechnen mit Decimalbrüchen dürften wohl aus methodischen Gründen im Wesentlichen vor die Buchstabenrechnung, in den Rechenunterricht einer früheren Classe zu verlegen sein. Auch der nun folgende Abschnitt über Proportionen befriedigt wenig, da derselbe in seinen zwölf Nummern nicht viel mehr als die betreffenden Lehrsätze in Gestalt von Formeln enthält. Reichhaltiger und im Ganzen zweckmässig ausgewählt und zusammengestellt sind die Aufgaben zu den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, sowie zu den Gleichungen ersten und zweiten Grades; dass aber von den Beispielen zum Gebrauche der Logarithmen an durch das ganze übrige Buch hindurch überall die Resultate unmittelbar beigedruckt sind, ist schwerlich zu loben. Dem Schüler, welcher neben der Aufgabe gleichzeitig das Resultat vor Augen hat, dürfte dadurch die selbstständige Sicherheit des Arbeitens erschwert werden und jedenfalls würde es, wenn überhaupt die Resultate beigegeben werden sollen*), besser sein, dieselben in besonderen Paragraphen oder in

*) In Betreff dieser Frage eine gelegentliche Bemerkung: Selbst ganz gewissenhafte Schüler suchen nach einer falsch gerechneten Aufgabe den Fehler gerne dadurch zu beseitigen, dass sie das richtige Resultat an die Stelle des falschen setzen und dann rückwärts corrigiren, bis ein zweiter Fehler die Wirkung des ersten aufhebt. Die bekannte Erscheinung, dass man beim raschen Nachrechnen eines fehlerhaften Exempels leicht an der falschen Stelle denselben Fehler wiederholt, zeigt, wie die Erwartung eines bestimmten Resultats psychologisch auf den Arbeitenden einzuwirken vermag. Der Schüler wird in solchen Fällen — die sich schwerlich durch

einem Anhang zusammenzustellen, damit dem Schüler wenigstens nicht die Kenntniss des Resultats vor Vollendung seiner Arbeit gewissermassen aufgezwungen werde.

Weiterhin enthält das Buch noch ganz brauchbare Beispiele zu den diophantischen Aufgaben ersten Grades, den arithm. und geom. Progressionen nebst der Zinses-Zins- und Renten-Rechnung, den Kettenbrüchen, der Combinationslehre, der Wahrscheinlichkeits-Rechnung und den Gleichungen dritten Grades. Der binomische Lehrsatz ist unter der Combinationslehre mit nur fünf, theoretische Fragen enthaltenden Nummern bedacht.

Im Ganzen wird sich das Buch — abgesehen vielleicht von den ersten Abschnitten — als brauchbar erweisen, ohne sich durch besondere Vorzüge vor ähnlichen auszuzeichnen. Werke, wie die von Heis, Bardey und die neue Auflage von Meier Hirsch (Bertram) dürften demselben meist vorgezogen werden, wenn man nicht etwa auf die Ausscheidung aller für Gymnasien und Realschulen nicht nothwendigen Parthien und den geringen Preis Gewicht legen will.

Reidt.

Schoof, Lud., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit einer Aufgabensammlung nebst Auflösungen. Mit 31 Holzschnitten. 1872. Helwing'sche Hofbuchhandlung in Hannover.

Vorliegendes Lehrbuch wird in der Vorrede als ein Werk bezeichnet, welches aus der Praxis der vereinigten Bergakademie und Bergbauschule, sowie eines Gymnasiums und einer höhern Bürgerschule hervorgegangen und in dieser Praxis bewährt ist. Die hierin niedergelegte Methode soll darauf berechnet sein die Schulen auf den Standpunkt der Erfindung und des Selbstschaffens zu stellen, den Unterricht einerseits durch eine deutliche sinnliche Veranschaulichung, wie auch durch Herbeiführung eines klaren rationellen Verständnisses, recht fassbar und fruchtbar zu machen, endlich durch zahlreiche, vollständig aufgelöste Beispiele die Theorie sofort mit der Anwendung in Verbindung zu bringen.

---

bloses Abmahnen beseitigen lassen, — des guten Glaubens sein, das Erforderliche geleistet zu haben, und nicht selten auch in demselben bleiben, da der Lehrer unmöglich jede einzelne Ausrechnung einer jeden der erforderlichen häuslichen Uebungsaufgaben vollständig nachrechnen kann, will er nicht den Umfang derselben auf ein Minimum reduciren. Den Vortheil der Resultate aber, dass der Schüler das richtig gerechnete Exempel sogleich als solches erkennt, kann man vielleicht auf andere Weise erreichen, z. B. durch die Angabe von Quersummen der Resultate u. dergl. Bei angesetzten algebraischen Gleichungen aber und in ähnlichen Fällen, wo die Substitution in die Aufgabe eine Probe liefert, ist die Beifügung der Resultate für den Schüler wohl in jedem Falle zu verwerfen.

Eine bedenkliche Unklarheit findet sich freilich schon in 12 vor, wo frisch weg definirt wird: „die gegenseitige Abhängigkeit der Seitenverhältnisse (eines Dreiecks) von den Winkeln und umgekehrt nennt man Function.“ Noch dazu ist durch den ganzen Zusammenhang hierbei die Beziehung auf das allgemeine Dreieck geboten. Nicht minder hieroglyphisch ist die Specialisirung des gewonnenen Begriffs: „Die sich hieraus (d. h. aus den gleichen Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreiecke, die in einem spitzen Winkel übereinstimmen) ergebende Abhängigkeit von dem Winkel α und umgekehrt nennt man trigonometrische Function.“

Der Sache nach werden, wie aus dem Angeführten erhellt, die trigonometrischen Functionen als bestimmte Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken definirt. Wenn diese Definitionen keine Erweiterung erfahren, so haben sie nur Sinn für spitze Winkelargumente. Dennoch ohne Formulirung der Erweiterung wird zu Functionen von Winkeln, die in einem anderen Quadranten, als in dem ersten liegen, übergegangen und noch dazu wird die Vorzeichenbestimmung nur nebenher mit ein paar kurzen Notizen abgemacht — klare Definitionen sind eben nicht die Sache des Herrn Verfassers. Wenn man sich nun auch über alles dieses hinwegsetzt und aus der eigenen Wissenschaft das Nöthige ergänzt, so bleibt gleichwohl die Misslichkeit, welche in dem Versuche liegt, die Trigonometrie lediglich auf die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks zu gründen. Man denke sich nun die Winkel α und $180^0 - \alpha$ als Nebenwinkel verzeichnet, so ist man nach jener schiefen Theorie gezwungen ein und dasselbe Linienverhältniss, je nachdem es als $\cos \alpha$ oder als $\cos (180^0 - \alpha)$ aufgefasst wird, in dem einen Fall als negativ, in dem andern als positiv zu betrachten. Ohne Zweifel ist ja diese Schwierigkeit zu beseitigen, wenn man näher auf die Natur negativer und positiver Strecken eingeht, aber sowohl vorstehendes Lehrbuch, wie auch andere, welche die Trigonometrie in ähnlichem Sinne behandeln, erachten es nicht der Mühe werth, auf diese Schwierigkeit einzugehen.

Der aus drei schmalen Linealen zusammengesetzte Apparat zur Veranschaulichung des Verhaltens der trigonometrischen Functionen kann nützliche Verwendung finden, aber eben so gut auch entbehrt werden, ohne dass die Schulen deswegen auf gedächtnissmässige Einprägung von Tabellen angewiesen seien. Uebrigens leistet er das Verlangte nur unvollkommen und wird z. B. von dem zu gleichen Zwecken dienenden Strösser'schen Apparate übertroffen, der ausser sin. und cos. auch die übrigen Functionen zur Darstellung bringt. Die verpönten Tabellen sind hinterher in zweien besonderen Paragraphen dennoch in extenso aufgenommen und findet sich überdies darin neben der gewiss gerechtfertigten Unterscheidung von $+\infty$ und $-\infty$ auch die durchaus schiefe Unterscheidung von $+0$ und -0 vor.

Die vorhergehende sehr ausgedehnte Untersuchung (S. 3 — S. 7) enthält nichts, weder von der einen noch von der anderen Unterscheidung. Die eine Notiz, dass jeder der Winkel 0^0, 90^0, 180^0, 270^0 u. s. w., sowohl als Endwinkel eines bestimmten Quadranten, wie auch als Anfangswinkel des darauffolgenden Quadranten betrachtet werden kann, hätte vollständig ausgereicht, darauf hinzuleiten und billig Aufnahme gefunden. Auch muss gerügt werden, dass das Verhalten von tg und ctg nicht unmittelbar, sondern aus dem von sin und cos abgeleitet wird.

Die fundamentale Gleichung $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ wird in bekannter Weise aus dem Pythagoreer hergeleitet, dagegen die verwandten Gleichungen

$$\operatorname{tg}\alpha^2 + 1 = \sec\alpha^2 \text{ und } 1 + \operatorname{ctg}\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2$$

fehlen, was um so auffallender ist, da die in demselben Paragraphen befindlichen Gleichungen

$$\operatorname{tg}\alpha^2 + 1 = \frac{1}{\cos\alpha^2} \text{ und } 1 + \operatorname{ctg}\alpha^2 = \frac{1}{\sin\alpha^2}$$

am natürlichsten aus jenen hergeleitet werden. Wenn die dreissig Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den Functionen eines und desselben Winkelarguments betreffen, sämmtlich aufgeführt sind, statt ihre Herleitung der Selbstthätigkeit der Schüler zu überlassen, so ist das wiederum eine Tabelle mehr, allerdings nicht im Einklange mit dem Rigorismus der Vorrede, welche über derartige Hülfsmittel sich verächtlich auslässt.

Seltsam ist der Ausdruck des Satzes: Wenn sich zwei Winkel zu 90^0 ergänzen, so unterscheiden sich ihre trigonometrischen Functionen nur durch die Vorsilbe co von einander — ein Schulmeisterkunststückchen, wobei nur vergessen ist, dass die Sätze der Mathematik sachliche und nicht etymologische Bestimmungen repräsentiren. Uebrigens sind die betreffenden Formeln nur für Winkelargumente des ersten Quadranten bewiesen und ein ähnlicher Mangel ist an dem Beweise derjenigen Formeln zu rügen, welche die Winkelpaare α und $90^0 + \alpha$, α und $180^0 - \alpha$, α und $-\alpha$ betreffen.

In welcher Weise die Bestimmungen, welche einen und denselben Satz ausmachen, auseinandergerissen sind, möge nur ein Beispiel zeigen. Der Satz von den supplementaren Winkeln wird, wie folgt, ausgedrückt: Wenn sich zwei Winkel zu 180^0 ergänzen, so sind die trigonometrischen Functionen — müsste richtiger heissen „je zwei gleichnamige trigonometrische Functionen“ — dieser Winkel dem absoluten Werthe nach gleich. Dann kommen die betreffenden Formeln mit Beweiszubehör und hinterher die Notiz: der sin und die cosec stimmen also auch dem Vorzeichen nach überein.

Unter den mit dem Additionsprobleme zusammenhängenden Formeln fehlen die wichtigen, so häufig angewandten Formeln

$1 + \cos\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$, $1 - \cos\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha^2$, sowie diejenigen für $1 + \sin\alpha$ und $1 - \sin\alpha$.

Desgleichen sind von demjenigen Formelsystem, welches den rationalen Ausdruck der Functionen eines Winkels durch die Tangente desselben Winkels zeigt, gerade die bemerkenswerthesten Formeln für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ nicht aufgenommen. Der höchst überflüssige § 32, welcher die Formeln des vorhergehenden § in etwas veränderter Form reproducirt, hätte durch Aufnahme dieses Formelsystems passende Verwendung gefunden.

Bei Gelegenheit der Bestimmung von Functionen specieller Winkel fällt die Breite der Darstellung recht unangenehm auf. Nachdem nämlich auf Seite 29 und 30 die Functionen von 30^0 ausführlich ermittelt sind und dabei angegeben ist, dass und warum damit auch diejenigen von 60^0 gefunden seien, wird auf Seite 31 die Berechnung der letzteren noch besonders ausgeführt und jene Bemerkung, dass sie bereits gefunden seien, fast wörtlich wiederholt! Ferner wird $\sin 1^0$ aus $\sin 3^0$ vermöge einer cubischen Gleichung berechnet. Jede cubische Gleichung hat aber bekanntlich drei Wurzeln: warum gerade die eine Wurzel, welche berechnet ist, $\sin 1^0$ darstelle, ist nicht gesagt.

Wie es mit der Logik des Herrn Verfassers steht, zeigen besonders die §§ 52, 56 und 59, auf welche er in der Vorrede als auf eine Errungenschaft seiner Methodik hinwies. Der letztere § wenigstens möge hier unverkümmert reproducirt und kurz besprochen werden:

„Das schiefwinklige Dreieck ist durch drei von einander unabhängige Bestandtheile bestimmt, nämlich durch

1) 1 Seite und 2 Winkel,
2) 2 Seiten und 1 Winkel,
3) 3 Seiten.

Daher müssen die Gleichungen für das schiefwinklige Dreieck vier Bestandtheile enthalten (drei gegebene und einen unbekannten Bestandtheil).

Nun können wir zu

1) nur noch eine Seite,
2) eine Seite oder einen Winkel,
3) nur noch einen Winkel

hinzunehmen; folglich gibt es für das schiefwinklige Dreieck nur zwei Hauptgleichungen, nämlich:

a) eine Gleichung zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln,
b) eine Gleichung zwischen drei Seiten und einem Winkel.“

Zunächst fällt hier auf, dass Seiten und Winkel Bestandtheile des Dreieckes genannt werden. Der übliche Ausdruck „Dreiecksstücke“ ist freilich auch nicht eben glücklich gewählt, aber er ist durch den Gebrauch sanctionirt und es ist nicht einzusehen, warum die Anzahl schiefer Wortbezeichnungen ohne Noth vermehrt werden soll. Wenn hiervon abgesehen wird, so ist die allgemeine Aufgabe, um welche es sich handelt, doch gewiss nur so zu formuliren: Aus dreien von einander unabhängigen Dreiecksstücken die übrigen zu finden. Wie man sich hierbei auch drehen und wenden möge, in allen Fällen sind drei Unbekannte vorhanden und zwischen denselben drei Bestimmungsgleichungen aufzustellen. Der Herr Verfasser spricht von Hauptgleichungen und als solche kann man sehr wohl die beiden, welche er anführt — Sinussatz und (trigonometrischer) Pythagoreer — gelten lassen: aber der dritte und einfachste, die bekannte Winkelrelation

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

bleibt schlechthin unentbehrlich. Keine einzige Aufgabe kann ohne dieselben zu Ende geführt werden und die Praxis des Herrn Verfassers in diesem Punkte ist besser als seine Theorie.

Nunmehr folgt der Sinussatz ohne die Beziehung, welche die Verhältnisse $a : \sin\alpha$, $b : \sin\beta$ und $c : \sin\gamma$ zum Radius des umgeschriebenen Kreises haben. Naturgemäss erwartet man darauf die Hauptaufgaben, welche die Lösung durch den Sinussatz gestatten. Statt dessen wird die Aufgabe behandelt, ein Dreieck aus seinem Umfange und den Winkeln zu berechnen. Hierbei wird die Formel

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C,$$

welche bereits S. 26 in der Form

$$\sin m + \sin n + \sin r = 4 \cos \tfrac{1}{2} m \cos \tfrac{1}{2} n \cos \tfrac{1}{2} r$$

bewiesen worden ist, noch einmal mit grösster Umständlichkeit hergeleitet. Repetitio est mater studiorum scheint der Wahlspruch des Herrn Verfassers an dieser, wie an vielen anderen Stellen zu sein, eine Maxime, die gewiss den Schülern gegenüber grösste Beachtung hat, aber in einem Lehrbuche ohne Berechtigung sein dürfte. In einem zweiten § wird dann dieselbe Aufgabe noch einmal geometrisch-trigonometrisch behandelt, aber die Deduction bezieht sich sonderbarer Weise nicht auf die Figur, welche durch die angemessene Construction des Umfanges sich ergibt, sondern auf eine andere Figur, in welcher nur die Summe zweier Seiten construirt ist. Der Beweis des trigonometrischen Pythagoreers schliesst sich an und die Fundamentalaufgabe, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu bestimmen, wird angekündigt. Die Auflösung derselben mit Hülfe des vorausgegangenen Satzes wird auch angedeutet, aber nicht ausgeführt. Unter dem Titel einer ersten Auflösung werden sodann die beiden Mollweideschen Gleichungen geometrisch entwickelt und wird der Tangentialsatz durch Division derselben erhalten. Als zweite Auflösung wird endlich die analytische Deduction des Tangentialsatzes aus dem Sinussatz bezeichnet — aber weder die erste noch die zweite sogenannte Auflösung enthält auch nur eine einzige Andeutung, wie die betreffenden Sätze behufs Lösung der vorangestellten Aufgabe zu verwenden sind. Ueber allen Einschiebseln hat der Herr Verfasser die ihn ursprünglich vorschwebende Aufgabe völlig vergessen und zieht mit Befriedigung das Resümé: „Mit Hülfe der übrigen Gleichungen kann man aus je drei unabhängigen Bestandtheilen des schiefwinkligen Dreiecks die übrigen Bestandtheile berechnen, wozu wir jetzt übergehen wollen.“

Die Entdeckung von den zweien Hauptgleichungen, mit denen man in der Trigonometrie ausreiche, erscheint hierdurch modificirt, zwar nicht durch Berücksichtigung der bekannten Winkelrelation, aber doch durch Einfügung des Tangentialsatzes und der beiden Mollweideschen Gleichungen in den aufgestellten Formen. Letztere passen allerdings nicht recht in denselben hinein, da sie Beziehungen zwischen allen drei Seiten und zwei Winkeln ausdrücken. Aber eine Inconsequenz, welche die Rückkehr zu gesunden Principien darstellt, darf nicht bemängelt werden — es müsste denn sein, diese Inconsequenz wiese sich als ein leerer Schein aus und leider ist es so. Offenbar haben nämlich die Mollweideschen Gleichungen nur eine Stelle gefunden um zu dem Tangentialsatz überzuleiten; denn von den zahlreichen praktischen Verwendungen, welche dieselben zulassen, finden sich im ganzen Werke nur zwei (S. 69 Aufg. 13 und Aufg. 15) vor, gerade die wichtigste aber, welche sich auf die Auflösung der Fundamentalaufgabe bezieht, ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen, ist nicht einmal erwähnt worden.

In der Anmerkung zu S. 45 wird die Gleichung

$$c = (a + b)\sqrt{1 - \frac{4\ ab\ \cos\frac{1}{2}C^2}{(a+b)^2}}$$

betrachtet und die Eigenschaft des unter dem Wurzelzeichen befindlichen Bruches ein ächter zu sein daraus erschlossen, dass er weder 0 noch grösser als 1 sein könne, indem in dem einen Falle $c = a + b$ und in dem anderen c imaginär sein müsste. Wie kann ein geschulter Mathematiker von den Eigenschaften der zu findenden Grösse auf die Eigenschaften bekannter Grössen schliessen? Allerdings folgt der richtige Beweis, der sich lediglich auf die Form des untersuchten Bruches stützt — aber dadurch wird die vorherige Ungereimtheit nicht gerechtfertigt.

Die Berechnung von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$ aus den drei Seiten ist entschieden vortheilhafter als die Berechnung von $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$, $\sin\frac{1}{2}\gamma$ oder $\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\beta$, $\cos\frac{1}{2}\gamma$ — S. 49 wird sie als ebenso geeignet wie diese bezeichnet und auch sonst wird die Ersparniss an Rechenoperationen nicht ins Auge gefasst.

Bei Behandlung der Fundamentalaufgaben wenigstens hätten sämmtliche unbekannte Stücke vermöge der bekannten Stücke in directer Weise ausgedrückt werden sollen — soweit als es irgend thunlich war ohne überhaupt auf die numerische Berechnung zu verzichten, ist es unterblieben.

Der Berechnung von Dreiecksflächen, mit welcher der theoretische Theil schliesst, werden $5\frac{1}{2}$ Seiten gewidmet und dabei fehlt noch die wichtige, wenn man will, allerdings nur der Planimetrie angehörige Formel:

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\;(s-b)\;(s-c)}.$$

Die dem Werke beigegebene und nach der Vorrede vollständige Sammlung von Aufgaben mit ihren Lösungen ist nach der trefflichen Reidt'schen Sammlung im Buchhandel erschienen. Nach solcher Vorarbeit hat etwas Mittelmässiges schlechthin keine Berechtigung sich hervorzuwagen — hier aber liegt nicht einmal Mittelmässiges, hier liegt ein leichtfertig und principlos zusammengestelltes Conglomerat von Aufgaben vor. Unter den nur 80 Nummern derselben finden sich zunächst nicht weniger als 14 Aufgaben doppelt, drei von diesen sogar dreimal. Es stimmen nämlich ganz überein in § 99 die Aufgabe 2 mit 1, in § 100 No. 15 mit 17, 16 mit 18 und 19, 10 mit 35, 14 mit 40, 27 mit 44, 41 mit 47, 25 mit 48, 21 mit 56 und 57, 51 mit 52. Ferner ist § 99 No. 4 bereits früher als § 94 No. 6 aufgelöst, wobei sogar dasselbe Zahlenbeispiel ausgerechnet worden, was von dem Herrn Verfasser schwerlich übersehen ist, da er beim zweiten Mal die sonst beigefügten Resultate weglässt. Sachlich identisch und nur mit verschiedenen Auflösungen versehen sind § 100 No. 9 und 31, § 90 No. 4 und § 96 No. 7. Das Gleiche gilt von § 100 No. 11, 49 und 62. Von den somit noch übrigbleibenden verschiedenen, wenn auch oft einander sehr verwandten 64 Aufgaben ist eine (§ 100 No. 20 die Fläche eines gleichseitigen Dreieckes aus dessen Seite zu berechnen) überhaupt keine trigonometrische, auch 24, 45, 49 und 50 enthalten rein planimetrische Lehrsätze oder Formeln, die allerdings auch auf trigonometrischem Wege ableitbar sind, von denen jedoch der Herr Verfasser selbst No. 49 und 50 ohne jede Anwendung der Trigonometrie beweist. Sieht man auch noch von den Aufgaben § 99 No. 1, 3, 4 und § 100 No. 22 ab, welche Beispiele zu Fundamentalaufgaben enthalten, so bleiben nur 54 von 80 Aufgaben übrig. Diese gehören mit nur sehr wenigen Ausnahmen einem einzigen Gebiete an, nämlich der Berechnung von Dreiecken aus mittelbaren Bestimmungsstücken und sind theilweise nur unwesentlich von einander abweichend (§ 86 und 88, § 100 No. 3 und 4 und andere mehr). Dabei sind diese Aufgaben ohne jede specielle Beziehung auf die einzelnen Abschnitte des Lehrbuches in grösster Unordnung zusammengestellt. Einfache und zusammengesetzte, leichte und schwere Aufgaben bald mit, bald ohne Auflösungen (in letzterem Falle sind die Resultate angegeben) sind ohne jedes Princip bunt durcheinander gewürfelt und selbst der einzige Versuch einer Anordnung, die Unterscheidung von Aufgaben über rechtwinklige und solcher über schiefwinklige Dreiecke, ist nicht streng durchgeführt, denn die Aufgaben 55, 59 und 60 der letzteren Rubrik erfordern nur die Anwendung rechtwinkliger oder gleichschenkliger Dreiecke.

Vorstehende Kritik ist streng*), aber sie enthält nur einen Theil der zu rügenden Punkte: im Grunde genommen ist das Werk der eingehenden Durchsicht, welches dieselbe erfordert hat, gar nicht werth. Wie lange werden noch solche literarische Productionen das Miasma ihrer seichten Oberflächlichkeit auf unseren Schulen verbreiten?

Dr. Schwarz.

Wernicke, Ad. (Königl. Gewerbschuldirector zu Gleiwitz). Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung. In 2 Theilen. I. Theil. Mechanik fester Körper. Mit 405 in den Text eingedruckten Holzstichen. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Braunschweig, Verlag von Fried. Vieweg u. Sohn 1871.

Nach der Vorrede ist die Veranlassung zur Abfassung obigen Werkes das vom Verfasser in seinem Amte gefühlte Bedürfniss nach einem Mittel die Zeitverschwendung zu vermeiden, welche das Nachschreiben des Vortrags und das Dictiren der Uebungsaufgaben nöthig macht, war ferner sein Regulativ die Summe der Ansprüche, welche das Ministerial-Rescript vom 15. Juni 1850 an die Vorbereitung zu einer gewerblichen Laufbahn und zum Besuche einer höheren polytechnischen Anstalt knüpft, und ist die Ausführung des Buches eine mathematische. Der Verfasser bemerkt in der Vorrede: „Um das Buch für den Schulgebrauch geeignet zu machen, habe ich das, was sich für den Vortrag in der Classe eignet, und das, was

---

*) Wir sind dem Herrn Ref. für seine unparteiliche schonungslose Strenge dankbar. Wir hatten das Buch erst von einem andern Referenten besprechen lassen, der, es ebenfalls so scharf verurtheilend, seine Recension später zurückzog, weil er es einer Beurtheilung in dieser Zeitschrift für unwürdig hielt. Wir halten es jedoch für unsere Pflicht, auch solche Werke, vor denen zu warnen ist, in diesem Organe zur Sprache zu bringen. Denn es ist wirklich recht nothwendig, dass bei der täglich sich mehrenden Büchermasse die Spreu vom Weizen gesichtet und jedes neue Lehrmittel auf dem Gebiete unseres Unterrichtsfeldes nach seinem Werthe scharf beurtheilt werde, damit die Anfänger im Lehramte nicht getäuscht werden und die wissenschaftlich heranzubildende Jugend mit solchen Hilfsmitteln nicht Zeit und Kraft vergeude. — D. Red.

zu häuslichen Arbeiten für die Schüler benutzt werden kann, von einander getrennt, so dass hiernach jede Abtheilung in einen theoretischen und praktischen Theil zerfällt."

Um das Werk mit Rücksicht auf den mir verstatteten knappen Raum hinreichend charakterisirt zu haben, brauche ich dem Obigen nur noch Folgendes hinzuzufügen: „Wenn man wie auf Realschulen I. O. die Mechanik wesentlich als Mittel für formale Bildung betreibt, so ist wissenschaftliche Concentration, Strenge des Ausdrucks und behutsame Kritik der Hypothesen und dessen, was man vom Resultate verlangen kann, wohl mehr wünschenswerth als Fülle im Einzelnen." Ich möchte für diesen Zweck den Verfasser auf das Buff'sche Werk*) — die Vorrede nicht zu übergehn — aufmerksam machen**). — Was die Kritik anlangt, erlaub' ich mir auf folgende Beispiele hinzuweisen:

Dass die Theorie vom stehenden Antifrictionszapfen nicht genau ist, machen Fälle von Erhitzung und Verschweissung der Zapfen und Lager, welche durch den Gang erzeugt wurden, wahrscheinlich. Die Voraussetzung von der gleichförmigen Vertheilung des Drucks, über die Horizontalprojection ist voreilig gemacht. Die Vertheilung ist abhängig von der Elasticität der Dichtigkeitsänderung des an den berührenden Flächen befindlichen Stoffs, also u. a. auch von der Form dieser Flächen. Ferner ist die zur Abreibung der Flächentheile aufgewandte Arbeit abhängig von der Feinheit der zerriebenen Theile, also nicht überall einfach proportional der Tiefe der Abnutzung.

Bei der Abhandlung über rollende Reibung (besser: Rollwiderstand) ist die Kippkante in die Höhe der noch unveränderten Oberfläche (Fig. 222, S. 283) statt in den völlig niedergewalzten Theil gelegt. Der Widerstand in homogener Unterlage besteht im Abscheeren, Vorherschieben und Zusammendrücken eines Theiles derselben und Vertheilung lebendiger Kraft an kleine Theile (Naturforscher V, 5 „Wärmeentw. beim Ausz. von Kautschuk"), wovon das abzurechnen ist, was die Unterlage durch annähernde Wiederherstellung ihrer früheren Form hinter dem Rade wieder hergibt.

In der Theorie der Abscheerung S. 374 wäre zu bemerken gewesen, dass die Spannung von den äussersten noch ungerissenen Flächen nach innen abnimmt, so dass bei beträchtlichen Dicken abzuscheerender Stücke der Widerstand (ich rede von passiver Kraft, nicht von deren Arbeit), merklich schwächer wächst als die Dicke:

---

*) Recens. Jahrg. IV (1873) S. 153—156. Heft 2. D. Red.

**) Es ist gut, dass der Lernende die Formeln für Werkzeuge — und zwar in ungeschickter Hand gefährliche — halte, nur für Transformationen der Voraussetzungen und nicht für Orakel und unfehlbare Universalmittel, deren es keine geben kann. D. Ref.

Beweis ist Form der Abscheerungsflächen. Die Fig. (319) ist verzeichnet, indem der Biegungshebelarm („l") falsch aufgefasst ist.

In der Theorie der Elasticität hätte bemerkt werden können, dass die Körper an der Oberfläche anders (dichter) zu sein pflegen als im Innern infolge von Capillarität und Behandlung (Drähte und Stäbe), dass die Beanspruchung von der Oberfläche auszugehn und nicht rein einem von den theoretisch unterschiedenen Grenzfällen zuzugehören pflegt, dass ferner das Elasticitätsgesetz für Zug und Druck nur eine erste Annäherung ist und eine Grenze seiner Brauchbarkeit nur noch für die sog. permanenten Gase fehlt. Bei den aus der Biegungstheorie angeführten Formeln wäre darauf aufmerksam zu machen gewesen, dass man bei ihrer Herstellung einen unbequemen Divisor $\left(\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}\right)$ vernachlässigt hat, wodurch ihre Brauchbarkeit auf sehr geringe Verbiegungen beschränkt wird, was dem Techniker allerdings genügt.

Die Zerknickung stellt Hr. Dr. Wernicke S. 410 wie gebräuchlich statisch dar und gibt die unter Benutzung der obigen Annäherungen gefundene, bislang wohl noch nicht abgelöste Formel. Dazu bemerkt er dann:

„In dem erhaltenen Werthe für die Zerknickungskraft P ist die grösste Durchbiegung s nicht enthalten, so dass also bei jeder beliebigen Durchbiegung die Belastung P das Zerknicken des Körpers veranlassen müsste. Ausserdem bleibt es auch unerklärlich, wie sich der Körper verhalten wird, wenn man auf ihn eine kleinere oder grössere Kraft einwirken lässt. Es ist dies als ein Mangel…."

In dieser Bemerkung sind verschiedene Ungerechtigkeiten gegen das betreffende Resultat enthalten. Wäre es, wie der Verfasser stillschweigend voraussetzt, unbedingt gültig, so liesse es auf die Frage nach dem Verhalten des Körpers unter Einwirkung grösserer oder kleinerer Kräfte die Antwort nicht vermissen, denn P soll ja diejenige Kraft sein, welche dem Spannungsmomente das Gleichgewicht hält. Die Anwendung der Zerknickungsformel unterliegt aber denselben Beschränkungen wie die der Formeln für Biegung. Dass das Spannungsmoment anfänglich stärker wächst als die grösste Durchbiegung, lehrt uns der mit fortschreitender Biegung des Bogens steigende Ton der Sehne. Ausser jenen mangelhaften Voraussetzungen ist hier aber auch noch die gemacht, die Belastung sei so vertheilt, dass sie durch eine Einzelkraft ersetzt werden könne, deren Richtungslinie die Schwerpunkte sämmtlicher Querschnitte enthalte und auch nach der Verbiegung noch im Schwerpunkt des Endquerschnitts angreife. Der Hauptmangel aber ist, dass auf die Veranlassung der Verbiegung keine Rücksicht genommen ist. Diese ist eine Erschütterung. Es muss also die maximale Spannung bestimmt werden, welche erreicht wird, bis die Arbeit der Elasticität gleich wird der Summe aus der mechanischen Arbeit der durch die Biegung sinkenden Last und der lebendigen Kraft des Stosses. Diese Spannung wäre mit der Elasticitätsgrenze zu vergleichen. — Ein Glück für die Brauchbarkeit der gewöhnlichen Formeln ist, dass sie — abgesehen von derbern Stössen — grössere Dimensionen verlangen müssen als die wahre Formel.

Ich muss noch bemerken, dass ich Verschiedenes, was mir nicht gefällt in dem letzten Werke, nicht speciell dem Verfasser vorwerfen darf, denn er scheint nur ein Bild von dem jetzigen Stande der technischen Elementarmechanik geben zu wollen.

Für die Ausstattung beider Werke bürgt der Name des Verlegers. Die Illustrationen sind vortrefflich. Sehr zu loben ist die Vereinigung des abstract theoretischen Liniengerippes mit der lebendigen Bekleidung der concreten Anwendung.

Altona. Dr. G. H. Funcke.

Marenzi, Markgraf Franz. Fragmente über Geologie oder die Einsturzhypothese. 5. sehr vermehrte Auflage. 1. Theil. Triest 1872. 8. S. 188. 4 Thlr.

Getreu meinem Grundsatze, die Vorrede eines Buches vor dessen Hauptinhalte kennen zu lernen, durchlas ich zuerst die vorhandenen 5 Vorworte, aus welchen ich ersah, dass der Verfasser sich als „sogenannten Laien,“ „dem die bisherige geologische Literatur weder eine Zwangsjacke, noch eine Bleikammer sein darf,“ das Detail der Wissenschaft aber als „ermüdend und keineswegs nothwendig“ bezeichnet, dass er Angriffe wegen seiner Fragmente erfahren, welche aber für selbe „so wirksame Reclame“ gemacht, dass er Zuschriften „von Persönlichkeiten eines bedeutend socialen und wissenschaftlichen Gewichtes“ erhielt, die ihm „zugleich die sehr schmeichelhafte Ueberzeugung gaben, dass die Fragmente für eine ausserordentliche Zahl hochgebildeter Männer eine ganz willkommene Gabe seien“ und dass er ein Gegner der „blendenden und überzeugungsbaren Lehren Darwins“ sei, der sich veranlasst fühlt, „eine bezügliche Klärung der Begriffe“ zu bieten.

Ich gestehe, dass ich mit Erwartung an die Lectüre des mir von der Redaction zur Besprechung zugesandten Buches ging, da der Verfasser in überaus selbstbewusster und siegesgewisser Sprache sich gleich im Anfange gegen die Geologie der Gegenwart wendet. Wer diese auch nur ein wenig kennen gelernt hat, weiss ja, dass in ihr wie in jeder anderen Erfahrungswissenschaft es noch mancherlei Lücken, mancherlei Streitpunkte, mancherlei noch nicht genug durch Thatsachen unterstützte Hypothesen u. s. w. gibt, er wird aber zugleich anerkennen, dass eine grosse Reihe intelligenter, ja genialer Männer in überaus kurzer Zeit wahrhaft Grossartiges leisteten, das in seiner weiteren Vervollkommnung mit der weiteren Ausbildung der Hilfswissenschaften der Geologie stetig Schritt hält. Darum muss man einem Manne entgegentreten, der in höchst verächtlicher Weise sich über diese Wissenschaft auf ihrem jetzigen Standpunkte ausspricht, ohne etwas Besseres bieten zu können; denn was er uns reicht, ist so schwach, so laienhaft, so unsinnig, dass wir durchaus keine Veranlassung finden können, die Nachsicht und Milde im Urtheil walten zu lassen, die er wünscht.

Was kann man auch von einem Manne anderes verlangen, der da (S. 21) behauptet, dass die Theorieen der Land- und Gebirgserhebungen, der Leitmuschel, der Eiszeit, der Reactionskraft des Erdinnern gegen die Oberfläche u. s. w. „schon lange abgenützt, veraltet und ganz ungerechtfertigt" seien, dass chemisches, mineralogisches und paläontologisches Detail „unwesentlich" sei und der im Stande ist, folgenden Satz niederzuschreiben: „Diese Thatsachen sind um so empfindlicher, als die Geologie ihrer Natur nach mit wichtigen socialen und religiösen Fragen in engstem Verbande steht, und diese nur wirre beantwortet werden können, so lange die Wissenschaft selbst in principiellen Irrthümern, und in einer blos nebelhaften Begrenzung ihres Bereiches befangen ist?" Wenn der Verfasser glaubt, mit seinen Blättern die Geologie, die sich nach seiner Meinung bisher nur zu oft in der Beobachtung täuschte, leichtfertig im Urtheile war und mit Unwahrheiten in der Darstellung das morsche und bequeme Alte zu stützen versuchte, in andere Bahnen zu bringen, so ist er in einem recht grossen Wahne begriffen.

Ich halte es nicht für die Aufgabe dieser Zeitschrift, auf alle schwachen, unlogischen und naturwidrigen Sätze einzugehen, da deren soviel sind, dass eine eingehende Widerlegung den Raum sämmtlicher Hefte eines Jahrgangs einnehmen würde, ich beschränke mich nur darauf, den verehrten Collegen einige Stellen mitzutheilen, über die sie sich selbst ein Urtheil bilden mögen.

Nachdem der Verfasser sich gegen den Werth der Leitmuscheln erklärt hat, sagt er S. 29: „Dass bis jetzt nicht einmal Hoffnung für eine zukünftige Auffindung einer Alterskette der Petrefacten vorhanden sei" und S. 32: „Sind nun schon diese weniger allgemeinen Bemerkungen für jeden Unbefangenen genügend, um alle bisherigen geologischen Hypothesen, welche auf der Lehre einer Alterskette der Petrefacten begründet waren, als im höchsten Grade gewagt und ganz unerlässlich erscheinen zu lassen, so sind noch andere besondere Verhältnisse in der Wissenschaft vorhanden, durch welche die gänzliche Unhaltbarkeit der jetzigen geologischen Systeme erwiesen, und namentlich die Eintheilung der Gebilde nach den angenommenen Alters-Formationen gänzlich verworfen wird." Und worin liegen diese Verhältnisse? fragt man. Darin, dass die Petrefactenkunde wahrgenommen, „dass das Material, aus welchem die Versteinerungen bestehen, keinen Massstab für deren Alter abgeben können.“ Hierbei sei dem Verfasser gesagt, dass man nicht schreiben darf: „Dieses Beisammenliegen so verschiedener Species der gleichen Art“ (S. 31.), weil Species und Art ein und dasselbe sind und verschieden und gleich sich durchaus nicht decken, und dass als Leitfossilien nicht Gattungen, sondern Species angenommen werden. (S. 32.)

S. 33 behauptet der Verfasser, dass die Annahme von „grossen und allgemeinen Zerstörungs- und Neubildungs-Katastrophen gegenwärtig noch mit Vorliebe festgehalten“ werde. Er scheint gar nicht zu wissen, welche Anschauungen seit Lyell in der geologischen Welt gäng und gäbe sind und erdreistet sich doch, dergleichen Dinge in die Welt zu senden.

Ganz besonders erbittert ist der Verfasser über die Annahme einer Eiszeit und dass man die erratischen Blöcke mit Gletschern in Verbindung bringe; S. 60 erklärt er alle Gletscherschliffe, „selbst wenn solche in grossen Höhen sich befinden,“ für Wasserschliffe einstiger Ströme und S. 63 die Erhaltung von Schliffen aus der Eisperiode als geologisch und physikalisch unmöglich. In welche Widersprüche er sich dabei stürzt, wird für jeden leicht ersichtlich sein.

Eine solche Kohlenbildungstheorie, wie sie der Verfasser bietet, ist wahrhaft rührend kindlich. Es sollen die verschiedenen Kohlenflötze nur durch Abwärtsbewegungen entstanden sein; „denn keine Hebung vermag Seen von Süsswasser in solche von Meerwasser umzuwandeln.“ S. 132. „Es musste bei der oftmaligen Wiederholung dieser Bewegungen bald trocknes Land unter das Meeresniveau sinken, bald aber das Meer seinen Wasserspiegel senken und solcherweise Meeresgründe trocken legen.“ Der Umwandlungsprocess der vegetabilischen Substanzen in mineralische ist durch im tiefen Innern der Erde vorhandene und in alle Spalten, Klüfte und Hohlräume gedrängte heisse Luft entstanden. — Was wollen dagegen die Experimente Göpperts sagen?

Auch ein sehr schwaches Capitel gegen den Darwinismus, welcher nach dem Verfasser gar keine reelle Grundlage hat und den menschlichen Geist unausweichlich im Unglauben und dem sich hieraus ergebenden Aberglauben verwildern lassen muss, enthält das Buch.

Der Kernpunkt ist aber die dem Verfasser jedenfalls allein angehörige Einsturztheorie. Nach ihr sind schon bei der Erkaltung der Erdrinde grosse innere Trennungen der einzelnen Schichten von einander entstanden. Die überlagernden Schichten vermochten sich jedoch nicht zu erhalten und senkten sich deshalb entweder allmählich oder stürzten sich plötzlich auf die unteren. In der vorhistorischen Zeit waren diese Einstürze viel häufiger und grösstentheils Katastrophen, welche sich über Strecken von 50—60 und mehr

Meilen ausdehnten. Hierdurch allein erklären sich die Erscheinung langer Reihen von Vulkanen und ihr Vorkommen in der Nähe tiefer Meeresgründe, die langen Züge und die häufigen Parallelzüge der Gebirge, die Linien der Flussläufe, das Hervorragen gewaltiger Gebirge in der Nähe von Meeren, die grossen Becken der Kohlen und der Salze u. s. w. Das ganze Marmara-Meer, die Meerbusen von Lyon, von Genua, die ganze Westküste Südamerikas können durch einen Einsturz, der Golf von Mexico durch zwei, das caraibische Meer durch drei oder vier Einstürze gebildet sein. Alle Gebirge aller Welttheile, die Sandwüsten Asiens und Afrikas u. s. w. sind nicht durch Hebung, sondern durch Einsturz der anliegenden Festbildungen enstanden; ja selbst den thätigen Vulkanen kann keine eigene Bildungskraft zugeschrieben werden; sie sind nur durch die naturgemässen Wirkungen von Einsturzbewegungen zu erklären. Die Riesen unserer Alpenwelt sind keine Empordringlinge jüngerer geologischer Tage, sondern die kräftigen Reste ältester Generationen unserer Mutter Erde. Der Zug glühender Luft über Lager brennbarer Stoffe wie Bergöl, Naphta, Erdpech, Kohlen, Schwefel muss feurige Erscheinungen hervorrufen. Ist die durch Einstürze hervorgerufene Erderschütterung dabei zu schwach, so werden nur vulkanische Ausbrüche stattfinden, im andern Falle aber neben diesen Erdbeben.

Doch genug hiervon. Mein offenes Schlussurtheil geht dahin, dass der Verfasser recht belesen ist, dass ihm aber eine solide wissenschaftliche Grundlage und besonders die Fähigkeit, logisch zu denken und die geologischen Thatsachen richtig aufzufassen, abgehen. Er ist von einer Idee voreingenommen und zwingt, wie die Glieder der naturphilosophischen Schule, die Erscheinungen, dieser sich zu fügen. Ich muss den Kern des Buches als falsch und zu oberflächlich begründet bezeichnen.

Dresden. H. Engelhardt.

Grassmann, R. Die Erdgeschichte oder Geologie. Stettin 1873. 8. S. 273. Zweiter Theil von: Die Weltwissenschaften oder Physik.

Referent hat keine Mühe gescheut, dieses neue geologische Buch sorgfältig durchzulesen, um ein selbständiges Urtheil über dasselbe gewinnen zu können. Wollte derselbe aber alles das erwähnen, was ihm als Gutes oder nach seiner Meinung Schwaches aufgefallen, so würde er die Schranken, die ihm diese Zeitschrift auferlegt, bei Weitem überschreiten, weshalb er sich auf eine allgemeine Charakteristik beschränken zu müssen glaubt.

Das Werk Grassmanns bietet manches Schöne und zeugt von nicht wegzuleugnendem Fleiss, zeigt uns aber auch Mancherlei, was gewiss von Seiten der meisten jetzt lebenden Geologen bekämpft werden dürfte.

Die 1. Eigenthümlichkeit, auf welche der Verfasser im Vorwort selbst aufmerksam macht, zeigt sich in dem Bemühen, möglichst alle Fremdwörter zu beseitigen, was in einer Wissenschaft, die Weltwissenschaft sein soll, gewiss nicht am Orte ist. Referent glaubt, dass es ihm damit wie Oken und Volger ergehen wird. Vielfach erscheint der deutsche Name als ein erzwungener. (Z. B. statt Atom — Korb; statt Product — Zeug; statt Meteoreisen — Himmelsseifen; statt Eocän — Beckenkrag; statt Miocän — Klippenkrag; statt brauner Jura — Nierenjura; statt weisser Jura — Druckerjura u. s. w.)

Die 2. Eigenthümlichkeit besteht darin, dass der Verfasser auf die Herleitung von Wörtern grosses Gewicht legt, wobei er selbst bis zum Sanskrit zurückgreift. Hierbei vermag ihm Referent, er gesteht es ganz offen, nicht zu folgen, vielweniger Richtig- oder Unrichtigkeiten zu beurtheilen. Dass man aber doch wohl nicht Alles als baare Münze hinnehmen dürfe, scheint daraus hervorzugehen, dass z. B. Neocomien von Neo-Como am Comersee abgeleitet wird, während selbst in populären Schriften richtig zu lesen ist, dass es mit Neocomum (Neufchatel) zusammenhängt.

Die 3. Eigenthümlichkeit tritt aber ganz besonders hervor in den Berechnungen von Temperatur, Dauer u. s. w. der verschiedenen geologischen Perioden, die, und das sei ausdrücklich hervorgehoben, vom Verf. nur als „erste Annäherungen, welche von der Wirklichkeit vielleicht nicht unbedeutend abweichen“ bezeichnet werden.

Trotzdem hält Referent dieselben für „verfrüht und unberechtigt,“ einestheils weil die Geologie noch nicht soweit gekommen ist, dass sie in dieser Weise sich der Mathematik als Mittel bedienen kann, ohne mehr oder weniger geistreiche Spielerei zu treiben, anderntheils weil die zum Zwecke der Ableitung der Abkühlungsgesetze der Erde angenommene Norm (Bischofs Versuch mit heissen Basaltkugeln) nicht durchaus mit den Verhältnissen der Erde während ihrer Temperaturabnahme harmonirt. Sicher ist dieser Theil des Verfassers stärkste, aber des Buches schwächste Seite. Eine Menge Tabellen finden sich vor, deren Herstellung dem Verfasser jedenfalls viel Zeit und Mühe gekostet haben. Hier nur einige, wenig Raum fordernde Proben:

Temp.	Zeitdauer. Jahre.	Mächtigkeit der Schicht. Meter	Namen der Flötze.	Neu auftretende.	
				Pflanzen	Thiere
Die Hügelzeit oder die Grauzeit (Uebergangszeit) 7'039900 Jahre.					
75	2'370050	1000.	Grundfl. (Cambr. Geb.)	Lager.	Schwimmer.
66	2'256370	1000.	Wackefl. (Unt. sil. Geb.)	Blatter.	Fuser.
58	2'413480.	1000.	Riffefl. (Ob. sil. Geb.)	Blüher.	Schwinger.

Temp.	Sauerstoff neu gebildet in Metern Wasser.	Sauerstoffverbrauch in Metern Wasser zur Bildung von Eisenoxyd.	Sauerstoffverbrauch in Metern Wasser zur Bildung von Gyps.	Sauerstoff des Luftmeeres in Metern Wasser	Schichten des Festl. in Metern: Kohle	Schichten des Festl. in Metern: Thiergehäuse	Schichten des Festl. in Metern: Andere Kohlensaure Salze	Eisenoxyd des Festlandes in Metern	Schwefelerze an den Küsten in Metern	Gyps in Metern auf der ganzen Erde
Die Hügelzeit oder Grauzeit (Uebergangszeit)										
75	1,6667	0,5555	—	3,0000	2	10	90	4,7277	—	—
66	3,3333	1,8519	—	1,1112	4	20	220	15,7608	1	—
58	5	3,3951	—	2,5926	6	20	280	28,8936	2	—
50										

Auf Heer's Art und Weise, das Klima der Tertiärzeit zu berechnen (S. Tertiärfl. der Schweiz Bd. III) sei bei dieser Gelegenheit hingewiesen. Obgleich Referent bedauern muss, dass der Verfasser leider zuviel Fleiss auf solche undankbare Arbeit verwendet hat, so muss er ihm doch danken für die übersichtlichen Darstellungen von den chemischen Analysen einer grossen Anzahl Meteorsteine, Meteorsilicate und Felsarten, wie Granit, Porphyr u. s. w.

Die Paläontologie ist zu sehr in den Hintergrund gedrängt.

Ein Anhang versucht, darüber zu belehren, „wie überraschend der Bibelbericht trotz seiner kindlichen Sprache und Ausdrucksweise bis in die kleinsten Einzelheiten hinab mit den Ergebnissen übereinstimmt, welche eine späte Wissenschaft erst mühsam aus den Steindenkmälern der Erdschale entziffert und festgestellt hat."

Fast nach jedem Hauptabschnitt steht folgender oder ein ihm ganz ähnlicher Refrain: „Die Sätze dieser Nummer sind, wenn auch neu, so doch auf die besten wissenschaftlichen Untersuchungen gegründet und durchaus sicher," — welcher Refrain aber wohl vielfach angezweifelt werden dürfte, besonders von denen, welche sich nicht in allen Punkten sclavisch der physikalischen und neptunischen Schule anschliessen.

Dresden. H. Engelhardt.

Neidig, W., Geologische Elemente. Für Schulen und zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Heidelberg, Carl Winter's Universitätshandlung. 1873. 8. 16 Ngr.

Neidig's „Geologische Elemente" bestehen aus einer 6^{dm} breiten und $4{,}5^{dm}$ hohen Tafel, welche am Kopfe einen idealen Durchschnitt der Erde und unter diesem einen kurzen tabellarischen Abriss der Erdgeschichte bietet. Was den ersteren anbetrifft, so ist er recht hübsch gezeichnet und illuminirt und nicht ein bloser Abklatsch schon vorhandener. Der letztere zerfällt in mehrere Abschnitte; der erstere charakterisirt die geologischen Perioden, der zweite handelt von den in dieselben fallenden Eruptionen, der dritte von der Eintheilung der Perioden in Systeme und Formationen, der vierte charakterisirt die Systeme und der letzte gibt uns Abbildungen und Namen besonders hervorragender Leitfossilien. Die Zusammenstellung ist sehr übersichtlich; die bei ihr verwendeten Farben entsprechen genau den auf dem idealen Durchschnitt gebrauchten; der Text beschränkt sich auf das Wichtigste. Als Druckfehler ist wohl das einmal vorkommende „der Genus" anzusehen. Die Abbildungen mussten leider sehr klein ausfallen und dies verursachte bei einigen Undeutlichkeiten, bei einigen Unrichtigkeit; sie sind das Schwächste der Arbeit.

Das wohlausgestattete Ganze macht einen guten Eindruck und kann für solche, die das Nothdürftigste schnell und leicht sich in's Gedächtniss einprägen wollen, mit gutem Gewissen empfohlen werden. Für Realschulen aber, Polytechniken u. s. w. vermögen diese „Geologischen Elemente" einen guten Leitfaden durchaus nicht zu ersetzen; für solche Anstalten halten wir sie für überflüssig, da einestheils ein jeder solcher (vgl. Buch der Natur, Cottas Grundriss der Geognosie und Geologie u. a. m.) einen idealen Durchschnitt bietet, wenn auch gedrängter dargestellt, anderntheils wohl jede Anstalt einen wegen seiner Grösse beim Classenunterricht benutzbaren besitzt. Und was die kurze Uebersicht über die Erdgeschichte anbetrifft, so ist es besser, man veranlasst die Schüler, sich selbst eine solche zu fertigen, wenn der Unterricht durchgehends darauf ausgehen will, die Selbstthätigkeit anzuregen. Ich kann das Buch also nicht als Lehrmittel, wohl aber als (freilich immerhin in den meisten Fällen entbehrliches) Repetitionsmittel empfehlen.

Dresden. H. Engelhardt.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dgl.)

Weltausstellungszeitung.*)

VI. Die Lehrmittel für astronomische (mathematische) Geographie.

Man musste wohl darauf gefasst sein, dass trotz der Grossartigkeit oder vielmehr wegen der Grossartigkeit der Weltausstellung, die Lehrmittel des einen oder des andern Unterrichtszweiges etwas stiefmütterlich bedacht sein werden. Doch gestehen wir, dass dies — wenigstens was die astronomische Geographie anbelangt — in höherem Grade der Fall war, als zu befürchten stand. Wenn auch der Schulmannn und Schulfreund, wie jeder Fortschrittsfreund, des Erfreulichen gar Vieles, des Ueberraschenden Manches finden musste, wenn auch der glückliche Gedanke, in abgesonderten Annexen das Schulleben einzelner Völker vorzuführen, unzweifelhaft von den wohlthätigsten Folgen sein musste, so konnte sich doch derjenige, der sich dem vergleichenden Studium der Lehrmittel eines Faches bei verschiedenen Nationen hingeben wollte, einer grossen Enttäuschung, ja einer Trauer nicht entziehen. Wir wollen die Schwierigkeiten des Auffindens und die sonstigen schon vielfach gerügten Mängel nicht wieder ventiliren, wir müssen jedoch constatiren, dass die Lehrmittel für astronomische Geographie nur spärlich vertreten waren und sich weit weniger günstig repräsentirten, als bei der Lehrmittelausstellung der XIX. allg. deutschen Lehrerversammlung in Wien.

Der officielle Bericht über die geographischen Lehrmittel, verfasst von dem um das geographische Lehrfach in Oesterreich hochverdienten kaiserlichen Rathe A. Steinhauser, theilt diese Lehrmittel in solche für Volks- und Bürgerschulen und solche für Mittelschulen. Diese Eintheilung erweist sich für Lehrmittel der mathematischen Geographie als nicht zweckmässig. Wohl wäre es erwünscht, irgend einmal einer Zusammenstellung zu begegnen, welche den Gang des Unterrichtes in der einen und der andern der bei den Schulkategorien zur Anschauung brächte, aber von einer solchen fand sich nirgends eine Spur. Ueberall waren es nur disjecta membra, mitunter an sich trefflich, aber zu einem Ganzen erhob sich weder die Ausstellung irgend einer Schule, noch die irgend einer geschäftlichen Firma. So lässt sich denn das ganze Ergebniss kurz zusammenfassen.

Von den Bilderwerken zur Veranschaulichung des Himmels (Sternkarten) und der Verhältnisse der gegenseitigen Stellung und Beleuchtung mag Vieles sich der Beachtung entzogen haben. Sternkarten mit weissem, schwarzem und blauem Grunde fanden sich, wenn auch nicht sehr zahl-

---

*) Vgl. Jahrg. IV. (1873), S. 248 I. Zur Orientirung. — S. 316. II. Zoologie. — S. 375. III. Chemie. — S. 430. IV. Mathematik. — S. 436. V. Physik.

reich in den Ausstellungen der verschiedenen Länder. Zu ihrer Vergleichung war keine Gelegenheit geboten. Sternkarten mit beweglichem Horizont zur Einstellung für verschiedene Zeiten fanden sich vornehmlich in der französischen Ausstellung. Besonderes ist uns nirgends aufgefallen.

Himmelsgloben waren am zahlreichsten in der deutschen Ausstellung vertreten. (D. Reimer [Adami] und Ernst Schotte in Berlin, das geogr. Institut in Weimar, C. Adler in Hamburg.) In der österr. Schulausstellung waren nur Globen von Schöninger ausgestellt; im schwedischen Schulhaus befand sich ein Sternglobus mit blauem Grunde.

Uhren, welche die Zeit verschiedener Orte der Erde angeben, sowie solche, welche den Lauf der Sonne (Erde) und des Mondes anzeigen, halten wir für Liebhabereien, die zu den Lehrmitteln nicht zu rechnen sind.

Von den Versinnlichungen der Bewegungen am Himmel fanden sich die von der Lehrmittelausstellung des Lehrertags bekannten Tellurien, Lunarien und Armillarsphären; Tellurien und Planetarien theils mit, theils ohne Uhrwerk vornehmlich von Schotte. Armillarsphären waren in der österreichischen Ausstellung von Schöninger und Prof. Čulik (Brünn), in der deutschen von Reimer (Berlin) und endlich in der amerikanischen von H. Bryart (celestial indicator) ausgestellt. Reimers Armillarsphäre war zugleich Planetarium. Schöningers Ringkugeln scheinen uns noch immer die instructivsten, wenn auch nicht zu verkennen ist, dass die Erzeugnisse Schöningers unter dem Mangel an materiellen Mitteln leiden.

Unter den bisher aufgeführten Lehrmitteln für astronomische Geographie findet sich demnach nichts, was einen Fortschritt seit der Ausstellung der XIX. deutschen Lehrerversammlung bezeichnen würde. Nur zweierlei Apparate von denen, die wir gesehen, bekunden eine neue Idee und müssen deshalb besonders besprochen werden. Merkwürdiger Weise sind beide im officiellen Berichte übergegangen, das eine (J. H. Milberg) sogar als angemeldet und nicht ausgestellt aufgeführt. Beide befanden sich jedoch in der deutschen Ausstellung. Aus dem Umstande, dass dem officiellen Berichterstatter zwei an sich auffällige Apparate entgehen konnten, mag man die Schwierigkeit ermessen, die der Berichterstattung entgegenstand und dies mag uns entschuldigen, falls auch uns das eine oder das andere entgangen sein sollte.

Die eine der beiden Arten von Apparaten rühren vom Seminaroberlehrer F. A. Püschmann in Grimma (Sachsen) her, der auch Tellurien und Planetarien gewöhnlicher Construction ausgestellt hatte, die sich vor andern durch ausserordentlich geringen Preis auszeichnen (3—6 ℔). Das neue Veranschaulichungsmittel jedoch für höhere Lehranstalten (Seminarien und Mittelschulen) bestimmt, sind die Spiral-Planetarien. Sie sollen die „absoluten“ Bahnen der Planeten (und Trabanten) zur Anschauung bringen. Da nämlich die Sonne und mit ihr das ganze Planetensystem, wie unzweifelhaft, sich im Raume fortbewegt, so sind die (Jahres-) Bahnen der Planeten nicht in sich zurücklaufende Ellipsen, sondern elliptisch gekrümmte Spiralen. Um dies zu versinnlichen, ist auf einem Gestelle aus zwei verticalen Säulen horizontal ein fast gradliniger Draht gespannt, der ein Stück der Sonnenbahn darstellt. Um denselben winden sich spiralförmig Drähte, welche die Bahnen der Planeten repräsentiren. Die Halbmesser der Windungen stellen die mittlern Entfernungen der betreffenden Planeten von der Sonne dar, die Weite der Windungen ist den Umlaufzeiten proportional, so dass man mit einem Blicke übersieht, wieviel Umläufe ein Planet im Verhältniss zu einem andern macht. Der ausgestellte Apparat war für 5 Erdjahre eingerichtet und umfasste die Bahnen von Merkur, Venus, Erde sammt Mond, Mars, Jupiter und die des Enke'schen Kometen, mithin 20¾ Spiralwindungen beim Merkur, über 8 bei Venus, 5 bei Erde, 2½ bei Mars, weniger als ½ Spirale beim Jupiter und etwa 1½ bei Komet Enke. Nach demselben Princip war das „Jupiter-Spiral-Lunarium“ construirt, das die spiralförmigen Bahnen der vier Jupitermonde um ihren Hauptplaneten versinnlichte.

Da nun bei den beschriebenen Apparaten die Windungen senkrecht gegen den Draht gestellt sind, der die Sonnenbahn vorstellt, so geben sie eine falsche Ansicht von der Art, wie diese Bewegungen stattfinden. Nach dem Spiralplanetarium müsste sich ja die Sonne gegen den Pol der Ekliptik bewegen, d. h. gegen einen Punkt im Drachen, dessen Rectascension 180° und dessen Declination + 66° 32′ wäre, während diese Bewegung gegen einen Punkt im Herkules gerichtet ist, dessen Rectascension 160° 33′ und Declination + 34° 20′ (Humboldt, Kosmos III, S. 280) ist. Wollte man den Apparat entsprechend ändern, so müssten die Windungen eine Neigung von 56° gegen den Draht, der die Sonne vorstellt, erhalten. Aehnlich verhält es sich mit der Bahn des Mondes bei den Lunarien. Es müsste ja die Mondbahn, die mit der Ekliptik einen Winkel von nur 5° 8,7′ bildet, auf derselben senkrecht stehen. Püschmann ist die Thatsache, dass sich die Sonne gegen Herkules zu bewege, nicht etwa unbekannt; wahrscheinlich haben ihn die Schwierigkeiten den Spiralen die richtige Neigung zu geben bewogen, sie senkrecht zu stellen. Es ist hieraus zu ersehen, wie schwierig es ist, für derartige Erscheinungen ganz entsprechende Versinnlichungsmittel zu construiren. Wir können es nicht verhehlen, dass unserer Ansicht nach kein Tellurium, kein Planetarium so viel zur Klärung der Anschauungen über die Vorgänge im Weltenraume beitragen könne, als die Beobachtung der scheinbaren Vorgänge am Himmel.

Ein ähnlicher Gedanke liegt Milberg's Apparat zu Grunde, entspricht aber noch viel weniger der Wirklichkeit. An einem vertical stehenden Rahmen ist von oben nach unten ein Draht, einen Theil der Sonnenbahn vorstellend, gespannt, um den sich Sförmig Drähte schlingen, welche die Planetenbahnen repräsentiren. Auch bei dieser Vorrichtung, die übrigens ebensogut durch eine Zeichnung ersetzt werden kann, da alle Theile in einer Ebene liegen, lässt sich mit einem Blicke erfassen, wie viel Umläufe in derselben Zeit ein Planet im Verhältniss zu einem andern macht. Es entspricht nämlich je ein (ganzes) S einem Umlauf und man sieht gleich, wie viel kleinere S ein grösseres umfasst. Aber abgesehen davon, dass nach Milberg's Darstellung alle Planetenbahnen in einer und derselben Ebene liegen und mit der Ebene der Ekliptik zusammenfallen müssten, auch die Bahn der Sonne müsste in diese Ebene fallen. Nicht die Sterne des Herkules, sondern die eines der zwölf Thierkreiszeichen müssten auseinanderrücken. Vor Allem aber wären die Bahnen der Planeten nicht Ellipsen oder nur wenig offene elliptische Spiralen, sondern je ein Umlauf würde sich aus zwei Halbellipsen, die sich Sförmig aneinander fügen, zusammensetzen. Dies ist aber auch Milberg's Ansicht. In einem Schriftchen, das zur Erläuterung des Apparates vertheilt wurde*), behauptet eben Milberg, dass die bisherige Ansicht, als bewegen sich die Planeten in Ellipsen, eine unrichtige sei, da sie sich in dem einen Theile ihrer Bahn rückwärts bewegen müssten, während die Sonne vorwärts gehe. Dieses widerspreche den Gesetzen der Natur; die elliptischen Bahnen seien demnach nur Schein, die wahren haben die Gestalt eines S, das aus zwei Halbellipsen besteht. — Man wird uns füglich erlassen, in eine Kritik dieser sonderbaren Ansicht einzugehen.

Ziehen wir nun das Facit der Weltausstellung, so weit sie sich auf unsern Gegenstand bezieht, so zeigt sich leider abermals recht drastisch, dass die astronomische Geographie noch immer das Stiefkind der Schule ist, und dass der unanfechtbare Grundsatz, der Himmel mit seinen Sternen liege uns näher als der Niagarafall, noch immer nicht zur Anerkennung gelangt ist. Und noch ein anderer beklagenswerther Umstand auf diesem wie auf andern Gebieten des naturwissenschaftlichen Unterrichts wurde

*) Wir erhielten, da das deutsche Original vergriffen war, die französische Uebersetzung, betitelt: Voies de Méandre ou le véritable système planétaire etc. par J. H. Milberg, Hambourg. Chez W. Mauke fils, 1872.

durch die Weltausstellung bestätigt. Das Streben zielt mehr darauf hin, das Wissen und zwar nicht selten ein blosses Wortwissen, zu mehren, als den Natursinn zu wecken; und doch sollte letzteres bis zur Hoch- oder Fachschule die erste Aufgabe des naturwissenschaftlichen Unterrichts sein.

Wien. Dr. Pick.

Katalog der physikalischen Normalsammlung sächsischer Gymnasien, Realschulen und Seminare. *)

Im Auftrage des k. sächs. Cultusministeriums für das k. Gymnasium zu Dresden zusammengestellt von Dr. R. Ruehlmann in Chemnitz.

Vorbemerkungen des Zusammenstellers.

Bei Aufstellung des folgenden Entwurfes sind besonders folgende Grundsätze leitend gewesen:

1) Für jedes wichtigere physikalische Gesetz oder eine bemerkenswerthe Folgerung eines solchen, soll wenigstens ein Apparat vorhanden sein, welcher genügt, dasselbe überzeugend experimentell nachzuweisen.

2) Da der physikalische Lehrapparat zunächst nur das Nothwendigste enthalten soll, sind alle solche Instrumente weggelassen worden, welche beim Unterrichte keine Verwendung finden, oder deren Verständniss im Gymnasial-Cursus nicht zu erzielen ist.

3) Es ist auch von der Beschaffenheit solcher Apparate abgesehen worden, welche bei verhältnissmässig complicirter Einrichtung nur zur Demonstration von Gesetzen dienen, deren Richtigkeit dem Schüler an sich einleuchtend ist.

4) Die einzelnen Theile der Sammlung sind, soweit dies thunlich ist, in den einfachsten und billigsten Formen ausgewählt worden, welche dem Zwecke noch vollständig entsprechen.

5) Es ist auch auf Beschaffung der nöthigen Hülfsapparate und Werkzeuge Rücksicht genommen, mit deren Hülfe man im Stande ist, die einfacheren, nicht in der Sammlung mit aufgenommenen Apparate im Arbeitslaboratorium selbst herzustellen.

6) Besondere Rücksicht ist darauf verwendet worden, dass möglichst viele Versuche in grossem Maassstabe objectiv dargestellt werden können. Als Lichtquelle dient theilweise eine gewöhnliche Gaslampe mit cylindrischem, innen blankem Schirme, theilweise Drummont'sches Kalklicht (Gasometer, Daniell'scher Hahn).

7) Um dem Lehrer der Physik einige Hülfsmittel für eigene Untersuchungen zu bieten, sind auch solche Messinstrumente, welche gleichzeitig mancherlei Unterrichtszwecken dienen können, mit in die Sammlung aufgenommen worden. (Waage, feiner Gewichtssatz, Spektrometer, Mikroskop, Mikrometer, Beugungsgitter, Spiegel-Galvanometer, Tangentenboussole, Rheochord, Normalthermometer.)

8) Von den praktischen Anwendungen physikalischer Gesetze ist fast gar nichts in dem Entwurfe enthalten, da diese dem Gymnasial-Cursus ferner liegen.

Die mit einem * bezeichneten Instrumente sind in den ausgestellten Formen nur für den Fall zur Anschaffung empfohlen, dass aussergewöhnlich reiche Mittel zur Verfügung stehen; ist das Letztere nicht der Fall,

*) Diese Sammlung war auf der Wiener Weltausstellung (1873) in der deutschen Unterrichtshalle ausgestellt. S. den Bericht IV, 443—444. Sie war ursprünglich vom Hrn. Zusammensteller nur für Gymnasialzwecke bestimmt, ist aber gegen seinen Willen als Normalsammlung der drei obgenannten Schulgattungen im Katalog bezeichnet worden. D. Red.

so ist der Apparat in einfachster Gestalt vom Lehrer selbst anzufertigen, oder er muss sich beim Unterrichte ohne denselben behelfen.

Die ganze Einrichtung ist darauf berechnet, dass Leuchtgas zur Verfügung steht, dass ein besonderes Auditorium für Physik mit Verdunkelungs-Einrichtung und abstellbarer Gasbeleuchtung vorhanden ist, (man sehe den Bauplan des Königlichen Gymnasiums zu Chemnitz nebst Detailzeichnungen, welcher auf der W. Weltausstellung sich befand), ein besonderes Arbeitszimmer für den Lehrer der Physik und ein Zugschrank zur Aufbewahrung der Elemente zur Verfügung steht.

I. Hilfsapparate und Werkzeuge.

	Preis.*) Thlr.	Ngr.
Regal mit Werkzeugen zur Bearbeitung der Metalle und des Holzes (theilweise nach Weinhold's Vorschule der Experimentalphysik)	30	—
bestehend aus: 1 Parallelschraubstock, 1 Schneidkluppe, 1 Stahlhammer, 1 Beisszange, 1 Kneipzange, 1 Drahtzange, 1 Flachzange, 1 Feilkloben, 2 engl. ◯ Feilen, 1 engl. △ S dergl., 3 mittelgrosse Feilen, 1 grosse S Feile, 1 ⌓ S Feile, 1 deutsche □ Feile, 1 ⌓ Raspel, 3 Durchschläge, 5 Reibahlen, 1 Metallsäge, 1 Schraubenzieher, 3 Hartmeisel, 1 Kreuzmeisel, 1 Anschlagwinkel, 1 Blechscheere, 1 Versenkfräser, 1 Schmelzlöffel, 1 Bohrwinder, 5 Centrumbohrer, 1 hölzerner Hammer, 2 engl. Stemmeisen, 1 Fuchsschwanzsäge, 1 Lochsäge, 1 lange Ahle, 6 Nagelbohrer, 2 Schraubzwingen, 1 Wetzstein, 1 Drahtbürste, 1 Tiegelzange, 1 Drillbohrer, 1 Schlichthobel, 1 Schnitzer, 1 engl. Scheere, 1 Körner, 1 Wasserbad, 1 Oelkanne, 1 Schleifstein mit Gehäuse.		
Glasblasetisch mit Daniell'schem Hahn (für Gaseinrichtung). G. Lorenz, Chemnitz	15	—
Bemerkung. Der Tisch war seiner Umfänglichkeit halber zurückgestellt worden.		
Gasometer von Zinkblech. F. Hugershoff, Leipzig	15	—
Universalgestelle mit einfachem Bunsen'schen Brenner. F. Hugershoff, Leipzig	3	—
Dreizugige Gasglühlampe. Gebr. Maste, Iserlohn	8	25
Kleine Weingeistlampe. F. Hugershoff, Leipzig	—	7½
Korkbohrer. G. Lorenz, Chemnitz	1	—
Tarirwage mit Gewichten (50 Gr. bis 1 Kg.) B. Littmann, Chemnitz	4	5
Retortenhalter. G. Lorenz, Chemnitz	—	22½
Probirglasgestelle mit Probirgläsern. G. Lorenz, Chemnitz	1	—
Sa.	79	—

II. Apparate aus der Kinematik und Dynamik.

	Preis. Thlr.	Ngr.
* Apparat zur Erklärung zusammengesetzter Bewegungen. E. Stöhrer, Leipzig	9	—
Lose Rolle. G. Lorenz, Chemnitz	1	—
Feste Rolle. G. Lorenz, Chemnitz	1	—
* Hebelapparat. E. Stöhrer, Leipzig	15	—
Latus	26	—

*) Vor einigen Apparaten fehlt der Preis im Katalog. (1 Thlr. = 166 kr.) Die Red.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Transport	26	—
Flaschenzug. C. Oechsle, Pforzheim	5	22½
Pendel mit Schlagwerk. C. Oechsle, Pforzheim	9	5
Fallmaschine. G. Lorenz, Chemnitz	13	—
Wellrad. G. Lorenz, Chemnitz	—	20
Centrifugalmaschine. G. Lorenz, Chemnitz	10	—
Applattungsring zu derselben. G. Lorenz, Chemnitz	—	20
Rotationsapparat nach Fessel. Stöhrer, Leipzig	10	—
Waage für physikalische Zwecke. H. Schickert, Dresden	50	—
Gewichtssatz 50 Gramm bis 0,0001 Gramm. H. Schickert, Dresden	12	—
Apparat zur Demonstration des Falles im luftleeren Raume. G. Lorenz, Chemnitz.	6	—
Sa.	143	7½

III. Statik und Dynamik flüssiger und gasförmiger Körper.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Glasrohr mit Bodenplatte zum Beweise des Auftriebes der Flüssigkeiten. E. Stöhrer, Leipzig	1	20
* Haldats Apparat zur Erklärung des hydrostatischen Paradoxons. E. Stöhrer, Leipzig	14	—
Saug- und Hebepumpe von Glas. E. Stöhrer, Leipzig	1	20
Saug- und Druckpumpe von Glas. E. Stöhrer, Leipzig	1	20
Nicholson's Aräometer. C. Oechsle, Pforzheim	4	20
Scalen-Aräometer. C. Oechsle, Pforzheim	1	—
Reactionsrad. G. Lorenz, Chemnitz	2	—
Apparat zur Demonstration des specifischen Gewichtes. C. Oechsle, Pforzheim	2	—
* Heronsbrunnen. E. Stöhrer, Leipzig	2	15
Hand-Luftpumpe mit 2 Recipienten. G. Lorenz, Chemnitz	40	—
Barometerprobe G. Lorenz, Chemnitz	3	—
Magdeburger Halbkugeln. G. Lorenz, Chemnitz	4	15
Aspirator zur Erläuterung des Princips der Wasserluftpumpe.		*)
Dasymeter. G. Lorenz, Chemnitz	3	15
Röhrenlibelle. E. Stöhrer, Leipzig	2	—
Luftballon. E. Stöhrer, Leipzig	—	15
Mariottesche Flasche		*)
* Modell eines Aneroidbarometers. E. Stöhrer, Leipzig	5	—
Sa.	89	20

IV. Molekular-Wirkungen.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Adhäsionsplatten. E. Stöhrer, Leipzig	3	15
Haarröhrchenapparat. E. Stöhrer, Leipzig	1	—
Plateaus Drahtfiguren. E. Stöhrer, Leipzig	1	—
Endosmometer. Stöhrer, Leipzig	1	—
Feilitzsch's Apparat zur Demonstration des Mariotte'schen Gesetzes. G. Lorenz, Chemnitz	14	—
Sa.	20	15

*) Von Schülern im Laboratorium gefertigt, und deshalb ohne Preisangabe.

V. Akustik.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Sirene nach Cagniard-Latour. E. Stöhrer, Leipzig	18	—
Sirene nach Seebeck, auf die Centrifugalmaschine zu befestigen. E. Stöhrer, Leipzig	—	15
Monochord mit Bogen. G. Lorenz, Chemnitz	9	—
Zwei Stimmgabeln nebst Spiegeln zu den Lissajou'schen Figuren. E. Schadewell, Dresden	7	—
Gebläse für akustische Zwecke. E. Stöhrer, Leipzig	20	—
Pfeife, um die Lage der Schwingungsknoten zu zeigen (nach König). E. Stöhrer, Leipzig	7	15
Lippenpfeife mit verstellbarer Tonhöhe. E. Stöhrer, Leipzig	3	—
Zungenpfeife (C. 128) mit 10 Resonatoren (nach Appun). E. Stöhrer, Leipzig	9	
* Interferenzpfeifen mit manometrischem Flammenzeiger (nach König). E. Stöhrer, Leipzig	30	—
Akustisches Gasflammenmanometer. G. Lorenz, Chemnitz	1	10
* Rotirender Spiegel zur Analyse der Klänge. E. Stöhrer, Leipzig	15	—
* Apparat zu Chladni's Klangfiguren. E. Stöhrer, Leipzig	4	—
* Quinkes Apparat für Interferenz der Schallwellen. E. Stöhrer, Leipzig	—	15
Sa.	124	25

VI. Optik.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Spektrometer mit 6″ Kreis, 20 Sec. Ablesung, mit Collimator und Visirfernrohr, auch als Goniometer brauchbar, mit seitlicher Beleuchtung des Fadenkreuzes. Dr. Meyerstein, Göttingen	93	—
Heliostat nebst Spalt- und Beugungsöffnung. E. Schadewell, Dresden	20	—
Hohlspiegel, Convex und Concav. E. Stöhrer, Leipzig	6	—
Planparallelglas. G. Merz, München	3	—
Linsenarten auf Gestelle. G. Lorenz, Chemnitz	3	15
Linse für objective Darstellungen. E. Stöhrer, Leipzig	4	15
Prisma 60° schwerstes Bleiglas. G. Merz, München	11	—
* Achromatisches Prisma. E. Stöhrer, Leipzig	10	—
Hohles Prisma in Flaschenform. E. Stöhrer, Leipzig	3	22½
Farbenscheibe (Mischung der Spektralfarben). E. Stöhrer, Leipzig	—	5
* Fernrohrmodelle (terrestrisches, astronomisches und galiläisches Fernrohr). E. Stöhrer, Leipzig	6	20
Mikroskop (600malige Vergrösserung, drehbarer Tisch, 3 Ocular- und 3 Objectivsysteme, Plan- und Hohlspiegel, Probeobject u. s. w.). Neumann, Freiberg	36	—
Ocular und Objectiv-Mikrometer. Nobert, Barth	5	—
* Modell eines Mikroskops. E. Stöhrer, Leipzig	1	—
Fresnel's Interferenzspiegel. E. Stöhrer, Leipzig	2	15
Beugungsgitter (doppelt). E. Stöhrer, Leipzig	3	—
Newtons Farbenringe. C. Oechsle, Pforzheim	1	—
Latus	210	2½

	Preis. Thlr.	Ngr.
Transport	210	2½
Polarisations-Apparat nach Nörremberg (mit Nicolschem Prisma). E. Neumann, Freiberg	12	—
Turmalin-Zange. E. Neumann, Freiberg	6	—
Vier Polarisations-Präparate (gekühltes Glas, einaxiges Mineral, zweiaxiges Mineral, Gypskeil). W. Steeg, Homburg (Bad)	2	15
Spektral-Präparate. G. Lorenz, Chemnitz	1	—
Phosphoroskop. G. Lorenz, Chemnitz	2	—
Lorgnon-Stereoskop (nach Weinhold). G. Lorenz, Chemnitz	—	22½
Spektralröhren, Geissler'sche. (Siehe Induction)		
Fluorescenzröhre (desgleichen)		
Sa.	234	10

VII. Reibungs-Elektricität.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Glasstab und Horngummistab mit Reibzeug (zu den Fundamentalversuchen). G. Lorenz, Chemnitz	1	—
Elektroskop. E. Stöhrer, Leipzig	2	—
Scheibenelektrisirmaschine. G. Lorenz, Chemnitz . .	18	—
Conductorkugeln zu derselben. G. Lorenz, Chemnitz . .	4	—
Influenz-Elektrisirmaschine nach Holz. E. Stöhrer, Leipzig	30	—
Bemerkung. Die ausgestellte Maschine besass besonders compendiöse Construction und kostete 50 Thlr.		
* Erreger für + und — Elektricität. E. Stöhrer, Leipzig .	6	—
Elektrophor. G. Lorenz, Chemnitz	6	—
Vertheilungsapparat nach Ries. C. Oechsle, Pforzheim	6	10
Leydner-Flasche. E. Stöhrer, Leipzig	2	—
Leydner-Flasche mit abnehmbarem Beleg. C. Oechsle, Pforzheim	3	15
Henley'scher Entlader. G. Lorenz, Chemnitz	6	—
Gabel-Entlader. G. Lorenz, Chemnitz	1	10
Condensator. G. Lorenz, Chemnitz	6	—
* Elektrisches Luftthermometer nach Ries. E. Stöhrer, Leipzig	15	—
Elektrisches Pistol. E. Stöhrer, Leipzig	—	15
Sa.	107	20

VIII. Berührungs-Elektricität.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Fechnerscher Apparat zu den Volta'schen Fundamental-Versuchen. E. Stöhrer, Leipzig	14	—
Sechs Bunsen'sche Elemente G. Lorenz, Chemnitz . .	12	—
Grove'sches Element. G. Lorenz, Chemnitz	3	10
Chromsäure-Tauchelement. G. Lorenz, Chemnitz . . .	2	—
Meidinger'sches Element. G. Lorenz, Chemnitz . . .	1	7½
Commutator. E. Stöhrer, Leipzig	4	—
Latus	36	17½

	Preis. Thlr.	Ngr.
Transport	36	$17\frac{1}{2}$
Sechs Klemmschrauben . . . . Zwei Klemmschrauben zur Verbindung von von drei Drähten (Wheastone'sche Brücke) . } G. Lorenz, Chemnitz	2	—
Voltameter { E. Stöhrer, Leipzig	4	—
Voltameter { G. Lorenz, Chemnitz	2	$22\frac{1}{2}$
Gebogenes Glasrohr mit Platinelektroden zur Elektrolyse. G. Lorenz, Chemnitz	—	20
Tangenten Boussole. C. Oechsle, Pforzheim	8	5
Spiegel-Galvanometer nach Wiedemann. E. Schadewell. Dresden (mit 2 Paaren von Drahtrollen; das eine Paar für Elektricität hoher Spannung)*)	25	—
Widerstandsmesser. E. Stöhrer, Leipzig	4	—
Rheometer für starke Ströme. C. Oechsle, Pforzheim . .	1	25
Drahtspiralen (siehe Spiegelgalvanometer).		
Sa.	85	—

IX. Magnetismus.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Magnetstab. C. Oechsle, Pforzheim	—	15
Inclinationsnadel. C. Oechsle, Pforzheim	1	15
Elektromagnet zu den diamagnetischen Versuchen (magnetische Drehung der Polarisationsebene). E. Stöhrer, Leipzig	60	—
Sa.	62	—

X. Induction.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Kleines Inductorium.**) G. Lorenz, Chemnitz	8	—
* Grösseres Inductorium. G. Lorenz, Chemnifz	55	—
Vier Geisslersche Röhren (O, N, H, CO_2 Spektralröhren, Fluorescenzröhre). E. Stöhrer, Leipzig	6	—
* Apparat zur Demonstration der Inductionsgesetze. E. Stöhrer, Leipzig	16	—
* Elektrisch rotirender Ring. C. Oechsle, Pforzheim .	4	—
Barlow's Rad. C. Oechsle, Pforzheim	3	10
* Elektromotor. E. Stöhrer, Leipzig	20	—
Ampèrsches Stativ. E. Stöhrer, Leipzig	16	—
Sa.	128	10

XI. Wärme.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Thermometer (von 25° bis 300°). G. Lorenz, Chemnitz .	1	15
Thermometer mit drei Scalen. E. Stöhrer, Leipzig . . .	—	15
Latus	2	—

*) Später noch mit einen dicken äussern Kupferring und zwei verschiebbaren Kupfercylindern versehen.

**) Bleibt selbstverständlich weg, wenn das grössere I. angeschafft wird.

	Preis. Thlr.	Ngr.
Transport	2	—
Thermometer für Demonstrationszwecke (3′ lang). F. Hugershoff, Leipzig	4	—
* Normalthermometer (— 20 bis + 100° C. in $1/_5$ getheilt. J. Greiner, München	6	—
* Leslie's Differentialthermometer. E. Stöhrer, Leipzig	4	—
Apparat um die Ausdehnung der Metalle zu zeigen. E. Stöhrer, Leipzig	2	20
Compressions-Feuerzeug von Glas. G. Lorenz, Chemnitz	4	—
Kryophor und Wasserhammer. G. Lorenz, Chemnitz .	1	15
* Gefrierthermometer. E. Stöhrer, Leipzig	2	—
Hohlspiegel für Versuche über strahlende Wärme. E. Schadewell, Dresden	5	—
Thermoelektrisches Rechteck. E. Stöhrer, Leipzig . .	3	10
Thermosäule (die Elemente linear angeordnet). E. Schadewell, Dresden	6	—
Apparat um die Wirkung des Wasserdampfes zu zeigen . .	—	$7\frac{1}{2}$
Dampfreactions-Rad. G. Lorenz, Chemnitz	—	15
Sa.	41	$7\frac{1}{2}$

Zum Repertorium.

Botanik.

Einfluss des Frierens der Pflanzen auf ihr specifisches Gewicht. Dalibard hat schon vor langer Zeit beobachtet, dass in Wasser getauchte Hölzer einen bedeutenden Theil ihres Gewichtes verlieren, wenn das Wasser bis zum Gefrierpunkt abgekühlt wird. Prillieux hat sich neuerdings wieder mit diesem Gegenstande beschäftigt, und eine Reihe von Versuchen hat ihn zu dem Resultat geführt, dass die Gewebe beim Erfrieren einen Theil ihres Wassers, das sie enthalten, abgeben, und in Folge dessen an Gewicht verlieren. (Ntf. V. 28.)

Die Treibhölzer des nördlichen Polarmeeres. Nach Wiesner stammen die Treibhölzer des Polarmeeres — gesammelt von Weyprecht und Payer — sämmtlich von Abietinen her und zwar theils von der Fichte (Abies excelsa), theils von der sibirischen Lärche (Larix sibirica), welche indess nur eine Standortsvarietät von Larix europaea ist. (Ebda.)

Kohlensäurezerlegung der Pflanzen in farbigem Lichte. Nach Pfeffer leisten bei der Kohlensäurezersetzung die gelben Strahlen das Maximum, nicht, wie Lommel und Müller behaupten, die rothen Strahlen zwischen *B* und *C*. Setzt man die bei gelbem Licht gefundene Gasblasenzahl = 100, so ergeben sich für die übrigen Spektralfarben folgende Werthe:

Violet	= 7,1	Roth	= 25,4
Indigo	= 13,5	Grün	= 37,2
Blau	= 22,1	Orange	= 63,0

(Ebda. 29.)

Die winterliche Färbung immergrüner Gewächse hat nach Kraus sehr wahrscheinlich ihren Grund nur in der durch die niedere Temperatur verursachten Zerstörung von Form und Farbe der Chlorophyllkörner. Die Verfärbung tritt nur an der Oberseite und nur an frei in die Luft ragenden Zweigen auf; die Unterseite der Blätter und auch die Oberseiten, wenn sie nur irgendwie gedeckt sind, namentlich aber die versteckten Blätter, behalten ihre grüne Farbe. Braun gewordene Blätter von Buxus und Thuja in's Zimmer gebracht, nehmen nach einigen Tagen lediglich durch die höhere Temperatur wieder ihre lebhaft grüne Farbe an. Dass das Licht dabei keine Rolle spielt, geht daraus hervor, dass das Wiedererscheinen der grünen Farbe auch im Dunkel vor sich ging. (Ebda. 27.)

Die Ursache des Freiwerdens von Wärme beim Keimen ist nach Wiesner nicht allein in der dabei auftretenden Kohlensäureentwickelung zu suchen, sondern eine weitere Wärmequelle liegt in der Wasseraufnahme der Samen. Die mit Wasser in Berührung kommenden Samen verdichten nämlich das in ihr Gewebe eintretende Wasser, wobei Wärme frei wird. Die ersten beim Keimacte frei werdenden Wärmemengen werden wahrscheinlich bloss durch diese Wasserverdichtung hervorgerufen, indem die Kohlensäurebildung erst später als die Wärmeentwickelung eintritt. (Ebda. 16.)

Eiweissgehalt der Kartoffel. Bei den Getreidekörnern nimmt der Gehalt an Kleber von aussen nach innen ab, sodass bei dem jetzigen Mahlverfahren gerade der nahrhafteste Theil für das Mehl verloren geht. Wäre es möglich, das Mehl in der Kleie von den Hülsen scharf zu trennen, so würde das hierdurch gewonnene Mehl 30% Kleber und Eiweiss enthalten, also um $^2/_3$ mehr als das gewöhnliche Mehl. Liebig hat schon wiederholt auf diesen Umstand aufmerksam gemacht. Etwas Aehnliches ist nach A. Vogel bei den Kartoffeln der Fall. Auch hier nimmt der Eiweissgehalt von der äusseren Schale zum innern Kern ab und zwar ist das Verhältniss = 121 : 100. Es geht also, wenn die Kartoffel geschält zubereitet wird, hier, wie beim Getreide, der wirksamste Bestandtheil für die menschliche Ernährung verloren. (Ebda. 20.)

Die Ursache der Hebung des Wassers in den Pflanzen ist nach Müller nicht, wie seit Hales angenommen wird, in dem sogenannten „Wurzeldruck“ zu suchen, sondern die Hebung findet vielmehr vermittelst der Imbibition oder Diffusion des porösen Holzkörpers, angeregt durch die Verdünstung in den Blättern, statt. (Müller, botan. Untersuchungen 2.)

Das australische Kautschuk, Coorongit, welches neuerdings vielfach in den Handel gekommen ist, ist nach Analysen von Bernays nicht vegetabilischen Ursprungs, sondern ähnlich wie das Petroleum, eine mineralische Substanz. (Ntf. V. 23.)

Ueber das Leuchten des faulen Holzes. Ludwig beobachtete an einem phosphorescirenden faulen Baumstamme, dass gerade die leuchtenden Stellen mit einem feinen, weissen Schimmelgeflecht, anscheinend dem Mycelium eines Pilzes aus der Classe der Hymenomyceten, überzogen waren. Wo er die Pilzfäden entfernte, hörte auch das Phosphoresciren auf. Es ist daher wahrscheinlich, dass das Leuchten nicht in dem desorganisirten Holze, sondern in dem lebenden Mycel gewisser Pilze seinen Sitz hat. (Ebda. 29.)

Organismen in der Pockenlymphe. Nach Prof. Cohn's Untersuchungen sind die mikroskopisch kleinen Körnchen der Pockenlymphe wesentliche Bestandtheile der Lymphe, keine von aussen hineingelangten fremden Beimengungen. Es sind lebende und selbständige Organismen zu der Classe der Schizomyceten gehörig, und es hat einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit für sich, dass diese Körperchen der eigentliche Träger des Ansteckungsstoffes sind. (Ebda.)

Entstehung von Organismen aus leblosen Substanzen. Bastian's Versuche, wonach sich aus Salzlösungen in verschlossenen Gefässen, nachdem durch Erwärmung auf 150° C. alle organischen Keime zerstört worden waren, Organismen entwickelt haben sollten, sind von Hartley unter grösseren Vorsichtsmassregeln wiederholt worden, haben aber zu einem durchweg negativen Resultat geführt. (Realsch. 4. 5.)

Vorkommen des Lithions in Pflanzen. Nach Focke kommt Lithion regelmässig oder doch häufig in nicht unbeträchtlicher Menge bei folgenden Gattungen vor: Carduus, Cirsium, Salvia und Thalictrum. Das Vorkommen des Lithions ist hierbei jedoch nicht allein durch die chemische Zusammensetzung des Bodens bedingt, sondern durch die specifische Organisation der genannten Gewächse, da andere auf demselben Boden gewachsene Pflanzen aus andern Gattungen, auf dieselbe Weise untersucht, sich als lithiumfrei herausstellten. (Ntf. V. 38.)

Eine pflanzengeographische Merkwürdigkeit. Auf der Insel Mainau im Bodensee finden sich mehrere, wohl über 100 Jahre alte, ungefähr 30—50 Fuss hohe, prächtige Cypressen (Cupressus fastigiata DC., C. pervirens Mill.). Die Bäume stehen ohne jeden Schutz im freien Lande und doch liegt die Insel 3° nördlicher als die nördlichste Grenze des Verbreitungsbezirks dieser Pflanze. Auch in Lindau sind seit einigen Jahren ähnliche Pflanzungen mit glücklichem Erfolg ausgeführt worden. (Gäa VIII. 3.)

Mykologische Beobachtungen, E. Roze erzog durch Impfung von Podisoma clavariaeforme auf Blättern des Weissdorns die Roestelia penicillata.

Ferner macht derselbe Mittheilungen über die Vitalität des Sclerotium clavus, sowie über Impfung mit den Conidien von Sphacelia. Blühende Roggenähren, in conidienreiches Wasser getaucht, zeigten schon nach 8—10 Tagen die ersten Anlagen neuer Sphacelien; ebenso bei Uebertragung auf Triticum und umgekehrt von der Sphacelia des Triticum auf Secale; ebenso von Secale auf Triticum repens; ferner Ansteckung der Conidien auf die Stigmata der Blüthen von Lolium perenne. Ferner operirte derselbe mit Wasser, worin durch Zerdrücken von Claviceps-Köpfen deren Sporen suspendirt waren. Nachdem er darein Aehren von Roggen oder Weizen getaucht hatte, erschienen 10 Tage später an demselben einige Sphacelien, ebenso, wenn einige Tropfen dieser Flüssigkeit zwischen die Spelzen von blühendem Roggen eingeflösst wurden. In allen Fällen entwickelte sich weiterhin daraus Sclerotium. (Hoffmann, mykologische Berichte.)

Zur Naturgeschichte des Kartoffelpilzes, Peronospora infestans. Nach Kühn vermag das Peron. inf. auch an völlig unverletzten Kartoffelknollen selbst in geschlossenem Ackerboden Fruchtäste und zahlreiche Sporen zu bilden.

Es kann demnach die Krankheit auch im Boden um sich greifen, selbst wenn der Parasit auf den Blättern nur spärlich auftritt. Auch im Keller verbreitet sich der Pilz, und damit die Krankheit, auf der Oberfläche unversehrter Knollen weiter; an Augen und anderen Stellen die Korkschale durchbrechend entwickeln sich Fruchthyphen. (Zeitschr. des landw. C.-V. f. Sachsen.)

Derselbe Beobachter hat die Erfolglosigkeit des Schwefels als Mittel gegen den Kartoffelpilz nachgewiesen und gefunden, dass die Hyphen an manchen Stellen die aufgestreuten Schwefelpartikelchen beim Wachsen in die Höhe hoben und unbehindert Sporen bildeten.

[Gegen die Traubenkrankheit (Oidium Tuckeri) wird Schwefel mit Erfolg angewandt. Statt der Schwefelblüthe wird mit gutem Erfolg vielfach sicilianische Erde gebraucht, welche ihre Wirksamkeit gewiss dem bedeutenden Schwefelgehalt (46%) verdankt.] (Ebda.)

Zur Seidenraupenkrankheit. Liebig ermahnt auf Grund chemischer Analysen von Maulbeerblättern aus Turkestan, wo die Seidenraupenkrankheit nicht vorkommt, die Bäume sorgfältig zu düngen, wie es im östlichen Asien üblich sei. Die Blätter zeigten einen auffallend hohen Stickstoffgehalt. „Es spricht eine Menge von Gründen dafür, dass die Pilzkörperchen, die man in der Regel als die alleinige Ursache der Krankheit der Raupen ansieht, in mangelhaft ernährten Thieren den eigentlichen

Boden für ihre Entwickelung und Verbreitung finden. Es ist schon Recht, dass man die Eier mikroskopisch untersucht und diejenigen von der Zucht ausschliesst, unter denen sich solche befinden, welche die Anzeichen der Krankheit bereits an sich tragen; allein die Ursache des Uebels wird damit nicht entdeckt, auf deren Kenntniss zuletzt alles ankommt." (Hoffmann, myk. Berichte.)

Zur Abhaltung des Schimmels von Gummilösung und Tinte empfiehlt Böttcher statt des übelriechenden Creosots den Zusatz einer Auflösung von nur einigen wenigen Krystallfragmenten des schwefelsauren Chinins. (Ebda.)

Die Salicornien der deutschen Nordseeküste von Buchenau und Focke. (Zeitschr. ges. N. V. 266 nach Brenner Abh. III., 199—211.)

Die Gefässpflanzen Spitzbergens und der Bäreninsel von Fries. (Ebda.)

Flora des arktischen Ostgrönland von Buchenau. (Tageblatt der Vers. d. Naturf. zu Lpz. 1872.)

Ursprung der Flora Nordamerikas. (Natf. V. 51.)

Verbreitungseinrichtungen bei den Compositeen von Hildebrand. (Bot. Zeitg. 15. 16.)

Zur Ernährung der Flechten. (Ntf. V. 37 nach Nature 143.)

Ueber Pflanzenelektricität. (Ntf. V. 48.)

Ueber den Helitropismus der Pflanzen von Müller. (Ntf. V. 25.)

Eigentliche Umbildung des Pollens, ein Beitrag zur Kenntniss des Zellenlebens von Tomaschek. (Zeitschr. ges. N. V. 519.)

Experimentaluntersuchungen über die Keimung der Samen von Wiesner. (Centralbl. f. Agriculturchemie. Hft. 3.)

Die Entwickelung der schwefligen Säure auf die Pflanze von Schröder. (Ntf. V. 43.)

Fungi austriaci exsiccati von F. v. Thümen. Von dieser Exsiccatensammlung ist 1871 die 1. und 2. Centurie, die 3. im Juni 1872 erschienen und vom Herausgeber direct (Teplitz, Mühlstrasse, hohes Haus) gegen Baareinsendung des Betrages — 3 Thlr. pr. 100 St. — zu beziehen.

Zur Beobachtung der Gefässbündelvertheilung sind die von G. Lindemuth, k. Gartengehülfe im botanischen Garten in Berlin angefertigten Skeletirungen zu empfehlen. Die Präparate sind in grosser Vollkommenheit hergestellt und zeigen die feinsten, in den kleinen Maschen des Gefässbündel-Netzes blind auslaufenden Verzweigungen desselben; auch lassen sie bei verschiedenen Pflanzen z. B. Theophrasta erkennen, wie Holz- und Bastbündel in getrennten und von einander abweichend verlaufenden Systemen über einander gelagert sind. Der Preis dieser Präparate ist 5 Thlr. für die Serie à 50 Species.

Mikroskopische Präparate zur Erläuterung der allgemeinen Pflanzen-Anatomie mit besonderer Berücksichtigung der in den botanischen Lehrbüchern von Sachs und Dippel angeführten Präparate sind von C. Olz in Bern angefertigt worden und durch die Dalp'sche Buchhandlung in Bern zu beziehen.

Eine Abtheilung umfasst die Präparate, welche die Organisation der Zelle, bezw. ihre Form, Grösse, Inhalt, Verdickung etc. darstellen, die andere Abtheilung enthält die Organisation der Zellgewebe, Hautgewebe, Fibrovasalstränge, Milchsaftgefässe etc. Preis pr. Stück 1 Frc. Collection zu 12 Präp. 15, zu 24 Präp. 28, zu 50 Präp. 50 Frcs.

Mathematische und naturwissenschaftliche Universitätsseminare.

Wir haben die Statuten von nun bereits acht Universitätsseminarien für Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaft mitgetheilt, nämlich:

in Jahrg. IV (1873) S. 77 Allgemeines
" " " " " 160 Greifswalde
" " " " " 162 Graz proj.
" " " " " 373—374 Göttingen, Breslau
" " " " " 444—446 Bonn und Tübingen
" " V (1874) " 89 Berlin und Basel.

Weiter eingegangen sind noch folgende Berichte: Universitätsseminare gibt es nicht in:

Bern (Mitth. des Hrn. Prof. Sidler)
Münster (Mitth. des Hrn. Prof. Heis), doch existirt dort ein akademisch-wissenschaftl. Verein, dessen Statuten gar nichts Bemerkenswerthes für unsern Zweck bieten.
Rostock (Mitth. des Hrn. Gymn.-Dir. Krause)
Prag (Polyt.) (Mitth. des Hrn. Prof. Lieblein)
Jena (Mitth. des Hrn. Prof. Schäffer) hat nur eine mathem. Gesellschaft unter Leitung des Prof. Schäffer.*)

Eigentliche Seminare zwar nicht, aber doch Anfänge dazu oder Surrogate besitzen folgende Universitäten:

Leipzig (Mitth. des Privatdoc. Dr. Weiske, Redacteurs der Zeitung für das h. Unterrichtswesen in Deuschland). Dort sind nur einzelne freiwillige Vorträge der Professoren, welche das Seminar theils ersetzen, theils anstreben sollen, z. B. von
Prof. Dr. Neumann, Besprechung math. und physikal. Aufgaben
Prof. Dr. Bruhns, Colloquium über einzelne Aufgaben aus der Astronomie
Prof. Dr. Van d. Mühl, mathem.-phys. Uebungen
Prof. Dr. Wiedemann, phys.-chem. Colloquia.

Auch Dr. Weiske hält „phys. Vorträge mit praktischen Uebungen", wenn — sich Theilnehmer finden. Haupthinderniss soll der „Mangel eines genügenden Apparates" sein. Neuerdings haben wir in dem Vorlesungsverzeichniss der Leipziger Universität auch von physikal. Vorträgen des Professors (geh. Hofraths) Hankel „für (künftige) Lehrer" (Lehramtscandidaten nennt man sie passend in Oesterreich!) gelesen, doch gibt dieser nackte Titel keinerlei Aufschluss über die Art dieser Vorträge. Es dürfte wohl von der jetzt in Blüthe stehenden Leipziger Universität zu erwarten sein, dass sie den andern Universitäten mit gutem Beispiele vorangehe und eine derartige Anstalt (Musteranstalt!) ins Leben rufe, namentlich an einem Orte, wo Männer, wie der auch um den naturgeschichtl. Unterricht verdiente Masius und ein Ziller wirken; doch gehört hierzu freilich eine Persönlichkeit im Cultusministerium, welche — nicht Jurist, sondern erfahrner und begeisterter Schulmann, sich warm für die Sache interessirt und Verständniss dafür besitzt. -

In **Freiburg** i. B. ist nur ein schwacher Anfang dazu. Herr Prof. J. Müller schreibt uns darüber:

---

*) Es scheint uns hier der passende Ort zu sein, auch noch einen andern Mangel der Universität Jena zu erwähnen. Es hat (— eine event. Aenderung ist uns unbekannt —) nicht einmal eine Examinationscommission für Cand. des h. Schulamts, welche doch bei der Buntfarbigkeit der Thür. Staaten recht nothwendig wäre, die Examina müssen (oder mussten!) vor dem Consistorium des betr. Staats gemacht werden. Es sind uns mehrere Fälle bekannt, in denen Lehramtscandidaten für Mathem. und Naturw., weil sie diese Prüfungsbehörde nicht für competent hielten, nach Leipzig, Halle oder Göttingen zur Prüfung gingen, auch Fälle, wo schon ältere Leute erst spät noch das Examen in Leipzig nachbestehen mussten, um eine Anstellung in Sachsen zu erhalten. Also Jena ist — in dieser Beziehung — ein halbes Jahrhundert zurück!

Als ich im Jahre 1844 nach Freiburg kam, machte ich den Vorschlag, ein mathematisch-naturwissenschaftliches Seminar nach Art der damals bereits in Preussen bestehenden zu begründen. Die Sache fand aber wenig Unterstützung und wurde namentlich von Seiten des Ministeriums fallen gelassen. In neuester Zeit nun, nachdem Herr Paul Dubois-Reymond als Professor der Mathematik berufen wurde, hat derselbe die Nothwendigkeit eines solchen Seminars wenigstens für Mathematik betont und auch im Vorlesungskatalog gewisse Vorlesungen als zum mathematischen Seminar gehörig bezeichnet, von Statuten irgend einer Art ist mir aber nichts bekannt und von einem gemeinschaftlichen Seminare für Mathematik und Naturwissenschaften nicht weiter die Rede gewesen."

In **Marburg** ist ein mathem.-phys. Institut. Herr Prof. Dr. Melde, Director desselben schreibt uns darüber:

„Das hiesige mathem.-phys. Institut ist unter der Leitung meines directen Vorgängers errichtet worden und umfasst neben Räumen und Lehrmitteln für die Physik auch solche für praktische Geometrie und namentlich auch ein astronomisches Observatorium mit einer Reihe brauchbarer Apparate. Ueber das Ganze habe ich allein zu wachen und bin der alleinige Vorstand der gesammten Einrichtungen, zu welchem Zwecke mir auch freie Dienstwohnung im Gebäude eingerichtet wurde ebenso wie bei meinem Vorgänger Prof. Gerling.

Was nun die Verbindung der Studirenden mit diesem Institute betrifft, so war dieses zu Gerlings Zeiten nur auf eine besondere Benutzung des praktisch-geometrischen und astronomischen Theils gerichtet, dagegen in Physik — die Hauptsache — so gut wie gar nicht. Ich liess es deshalb meine erste Pflicht sein, dafür zu sorgen, dass Studirende praktisch-physikalisch arbeiten konnten und habe ich seit sechs Jahren Montags und Donnerstags von 2—6 Uhr dieses Prakticum eingerichtet. In ihm werden Unterweisungen in der Handhabung der Instrumente, Bestimmungen physikalischer Grössen, Beobachtungsreihen mit den vorzüglichsten Instrumenten und auch selbständige Untersuchungen von Seiten einzelner begabterer Schüler vorgenommen, welche letztere an keine Zeit gebunden sind. Eine eigentliche Seminareinrichtung besteht aber nicht. Preisaufgaben werden nicht gestellt. Die Benutzung der astronomischen Einrichtungen vollzieht sich in derselben Weise und werden die Praktikanten insbesondere in den Methoden der Zeitbestimmung, Beobachtung von Finsternissen etc. unterrichtet.

Das ist es, was ich Ihnen zur Zeit mittheilen kann und füge ich dem noch hinzu, dass dem Institut ein jährlicher Fond von 800 ℳ zur Disposition steht, aus welchem aber eine Dienerin, Holz und Licht im etwaigen Betrage von 200 ℳ bestritten werden müssen, so dass etwa 600 ℳ für eigentliche Neuanschaffungen, Laboratoriumskosten etc. bestimmt bleiben.

Auch in **Insbruck** existirt eine solche Anstalt, aber nur eine private. Herr Prof. Pfaundler schreibt uns darüber:

Auf Ihre Anfrage kann ich Ihnen leider wenig erwidern. Ich bin nämlich nicht Director eines mathem. Seminars, da ein solches überhaupt an unserer Universität nicht existirt und ich nur die Physik vertrete. Es haben aber im abgelaufenen Semester Besprechungen zwischen den Professoren der Mathematik Dr. Baumgarten und Dr. Stolz, der analytischen Physik: Dr. Peche und mir über die Einrichtung eines Seminars stattgefunden, ohne zu einem endgiltigen Ergebnisse zu führen. Es wurde von Seiten der Mathematiker nur eine Reihenfolge der zu hörenden oder anzurathenden Collegien entworfen.

Dagegen besteht an dem mir seit 1868 unterstehenden physikalischen Cabinete eine Einrichtung, welche mit der eines Seminars nahe zusammenfällt. Die darauf bezüglichen Bestimmungen sind nicht gedruckt, sondern nur im Locale angeheftet. Ich kann Ihnen leider von hier aus keine genaue Abschrift schicken. Die Einrichtung ist folgende:

Den Studirenden der Physik, welche sich hiezu melden, wird an drei

Wochentagen den Vormittag hindurch (den Vorgerückteren auch alle Tage Nachmittags) das Arbeitslocal geöffnet. Dort erhalten dieselben die Apparate, welche zu einer Reihe von Arbeiten (30 Nummern) nöthig sind. Diese Arbeiten wurden so ausgewählt, dass von einfachen Längenmessungen, Winkelablesungen etc. an fortschreitend nach und nach alle die wichtigeren Messmethoden, die sich mit den einfacheren Instrumenten durchführen lassen, zur Anwendung kommen. Dabei ist auch die Einrichtung getroffen, dass meist die folgende Arbeit die vorherige voraussetzt. So z. B. lernt der Studirende am Babinet'schen Goniometer zuerst den Winkelnonius ablesen, dann benutzt er dies zur Messung des Kantenwinkels eines Prismas, diese Messung benöthigt er dann, wenn er nach Frauenhofers Methode den Brechungsapparat desselben Prismas bestimmt, endlich braucht er wieder letztern, indem er nach Wollastons Methode Brechungapparate undurchsichtiger Medien ermittelt.

Bei der Auswahl der Arbeiten wurde aber auch darauf geachtet, dass der Studirende alle jene praktischen Kunstgriffe lerne, die er später beim Experimentiren als Lehrer und als Verwalter eines Cabinets braucht. Er beginnt daher mit Arbeiten an der Glasbläserlampe, er verfertigt dort z. B. eine Manometerröhre, dieselbe muss er sich dann mit der Theilmaschine eintheilen, die Theilung mit Flusssäure ätzen. Dieses Manometer braucht er dann bei der Graduirung eines Aneroides, in derselben Weise macht er sich Büretten, lernt sie eintheilen, kalibriren und führt schliesslich damit eine Titreanalyse aus. Eine Werkstätte für Holz und Metallarbeiten ist den Studirenden zugänglich.

Als Kohlrausch vor 2 Jahren seine „praktische Physik“ veröffentlichte, zeigte sich eine frappante Uebereinstimmung der von ihm ausgewählten Aufgaben mit den von mir angewendeten. Künftig wird auch nach Külp's Aufgabensammlung vorgegangen werden.

Ueber jede Arbeit (von denen keine übersprungen werden kann) muss der Studirende ein Protokoll einliefern, in welchem Beobachtungs- und Rechnungsresultate streng geschieden enthalten sind, damit er lernt Thatsachen und Schlüsse zu unterscheiden. Eine kurze Theorie der Methode ist vorauszuschicken. Diese schriftlichen Arbeiten werden von mir oder dem Assistenten corrigirt und entweder approbirt oder zur Wiederholung zurückgegeben. Durch öftern Wechsel der Beobachtungsobjecte wird verhindert, dass gegenseitig abgeschrieben werden kann.

Eine kleine Handbibliothek, deren Bände im Locale beliebig benutzt werden können, ermöglicht den Studirenden, sich selbt theoretische Aufschlüsse zu suchen, oder etwa eine Zwischenpause lehrreich auszufüllen, in der er auf Apparate warten muss, die ein Anderer im Gebrauche hat.

Dies die Grundzüge des praktischen Unterrichtes, daneben finden wöchentlich einmal Vortragsübungen (Referate etc.) statt, verbunden mit einer Kritik derselben.

Der Mangel eines eigenen Arbeitssaales ausser dem Hörsaale macht obige Einrichtungen zu sehr mühsamen wegen der täglichen Transporte der Bänke, Tische und Instrumente. Ich speculire auf Erwerbung eines Arbeitssaales, dann kann Alles besser, consequenter und umfangreicher durchgeführt werden.“

Ausser den angeführten gibt es noch Seminare in Zürich unter Leitung der Herren Schwarz und Fiedler und das bekannte in Berlin unter Leitung des Prof. Schellbach, doch nur für bereits approbirte Lehramtscandidaten. Wir konnten bislang über diese Anstalten Genaueres nicht erfahren, ebensowenig über die Universitäten München, Strassburg, Giessen, Heidelberg, Königsberg, Kiel, Würzburg, Prag, Dorpat, Pesth. Wir werden uns jedoch bemühen, über diese Univers.-Städte Erkundigungen einzuziehen, und bitten hiermit wiederholt die Leser unsrer Zeitschrift in den genannten Städten dringend um gef. Mittheilungen üer die etwa dort bestehenden Einrichtungen resp. um die betr. Statuten.

Ueber Wien (Univers. und Polyt.) werden wir später aus eigner Anschauung berichten. Was Pesth betrifft, so scheint dies — wenn man alle Nachrichten als baare Münze nehmen dürfte, fast den 1. Platz in dieser Hinsicht einzunehmen. In einem Aufsatze der „Allgem. Schulzeitung“ 1873 Nr. 25 betitelt „Ein akademisches Seminar für das höhere Lehrfach“ heisst es:

„Cisleithanien ist in dieser Hinsicht wenigstens von der östlichen Reichshälfte weit überflügelt worden und kann nach Pesth gehen, um zu lernen, wie man Lehrer für Gymnasien und Realschulen zu bilden habe. Der soeben veröffentlichte und in deutscher Uebersetzung auch uns zugänglich gemachte Bericht des kgl. ungarischen Unterrichtsministeriums vom 4. September 1872*) enthält ausser vielen höchst werthvollen Berichten über grossartige, ja, staunenswerthe Organisationen auf dem Bildungsgebiete — über welche wir uns weitere Mittheilung vorbehalten — auch nachstehenden Passus auf Seite 114: „Ein wesentlicher Mangel in unserem Mittelschulwesen war bis zum Inslebentreten des Ministeriums, dass wir kein Mittelschullehrerseminar besassen.

Den philosophischen Curs an der Universität ausgenommen, war im ganzen Lande kein Institut, in welchem sich der Gymnasiallehramtscandidat auch nur theoretisch hätte ausbilden können und gar kein solcher Curs, in welchem er den seinem künftigen Berufe entsprechenden praktischen Unterricht und Unterweisung hätte erhalten können.

Dieser Mangel ist nun beseitigt, insofern im Schoos der philosophischen Facultät der Universität zu Pesth für Gymnasiallehramtscandidaten und zwar für jedes wissenschaftliche Fach besondere Seminarien bestehen, nach deren Absolvirung die Candidaten behufs Aneignung des theoretischen, wie des praktischen Unterrichts der Pädagogik und Didaktik in das mit einer pädagogischen Uebungsschule verbundene praktische Seminar treten. Dieses Seminar, in welchem sowohl die Seminarien für die einzelnen Wissenschaften, als auch das zur theoretischen und praktischen Erlernung der Pädagogik und Didaktik errichtete Seminar organisch vereinigt sind, steht bis jetzt in Europa noch einzig da und hat sich die Anerkennung der ausgezeichnetsten ausländischen Pädagogen erworben. Auch im Schoosse des Polytechnicums wurde für Realschullehrer in Bezug auf Mathematik und Naturwissenschaften ein ähnliches Seminar errichtet, dessen Zöglinge dann behufs praktischer Ausbildung in die pädagogische Abtheilung des Seminariums an der Universität übertreten können. In diesen zwei Seminarien werden jährlich 45 ordentliche Zöglinge der Seminarien gebildet, welche, damit sie ihre Zeit gänzlich den Wissenschaften widmen können, ein von der Legislation bewilligtes Stipendium von je 400 fl. und für ihre besonderen Arbeiten noch besondere Preise erhalten.“

So constatiren wir denn hiermit die drei wichtigsten Momente:

1) Die Candidaten des höheren Schulamts und zwar sowohl die auf Universitäten, als auf polytechnischen Anstalten gebildeten, treten nach Absolvirung der betreffenden Fachseminare in das pädagogische Seminar der Universität.
2) Mit dem pädagogischen Seminar ist eine Uebungsschule verbunden.
3) Von 45 Candidaten erhalten jeder, um ihrer pädagogischen Ausbildung in Wahrheit leben zu können, das ansehnliche Stipendium von 400 fl. ö. W., für ihre besonderen Arbeiten noch besondere Preise.

Hoffen wir, dass in einem der nächsten Decennien sich ein Gleiches von Preussen, Baden, Bayern berichten lässt!“

Der Artikel ist mit St. (Stoy?) unterzeichnet. Wenn das darin Gesagte wahr wäre (— wir konnten uns troz der verhältnissm. grossen Nähe Pesth's bislang nicht davon überzeugen —), so hätte allerdings

---

*) Wir konnten diesen Bericht trotz unsern Bemühungen bis heute nicht erlangen.
D. Red.

Ungarn allen andern Staaten Mitteleuropas hierin den Rang abgelaufen. Man muss aber alle Nachrichten, die aus Ungarn kommen, wie die Erfahrung lehrt, mit der grössten Vorsicht aufnehmen.*)

Es möge nun noch folgen das bez. Reglement für Halle-Wittenberg.

Vorläufiges**) Reglement für das Seminar für Mathematik und die gesammten Naturwissenschaften auf der Universität Halle-Wittenberg.

§. 1. Der Zweck des Seminars für Mathematik und die gesammten Naturwissenschaften ist: Anleitung zum Selbststudium und zum Lehrvortrage der bezeichneten Wissenschaften zu geben, mit besonderer Beziehung auf Bildung solcher Lehrer für Gymnasien und höhere Bürgerschulen, welche befähigt seien, nicht blos zur Fortpflanzung, sondern auch zur Erweiterung der Wissenschaft etwas beizutragen.

§. 2. Dieses Seminar ist als ein Universitäts-Institut zu betrachten, wird unter den Universitäts-Instituten im Lections-Kataloge und amtlichen Verzeichnisse angezeigt und geniesst alle Rechte, welche die andern wissenschaftlichen Institute hiesiger Universität geniessen.

§. 3. Vorsteher sind die jedesmaligen Professoren der einzelnen naturwissenschaftlichen und mathematischen Fächer.

§. 4. Jedem dieser Professoren ist es überlassen, die ihm für sein specielles Fach angemessen scheinende Einrichtung zur Erreichung des im §. 1. ausgesprochenen Hauptzweckes zu treffen und zu diesem Zwecke nach Gutdünken auch besondere Bestimmungen festzusetzen, in so fern sie den allgemeinen, das ganze Institut umfassenden Anordnungen keinen Eintrag thun.

§. 5. Zur Besorgung der auf das Ganze sich beziehenden Geschäfte wählen die Vorsteher der einzelnen Sectionen aus ihrer Mitte jährlich einen Director, welcher gemeinschaftliche Berathungen veranlasst und leitet und die Mitglieder des Seminars zu allgemeinen Versammlungen einladet, Abgehenden ein allgemeines Zeugniss mit Zuziehung der einzelnen Vorsteher ausstellt (s. §. 9.) und die nöthigen, seien es öffentliche oder von den vorgesetzten Behörden verlangte Berichte im Namen des Seminars erstattet.

§. 6. Mitglieder des Seminars können werden: 1) alle förmlich immatriculirte Studenten, welche sich specieller mit Mathematik oder irgend einem Zweige der Naturwissenschaft beschäftigen wollen; 2) alle diejenigen, welche für ein specielles mathematisches oder naturwissenschaftliches Fach, blos bei der philosophischen Facultät inscribirt sind, wozu namentlich Pharmaceuten und von Realgymnasien oder Gewerbschulen mit guten Zeugnissen Entlassene gehören; 3) bereits angestellte oder nach bestandener Prüfung einer Anstellung entgegen sehende Lehrer, welche sich noch in einem speciellen mathematischen oder naturwissenschaftlichen Fache ausbilden oder auch als Repetenten hülfreich werden wollen.

§. 7. Der vollständige Cursus für diejenigen, die sich dem Lehrfache widmen, ist auf drei Jahre berechnet, kann aber in besonderen Fällen nach Umständen verkürzt oder verlängert werden. Anderen, namentlich bereits angestellten Lehrern, oder solchen, die einer baldigen Anstellung entgegen sehen und sich nur in besondern Fächern der Mathematik und Naturwissenschaften weiter ausbilden wollen, ist die Theilnahme auf unbestimmte Zeit verstattet.

---

*) Im Gegensatze zu obigem überschwengl. Berichte cursirt in Wien folgende Anekdote: Ein Lehrer der Physik an einer Mittelschule in Ungarn zeigte seinen Schülern den Gang des Pendels und fügte hinzu: „Seht, wie gut das geht! Aber Schwab braucht Formel dazu!“ („Schwab“ heisst bei den Ungarn der „Deutsche.“)

**) Wenn im J. 1839 ein vorläufiges Reglement erschien, so dürfte es wohl nun (1874) an der Zeit sein, dass das definitive Regl. erschiene.

§. 8. Diejenigen Studirenden, welche als wirkliche Mitglieder in das Seminar eintreten wollen und die zur Aufnahme in dasselbe erforderlichen Vorkenntnisse besitzen, haben die Obliegenheit, in jedem Semester wenigstens in einem Fache als thätige Theilnehmer zu arbeiten und werden in einem besonders dazu bestimmten Buche verzeichnet.

§. 9. Nur diejenigen Mitglieder, welche sich vor ihrem Abgange einer besondern Prüfung unterwerfen wollen, erhalten ein förmliches, von dem Director und den Vorstehern unterschriebenes und von dem Decan der philosophischen Facultät beglaubigtes Abgangszeugniss über ihre Fortschritte in der Mathematik und in den Naturwissenschaften nach den einzelnen Fächern und ihre Befähigung als Lehrer. Den übrigen Mitgliedern steht es frei, sich über ihre Theilnahme und Leistungen Privatzeugnisse der einzelnen Lehrer geben zu lassen.

§. 10. Die Arbeiten der Mitglieder bei den einzelnen Sectionen können sich entweder auf freie Vorträge über einzelne Materien oder Referate über ausgezeichnete ältere und neuere Abhandlungen mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhaltes, oder auf Darlegung der Resultate eigenthümlicher Untersuchungen beziehen. Doch sollen darüber geflissentlich keine allgemeinen Bestimmungen gemacht, sondern es jedem Vorsteher der Section allein überlassen werden, der Natur des ihm anvertrauten Faches gemäss, diese Arbeiten nach Gutdünken anzuordnen und zu leiten. Zu Mittheilungen aber in den allgemeinen Versammlungen, wozu der jedesmalige Director einzuladen hat, empfehlen sich zunächst solche Abhandlungen, welche die Theilnahme mehrerer Sectionen in Anspruch nehmen.

§. 11. Das bei der medicinischen Facultät begründete pharmaceutische Institut schliesst sich, seiner Tendenz nach, dem zunächst zum Kreise der philosophischen Facultät gehörigen allgemeinen mathematisch-naturwissenschaftlichen Seminare an. Beide Anstalten werden sich bestreben, sich hülfreich und förderlich zu sein.

§. 12. Auch zu technischen, den einzelnen mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächern angemessenen Arbeiten werden die sich darbietenden Gelegenheiten benutzt werden und insbesondere wird im Zeichnen naturhistorischer Gegenstände denjenigen, die es wünschen, der akademische naturhistorische Zeichnenlehrer Unterricht ertheilen.

§. 13. Die äusseren Vortheile (abgesehen von den wissenschaftlichen) welche den ordentlichen Mitgliedern bei dem Seminar zu Theil werden, sind: 1) diejenigen Vorrechte, welche die Universitäts-Bibliothek allen Theilnehmern an denjenigen Seminaren gewährt, welche als Universitäts-Institute im Lections-Kataloge angezeigt sind; 2) druckwürdige Abhandlungen der Mitglieder können, so weit es die Fonds gestatten, Prämien erhalten, den hierüber von Seiten des Directoriums zu machenden Anträgen gemäss; 3) Abhandlungen der Seminaristen, welche auf irgend eine Weise zur Erweiterung der Wissenschaft beitragen, werden von den Vorstehern an irgend eine geeignete Zeitschrift mit einem Vorworte begleitet eingesendet werden; 4) ebenso werden die Vorsteher darauf Rücksicht nehmen, dass, wenn Assistenten-Stellen bei den ihrer Direction anvertrauten Instituten zu besetzen sind, solche, so weit es die Umstände gestatten, vorzugsweise durch Seminaristen besetzt werden; 5) diejenigen Seminaristen, welche sich bei dem Austritt aus dem Seminar durch eine schriftstellerische Arbeit vortheilhaft auszeichnen, werden, nach dem Vorschlage der Vorsteher, mit Genehmigung des Ministeriums, für die Kosten des Druckes dieser Arbeit als Dissertation bei ihrer Promotion aus dem Universitäts-Fond, falls dieser hierzu verwendbare Mittel darbietet, entschädigt werden; 6) denjenigen ordentlichen Mitgliedern, welche die Prüfung *pro facultate docendi* überstanden haben, und sich durch Thätigkeit am Seminare ausgezeichnet, auch ihre Lehrfähigkeit durch die ihnen verschaffte Gelegenheit zum Unterricht an Schulanstalten in Halle hinreichend bewährt haben, wird nach einem von dem Directorium zu machenden Antrage, das bei dem Seminar in dieser Thätigkeit verlebte Jahr eben so angerechnet, als ob sie ein Jahr unentgeldlich an einer Schule Unterricht ertheilt hätten.

Berlin, den 27. November 1839.

Ministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten.
(gez.) Altenstein.

Kleine Literatur-, Aufsatz- und Recensionsschau der Redaction.

Ein neues literarisches Unternehmen betitelt Volksbildung und Schulwesen gibt der Wiener Professor am Akadem. Gymnasium und Reichstagsabgeordneter D. A. Egger in Wien bei A. Hölder (Beck's Univ.-Buchhandlung) heraus, welches nach dem Prospect die „Verbreitung allgemein menschlicher Bildung" fördern und in zwanglosen Heften erscheinen soll. Das 1. ist bereits erschienen und enthält „Industrie und Schule in Oesterreich" vom Herausgeber.

Für unser Lesepublicum dürfte aus den angekündigten weitern Beiträgen besonderes Interesse haben:

Ficker, das österr. Realgymnasium.*)
Hannack, Proseminarien.
Hayeck, Ausbildung von Lehramtscandidaten für Mittelschulen.
Wildauer, Heranbildung von Lehramtscandidaten für Mittelschulen.
Wretschko, Fachbildung der Lehramtscandidaten, Realgymnasien und naturhistorischer Unterricht,

also — unser oben ventilirtes Thema (Lehrerbildung) von mehreren Kräften zugleich behandelt. Wir werden nach dem Erscheinen jeder in das Bereich unserer Zeitschrift fallenden Abhandlung darüber weiter berichten.

Eine Ausstellung des Vereins zur Förderung des Zeichenunterrichts**), welche vergangene Osterferien (1874) nach einem 1873 ausgegebenen Programm in Berlin stattfinden sollte, hatte, wie ihre Vorgänger, zum Zweck im Allgemeinen die „Förderung des Zeichenunterichts durch Veranschaulichung der Lehrmittel und Leistungen." Die Ausstellungsobjecte waren: Schülerarbeiten, Lehrmittel und Utensilien. Unter letzteren sind nicht genannt Reisszeuge, Massstäbe und Bleistifte. Wir wünschten, dass gerade über diese Erzeugnisse der verschiedensten Firmen, Erzeugnisse, welche auch für den propädeutisch-geometrischen Unterricht höchst wichtig sind, eingehende Untersuchungen geführt und genaue Berichte geliefert werden möchten. Das fiele ja gerade und vorzugsweise in das Bereich dieses Vereins! Es werden in diesem Fache so erbärmliche Erzeugnisse auf den Markt gebracht, dass es dringend noth thut, die Winkelfirmen einmal an den Pranger zu stellen, dagegen auch solide Firmen, deren Bestreben es ist, nur gute und zweckmässige Waare auf den Markt zu bringen, bekannt zu geben. Freilich, eine Ausstellung wie die in Rede stehende (und wie auch in noch höherem Grade die Wiener Weltausstellung) kann streng genommen nicht massgebend sein. Denn für einen solchen Fall sucht auch der Stümper und der Unredliche etwas Leidliches, der Mittelmässige etwas Gutes zu bieten. Man muss vielmehr über diese Leute kommen, wie ein Dieb in der Nacht und ihre „Alltagswaare" (Durchschnittsleistung) untersuchen.

Das Schlimme ist, wie bei den meisten Lehrmiteln dass viele Verfertiger derselben bei ihrem nicht selten niederen Bildungsgrade und bei ihrem geringen Verständniss des für die Schule Nöthigen und

*) Ueber diese Anstalten hat der Wiener Univers.-Prof. der Pädagogik Vogt eine Broschüre geschrieben, deren Schluss lautet: „und darum verdienen sie (die Realgymnasien) unterzugehen!" Wir kommen darauf zurück.

**) Wir bitten Leser, welche diese Ausstellung besucht haben, um einen Bericht.

Brauchbaren nicht einmal der Mühe es für werth halten, einen Sachverständigen d. h. einen praktischen Lehrer über die Zweckmässigkeit des Lehrmittels um Rath zu fragen, sondern dasselbe nach ihrem Gutdünken anfertigen.

Geographisches — Methodisches. Das pädagogische Archiv von Langbein-Krumme enthält in XVI, 1. u. A. einen schätzbaren Aufsatz von Dr. Reidt „Bemerkungen über geographischen Unterricht," welcher viel Beherzigenswerthes bietet und dessen Lectüre wir daher den Fachgenossen empfehlen. Aufmerksam gemacht wird bei Besprechung der geographischen Lehrmittel auf die bekannten (und in Sachsen viel benutzten) Elemente der Geographie nebst Atlas von Stössner und auf Vogel's Netzatlas. Wir bedauern, dass der geehrte Herr Verf. hier Sydow ignorirt und möchten hinzufügen, dass wir aus eigener Erfahrung für das Gediegenste im Gebiete des planmässigen methodischen Chartenzeichnens die Sydow'schen Uebungscharten — welche weniger bekannt zu sein scheinen, als sie es verdienen — halten und zwar in folgender Stufenfolge: den hydrographischen Atlas (welcher wegen seiner Brauchbarkeit die meisten Auflagen erlebt hat), den orographischen, hydrotopischen, zuletzt den Gradnetz-Atlas. Nimmt man dazu den geogr. Leitfaden desselben Verfassers (1. Abth. des Grundrisses der allgem. Geographie, eine geogr. Vorschule und Anhalt für Heimathkunde. Gotha bei Perthes 1862), so hat man ein Lehrmittel, wie es wohl wenige geben dürfte. Wir wollen hiermit der Stössner'schen Leistung durchaus nicht zu nahe treten, zumal da wir die Charten seit langer Zeit nicht wieder gesehen haben. Nur gegen die „geogr. Fragen" desselben Verf., die wir früher bei unserm langjährigen geogr. Unterrichte viel benutzt haben, hätten wir erhebliche Einwendungen zu machen.

Eine Studie. Die Schlömilchsche Zeitschrift bringt im Jahrg. 19 (1874) u. A. eine Abhandlung: „Sieben Vorlesungen von Hesse aus der analyt. Geometrie der Kegelschnitte, eine Fortsetzung der 15 Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der geraden Linien des Punktes und des Kreises (Leipzig, Teubner 1873). Sie setzen ausser Diff.-Rechnung das Verständniss der Determinanten von Hesse (s. dessen Schrift) voraus. Demjenigen, welcher sich mit der Lehre von den Determinanten erst bekannt machen will (— und deren gibt es unter den ältern Fachgenossen gewiss noch manche —) ist zu empfehlen in erster Reihe die Broschüre von Dölp in Darmstadt, dann die von Hattendorf und dann erst die von Hesse, eine Schrift, welche einen mathematischen Leckerbissen für den bietet, der in den Determinaten schon fest ist. So folgen diese Studienmittel ihrer Fasslichkeit nach aufeinander.

Bemerkenswerthe Recensionen. Die Zeitschrift für österr. Gymn.-Wesen (1874) enthält eine Recension der bekannten und schätzbaren Aufgabensammlung von Bardey aus der Feder eines Wiener Gymnasialsupplenten Schnellinger, welche, die Vorzüge dieser geschätzten Sammlung würdigend, auch manche beherzigenswerthen Verbesserungsvorschläge enthält.

Das Archiv von Grunert-Hoppe (56. 1. 1874) enthält u. A. auch eine Recension der Schlömilchschen „Geometrie des Masses" von Hoppe, in welcher dieses Buch arg mitgenommen wird. Der Vorwurf der Unwissenschaftlichkeit einzelner Partieen ist für einen Autor wie Schlömilch schwerwiegend. Wir möchten behaupten, H. habe übersehen, dass dieses Buch zugleich eine propädeutische Seite hat, und bei dieser die rigorosen Forderungen der Wissenschaft bekanntlich zurücktreten müssen. Nicht minder scharf zieht Hoppe gegen Aschenborn zu Felde, welchen er zu breite Ausführung vorwirft, der Schüler „lerne in keiner Frage selbst entscheiden." Wir empfehlen den Herren Fachgenossen die Lectüre der Recensionen Hoppes, der eine scharfe Feder führt. Sie regen sehr zum Nachdenken und Lernen an.

Theorie der abgekürzten Rechnung mit Decimalzahlen.

Vom Rector Dr. Schwarz in Gumbinnen.

Die Rechnung mit abgekürzten Decimalzahlen wird freilich in den meisten Lehrbüchern abgehandelt, ercheint aber dennoch sowohl in der Theorie als in der Praxis vernachlässigt. Nur wenige Lehrbücher (wie z. B. die Arithmetik von T. Müller) erschöpfen die Theorie, aber die Regeln, welche für das praktische Rechnen hieraus abgeleitet werden, sind nicht ausreichend. Die Aufgabensammlungen sind nach dieser Seite hin auch häufig genug ohne allen Sinn gearbeitet: sie muthen bei complicirteren und mitunter selbst bei ganz einfachen Exempeln der Rechenkraft Leistungen zu, welche zu der Genauigkeit des zu erzielenden Resultates in dem ungünstigsten Verhältnisse stehen. Was nun vollends den wirklichen Unterricht betrifft, so kommt es oft genug vor, dass die Lehre von den Decimalbrüchen in ein paar Wochen absolvirt wird, und, wo diesem wichtigen Zweige der praktischen Rechenkunst auch grössere Sorgfalt zugewandt wird, pflegt doch die Beschränkung auf die abgekürzte Multiplication und Division einzutreten, ohne dass diese Methode für zusammengesetztere Rechnungen nutzbar gemacht, d. h. eine solche Einrichtung des Calcüls gelehrt würde, bei welcher die Genauigkeit des Endresultates sich bis auf eine bestimmte Decimalbruchstelle erstreckt.

Die wesentlichsten Regeln sind nachstehend zusammengefasst und das Nothwendigste über die Art und Weise ihrer Anwendung hinzugefügt.

§. 1.a) Eine vollständige Decimalzahl wird im weiteren Sinne abgekürzt, indem man eine begrenzte Menge ihrer höchsten Stellen beibehält und die Ziffer in der letzten beibehaltenen Stelle entweder unverändert belässt oder um Eins erhöht. Die erhaltene unvollständige Decimalzahl ist im ersten Falle kleiner und im zweiten Falle grösser als die vollständige Decimalzahl; in beiden Fällen macht der Unterschied zwischen beiden noch nicht eine volle Decimaleinheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle aus und unterhalb dieser Stelle bleibt auch der Fehler, den man begeht, indem man die unvollständige Decimalzahl an Stelle der vollständigen treten lässt.

b) Gewöhnlich wird eine vollständige Decimalzahl im engeren Sinne abgekürzt, d. h. die Ziffer in der letzten beizubehaltenden Stelle bleibt unverändert, wenn in der rechts folgenden Stelle weniger als 5 steht, und wird um Eins erhöht, wenn in der rechts folgenden Stelle 5 oder mehr als 5 steht. Der Fehler, den man begeht, indem man diese unvollständige Decimalzahl an Stelle der vollständigen treten lässt, beträgt noch nicht eine halbe Decimaleinheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle.

Die Zahlelemente, welche in einer Aufgabe vorkommen, werden im Nachfolgenden, sofern nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, als im engeren Sinne verkürzt angesehen.

§. 2. Die erste (oder höchste) geltende Stelle einer Decimalzahl ist die erste (oder höchste) Stelle rechter Hand, in welcher eine von Null verschiedene Ziffer sich vorfindet. Jede links nachfolgende Stelle ohne Unterschied, ob sie durch Null oder durch eine von Null verschiedene Ziffer ausgefüllt wird, zählt als eine geltende Stelle mit.

§. 3. Um eine Summe, welche nicht mehrere als 10 Summanden hat, bis auf eine bestimmte Stelle auszurechnen, reicht es hin die einzelnen Summanden bis auf die nächst niedrigere Stelle abzukürzen und diese abgekürzten Summanden zu addiren. Wenn die Zahl der Summanden zwischen 10 und 100 ist, so muss jeder Summandus bis auf die zweitnächste niedrige Stelle abgekürzt werden.

Um z. B. die erste Regel zu beweisen sei n die Anzahl die der Summanden und $n \leqq 10$, ferner k der Exponent derjenigen Potenz von 10, welche die dekadische Einheit der niedrigsten von den geforderten Stellen ausdrückt: alsdann ist (§. 1b) der Fehler in jedem verkürzten Summanden höchstens $\frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}$ und mithin, auch wenn man den ungünstigsten Fall, d. h. die verkürzten Summanden ohne Ausnahme entweder zu gross oder zu klein haben sollte, der Fehler in der Summe höchstens $\frac{n}{2} \cdot 10^{k-1} \leqq \frac{10}{2} \cdot 10^{k-1}$ oder $\frac{1}{2} \cdot 10^{k}$.

In allen Fällen, wo die verkürzten Summanden theils zu gross, theils zu klein sind, wird die erzielte Genauigkeit noch grösser sein, weil ungleichartige Fehler in der Summe sich gegenseitig, mindestens theilweise, aufheben.

Vorstehende Regel gilt auch für die Berechnung algebraischer Summen.

Wenn die Verkürzung der Summanden im weiteren Sinne erfolgt, so ist schon 5 die höchste Anzahl der Summanden, bei welcher die Verkürzung nur bis auf die nächst niedrigere Stelle noch als zulässig erscheint.

Es soll z. B. die Summe 0,6279834 + 9,0513279 + 11,5285591 + 3,1790612 + 0,0035847 bis auf 3 Decimalbruchstellen richtig berechnet werden.

0,6279834	0,6280
9,0513279	9,0513
11,5285591	11,5286
3,1790612	3,1791
0,0035847	0,0036
24,3905163	24,3906
Genaue Summe.	Engere Verkürzung.

Fehler $< \frac{5}{2} \cdot 10^{-4}$ oder 0,00025

Weitere Verkürzung

0,6279	0,6280
9,0513	9,0514
11,5285	11,5286
3,1790	3,1791
0,0035	0,0036
14,3902	14,3907
Noch nicht um $5 \cdot 10^{-4}$ = 0,0005 zu klein	Noch nicht um $5 \cdot 10^{-4}$ = 0,0005 zu gross

Was die beiden letzten Summirungen anbetrifft, so sind bei der einen sämmtliche Summanden zu klein und bei der andern sämmtliche Summanden zu gross; zwischen den beiden erhaltenen Summen muss demgemäss die Summe der vollständigen Decimalzahlen liegen und in dieser letzteren müssen die den beiden ersten gemeinsamen Stellen vorkommen, d. h. alle drei Summen fangen mit 24,390 an.

Die Summe 0,679 + 109,5802938 + 2,38145 lässt sich, wenn alle drei Summanden unvollständige Decimalbrüche (Näherungswerthe) sind, höchstens bis auf 2 Decimalbruchstellen richtig berechnen: das Resultat ist: 112,640.

§. 4. Um die Differenz zweier Decimalzahlen bis auf eine bestimmte Stelle auszurechnen reicht es hin die Glieder der Differenz bis auf die nächst niedrigere Stelle abzukürzen und die Subtraction zwischen den abgekürzten Decimalzahlen auszuführen.

§. 5. Berechnung der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\cdots$$

bis auf eine bestimmte Anzahl von Decimalbruchstellen.

Das erste Glied durch 3 dividirt ergibt das zweite, das zweite durch 4 dividirt das dritte, das dritte durch 5 dividirt das vierte u. s. w. fort.

Indem man nun die auf einander folgenden Glieder z. B. auf 6 Decimalbruchstellen berechnet, erhält man für dieselben der Reihe nach:

$$\begin{array}{lll}
0{,}500000\ldots = 0{,}500 & & \\
0{,}166666\ldots < 0{,}166 & + & 0{,}001 \\
0{,}041666\ldots < 0{,}041 & + & 0{,}001 \\
0{,}008333\ldots < 0{,}008 & + & 0{,}001 \\
0{,}001388\ldots < 0{,}001 & + & 0{,}001 \\
0{,}000198\ldots < & & 0{,}001 \\
0{,}000024\ldots < & & 0{,}0001 \\
0{,}000002\ldots < & & 0{,}00001 \\
0{,}000000\ldots < & & 0{,}000001 \\
\ldots & & \\
\ldots & & \\
\ldots & &
\end{array}$$

Die Addition schon der 5 ersten Posten, unter einfacher Weglassung aller Stellen, die auf die dritte Decimalbruchstelle folgen, bringt die Zehntelstelle der gesuchten Summe mit Genauigkeit hervor: denn die geltenden Ziffern in jeder folgenden

Stelle sind zur Hervorbringung von Partialsummen, welche auf die Stelle der Zehntel von Einfluss sein könnten, nicht zahlreich genug.

Näher ergibt die Addition jener 5 verkürzten Posten die Zahl 0,716 und die Addition aller hierbei (sowohl in den 5 Posten selbst, wie in den darauf folgenden Posten) weggelassenen Stellen weniger, als die Zahl 0,0051111 .... ausmacht. Die genaue Summe der unendlichen Reihe liegt daher zwischen den Zahlen 0,716 und $0,716 + 0,0051111 \ldots$, oder 0,7211111 ....,welches nur möglich ist, wenn sie mit 0,7 anfängt.

Derjenige Näherungswerth, welcher mit der Summe der unendlichen Reihe in den beiden ersten Decimalbruchstellen übereinstimmt, wird erhalten, indem man in den sechs ersten Posten alle auf die vierte Decimalbruchstelle folgenden Ziffern einfach weglässt und die so verkürzten Posten addirt. Denn für die auf einander folgenden Glieder der unendlichen Reihe hat man

$$\begin{aligned}
0{,}500000 \ldots &= 0{,}5000 \\
0{,}166666 \ldots &< 0{,}1666 + 0{,}0001 \\
0{,}041666 \ldots &< 0{,}0416 + 0{,}0001 \\
0{,}008333 \ldots &< 0{,}0083 + 0{,}0001 \\
0{,}001388 \ldots &< 0{,}0013 + 0{,}0001 \\
0{,}000198 \ldots &< 0{,}0001 + 0{,}0001 \\
0{,}000024 \ldots &< 0{,}0000 + 0{,}0001 \\
0{,}000002 \ldots &< 0{,}0000 + 0{,}00001 \\
0{,}000000 \ldots &< 0{,}0000 + 0{,}000001 \\
&\;\;\ldots \\
&\;\;\ldots \\
&\;\;\ldots
\end{aligned}$$

Die Addition jener 6 verkürzten Posten rechter Hand ergibt den Näherungswerth $0{,}5000 + 0{,}1666 + 0{,}0416 + 0{,}0083 + 0{,}0013 + 0{,}0001 = 0{,}7179$ und die Addition aller hierbei weggelassenen Stellen weniger als die Zahl 0,0006111 .... ausmacht. Die genaue Summe der unendlichen Reihe liegt daher zwischen den Zahlen 0,7179 und $0{,}7179 + 0{,}0006111 \ldots$ oder 0,7185111 ...., welches nur möglich ist, wenn sie mit 0,71 anfängt.

Auf analoge Art kann man successive alle folgenden Ziffern der Reihensumme s erhalten und dem Calcul, der dieselbe zuletzt bis auf 4 Decimalbruchstellen genau liefert, durch Weglassung alles zum Beweise Erforderlichen die folgende übersichtliche Gestalt geben:

$$
\begin{array}{r|c|c|l l}
0{,}500 & 0 & 0 & 0\,\ldots & \\
0{,}166 & 6 & 6 & 6\,\ldots & \\
0{,}041 & 6 & 6 & 6\,\ldots & \\
0{,}008 & 3 & 3 & 3\,\ldots & \\
0{,}001 & 3 & 8 & 8\,\ldots & \\
\overline{0{,}716} & & & & s = 0{,}7\,\ldots\,. \\
 & 1 & 9 & 8\,\ldots & \\
0{,}717 & \overline{9} & & & s = 0{,}71\,\ldots\,. \\
 & & 2 & 4\,\ldots & \\
0{,}718 & 2 & \overline{4} & & s = 0{,}718\,\ldots \\
 & & & 2\,\ldots & \\
0{,}718 & 2 & 7 & \overline{7} & s = 0{,}7182\,.\,.
\end{array}
$$

Jede unendliche Reihe, deren Glieder nach irgend einem Gesetze fortschreitende bestimmte Zahlen sind, kann, wenn sie eine bestimmte Summe hat, d. h. convergent ist, in ähnlicher Weise summirt werden und wenn sie keine Summe hat, d. h. divergent ist, stellt die Methode wenigstens die Unmöglichkeit der Existenz einer Summe heraus.

§. 6. a) Die Regel der abgekürzten Multiplication.

Man multiplicire mit der höchsten geltenden Ziffer des Multiplicators (unteren Factors) den ganzen Multiplicandus (oberen Factor), bringe bei der Multiplication mit den folgenden Ziffern des Multiplicators die jedesmalige niedrigste Stelle des Multiplicandus in Wegfall und rechne zu jedem Partialproducte diejenige Zehnerzahl hinzu, welche dem Producte der betreffenden Multiplicatorziffer mit der zuletzt weggelassenen Ziffer des Multiplicandus zunächst liegt — hierbei zählt 5 als voller Zehner mit. Von dem Producte endlich sind soviele Decimalbruchstellen abzuschreiben, als die Anzahl der in beiden Factoren zur Verwendung gekommenen Decimalbruchstellen um die Anzahl der weggelassenen Stellen vermindert ausmacht. Sollte diese Differenz negativ ausfallen, so ist dem Producte linker Hand die entsprechende Anzahl von Nullen anzuhängen und dahinter das Komma zu setzen (oder zu denken).

Mitunter kommt bei Anwendung der Regel der abgekürzten Multiplication in dem einen oder anderen Falle eine Anzahl ganzer Stellen nicht zur Verwendung: diese Anzahl tritt alsdann in die Summe der Decimalbruchstellen beider Factoren als eine negative Zahl ein.

Etwa nicht zur Verwendung gekommene Decimalbruchstellen des unteren Factors sind auch bei der Bestimmung des Kommas nicht mit zu zählen.

In der Hauptsache besteht die abgekürzte Multiplication in der Abwerfung der niedrigsten Stellen desjenigen Productes, welches durch die gewöhnliche Multiplication erhalten wird: diese Stellen kommen aber für praktische Zwecke häufig gar nicht in Betracht und sind ausserdem, wenn die Factoren abgekürzte Decimalzahlen sind, in der Regel geradezu unrichtig. Die Methode hat also jedenfalls den Vortheil eine Menge völlig zweckloser Rechnungen zu beseitigen.

In den nachfolgenden Beispielen sind die succcssiven weggelassenen Stellen des Multiplicandus durch Punkte markirt und etwaige nicht zur Verwendung gelangte ganze Stellen in Klammer gesetzt.

```
 50,29769                                 50,29769
  6,5027                                   6,5027
 ----------                               ---------
 301 78614|        6 × 5029769             301 78614
  25 14884|5       5 × 502976....          25 14885     5 . 9
     10059|538     2 × 5029........           10059     2 . 6
      3520|8383    7 × 502..........           3520     7 . 9
 ----------------                          ---------
 327,07078|8763                            327,07078
                                     (5 + 4) — 4 Decimalbruchst.

   6502,7                                  6502,7
  5029769                                  502976(9)
 ---------                                ---------
  325135|           5 × 65027..325135
    1300|54         2 × 650......1300    2 . 2
     585|243        9 × 65........585    9 . 0
      45|5189       7 × 6..........46    7 . 5
       3|90162      6 < ............4    6 . 6
        |585243                     ------------
 ----------------                    32707000000
  327070|78876,3    (1 — 1) — 5 = — 5Decimalbruchst.
                         d. h. 5 anzuhängende Nullen.

  32978000                               32978(000)
   9806,78                               9806,78
 ------------                           -----------
  296802|                                296802
   26382|4                                26382
     197|868                                197
      23|0846                                22
       2|63824                                2
 ---------------------                  --------------
  323407|990840,00                       323405000000
                                     (— 3 + 2) — 5 = — 6
                                     6 anzuhängende Nullen.
```

b) Fehlergrenze des Productes der unvollständigen Decimalzahlen.

Als Fehlergrenze eines Näherungswerthes zu irgend einer gegebenen Zahlbestimmtheit kann man jede Zahl betrachten, welche im absoluten Sinne des Wortes die Differenz zwischen dem Näherungswerthe und der gegebenen Zahlbestimmtheit übersteigt. Wenn solche hinlänglich klein ist, so gestattet sie in jedem einzelnen Falle eine bequeme Schätzung des Fehlers, den man begeht, indem man an Stelle des genauen Werthes den Näherungswerth setzt.

Es seien a und b irgend zwei Decimalzahlen, welche Näherungswerrhe zu den gegebenen (der Einfachheit halber als absolut vorausgesetzten) Zahlbestimmtheiten A und B darstellen mögen; α und β seien die betreffenden Fehlergrenzen: alsdann bestehen die Ungleichheiten

$$a - \alpha < A < a + \alpha \text{ und } b - \beta < B < b + \beta.$$

Durch Multiplication derselben ergibt sich

$$ab - \alpha b - a\beta + \alpha\beta < AB < ab + \alpha b + a\beta + \alpha\beta$$

oder, wenn man erwägt, dass in der Praxis das Glied $\alpha\beta$ im Verhältniss zu den anderen hinlänglich klein ist um vernachlässigt werden zu dürfen, etwas einfacher

$$ab - \alpha b - a\beta < AB < ab + \alpha b + a\beta,$$

d. h. der Ausdruck $\alpha b + a\beta$ stellt eine Fehlergrenze des Productes ab dar. Bei Berechnung derselben kann man unbedenklich die Methode der abgekürzten Multiplication verwenden und in einzelnen Fällen, wo der eine Factor eine sehr kleine Fehlergrenze hat, sich auch auf das die andere Fehlergrenze befassende Glied der Summe $\alpha b + a\beta$ beschränken.

Es sei z. B. in dem ersten der unter a) berechneten Beispiele 0,00083 die Fehlergrenze des obersten und 0,0108 die Fehlergrenze des unteren Factors. Alsdann gestaltet sich die Berechnung der Fehlergrenze des Productes wie folgt:

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr@{\qquad}r}
\alpha & 0{,}000\dot{8}\dot{3} & \beta = & 0{,}0\dot{1}\dot{0}\dot{8} & 0{,}00540 \\
b & 6,\ 50(27) & a = & 50{,}29(769) & 0{,}543 \\
\hline
 & 498 & & 540 & 0{,}5484 \\
 & 42 & & 2 & \\
\alpha b = & \overline{0{,}00540} & & 1 & = \alpha b + a\beta \\
 & & a\beta = & \overline{0{,}543} &
\end{array}$$

Die gesuchte Fehlergrenze ist demgemäss nur wenig grösser als 0,5 und kann geradezu als dieser Zahl gleich angenommen werden; auch erkennt man, dass das Glied ab ohne Einfluss auf diesen Betrag ist.

Da die Fehlergrenze 0,5 ist, so können in keinem der beiden Producte

327,070788763 und 327,07078,

von denen das eine durch die gewöhnliche und das andere durch die abgekürzte Multiplication sich ergeben hat, die auf die Zehntelstelle folgenden Decimalbruchstellen als zuverlässig betrachtet werden. Wenn man die überflüssige, auf die Berechnung verwandte Mühe sparen will, so muss eine angemessene Verkürzung der beiden Factoren eintreten: der Factor mit der Fehlergrenze 0,00083 wird passend auf 3 und der Factor mit der Fehlergrenze 0,0108 auf 2 Decimalbruchstellen reducirt. Dies gibt, je nach der Stellung, welche die beiden verkürzten Factoren erhalten, die eine oder die andere der beiden nachfolgenden Rechnungen:

$$\begin{array}{r}
50{,}2\dot{9}\dot{8} \\
6{,}50 \\
\hline
301788 \\
25149 \\
\hline
326{,}937
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\dot{6}{,}\dot{5}\dot{0} \\
50{,}29(8) \\
\hline
3250 \\
13 \\
5 \\
\hline
326{,}8
\end{array}$$

Schon eine flüchtige Vergleichung beider Ansätze lässt es sofort heraustreten, dass durch den zweiten Ansatz, *bei welchem der Factor mit den wenigsten geltenden Stellen oben steht*, die Berechnung unzuverlässiger Stellen möglichst vermieden wird.

§. 7. *Der bei der abgekürzten Multiplication zweier vollständiger Decimalzahlen begangene Fehler beträgt noch nicht halb so viel Einheiten der niedrigsten Stelle, als die um Eins verminderte Anzahl der Partialproducte ausmacht.*

Der in dem Producte begangene Fehler ist die Summe der Fehler, welche in den einzelnen Partialproducten sich vorfinden, und da er immer auf Decimaleinheiten der niedrigsten Stelle bezogen wird, so kommt man ganz von selbst darauf, jene Benennung um der Einfachheit des Ausdrucks willen wegzulassen.

Demgemäss soll von jetzt ab, soweit es ohne Missverständniss geschehen kann, die Fehlergrenze einer unvollständigen Decimalzahl durch den Zähler des sie ausmachenden Bruches markirt werden; man schreibt also nur diejenige Zahl hin, welche die Menge der darin vorkommenden Decimaleinheiten der niedrigsten Stelle angibt. In diesem Sinne ist z. B. $\frac{1}{2}$ die Fehlergrenze jeder im engeren Sinne, 1 die Fehlergrenze jeder im weiteren Sinne abgekürzten Decimalzahl und, wenn das ganze Product sich aus α Partialproducten zusammensetzt, so ist zu erweisen, dass $\frac{\alpha-1}{2}$ die Fehlergrenze dieses Productes ist.

Das oberste Partialproduct, welches von der höchsten Stelle des Multiplicators herrührt, ist in allen Stellen zuverlässig richtig und hat die Fehlergrenze Null. Das nächstfolgende Partialproduct ist dem Bildungsgesetze seiner niedrigsten Ziffer gemäss mit Gewissheit eine im engeren Sinne verkürzte Decimalzahl und jedes folgende Partialproduct mit Sicherheit freilich nur eine im weiteren Sinne verkürzte Decimalzahl, so jedoch, dass man mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit die engere Verkürzung auch hier als vorhanden annehmen darf. Der Beweis hierfür lässt sich auf folgende Art führen.

Die der niedrigsten Stelle hinzuzufügende Zehneranzahl ist nach der im vorigen §. angegebenen Regel nur mit Berücksichtigung der letzten weggelassenen Stelle des Multiplicandus berechnet und ein etwa vorhandener Einfluss der vorletzten weggelassenen Stelle unbeachtet geblieben. Nun ist die in Betracht kommende Stelle des Multiplicators durch eine der Ziffern von 1 bis 9 und jede der beiden zuletzt gestrichenen Stellen des Multiplicandus durch eine der Ziffern von 0 bis 9 ausgefüllt. Mithin sind im Ganzen $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ verschiedene Fälle möglich und die Untersuchung derselben zeigt, dass darunter 164 sind, in denen das betreffende Partialproduct nur im weiteren Sinne, und 736, in denen es auch im engeren Sinne verkürzt ist. Die Wahrscheinlichkeit für den letzten Fall wird demgemäss durch den Bruch $\frac{736}{900}$ oder nahezu $\frac{9}{11}$ ausgedrückt.

Hiernach ist die Fehlergrenze des ersten Partialproductes 0, die Fehlergrenze des zweiten Partialproductes mit Gewissheit $\frac{1}{2}$

und auch jedes der $\alpha - 2$ folgenden Partialproducte hat mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit dieselbe Fehlergrenze $\frac{1}{2}$. Folglich ist $(\alpha - 1) . \frac{1}{2}$ oder $\frac{\alpha - 1}{2}$ die wahrscheinliche Fehlergrenze des totalen Productes.

Das Gewicht dieser Wahrscheinlichkeit wird wesentlich durch den Umstand erhöht, dass etwa vorhandene entgegengesetzte Fehler der Partialproducte im totalen Producte sich theilweise aufheben. Dies wirkt auf das totale Product gerade so, wie eine durchschnittliche Verkleinerung der als gleichartig vorausgesetzten Fehler in den Partialproducten und der Betrag der Verkleinerung wird vielfältig hinreichend sein, um die weitere Abkürzung eines oder des andern Partialproductes der Abkürzung desselben im engeren Sinne gleichwerthig zu machen.

Die besprochenen auf die einzelnen Partialproducte bezüglichen Wahrscheinlichkeiten gehen sehr nahe in Gewissheit über, wenn man die niedrigsten Stellen derselben mit Rücksicht auf den etwa vorhandenen Einfluss auch der vorletzten weggelassenen Ziffer berechnet. Jedoch ist die hierdurch in einigen wenigen Fällen vermiedene Ungenauigkeit in der Berechnung der zugehörigen Fehlergrenze von so geringer Erheblichkeit, dass es nicht lohnt sich darum für alle Fälle einen unverhältnissmässigen Aufwand an Rechenarbeit aufzulegen.

§. 8.a) Die (auf Decimaleinheiten der niedrigsten Stelle zu beziehende) Fehlergrenze eines durch abgekürzte Multiplication hervorgegangenen Productes setzt sich durch Addition zweier Fehlergrenzen zusammen, von denen die eine aus dem Verfahren der abgekürzten Multiplication und die andere aus den in den Factoren vorhandenen Fehlern hervorgeht. Die erste jener Fehlergrenzen ist die Hälfte der um Eins verminderten Anzahl von Partialproducten und die zweite die Summe der Producte, welche die Multiplication jedes Factors mit der Fehlergrenze des andern ergibt (cf. §. 7. und § 66.).

Selbstverständlich wird es bei Ausführung der Multiplication der Fehlergrenze jedes Factors mit dem andern Factor nur auf die höchste Ziffer oder die höchsten Ziffern dieses andern Factors ankommen und dies gilt umsomehr, wenn jede der beiden Fehlergrenzen unterhalb der Zahl 10 sich befindet. Diese Annahme ist aber im Allgemeinen immer statthaft: denn im Falle des Gegentheils ist ja doch eine passende Verkürzung des betreffenden Factors zur Vermeidung überflüssiger und fehlerhafter Rechnungen geboten.

b) Bei der abgekürzten Multiplication ist derjenige Factor, der die wenigsten geltenden Ziffern hat, als unterer oder oberer Factor zu verwenden, je nachdem er eine vollständige oder unvollständige Decimalzahl darstellt. Im letztern Falle ist es jedoch zweckmässig den untern Factor vor Ausführung der Multiplication soweit zu verkürzen, dass er eine geltende Stelle mehr als der obere Factor hat.

Behufs des Beweises nehme man an, dass jede der beiden Multiplicationen AB und BA in abgekürzter Weise vollzogen werde. Die geltenden Ziffern von A und B seien beziehungsweise $a, a', a'', \cdots\cdot$ und $b, b', b'', \cdots\cdot$, die Anzahl dieser Ziffern sei für die eine Zahl A gleich $\varkappa$ und für die andere Zahl gleich $\varkappa + \lambda$ (wo λ Eins oder eine die Einheit übersteigende Zahl ist) die Fehlergrenzen von A und B seien α und β, endlich sei $10^{-\mu}$ eine Decimaleinheit von der niedrigsten in dem Producte BA vorkommenden Ordnung: so muss $10^{-\mu-\lambda}$ eine Decimaleinheit von der niedrigsten in dem Producte AB vorkommenden Ordnung ausdrücken. Das Product AB wird also λ geltende Stellen mehr als das Product BA in sich fassen; bei der Berechnung des niedrigsten zugehörigen Partialproductes sind die $(\varkappa + \lambda) - (\varkappa - 1) = \lambda + 1$ höchsten geltenden Stellen des Multiplicandus mit der niedrigsten geltenden Ziffer des Multiplicators zu multipliciren. Hingegen bei Berechnung des Productes BA kommen nur die $\varkappa + 1$ ersten geltenden Ziffern des Multiplicators B zur Verwendung, die übrigen $(\varkappa + \lambda) - (\varkappa + 1) = \lambda - 1$ Ziffern desselben liefern im Allgemeinen der Null gleiche Partialproducte und erfolgt im Zusammenhange hiermit die Verkürzung der Decimalzahl B von $\varkappa + \lambda$ auf $\varkappa + 1$ geltende Stellen am passendsten vor Ausführung der Multiplication.

Dies vorausgesetzt findet man unter weitgehendster Berücksichtigung aller irgendwie in Betracht kommenden Theile der Fehlergrenze:

$$\text{Fgr. v. } BA = \frac{b\alpha + \frac{b'\alpha}{10} + \frac{b''\alpha}{100} + \frac{a\beta}{10^\lambda} + \frac{a'\beta}{10^{\lambda+1}} + \frac{1}{2}\varkappa}{10^\mu},$$

$$\text{Fgr. v. } AB = \frac{a\beta + \frac{a'\beta}{10} + (b\cdot 10^\lambda + b'\cdot 10^{\lambda-1} + b''\cdot 10^{\lambda-2} + \cdots + b^{(\lambda)})\alpha + \frac{1}{2}(\varkappa - 1)}{10^{\mu+\lambda}}$$

$$= \frac{b\alpha + \frac{b'\alpha}{10} + \frac{b''\alpha}{100} + \cdots + \frac{b^{(\lambda)}\alpha}{10^\lambda} + \frac{a\beta}{10^\lambda} + \frac{a'\beta}{10^{\lambda+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa - 1}{10^\lambda}}{10^\mu}$$

oder durch Vernachlässignng der von $\frac{b''\alpha}{100}$ bis zu $\frac{b^{(\lambda)}\alpha}{10^\lambda}$ folgenden Zählerglieder etwas einfacher

$$\text{Fgr. v. } AB = \frac{b\alpha + \frac{b'\alpha}{10} + \frac{b''\alpha}{100} + \frac{a\beta}{10^\lambda} + \frac{a'\beta}{10^{\lambda+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa - 1}{10^\lambda}}{10^\mu}$$

Beide Fehlergrenzen haben demgemäss einen gemeinschaftlichen Bestandtheil, der sich auf Decimaleinheiten von dem Range $10^{-\mu}$ bezieht und allein von der den Factoren anhaftenden Fehlerhaftigkeit herrührt: ihr nicht gemeinschaftlicher Bestandtheil bezieht sich für das eine Product AB auf Einheiten von der Ordnung $10^{-\mu-\lambda}$ und für das andere Product BA auf Einheiten von der Ordnung $10^{-\mu}$. Er ist also im ersten Falle wesentlich kleiner als im anderen und zwar um einen Betrag, der, sofern $\varkappa$ nicht über 10 hinausgeht, der Grösse $\frac{1}{2}\varkappa \cdot 10^{-\mu}$ nahe kommt. Aber gegenüber dem Vortheile der etwas grösseren Genauigkeit, welche das Product AB vor dem Producte BA voraus hat, fällt ungleich schwerer der Nachtheil ins Gewicht, der darin liegt, dass es λ durchaus unzuverlässige Stellen mehr hat als dieses und dass deren Berechnung als eine völlig überflüssige Arbeit zu betrachten ist. Folglich empfiehlt es sich im Allgemeinen dem Factor A, der die wenigsten geltenden Stellen hat, die obere und dem Factor B die untere Stelle zuzuweisen.

Hierbei ist aber die stillschweigende Voraussetzung gemacht. dass die Fehlergrenze α von Null verschieden ausfällt. Wenn nun α gleich Null ist oder sehr nahe an Null liegt, so erhält man etwas einfacher

$$\text{Fgr. von } BA = \frac{\frac{a\beta}{10^\lambda} + \frac{a'\beta}{10^{\lambda+1}} + \frac{1}{2}\varkappa}{10^\mu}$$

$$\text{Fgr. von } AB = \frac{a\beta + \frac{a'\beta}{10} + \frac{1}{2}(\varkappa - 1)}{10^{\mu+\lambda}},$$

d. h. die erstere Fehlergrenze bezieht sich auf Decimaleinheiten von dem Range $10^{-\mu}$ und die zweite auf Decimaleinheiten von dem Range $10^{-\mu-\lambda}$. Mithin ist alsdann die Berechnung des Productes AB der Berechnung des Productes BA entschieden vorzuziehen.

In dem allgemeinen Falle, wo α und β beide von Null verschieden ausfallen, erhält man eine oberflächliche Schätzung des Fehlers, wenn man bemerkt, dass die Ungleichheiten

$$b + \frac{b'}{10} + \frac{b''}{100} + \ldots < 10 \text{ und } a + \frac{a'}{10} + \frac{a''}{100} + \ldots < 10$$

Bestand haben: folglich ist

$$\text{Fgr. von } BA < \frac{10\alpha + \frac{\beta}{10^{\lambda-1}} + \frac{1}{2}\varkappa}{10^{\mu}}$$

oder, wenn man bedenkt, dass λ allgemein als der Einheit gleich angenommen werden darf und α, β, $\varkappa$ in der Praxis nicht leicht über 10 hinausgehen, noch stärker

$$\text{Fgr. von } BA < \frac{100 + 10 + 5}{10^{\mu}} \text{ oder } \frac{115}{10^{\mu}},$$

d. h. in keinem Falle kann die drittletzte Ziffer des verkürzt ausgerechneten Productes BA von dem genauen ihr zukommenden Werthe um mehr als eine Einheit abweichen.

Wenn A und B beide im weiteren Sinne verkürzt sind, so reducirt sich das Maximum der Fehlergrenze auf den 10ten Theil des vorigen Betrages, d. h. die vorletzte Ziffer des Productes kann um nicht mehr als eine Einheit von ihrem wahren Werthe abweichen.

Wenn A und B beide im engeren Sinne verkürzt sind, so reducirt sich die Fehlergrenze noch weiter und man erhält

$$\text{Fgr. von } BA = \frac{1}{2}\,\frac{a + \varkappa}{10^{\mu}}.$$

d. h. das erhaltene Product darf, so lange $a + \varkappa$ nicht über 10 hinausgeht, als im engeren Sinne verkürzt angesehen werden.

c) Soweit es nöthig ist, muss die abgekürzte Multiplication nach der vorigen Regel vorgenommen werden; in einzelnen Fällen ist es aber nicht zu vermeiden, dass beide Factoren gleich viele geltende Stellen haben und ist alsdann mit Ausnahme des Falles, wo der eine Factor zwischen den geltenden Stellen mehr Nullen hat als der andre, die Ordnung, in welcher man die Factoren multiplicirt, ohne Einfluss auf die Fehlergrenze.

d) Mitunter, wenn es sich um die Berechnung eines Productes bis auf eine bestimmte Anzahl Decimalbruchstellen handelt, sind beide Factoren zu verkürzen und ist die Wahl gegeben rücksichtlich der Stellung, welche denselben bei Ausführung der Multiplication zu ertheilen ist. Die Umstände, welche dafür sprechen einem bestimmten Factor alsdann die untere Stelle zuzuweisen, sind das etwaige Vorhandensein von Stellen zwischen den geltenden Ziffern, ein erheblicher Betrag der ihm zukommenden Fehlergrenze und ein niedriger geltender Werth seiner ersten geltenden Ziffer.

Beispiel 1. Es seien 2,346798 Kubikfuss in Kubikzoll zu verwandeln.

$$\begin{array}{r}
2{,}346\dot{7}\dot{9}\dot{8}\ \text{Kbf.}\\
1728\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
\hline
2346798\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
1642759\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
46936\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
18774\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
\hline
4045{,}267\ \text{Kbz.}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\dot{1}\dot{7}\dot{2}\dot{8}\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
2{,}3468\ \text{Kbf.}\\
\hline
3456\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
518\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
69\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
10\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
1\phantom{\ \text{Kbf.}}\\
\hline
4054\ \text{Kbz.}
\end{array}$$

$$\text{Fgr. } \frac{1\cdot\frac{1}{2}+2346\,.\,0+\frac{3}{2}}{10^3}=0{,}002 \qquad \text{Fgr. } 2\,.\,0+0\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=2$$

2) Es sei das Product der beiden abgekürzten Decimalzahlen 9,80767 und 8,20150927 zu berechnen.

$$\begin{array}{r}
\dot{9}{,}\dot{8}\dot{0}\dot{7}\dot{6}\dot{7}\\
8{,}201509\\
\hline
7846136\\
196153\\
981\\
490\\
8\\
\hline
80{,}43768
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
8{,}2\dot{0}\dot{1}\dot{5}\dot{0}\dot{9}\\
9{,}80767\\
\hline
73813581\\
6561207\\
57411\\
4921\\
574\\
\hline
80{,}437694
\end{array}$$

$$\text{Fgr. } \frac{8\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2}}{100000} = \frac{6}{100000} \qquad \text{Fgr. } \frac{9\cdot\frac{1}{2}+82\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1000000} = \text{circa } \frac{5}{100000}$$

$$\begin{array}{r} \dot{8},\dot{2}\dot{0}\dot{1}\dot{5}1 \\ 9,80767 \\ \hline 7381359 \\ 656121 \\ 5741 \\ 492 \\ 57 \\ \hline 80,43770 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{9},\dot{8}\dot{0}\dot{7}\dot{6}7 \\ 8,20151 \\ \hline 7846136 \\ 196153 \\ 981 \\ 490 \\ 10 \\ \hline 80,43770 \end{array}$$

$$\text{Fgr. } \frac{9 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2}}{100000} = \frac{10,5}{100000}$$

3) 78,342956 Frd'or — $83^{72}/_{95}$ Thlr. auf ganze Pfennige genau zu berechnen (1 Frd'or = 5 Thlr 20 Sgr.).

$$1 \text{ Pf.} = \frac{1 \text{ Frd'or}}{2040} > \frac{1 \text{ Frd'or}}{10000}, \; 1 \text{ Pf.} = \frac{1 \text{ Thlr.}}{360} > \frac{1 \text{ Thlr.}}{1000};$$

folglich ist die Genauigkeit bis auf Zehntausendstel eines Frd'ors und bis auf Tausendstel eines Thalers für den verlangten Zweck ausreichend und um diese Genauigkeit zu verbürgen ist es zweckmässig eine Stelle weiter zu rechnen.

$$\begin{array}{rrll} 17 \times & 78,34296 & \text{Frd'or} & \\ & 5484007 & & \\ \hline 3 \text{ in} & 1331,8303; & \text{Fgr. } 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 & \\ & 443,9434 & \text{Thlr.} & \text{Fgr. } 1 : 3 = \frac{1}{3} \\ 83\frac{72}{95} = & 83,7579 & ,, & ,, \; \frac{1}{2} \\ \hline & 360,1855 & \text{Thlr.} & ,, \; \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1. \\ & = 360 & \text{Thlr. 5 Sgr. 7 Pf.} & \\ 30 \times & 0,1855 & \text{Thlr.} & \text{Fgr. } 1 \\ & 5,565 & \text{Sgr.} & ,, \; 3 \\ 12 \times & 0,565 & ,, & ,, \; 3 \\ & 113 & & \\ \hline & 6,78 & \text{Pf.} & \text{Fgr. } 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} < 4. \end{array}$$

Der Fehler des Endresultates macht noch nicht 0,04 Pf. aus und die genaue Anzahl der Pfennige liegt zwischen den Grenzen 6,78 + 0,04 und 6,78 — 0,04 oder 6,82 und 6,74.

4) Das Product $0,046709825 \times 0,009387251$ bis auf 6 Decimalbruchstellen zu berechnen.

Die Multiplication vorläufig unter Verkürzung auf die ersten geltenden Stellen ausgeführt, wodurch $0,05 \times 0,009 = 0,00045$ erhalten wird, lässt erkennen, dass das Product in den drei ersten Decimalbruchstellen mit Nullen beginnt. Mithin hat man nur die drei folgenden geltenden Stellen zu ermitteln, und um diese mit einiger Zuverlässigkeit zu erhalten wird man bis auf 4 geltende Stellen rechnen.*) Nun erhält zufolge der besonderen Beschaffenheit der Ziffern, welche in der ersten geltenden Stelle beider Factoren sich vorfinden, das Product schon 4 geltende Stellen, wenn der obere Factor deren nur drei hat: also ist der obere Factor auf 3 und der untere auf 4 geltende Stellen zu verkürzen.

$$\begin{array}{r} 0{,}00\dot{9}\dot{3}\dot{9} \\ 0{,}04671 \\ \hline 3756 \\ 563 \\ 65 \\ 1 \\ \hline 0{,}0004385 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0\dot{4}\dot{6}\dot{7} \\ 0{,}009387 \\ \hline 4203 \\ 140 \\ 37 \\ 4 \\ \hline 0{,}0004383 \end{array}$$

$$\text{Fgr. } 4 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 3\tfrac{1}{2} \qquad \text{Fgr. } 9 \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 6$$

Die Fehlergrenze des ersten Productes lässt erkennen, dass das genaue Product zwischen den Zahlen 0,0004385 — 0,00000035 und 0,0004385 + 0,00000035 oder zwischen 0,00043815 und 0,00043885 liegt: also ist es mit Gewissheit gleich 0,000438 . . .

5) Der Flächeninhalt eines Kreises, dessen Radius $9^5/_{37}$ Decimeter beträgt, soll bis auf Quadratcentimeter genau berechnet werden. Resultat 262,17 Quadratdecimeter.

$$9^5/_{37} = 9{,}135135\ldots;\ \pi = 3{,}141592653\ldots$$

Der Kreisinhalt vorläufig unter Verkürzung der Zahlelemente auf deren höchste geltende Stelle berechnet ist $10^2 \,.\, 3 = 300$ Quadratdecimeter. Das Endresultat in Quadratdecimetern ausgedrückt hat also drei ganze Stellen. Dazu müssen aber, wenn auch die Quadratcentimeter richtig herauskommen sollen, noch die beiden ersten Decimalbruchstellen hinzutreten. Diese zwei Decimalbruchstellen und jene zwei ganzen Stellen machen zusammen 5 geltende Stellen aus, für deren Zuverlässigkeit man einige Gewähr hat, wenn man auf eine geltende Stelle mehr, also auf 6 geltende Stellen rechnet. Hierzu ist, da die ersten geltenden Ziffern beider Factoren ein zweiziffriges Product hervorbringen, die Verkürzung des oberen Factors auf 5 geltende Stellen hinreichend.

*) Kürzer: Die höchste geltende Ziffer nimmt die vierte Stelle nach dem Komma und die niedrigste geltende Ziffer die siebente Stelle nach dem Komma ein. Von der vierten Stelle nach dem Komma bis zur siebenten Stelle nach dem Komma sind vier Stellen: also ist mit vier geltenden Stellen zu rechnen.

$$\begin{array}{r l} \dot{9},\dot{1}\dot{3}\dot{5}\dot{1} & \text{Fgr. } 0{,}35 \\ 3{,}14159 & \quad „ \quad 0{,}26 \\ \hline 274053 & \\ 9135 & \\ 3654 & \\ 91 & \\ 46 & \\ 8 & \\ \hline 28{,}6987 & \end{array} \qquad \begin{array}{r l} \dot{9},\dot{1}\dot{3}\dot{5}\dot{1} & \text{Fgr. } 0{,}35 \\ 28{,}6987 & \quad „ \quad 3{,}8 \\ \hline 182702 & \\ 73081 & \\ 5481 & \\ 822 & \\ 73 & \\ 6 & \\ \hline 262{,}165 & \end{array}$$

$$\text{Fgr. } 3 \,.\, 0{,}35 + \frac{9 \,.\, 0{,}26}{10} + \frac{5}{2} = 3{,}8 \qquad \text{Fgr. } 2 \,.\, 0{,}35 + \frac{9 \,.\, 3{,}8}{10} + \frac{5}{2} = 6{,}6$$

Die 5. geltende Stelle des Productes erscheint nicht ganz sicher gestellt, da sein genauer Werth zwischen den Zahlen $262{,}165 - 0{,}0066 = 262{,}1684$ und $262{,}165 + 0{,}0066 = 262{,}1716$ enthalten sein muss und hiernach ebensowohl 262,16 . . . . als 262,17 . . . . sein könnte: indessen erhellt doch, dass es im engeren Sinne bis auf 5 geltende Stellen abgekürzt jedenfalls die Zahl 262,17 ergibt.

6) Die Potenz $0{,}56132789^5$ bis auf 3 Decimalbruchstellen zu berechnen.

$0{,}6^5 = 0{,}07 \ldots.$ Folglich bekommt man die gesuchte Potenz bis auf 3 Decimalbruchstellen richtig, wenn man sie auf 2 geltende Stellen richtig hat, und rechnet hiernach auf eine geltende Stelle mehr, d. h. auf 3 geltende Stellen.

$$\begin{array}{r l} 0{,}\dot{5}\dot{6}\dot{1} & \text{Fgr. } 0{,}3 \\ 0{,}5613 & \quad „ \quad 0{,}3 \\ \hline 2805 & \\ 337 & \\ 6 & \\ 2 & \\ \hline 0{,}3150 & \end{array} \qquad \begin{array}{r l} 0{,}\dot{5}\dot{6}\dot{1} & \text{Fgr. } 0{,}3 \\ 0{,}3150 & \quad „ \quad 3 \\ \hline 1683 & \\ 56 & \\ 28 & \\ \hline 0{,}1767 & \end{array}$$

$$\text{Fgr. } 5 \,.\, 0{,}3 + \frac{3}{2} = 3 \qquad \text{Fgr. } 3 \,.\, 0{,}3 + \frac{5 \,.\, 3}{10} + \frac{3}{2} = 3{,}4$$

$$\begin{array}{r l} 0{,}\dot{3}\dot{1}\dot{5} & \text{Fgr. } 0{,}3 \\ 0{,}1767 & \quad „ \quad 3{,}4 \\ \hline 315 & \\ 221 & \\ 19 & \\ 2 & \\ \hline 0{,}0557 & \end{array}$$

$$\text{Fgr. } 1 \,.\, 0{,}3 + \frac{3 \,.\, 3{,}4}{10} + \frac{3}{2} = 2{,}8$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0057 \\ 28 \\ \hline 0{,}05598 \text{ zu gross} \\ 0{,}05542 \text{ zu klein} \end{array} \Big\} \text{ also das Product } 0{,}055 \ldots.$$

6) Die Potenz $38{,}756098^5$ bis auf die Stelle der Zehntausende genau zu berechnen.

Die Potenz $40^5 = 102400000$ hat 9 ganze Stellen und die Potenz 38^5 ersichtlich eine weniger, also nur 8 ganze Stellen: die ersten vier Stellen hiervon sind für den verlangten Zweck ausreichend. Also wird man bis auf 5 geltende Stellen rechnen, Nun gibt die Multiplication der Zahlen $38{,}76 \times 38{,}756$ allerdings ein 5stelliges Product, nämlich 15021 mit der Fehlergrenze $3 \times 0{,}4 + \frac{4}{2} = 3{,}2$. Aber die Fehlergrenze für die dritte Potenz $38{,}756^3 = 15021 \times 38{,}756$ würde alsdann zu bedeutend ausfallen und empfiehlt es sich diesen Uebelstand zu vermeiden, indem man die zweite Potenz lieber gleich auf 6 geltende Stellen berechnet.

$$\begin{array}{r} 38{,}756 \\ 38{,}7561 \\ \hline 116268 \\ 31005 \\ 2713 \\ 194 \\ 23 \\ \hline 1502{,}03 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Fgr. } 0{,}1 \\ \text{„} \quad 0{,}02 \end{array}$$

$$\text{Fgr. } 3 \,.\, 0{,}1 + \frac{4}{2} = 2{,}3$$

$$\begin{array}{r} 38{,}756 \\ 1502{,}03 \\ \hline 38756 \\ 19378 \\ 77 \\ 1 \\ \hline 58212 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Fgr. } 0{,}1 \\ \text{„} \quad 2{,}3 \end{array}$$

$$\text{Fgr. } 1 \,.\, 0{,}1 + \frac{3 \,.\, 2{,}3}{10} + \frac{3}{2} = 2{,}3$$

$$\begin{array}{r} 58212 \\ 1502{,}03 \\ \hline 58212 \\ 29106 \\ 116 \\ 2 \\ \hline 87436000 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Fgr. } 2{,}3 \\ \qquad 2{,}3 \end{array}$$

$$\text{Fgr. } 1 \,.\, 2{,}3 + \frac{5 \,.\, 2{,}3}{10} + \frac{5 \,.\, 2{,}3}{10} + \frac{3}{2} \text{ circa } 6$$

$$\begin{array}{r} 87436000 \\ 6 \\ \hline 87442000 \text{ zu gross} \\ 87430000 \text{ zu klein} \end{array} \Big\} \text{ also } 874 \ldots\ldots \text{ sicher.}$$

Die Ziffer in der Stelle der Zehntausende ist hiernach noch nicht genau festgestellt: sie kann 3 und kann auch 4 sein. Doch hat das Resultat 8743 .... die grössere Wahrscheinlichkeit für sich. Will man Gewissheit haben, so muss die ganze Rechnung noch einmal und zwar auf eine geltende Stelle mehr durchgeführt werden.

§. 9. Fehlergrenze des Quotienten zweier unvollständiger Decimalzahlen.

a) Der Dividendus und Divisor seien beziehungsweise a und b mit den Fehlergrenzen α und β, von denen man im Allgemeinen annehmen darf, dass sie nicht über 9 hinausgehen; die zugehörigen vollständigen Decimalzahlen seien A und B, eine Decimaleinheit der niedrigsten Stelle des Dividendus $10^{-\varkappa}$ und $10^{-\lambda}$ eine Decimaleinheit der niedrigsten Stelle des Divisors. Alsdann ist

$$a + \frac{\alpha}{10^{\varkappa}} > A > a - \frac{\alpha}{10^{\varkappa}},$$

$$b - \frac{\beta}{10^{\lambda}} < B < b + \frac{\beta}{10^{\lambda}},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{a} \cdot 10^{-\varkappa}}{1 - \frac{\beta}{b} \cdot 10^{-\lambda}} > \frac{A}{B} > \frac{a}{b} \cdot \frac{1 - \frac{\alpha}{a} \cdot 10^{-\varkappa}}{1 + \frac{\beta}{b} \cdot 10^{-\lambda}}.$$

Nun ist aber, sofern die Fehlergrenze α und β im Vergleiche zu a und b hinlänglich klein sind, nahezu

$$\frac{1}{1 - \frac{\beta}{b} \cdot 10^{-\lambda}} = 1 + \frac{\beta}{b} \cdot 10^{-\lambda},$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\beta}{b} \cdot 10^{-\lambda}} = 1 - \frac{\beta}{b} \cdot 10^{-\lambda}.$$

Folglich erhält man

$$\frac{a}{b}\left(1 + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{1}{10^{\varkappa}}\right)\left(1 + \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1}{10^{\lambda}}\right) > \frac{A}{B} > \frac{a}{b}\left(1 - \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{1}{10^{\varkappa}}\right)\left(1 - \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1}{10^{\lambda}}\right)$$

oder, wenn man die auf beiden Seiten des Mittelgliedes $\frac{A}{B}$ angezeigten Multiplicationen ausführt nnd das jedesmalige letzte Glied, welches das Product $\frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1}{10^{\varkappa}} \cdot \frac{1}{10^{\lambda}}$ befasst, vernachlässigt:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{1}{10^{\varkappa}} + \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1}{10^{\lambda}}\right) > \frac{A}{B} > \frac{a}{b} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{1}{10^{\varkappa}} - \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1}{10^{\lambda}}\right)$$

Setzt man endlich der Kürze halber

$$Q = \frac{a}{b},$$

so folgt hieraus, dass der Ausdruck

$$\frac{a}{b}\left(\frac{\alpha}{a}\cdot\frac{1}{10^{\varkappa}} + \frac{\beta}{b}\cdot\frac{1}{10^{\lambda}}\right) = \frac{\frac{\alpha}{10^{\varkappa}} + \frac{\beta}{10^{\lambda}}Q}{b}$$

die Fehlergrenze des Quotienten Q darstellt. Dieselbe wird mithin gefunden, indem man die Fehlergrenze des Dividendus und das Product des Quotienten mit der Fehlergrenze des Divisors addirt und diese Summe durch den Divisor dividirt. Jede Fehlergrenze ist hierbei auf Decimaleinheiten der niedrigsten Stellen, welche die zugehörige Zahl hat, zu beziehen und die angezeigte Division nur bis auf die erste geltende Stelle auszuführen.

b) Bei der Division unvollständiger Decimalzahlen kommt es wesentlich auf die Anzahl der zuverlässigen geltenden Stellen des Quotienten an. Nun ist diese unabhängig von der Stellung des Kommas im Dividendus und Divisor: also darf man nur, um die Untersuchung zu vereinfachen, das Komma hinter der niedrigsten Ziffer sowohl des Dividendus, als des Divisors annehmen, wodurch

$$\text{Fgr. von } Q = \frac{\alpha + Q\beta}{b}$$

erhalten wird.

c) Es sei zunächst $a > b$, die Anzahl der geltenden Stellen von b gleich λ, die höchste derselben b', und die durch die zwei höchsten Stellen ausgedrückte Zahl b''. Ferner möge μ die Anzahl der geltenden Stellen des Quotienten vor dem Komma bezeichnen, so ist der Dividendus entweder eine $\mu + \lambda$ oder eine $\mu + \lambda + 1$stellige Zahl und, da $\mu \geqq 1$ ist, darf der Ausdruck

$$\frac{\alpha + Q\beta}{b''.10^{\lambda-2}} < \frac{\alpha + 10^{\mu}\beta}{b''.10^{\lambda-2}}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{10^{\mu}} + \beta}{\beta''.10^{\lambda-2-\mu}} < \frac{10}{b''.10^{\lambda-\mu-2}} < \frac{1}{b'.10^{\lambda+\mu-2}} < \frac{1}{10^{\lambda-\mu-2}}$$

als eine, freilich ziemlich hoch gegriffene, Fehlergrenze des Quotienten Q betrachtet werden. Also sind auch unter den denkbar ungünstigsten Umständen die $\lambda - \mu - 2$ ersten Decimalbruchstellen von Q zuverlässig. Dazu kommen noch die μ Stellen vor dem Komma: der Quotient Q ist demgemäss bis auf

$\lambda - \mu - 2 + \mu = \lambda - 2$ geltende Stellen mit Gewissheit genau, d. h. wenn die Rechnung an dieser Stelle abgebrochen wird, so weicht der Quotient noch nicht um eine volle Decimaleinheit derselben von dem genauen Werthe ab. Nun ist die Zahl $\lambda - 2$ blos abhängig von der Zahl λ der geltenden Stellen des Divisors und unabhängig von der Zahl μ oder $\mu + 1$, welche angibt, wieviele geltende Stellen der Dividendus mehr hat als der Divisor. Folglich ist es angemessen den Dividendus vor Beginn der Division soweit zu verkürzen, dass der ganze verkürzte Dividendus bei Berechnung der ersten geltenden Ziffer des Quotienten als erster Partialdividendus erscheint. Denn wenn man auch mehrere oder alle überschüssige Ziffern desselben benutzte, so erzielte man dadurch keinen wesentlich genaueren Quotienten.

d) Es sei zweitens $a < b$; ferner möge die höchste geltende Ziffer des Quotienten die μte Stelle hinter dem Komma einnehmen und mit den λ ersten Ziffern des Divisors multiplicirt ein von a abziehbares Product hervorbringen: alsdann hat der Divisor $\lambda + \mu$ und der Dividendus λ oder $\lambda + 1$ geltende Stellen und eine Fehlergrenze des Quotienten Q ergibt sich, wenn $\mu > 1$ ist, wenigstens für diejenigen Werthe von α und β, die unterhalb der Zahl 10 sich befinden, und wenn $\mu = 1$ ist, für alle Werthe von α und β, deren Summe die Zahl 10 noch nicht erreicht, gleich dem Ausdrucke

$$\frac{\alpha + Q\beta}{b''.\,10^{\lambda+\mu-2}} < \frac{\alpha + 10^{-(\mu-1)}\beta}{b''\cdot 10^{\lambda+\mu-2}}$$

$$= \frac{\alpha + \frac{\beta}{10^{\mu-1}}}{b''\cdot 10^{\lambda+\mu-2}} < \frac{10}{b''\cdot 10^{\lambda+\mu-2}} < \frac{1}{b'\cdot 10^{\lambda+\mu-2}} < \frac{1}{10^{\lambda+\mu-2}}$$

Also dürfen selbst in dem ungünstigsten Falle, sofern α und β zusammen nicht mehr als 10 betragen, die $\lambda + \mu - 2$ erste Decimalbruchstellen als genau gelten. Nun sind darunter die $\mu - 1$ ersten mit Nullen besetzt: also bleiben nur $(\lambda + \mu - 2) - (\mu - 1) = \lambda - 1$ geltende Stellen übrig, welche zuverlässig sind. Die Zahl $\lambda - 1$ ist aber blos abhängig von der Zahl der geltenden Stellen des Dividendus und unabhängig von der Zahl μ der überschiessenden Stellen des Divisors. Folglich ist es angemessen vor Beginn der Rechnung alle solche Stellen bis auf die höchste abzuwerfen. Denn wenn man auch die übrigen beibehalten wollte, der Quotient würde dadurch nicht um ein Wesentliches genauer, wohl aber die Rechenarbeit erheblich vergrössert werden.

e) In jedem der beiden unter c) und d) betrachteten Fälle wird, wenn die Fehlergrenzen α und β sich unterhalb der Einheit befinden, die Zahl der sicheren Stellen um eine vermehrt, so dass sie, wenn $a > b$ ist, auf $\lambda - 1$ und, wenn $a < b'$ ist, auf λ Stellen steigt. Wenn der Dividendus und Divisor aber beide im engeren Sinne verkürzte Decimalzahlen sind, so wird man in beiden Fällen bis auf λ Stellen rechnen können mit der überwiegendsten Wahrscheinlichkeit dafür, dass der begangene Fehler noch nicht eine Decimaleinheit der niedrigsten Stelle des Quotienten erreicht.

Man betrachte beispielsweise den Quotienten

$$\frac{15}{82} : \frac{16}{41} = \frac{15}{32}$$

oder

$$0{,}182926\ 82926\ 82926\ \ldots : 0{,}39024\ 39024\ \ldots = 0{,}46875.$$

Quot. 0,468	0,46879	0,46874
Dvs. 3909 Fgr. 7	3902 Fgr. 0,4	39024 Fgr. 0,4
Dvd. 1829,2 ... 0,6	1829,2 0,6	1829,2 0,6
15636	15608	156096
26560	26840	268240
23454	23412	234144
31060	34280	340960
31272	31216	312192
	30640	287680
	27314	273168
	33260	145120
	35118	156096
	— 1858	— 10976

Für alle drei Exempel ist $\lambda = 4$ und in Uebereinstimmung mit der Theorie sind die Resultate beziehungsweise in den zwei, drei, vier ersten Stellen richtig — ja sie sind noch für eine weitere Stelle zuverlässig, wie es sein muss —, da sich die Fehlergrenzen genauer, wie folgt, ergeben:

$$\frac{0{,}6 + 0{,}47 \,.\, 7}{3909} < \frac{3{,}9}{3909} < 0{,}001,$$

$$\frac{0{,}6 + 0{,}47 \,.\, 0{,}4}{3902} < \frac{0{,}79}{3902} \text{ circa } 0{,}0002.$$

$$\frac{0{,}6 + 0{,}47 \,.\, 0{,}4}{39024} < \frac{0{,}79}{39024} \text{ circa } 0{,}00002.$$

In Betreff des ersten Exempels verdient bemerkt zu werden, dass man den Dividendus um eine beliebige der Zahlen

$$\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \ldots \frac{14}{10}$$

vermehren oder vermindern kann, ohne dass die drei ersten Stellen des Quotienten sich änderten. Hieraus erhellt am deutlichsten die völlige Einflusslosigkeit eines auf mehrere Stellen genauen Dividendus. Ebenso deutlich sieht man in allen dreien Exempeln, dass nur die Anfangsstellen des Divisors für die letzten Stellen des Quotienten von Bedeutung sind. Dies alles zusammen führt auf eine Methode der abgekürzten Division, welche der Methode der abgekürzten Multiplication durchaus analog ist.

§. 10. Methode der verkürzten Division.

a) Das Verfahren der abgekürzten Division besteht darin, dass man, statt dem Reste die nächstfolgende Ziffer des Dividendus (ev. Null) anzuhängen, den Divisor durch Weglassung der Ziffer in seiner niedrigsten Stelle verkürzt: die erhaltene Ziffer des Quotienten wird mit dem stehen gebliebenen Theile des Divisors multiplicirt und diejenige Zehneranzahl hinzugerechnet, welche dem Producte jener Ziffer des Quotienten mit der letzten weggelassenen Ziffer des Divisors zunächst liegt.

Die um Eins veränderte Anzahl der geltenden Stellen des Divisors gibt an, wie viele geltende Ziffern des Quotienten durch die verkürzte Division erhalten werden.

b) Wenn Divisor und Dividendus beide vollständige Decimalzahlen sind, so ist der Beginn der abgekürzten Division durch die Anzahl der geltenden Stellen, auf welche man rechnen will, bedingt. Wenn nun der Divisor eine vollständige Decimalzahl ist und weniger geltende Stellen als der Dividendus hat, so muss die abgekürzte Division spätestens eintreten, nachdem die letzte Stelle des Dividendus heruntergezogen ist; wenn der Divisor hingegen ebensoviele oder mehrere geltende Stellen als der Dividendus hat, so hat man den Divisor insoweit zu verkürzen, dass der Dividendus nach Anhängung einer Null als erster vollständiger Partialdividendus erscheint (cf. §. 9 d).

c) Wenn Divisor und Dividendus beide abgekürzte Decimalzahlen sind und der Dividendus mehr geltende Stellen hat als der Divisor, so ist der Dividendus insoweit zu verkürzen, dass der verkürzte Dividendus (bei Berechnung der ersten geltenden Ziffer des Quotienten) als vollständiger erster Partialdividendus zur Verwendung gelangt (cf. §. 9c).

Wenn hingegen der Divisor ebensoviele oder mehrere geltende Stellen als der Dividendus hat, so ist der Divisor (wenn nöthig) soweit zu verkürzen, dass der Dividendus nach Anhängung einer Null als vollständiger erster Partialdividendus zur Verwendung gelangt (cf. §. 9d).

Die beiden Divisionen

0,1 82926 82926 . . . . : 0,3902

0,18292 : 0,39024 39024 . . . .

im vorigen §. werden hiernach in folgender Weise abgekürzt ausgeführt:

Quot.	0,4688		0,46874		0,46877	
Dvs.	3902	Fgr. 0,4	39024	Fgr. 0,4	39024	Fgr. 0,4
Dvd.	1829,3	„ 0,3	18292,0	„ 7	18293,0	„ 3
	15608		156096		156096	
	2685		26824		26834	
	2341		23414		23414	
	344		3410		3420	
	312		3122		3122	
	32		288		298	
	31		273		273	
	1		15		25	
			16		27	
			— 1		— 2	

Die erhaltenen Resultate kommen dem genauen Werthe des Quotienten ebensonahe wie die Quotienten, welche von den beiden vollständigen mit verkürzten Zahlen ausgeführten Divisionen herrühren.

Die meisten Schriftsteller, wenn sie überhaupt die beiden unter c) erörterten Fälle unterscheiden, hängen in dem daselbst zuletzt betrachteten Falle dem Dividendus keine Null an, sondern verkürzen den Divisor gleich bei Beginn der Rechnung um eine Stelle: sie geben dadurch in den meisten Fällen eine zuverlässige Stelle des Quotienten auf. So würde z. B. R. Baltzer (Elemente der Mathematik I. S. 53) das letzte Beispiel in folgender Art rechnen:

$$
\begin{array}{l}
18292 : 3\dot{9}\dot{0}\dot{2}\dot{4} = 0{,}468 \\
\underline{15610} \\
2682 \\
\underline{2341} \\
341 \\
\underline{312} \\
29 \\
\underline{27} \\
2
\end{array}
$$

T. Müller, der die verkürzte Rechnung ausschliesslich mit im engeren Sinne verkürzten Decimalzahlen betrachtet, was für die Praxis nicht ausreicht (Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik pg. 134 und 135) schreibt das nachfolgende Verfahren vor:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{18293 : 39024 = 0{,}46876} \\
\underline{156096} & \underline{1 \text{ (niedrigste Decimaleinheit des Dividendus)}} \\
268340 & 1{,}46876 : 39024 = \\
\underline{234144} & \quad 0{,}00004 \\
341960 & \quad \underline{0{,}46876} \\
\underline{312192} & \quad 0{,}46880 \text{ zu gross} \\
297680 & \quad 0{,}46872 \text{ zu klein} \\
\underline{273168} & \quad \text{also } 0{,}468 \text{ sicher} \\
245120 & \\
\underline{234144} & \\
10976 &
\end{array}
$$

Der Fehler ist nach dem Verfahren Baltzers erheblich grösser als bei dem obigen; auch das Müllersche Verfahren gibt ein weniger genaues Resultat und mit erheblich grösserem Rechenaufwande.

§. 11. Eine Fehlergrenze bei der abgekürzten Division zweier vollständiger Decimalzahlen wird gefunden, indem man die Summe des ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen genommenen Restes und der halben Anzahl der verkürzten Partialproducte auf Decimaleinheiten der niedrigsten beibehaltenen Stelle des Dividendus bezieht und diese Zahl durch den Divisor dividirt.

Der Grund erhellt sogleich, wenn man bemerkt, dass jedes verkürzte Partialproduct im Allgemeinen (cf. §. 7.) die Fehlergrenze $\frac{1}{2}$ hat und dass folglich der zuletzt übrig bleibende Rest noch nicht um die halbe Anzahl der vorhandenen Partialproducte von dem genauen bei der vollständigen Division sich ergebenden Reste differiren kann.

Beispiel. $\frac{37}{128} = 0{,}2890625$; $\frac{128}{37} = 3{,}459\ 459\ 459 \ldots.$ Folglich ist mit Genauigkeit $1 : 0{,}2890625 = 3{,}459459459 \ldots.$ Hingegen die verkürzte Division ergibt:

$$\begin{array}{lr}
\text{Quot.} & 3{,}459459 \\
\text{Dvs.} & \dot{2}\dot{8}\dot{9}\dot{0}\dot{6}\dot{2}5 \\
\hline
\text{Dvd.} & 10000000, \\
 & 8671875 \\
\hline
 & 1328125 \\
 & 1156250 \\
\hline
 & 171875 \\
 & 144531 \\
\hline
 & 27344 \\
 & 26015 \\
\hline
 & 1329 \\
 & 1156 \\
\hline
 & 173 \\
 & 145 \\
\hline
 & 28 \\
 & 25 \\
\hline
 & 3
\end{array}$$

$$\text{Fgr.}\ \frac{6 \cdot \frac{1}{2} + 3}{1} : 2890625$$

$$\begin{array}{rl}
= 0{,}000002 & \\
3{,}459459 & \\
\hline
3{,}459461 & \text{zu gross} \\
3{,}459457 & \text{zu klein} \\
3{,}45946 & \text{zuverlässig} \\
 & \text{(in engerer Verkürzung)}
\end{array}$$

Uebrigens stimmt das gefundene Resultat in allen berechneten Stellen mit dem genauen Quotienten überein. Ueberhaupt ist die nach obiger Regel berechnete Fehlergrenze im Allgemeinen unverhältnissmässig gross, weil die algebraische Natur der sie ausmachenden Posten nur unter der ungünstigsten Voraussetzung berücksichtigt worden ist: in der Regel wird auch die letzte Ziffer eines durch verkürzte Division erhaltenen Quotienten entweder völlig genau sein oder doch nur um wenige Einheiten sich von der genauen Ziffer unterscheiden. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die Division unvollständiger Decimalzahlen.

§. 12. Eine Fehlergrenze bei der verkürzten Division unvollständiger Decimalzahlen resultirt durch die Addition zweier Fehlergrenzen, von denen die eine aus dem Verfahren der abgekürzten Division selbst (§. 11.) und die andere aus der Ungenauigkeit von Divisor und Dividendus (§. 9.) entspringt. Hieraus ergibt sich mit Leichtigkeit die Regel:

Man addire zu dem Producte des Quotienten mit der Fehlergrenze des Divisors die Fehlergrenze des Dividendus und den um die halbe Anzahl der Partialproducte vermehrten Rest: die erhaltene Summe durch den Divisor getheilt stellt eine Fehlergrenze des Quotienten dar.

Auch hier sind alle Fehlergrenzen immer auf Decimaleinheiten der niedrigsten Stelle, welche die betreffende Zahl hat, zu beziehen und der erwähnte Rest stets im absoluten Sinne zu nehmen. Selbstverständlich endlich braucht man von dem Producte des Quotienten mit der Fehlergrenze des Divisors nur die höchste Stelle oder allenfalls die beiden höchsten Stellen zu berechnen.

Die Fehlergrenzen der in §. 10. unter c) berechneten Quotienten sind hiernach der Reihe nach

$$\frac{\frac{0{,}3 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1}{10} + 0{,}5 \times 0{,}4}{3902} = \frac{0{,}48}{3902} = 0{,}0001;$$

$$\frac{\frac{7 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1}{10} + 0{,}5 \times 0{,}4}{39024} = \frac{1{,}2}{39024} = 0{,}00003;$$

$$\frac{\frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2}{10} + 0{,}5 \times 0{,}4}{39024} = \frac{0{,}9}{39024} = 0{,}00002.$$

und man erkennt aus ihrer Betrachtung, dass die verkürzte Division den Quotienten im Allgemeinen mit derjenigen Genauigkeit liefert, welche bei der Rechnung mit verkürzten Zahlen überhaupt möglich ist.

Beispiel. Bekanntlich ist 1 Mtr. = 3,186199 pr. Fuss. Man soll die Grösse eines Fusses bis auf die dritte Decimalbruchstelle genau in Metern angeben.

$$1 \text{ Fss.} = \frac{1 \text{ Mtr.}}{3{,}186199} \text{ circa } 0{,}3 \text{ Mtr.}$$

Folglich sind die drei Decimalbruchstellen, welche man berechnen soll, zugleich lauter geltende Stellen, und um sie mit einiger Sicherheit zu erhalten rechne man auf 4 geltende Stellen.

$$\begin{array}{rl} 0{,}3139 & \\ 3\dot{1}\dot{8}\dot{6} & \text{Fgr. } 0{,}2 \\ \hline 1000{,}0 & \quad 0 \\ 955\,8 & \\ \hline 44\,2 & \\ 31\,9 & \\ \hline 12\,3 & \\ 9\,5 & \\ \hline 2\,8 & \\ 2\,8 & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Fgr.} = \frac{\frac{0 + 3 \,.\, \frac{1}{2} + 0}{10} + 0{,}3 \,.\, 0{,}2}{3186}$$

$$= \frac{0{,}2}{3186} = 0{,}00006$$

$$\begin{array}{rl} & 0{,}3139 \\ \text{zu gross} & 0{,}31396 \\ \text{zu klein} & 0{,}31384 \\ 0{,}313\ldots & \text{sicher} \end{array}$$

§. 13. Abgekürzte Rechnung bei Quadrat- und Kubikwurzeln.

Nachdem n geltende Stellen einer (Quadrat- oder Kubik-) Wurzel auf dem gewöhnlichen Wege berechnet sind, wird der neue Divisor (sofern es nöthig ist, was bei Ausziehung der Quadratwurzel nicht immer zutrifft) bis auf seine n ersten geltenden Stellen verkürzt und werden von dem zugehörigen Dividendus ebensoviele seiner niedrigsten Stellen wie vom Divisor abgeworfen: die Methode der verkürzten Division liefert alsdann die n folgenden Ziffern der Wurzel mit einem Fehler, der eine einziffrige Anzahl von Decimaleinheiten der letzten Stelle nicht übersteigen kann.

Behufs des Beweises bemerke man, dass die Stellung des Kommas auf die geltenden Ziffern der Wurzel keinen Einfluss hat. Folglich darf man das Komma hinter die n ersten geltenden Classen des Radicanden setzen und hat dann, wenn der Radicand unter der Form $a^2 + r$ oder $a^3 + v$ gedacht wird, für den Fall der Quadratwurzel

$$a < \sqrt{a^2 + r} < a + 1$$

und für den Fall der Kubikwurzel

$$a < \sqrt[3]{a^3 + v} < a + 1$$

Folglich ist die Wurzel in beiden Fällen von der Form $a + x$, wo a eine $n$stellige ganze Zahl und x einen Decimalbruch ohne Ganze ausdrückt, und man kann setzen

$$\sqrt{a^2 + r} = a + x, \text{ also } a^2 + r = a^2 + 2ax + x^2,$$

$$\sqrt[3]{a^3 + r} = a + x, \text{ also } a^3 + r = a^3 + 3a^2x\, 3ax^2 + x^3$$

woher

$$\frac{r}{2a} = x + \frac{x^2}{2a},$$

$$\frac{r}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}$$

sich ergibt.

Es sei nun im Falle der Quadratwurzelberechnung $2a$ eine $\varkappa$stellige Zahl, so ist $\varkappa$ entweder gleich n oder gleich $n + 1$,

$$2a > 10^{\varkappa - 1},\ x < 1,\ x^2 < 1,\ \text{also}\ \frac{x^2}{2a} < \frac{1}{10^{\varkappa - 1}};$$

mithin liefert der obige Werth von $\frac{r}{2a}$ die Ungleichheit

$$\frac{r}{2a} < x + \frac{1}{10^{\varkappa - 1}}$$

d. h. der Quotient $\frac{r}{2a}$ unterscheidet sich von dem genauen Werthe des zweiten Theiles x der zu berechnenden Quadratwurzel um weniger als die Decimaleinheit $\frac{1}{10^{\varkappa - 1}}$. Folglich liefert der auf n Stellen berechnete Quotient $r : 2a$ den fehlenden Theil der Wurzel näherungsweise mit einer Fehlergrenze, welche, wenn $\varkappa = n$ ist, noch nicht eine volle Decimaleinheit der vorletzten und, wenn $\varkappa = n + 1$ ist, noch nicht eine volle Decimaleinheit der letzten Stelle beträgt.

Ferner im Fall der Kubikwurzelberechnung ist, weil a eine $n$stellige Zahl ist,

$$a > 10^{n-1},\ x < 1,\ x^2 < 1,\ x^3 < 1,\ \text{also}$$

$$\frac{x^2}{a} < \frac{1}{10^{n-1}},\ \frac{x^3}{3a^2} < \frac{1}{3\,.\,10^{2n-2}} < \frac{1}{10^{2n-2}},$$

das Glied $\frac{x^3}{3a^2}$ kann demgemäss gegen das Glied $\frac{x^2}{a}$ vernachlässigt werden und die obige Gleichheit für $\frac{r}{3a^2}$ liefert die Ungleichheit

$$\frac{r}{3a^2} < x + \frac{1}{10^{n-1}},$$

welche besagt, dass man für den noch fehlenden Theil der Wurzel den bis auf n Stellen berechneten Quotienten $r : 3a^2$ setzen darf mit einer Fehlergrenze, welche noch nicht eine Decimaleinheit der vorletzten Stelle ausmacht.

Eine Fehlergrenze, welche weniger als eine Decimaleinheit der vorletzten Stelle ausmacht, wird aber jedenfalls durch ein einziffriges Vielfache der Decimaleinheit der letzten Stelle ausgedrückt: der ausgesprochene Satz hat demgemäss sowohl für die Kubikwurzel als auch für die Quadratwurzel Gültigkeit.

Eine genaue Berechnung der Fehlergrenze ermöglicht die Anwendung des binomischen Lehrsatzes, welche für jede beliebige Stellung des Kommas im Radicanden

$$\sqrt{a^2+r} = a\sqrt{1+\frac{r}{a^2}} = a + \frac{r}{2a} - \frac{r^2}{8a^3} + \ldots.$$

$$\sqrt[3]{a^3+r} = a\sqrt[3]{1+\frac{r}{a^3}} = a + \frac{r}{3a^2} - \frac{r^2}{9a^5} + \ldots.$$

liefert. Hieraus folgen aber die Ungleichheiten

$$a + \frac{r}{2a} > \sqrt{a^2+r} > a + \frac{r}{2a} - \frac{r^2}{8a^3}$$

$$a + \frac{r}{3a^2} > \sqrt[3]{a^3+r} > a + \frac{r}{3a^2} - \frac{r^2}{9a^5}$$

d. h. die Ausdrücke

$$a + \frac{r}{2a}, \quad a + \frac{r}{3a^2},$$

welche beide beziehungsweise die Wurzelgrössen

$$\sqrt{a^2+r}, \quad \sqrt[3]{a^3+r}$$

übersteigen, stellen obere Näherungswerthe zu diesen Wurzelgrössen dar, deren Fehlergrenzen beziehungsweise die Brüche

$$\frac{r^2}{8a^3} = \left(\frac{r}{2a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2a}, \quad \frac{r^2}{9a^5} = \left(\frac{r}{3a^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a}$$

sind.

Man wird also, wenn es sich um die grösstmögliche Genauigkeit handelt, in jedem einzelnen Falle diese Fehlergrenze berechnen und bis zu derjenigen Decimalbruchstelle hin, in welcher dieselbe beginnt, die Division $\frac{r}{2a}$ oder $\frac{r}{3a^2}$ fortführen wobei natürlich der Divisor und der Dividendus nur insoweit zu verkürzen sind, dass die Genauigkeit der zu berechnenden Stellen des Quotienten gesichert bleibt.

Die Fehlergrenze wird erhalten, wenn man den gefundenen Quotienten quadrirt und die ersten Stellen des Resultates im Falle der Quadratwurzelausziehung durch das Doppelte des ersten Theiles der Wurzel und im Falle der Kubikwurzelausziehung unmittelbar durch diesen ersten Theil dividirt.

$\sqrt{43,|39|85|36} = 6{,}587\ 7565$ genauer $6{,}587\ 75657$

36 Fgr. 0,000 000 044

12 73|9

625

130 1148|5 $0{,}00076^2$ 532

10464 46 . . . . Fehlergrenze

1316 10213|6 0,000 000 578 : 13,174 = 0,000 000 044

92169 52

13174 9967 6

9222 5

745 1

659 131740 in 996700 = 75657

86 922180

79 74520

7 65870

7 8650

7904

746

659

87

92

$\sqrt[3]{0{,}000|451|724|305} = 0{,}0766\ 288$ genauer $0{,}0767\ 28708$

343 (zu gross)

147 in 1087|24 Fgr. 0,0000 0001

882

756

216

95976

17328 in 127483|05

121296

11172

343

12241663

176|4867 in 506|6420

353

154

141

13

14

$$\begin{array}{rl} 0{,}000029^2 & 58 \\ & 26 \\ 0{,}000000000 & \overline{84} : 0{,}0767 \\ 0{,}00000 & 84 : 767 = 0{,}00000001 \text{ Fgr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 17648|67 \text{ in } & 50664|20 = 28708 \\ & \underline{35297} \\ & 15367 \\ & \underline{14118} \\ & 1249 \\ & \underline{1235} \\ & 14 \\ & \underline{14} \end{array}$$

§. 14. Die Menge derjenigen geltenden Ziffern des Radicanden, welche bekannt sein müssen um die betreffende Quadrat- oder Cubikwurzel bis auf eine bestimmte Anzahl zu berechnen, ist im Allgemeinen dieser Anzahl gleich, zuweilen jedoch um eins kleiner als diese Anzahl und nur in wenigen Fällen um eins grösser.

Die Anzahl der zu berechnenden Stellen sei n, so hat man je nachdem n eine gerade oder ungerade Anzahl ist, die ersten $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Ziffern auf dem gewöhnlichen Wege und die übrigen $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ Ziffern durch abgekürzte Division zu bestimmen.

Behufs des Beweises wird es genügen den Fall der Cubikwurzelausziehung bis auf $2n$ Stellen zu betrachten. Die Menge der hierzu erforderlichen Ziffern des Radicanden beträgt offenbar weniger als die Anzahl der zu n Classen erfordern geltenden Ziffern, welche entweder $3n - 2$ oder $3n - 1$ oder $3n$ ist: denn von dem Divisor und Dividendus, die nach Berechnung der n ersten Ziffern der Wurzel erhalten werden, kommen ja stets einige in Wegfall.

Die beiden ersten geltenden Ziffern der Wurzel mögen eine Zahl darstellen, welche zwischen 10 und $\sqrt{333} < 19$ variirt: alsdann hat der Divisor $2n - 1$ Ziffern und der Radicand in den n ersten geltenden Classen $3n - 2$ Ziffern. Folglich sind von dem Divisor die $n - 1$ Ziffern, welche gestrichen werden, überflüssig und von dem Reste, sowie von dem Radicanden $n - 2$

Ziffern. Die Menge der erforderlichen Ziffern des Radicanden ergibt sich mithin gleich $(3n - 2) - (n - 2) = 2n$.

Die beiden ersten geltenden Ziffern der Wurzel mögen ferner eine Zahl darstellen, welche zwischen 27 und $\sqrt{3333} < 58$ variirt: alsdann hat der Divisor $2n$ Ziffern und der Radicand, je nachdem seine beiden ersten geltenden Ziffern zwischen 18 und $\sqrt[3]{10000} < 22$ oder zwischen 21 und $\sqrt[3]{100000} < 47$ oder zwischen 46 und 58 liegen, beziehungsweise $3n - 2$ oder $3n - 1$ oder $3n$ geltende Ziffern. Folglich sind von dem Divisor n Ziffern, welche gestrichen werden, überflüssig und von dem Reste sowie von dem Radicanden $n - 1$ Ziffern. Die Menge der erforderlichen Ziffern des Radicanden ergiebt sich mithin im ersten Falle gleich $(3n - 2) - (n - 1) = 2n - 1$, im zweiten Falle gleich $(3n - 1) - (n - 1) = 2n$ und im dritten Falle gleich $3n - (n - 1) = 2n + 1$.

Endlich mögen die beiden ersten geltenden Ziffern der Wurzel eine Zahl darstellen, welche über 57 hinausgeht: alsdann hat der Divisor $2n + 1$ Ziffern und der Radicand $3n$ Ziffern, folglich sind von dem Divisor die $n + 1$ Ziffern, welche gestrichen werden, überflüssig und von dem Reste, sowie von dem Radicanden n Ziffern. Die Menge der erforderlichen Ziffern des Radicanden ist mithin $3n - n = 2n$.

Also nur in den 11 Fällen, wo die beiden ersten geltenden Ziffern der Wurzel eine der Combinationen

47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57

darstellen, hat man möglicher Weise die Kenntniss von $2n + 1$ Ziffern des Radicanden nöthig: in allen übrigen Fällen, deren Anzahl 89 beträgt, reicht man mit der Kenntniss von $2n$ Ziffern aus.

§. 15. Die Berechnung der Fehlergrenze ist überall, wo es auf die grösstmögliche Genauigkeit des Rechnens ankommt, nicht zu umgehen, bleibt aber in jedem Falle eine sehr lästige Zugabe des numerischen Calcüls. Auch ist in der Praxis, wenn bis auf eine bestimmte Anzahl von Decimalbruchstellen gerechnet werden soll, meistentheils nur die ungefähre Annäherung an das bis auf diese Decimalbruchstelle genaue Resultat erforderlich: in allen solchen Fällen kann, wie aus der ganzen vorhergehenden Entwickelung nebst durchgerechneten Beispielen erhellt, die Feststellung der Fehlergrenze während der Rechnung ganz wegfallen und die Rechnung nach den beiden nachfolgenden Regeln durchgeführt werden:

a) Die betreffende Aufgabe enthalte blos Multiplicationen, Divisionen, Potenzerhebungen und Ausziehungen der Quadrat- oder Cubikwurzel: man stelle durch eine Vorrechnung, welche sich nur auf die höchste geltende Ziffer oder die höchsten geltenden Ziffern der gegebenen Zahlelemente bezieht, die dekadische Bedeutung der höchsten geltenden Ziffer des Endresultates fest. Hieraus und aus der Angabe, bis auf welche Decimalbruchstelle mit ungefährer Genauigkeit zu rechnen ist, kann man die Menge der geltenden Ziffern, welche das Resultat erfordert, mit Leichtigkeit bestimmen und rechnet alsdann um deren Zuverlässigkeit sicher zu stellen auf eine geltende Stelle weiter.

b) Die betreffende Aufgabe enthalte auch Additionen oder Subtractionen: man berechne nach der Regel unter a) jedes Glied für sich und vereinige die Resultate durch Addition oder Subtraction.

§. 16. Beispiele zu dem vorigen §.

1) Jemand hat in 3, 5, 7 Jahren jedesmal 560 Thlr. zu bezahlen und will sofort mit $5\frac{1}{2}$% Rabatt (auf Hundert) seiner Schuld sich entledigen. Wie viel muss er bis auf Pfennige genau zahlen? Antwort: 1324 Thlr. 7 Sgr. 0,42 Pf.

$(100 + 3 \cdot 5\frac{1}{2})$ Thlr. nach 3 Jahren fällig soviel wie

100 Thlr. sogl. u. b. bez.

$$\begin{array}{llll}
 & 1 & & \frac{100}{100 + 3 \cdot 5\frac{1}{2}} \\[2ex]
 & 560 & & 560 \cdot \frac{100}{100 + 3\,.\,5\frac{1}{2}} = \frac{56000}{116,5}\ \text{Thlr.} \\[2ex]
\text{Ebenso} & 560 & 5 & 560 \cdot \frac{100}{100 + 5 \cdot 5\frac{1}{2}} = \frac{56000}{127,5}\ \text{Thlr.} \\[2ex]
 & 560 & 7 & 560 \cdot \frac{100}{100 + 7 \cdot 5\frac{1}{2}} = \frac{56000}{138,5}\ \text{Thlr.}
\end{array}$$

Die ganze Schuld von $3 \cdot 560 = 1680$ Thlr. statt in drei Terminen hinter einander kann also auch mit

$$560. \quad \left(\frac{100}{116,5} + \frac{100}{127,5} + \frac{100}{138,5}\right)$$

sofort und auf einmal bezahlt werden.

Die Vorrechnung ergibt für alle drei Glieder $\frac{560 \cdot 100}{100}$ = 560 Thlr., also 3 ganze Stellen. Dazu kommen noch drei Decimalbruchstellen, welche zuverlässig sein müssen, damit das Endresultat auch noch die Pfennige genau gebe. Also hat man jedes Glied auf $(3 + 3 + 1) = 7$ geltende Stellen zu berechnen.

480,6867 Thlr.	439,2157 Thlr.	404,3321 Thlr.
1165	1275	1385
560000,0 Thlr.	560000,0 Thlr.	560000,0 Thlr.
4660	5100	5540
9400	5000	6000
9320	3825	5540
8000	11750	4600
6990	11475	4155
1010	2750	445
932	2550	416
78	200	29
70	128	28
8	72	1
8	64	1
	8	
480,6867 Thlr.	0,2345 . 30 Sgr.	0,035 . 12 Pf.
439,2157 „	7,035 Sgr.	7
404,3321 „		0,42 Pf.
1324,2345 „ = 1324 Thlr. 7 Sgr. 0,42 Pf.		

2) Welches ist der Werth eines französischen Zwanzigfrancs-Stückes in preussischen Thalern, wenn ein Friedrichs'dor zu 5 Thlr. 20 Sgr. gerechnet wird?

Der Feingehalt der französischen Goldmünzen ist 900 und 1 Kilogramm Prägmetall wird zu 155 Zwanzigfrancs-Stücken ausgeprägt. Aus einer rauhen Mark $21\frac{2}{3}$ karätigen Goldes wurden 35 Friedrichs'dor à 5 Thlr. 20 Sgr. geprägt und 1 Mark war gleich 233,855 Grammen.

? Thlr. Cour.	1 Zwanzigfrancs-Stück	?	1
155	1000 Gr. rauh.	155	1000
1000	900 Gr. f. G.	1000	900
233,855	1 M. f. G.	233,855	1
$21\frac{2}{3}$	24 M. rauh.	1365	3.24
1	35 Frd'or.	1	357
1	$5\frac{2}{3}$ Thlr. Cour.	3	17
5,4548 Thlr. = 5 Thlr 13 Sgr. 8 Pf.		2015. 233,855	2570400

Die Vorrechnung ergibt $2000 \cdot 200 = 400000$, $2600000 : 400000 = 6$, also eine ganze Stelle: dazu kommen, wenn man bis auf Pf. genau rechnen will, 3 Decimalbruchstellen: also hat man auf $1 + 3 + 1 = 5$ geltende Stellen zu rechnen.

	5,4548	5,4548 Thlr.
233,855		0,4548 . 30 Sgr.
2015	47122	13,644 Sgr.
46771	257040,0	
234	235610	0,644 . 12 Pf.
117	21430	129
471220	18849	7,73 Pf.
	2581	
	2356	
	225	
	188	
	37	
	38	

3) Eine mit atmosphärischer Luft gefüllte Hohlkugel aus Messing (von dem specifischen Gewichte 8,395) hat einen äussern Durchmesser von 10 Centimeter Länge und taucht bis zur Hälfte in Wasser ein. Wie gross ist die Dicke der Hülle und das Gewicht der Hohlkugel?

Allgemein bezeichne d Centimeter die Länge des äusseren Durchmessers, x Centimeter die vor der Hand noch unbekannte Dicke der Hülle (so dass für den inneren Durchmesser sich $(d - 2x)$ Centimeter Länge ergibt), s das specifische Gewicht des Stoffes, aus welchem die Hülle angefertigt ist, σ das specifische Gewicht des Gases oder der Flüssigkeit, welche die Hohlkugel einschliesst, endlich s' das specifische Gewicht der Flüssigkeit, in welche die Hohlkugel eintaucht. Dies vorausgesetzt ergibt sich leicht zufolge des Archimedischen Gesetzes

$$\left[\frac{d^3}{6}\pi - \frac{(d-2x)^3}{6}\pi\right] s + \frac{(d-2x)^3}{6}\pi\sigma = \frac{d^3}{12}\pi s',$$

woher

$$d - 2x = d\sqrt[3]{\frac{s - \frac{1}{2}s'}{s - \sigma}}, \text{ also } 2x = d\left[1 - \sqrt[3]{\frac{s - \frac{1}{2}s'}{s - \sigma}}\right]$$

In dem vorliegenden Falle ist

$$s = 8{,}395,\ \sigma = 0{,}00130,\ s' = 1,\ d = 10 \text{ Centimeter}$$

und die Rechnung soll so genau, als es die Zahlangaben für s und σ überhaupt gestatten, ausgeführt werden.

Zunächst nun ist zu bemerken, dass der Radicand in der Form

$$\frac{s - \frac{1}{2}s'}{s - \sigma} = \frac{8,395 - 0,5}{8,395 - 0,001} = \frac{7,895}{8,394} = 0,9406$$

nur 4 geltende Stellen, dagegen in der Form

$$1 - \frac{\frac{1}{2}s' - \sigma}{s - \sigma} = 1 - \frac{0,5 - 0,00130}{8,395 - 0,001} = 1 - \frac{0,49870}{8,394}$$
$$= 1 - 0,05941 = 0,94059$$

eine geltende Stelle mehr liefert, wodurch ja auch die Cubikwurzel eine geltende Stelle mehr erhält.

Die Rechnung gestaltet sich hiernach wie folgt:

```
  0,05941                  ∛0,94059|  = 0,97979
   8394                      729   |
  ------                    -----  |
  498,70       243          2115|9|0
  41970                    -------
  -----                    1701   |
   7900                      1323 |
   7555                        34|3
   ----                    --------
    345                    18367|3
    336        28227       ---------
    ---                      2791|70|00
      9                      ----------
      8                      2540|43
      -                        23|571
      1                          |  729
                             ----------
  1            287|5323      2564|0739
                             ----------
s-½6    0,05941                227|6|2610
---- = -------                 201|3
s-6     0,94059                ------
                                26|3
                                25|8
                                ---
                                  |5
```

$$\begin{aligned} & \phantom{10 \times {}} 1 \\ & \phantom{10 \times {}} \underline{0,97979} \\ 2x &= 10 \times 0,02021 \\ 2x &= 0,2021 \\ x &= 0,1011 \text{ Centim.} \\ d &= 10 \\ 2x &= \underline{0,2021} \\ d - 2x &= 9,7979 \text{ Centim.} \end{aligned}$$

innerer Durchm. der Hohlk.

Die Dicke des Messingsbleches, welches die Hohlkugel umschliesst, ist hiernach 0,1011 Centimeter; das Gewicht der Hohlkugel ist gleich dem Gewichte der durch dieselbe verdrängten Wassermenge oder gleich der Zahl

$$\frac{d^3\,\pi\,s}{12} = \frac{1000 \cdot 3{,}1415926}{12} = \frac{3141{,}5926}{12} = 261{,}7994,$$

welche auf Gramme zu beziehen ist, mithin beträgt es ungefähr 261,8 Gramme.

Sehr nahe liegt es eine Probe auf das erlangte Resultat anzustellen, indem man das Gewicht der Hohlkugel vermöge der Formel

$$\frac{d^3 - (d - 2x)^3}{6}\, s\,\pi + \frac{(d - 2x)^3}{6}\,\sigma\,\pi$$

berechnet, wobei natürlich nur ein Näherungswerth dieses Gewichtes erlangt werden kann, dessen Genauigkeit von dem Grade der Genauigkeit, welche die Werthe von s und σ haben, abhängt. Zweckmässig ist es, zuerst den Werth des zweiten Gliedes festzustellen, d. h. das Gewicht der in der Hohlkugel enthaltenen atmosphärischen Luft, weil dieses die wenigsten geltenden Stellen ergeben muss. Da σ nur auf 3 geltende Stellen bekannt ist, so braucht man $(d - 2x)^3$ nur auf höchstens 4 geltende Stellen zu berechnen.

$d-2x$	9,7979	95,98	156,7	0,00130
	9,798	9,798	3,1416	492,2
	8818	8638	4701	520
	686	672	156	117
	87	86	62	3
	7	7	2	0,640
	95,98	940,3 : 6	1	
	$\frac{(d-2x,)^3}{6} = 156{,}7$		492,2	

Also ist das Gewicht der in der Hohlkugel enthaltenen Luft 0,640 Gramm.

Das Gewicht der Messingumhüllung beträgt 261,8 — 0,640 Gramm, hat also jedenfalls drei ganze Stellen, dazu kommen dann noch drei Decimalbruchstellen, auf welche das Luftgewicht berechnet ist: mithin wäre auf 6 geltende Stellen zu rechnen. Diese Stellenanzahl ist aber nicht zu erzielen, weil das specifische Gewicht des Messings nur bis auf 4 geltende Stellen angegeben ist: folglich kann das Bestreben nur darauf gerichtet sein 4 bis 5 geltende Stellen zu erhalten. Die Umformung

$$\frac{d^3 - (d - 2x)^3}{6}\, s\pi = x\,(d^2 - 2dx + \tfrac{4}{3}x^2)\, s\pi$$

ist für diesen Zweck passend: denn der Ausdruck $\frac{d^3 - (d - 2x)^3}{6}$ direct berechnet würde $166{,}7 - 156{,}7 = 10{,}0$ ergeben, also nur zwei zuverlässige Stellen: dagegen der gleichgeltende Ausdruck rechter Hand schreitet nach Potenzen der kleinen Grösse x fort und liefert um desswillen mehr Decimalbruchstellen. Das erste Glied der Klammer ist völlig genau, des zweite $2dx$ ergibt 3 Decimalbruchstellen: also braucht man auch das dritte Glied $\frac{4}{3}x^2$ nur auf 3 Decimalbruchstellen, d. h. auf 2 geltende Stellen zu berechnen.

$$\begin{array}{rl} d^2 = & 100 \\ 2dx = & 2{,}021 \\ \hline d^2 - 2dx = & 97{,}979 \\ & 0{,}014 \\ \hline d^2 - 2dx + \frac{4}{3}x^2 = & 97{,}993 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0{,}101 \\ 0{,}101 \\ \hline 101 \\ 1 \\ \hline 0{,}0102 \times 4 \\ 0{,}0408 : 3 \\ 0{,}0136 = \frac{4}{3}x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}1011 \\ 97{,}993 \\ \hline 9099 \\ 708 \\ 91 \\ 1 \\ \hline 9{,}899 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8{,}395 \\ 3{,}1416 \\ \hline 25185 \\ 840 \\ 336 \\ 8 \\ 5 \\ \hline 26{,}374 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}899 \\ 26{,}374 \\ \hline 19798 \\ 5939 \\ 297 \\ 69 \\ 4 \\ \hline 261{,}07 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0{,}1011 \times 97{,}993 \times 8{,}395 \times 3{,}14159 = \\ (0{,}1011 \times 97{,}993) \cdot (8{,}395 \times 3{,}1416) = 261{,}07 \text{ Gr. Messing.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}64 \text{ „ Luft} \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 261{,}71 \text{ „ Hohlkugel.} \end{array}$$

Der genaue Werth ist 261,7994 Gr., der Fehler beginnt demgemäss erst in der zweiten Decimalbruchstelle, was mit Rücksicht auf die Genauigkeit der zu Grunde liegenden Zahlelemente ein durchaus befriedigendes Ergebniss ist.

Die Dicke der Hülle kann auch mit Vernachlässigung des Gewichtes der eingeschlossenen Luft berechnet werden. Die betreffende Formel geht dann für $\sigma = 0$ und $s' = 1$ über in die folgende:

$$2x = d\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{0{,}5}{s}}\right)$$

```
0,05956
8395
 500,00
 41975
  8025
  7556
   469
   420
    49
    50
   — 1
1
 0,05956
 0,94044   287|5323
```

```
 3
 √0,94044 | = 0,97974
  729
243   2114|4 |0
      1701
       1323
         34|3
      18367|3
28227  2776|70|00
       2540|43
         23|571
           | 729
       2564|0739
        212|6|2610
        200|3
         12|3
         11|5
           |8
```

```
      1
      0,97974
      0,02026 × 10
2x = 0,2026
 x = 0,1013 Dicke der Hülle.
```

Wie wenig in den üblichen Aufgabensammlungen der Grad der Zuverlässigkeit, welchen die gegebenen Zahlelemente besitzen, berücksichtigt werde, zeigt bei Gelegenheit der behandelten Aufgaben S. 79 (Nr. 376) die sonst recht zweckmässige Hoffmann'sche Sammlung stereometrischer Aufgaben (Bayreuth 1854). Hier finden sich unter anderen die folgenden Zusammenstellungen gegebener Zahlelemente:

$s = 7{,}207$	$d = 10$	$s' = 13{,}553$	$\sigma = 0{,}0013$
$8{,}39$	12	$1{,}0244$	$0{,}0013.$

Beide Male ist der Einfluss des Zahlelements σ auf das Resultat vollkommen gleich Null — allenfalls bei dem zweiten Exempel kann man, wenn man mit Benutzung der Relation

$$\frac{s - \frac{1}{2}s'}{s - \sigma} = 1 - \frac{\frac{1}{2}s' - \sigma}{s - \sigma}$$

rechnet, in der letzten Decimalbruchstelle eine Einheit mehr erlangen, als für $\sigma = 0$ sich ergeben würde: aber diese Stelle ist ja überhaupt unsicher und folglich jene Einheit ohne allen Werth.

Skizze einer neuen Organisation des Unterrichts in der Naturlehre an Mittelschulen.

Von Prof. Dr. J. Mueller zu Freiburg i. B.

Kein Zweig des Unterrichts in den Mittelschulen hat wohl mehr mit Schwierigkeiten aller Art zu kämpfen als die Naturlehre. Soll dieser Unterricht wahrhaft nutzbringend und geistesbildend sein, so muss er durchaus im Sinne der inductiven Methode gehalten werden, er muss von der Erfahrung und von der Anschauung ausgehen, er muss sich also auf Beobachtung und Experiment gründen.

In diesem Sinne zu wirken wird aber dem Lehrer schon dadurch erschwert, dass er vielfach mit Lehrstunden in andern Fächern überhäuft ist, und dass es ihm, von sonstigen Uebelständen ganz abgesehen, an Zeit fehlt die Versuche gehörig vorzubereiten.

Jeder mit der Sache einigermassen Vertraute wird aber wohl wissen, dass die Kunst, gut und sicher zu experimentiren, wesentlich darin besteht, dass Alles mit der nöthigen Sorgfalt vorbereitet ist. Nur dadurch gewinnt der Lehrer das gerade für den Schulunterricht so nöthige Gefühl der Sicherheit, nur dadurch wird es ihm möglich Zeitverluste und Störungen zu vermeiden, welche ein erfolgloses, auch die Disciplin gefährdendes Hin- und Herprobiren mit sich bringt.

Wenn der Lehrer für die nöthige Vorbereitung der Versuche keine Zeit finden kann, so wird er überhaupt dem Experimentiren möglichst aus dem Wege gehen, er wird sich damit begnügen an der Tafel zu demonstriren und seinem ganzen Unterricht eine allzu abstracte Form zu geben, wenn er sich nicht gar verleiten lässt, auch die Naturgesetze dogmatisch zu behandeln und sie auswendig lernen zu lassen, statt ihr Verständniss zu vermitteln.

Eine weitere Schwierigkeit erwächst dem naturwissenschaftlichen Unterricht an Mittelschulen aus dem Umstand, dass den meisten derselben nur geringe Mittel zur Verfügung stehen, während gute physikalische Apparate keineswegs immer mit geringen Kosten zu beschaffen sind. Die Knappheit der Mittel bedingt nothwendig den Wunsch nach wohlfeilen Apparaten und diesem ist man von Seiten der entsprechenden Mechaniker vielfach in einer Weise entgegen gekommen, welcher der Fachkundige durchaus keinen Beifall spenden kann. Man hat nämlich die Wohlfeilheit auf Kosten der Brauchbarkeit erzielt.

Allerdings lässt sich durch Vereinfachung bei der Herstellung physikalischer Apparate Vieles ersparen, und namentlich ist es die äussere Ausstattung, auf welche weniger Arbeit verwendet zu werden braucht, wenn nur der wesentliche Theil des Apparates in genügender Vollkommenheit und Solididät ausgeführt ist. Leider aber geschieht häufig das Gegentheil, man trifft vielfach Apparate, welche bei äusserlich luxuriöser Herstellung vollkommen unbrauchbar sind und welche beweisen, dass es ihrem Verfertiger gar nicht in den Sinn gekommen ist, einen Versuch mit denselben anzustellen.*)

So kann es denn nun kommen, dass in einer Stadt, welche mehrere Mittelschulen besitzt, etwa Gymnasium, Realschule, Fortbildungsschule, höhere Töchterschule u. s. w. vier, fünf, sechs Sammlungen physikalischer Apparate vorhanden sind, welche sämmtlich ihren Zweck nur unvollkommen erfüllen.

Dieser Umstand deutet nun aber auch die Mittel an, durch welche es möglich wird, dem naturwissenschaftlichen Unterricht an Mittelschulen einen namhaften Aufschwung zu sichern. Es bedarf nämlich nur der Vereinigung aller der Mittel, welche auf Beschaffung mehrerer mangelhafter Sammlungen physikalischer Apparate verwendet werden, um ein einziges, den Bedürfnissen entsprechendes und jeder billigen Anforderung genügendes physikalisches Kabinet herzustellen.

Die durch gemeinschaftliche Mittel zusammengebrachte Sammlung von Lehrmitteln für den Unterricht in der Naturlehre ist in einem Local aufzustellen, welches mit einem kleinen

---

*) Nur leider zu wahr, selbst bei renommirten Firmen.

D. Red.

Laboratorium und einem Hörsaal versehen ist, in welchem alle in das Fach einschlagenden Unterrichtsstunden gehalten werden.

Es versteht sich wohl von selbst, dass die Leitung und Benutzung eines solchen physikalischen Instituts der Hand einer einzigen tüchtigen Persönlichkeit anvertraut werde, so dass er allein den physikalisch-chemischen Unterricht an den contrahirenden Anstalten zu ertheilen hat.

Dabei versteht es sich wohl ferner von selbst, dass hier nicht von einer Combination der Schüler verschiedener Classen und verschiedener Anstalten die Rede sein kann. Die Schüler der verschiedenen Abtheilungen haben sich zu verschiedenen Stunden in dem gleichen Locale einzufinden.

Der Lehrplan der verschiedenen Anstalten wird also durch eine solche Einrichtnng nicht im mindesten alterirt, nur der Hörsaal wird gewechselt und die gleiche Person fungirt an verschiedenen Anstalten als Lehrer der Physik und Chemie.

Auf diese Weise ist es dem Lehrer möglich gemacht, die nöthigen Versuche genügend vorzubereiten und sich einzig und allein seinem Gegenstande zu widmen, wodurch er dann auch Gelegenheit erhält, sich wissenschaftlich und pädagogisch besser für seinen Beruf auszubilden, als es unter andern Umständen möglich wäre.

Bei einer derartigen Organisation kann natürlich bedeutend mehr geleistet werden, als bisher möglich war, ohne dass deshalb die geringste Vermehrung der Lehrstunden für unser Fach nöthig wäre. Ich meine damit durchaus nicht, dass man im naturwissenschaftlichen Unterricht der Mittelschulen weiter gehen solle, als es bisher zu geschehen pflegte, dass man aber das in den Unterricht hinein zu ziehende Material gründlicher behandele, als es bisher möglich war, und dass man strebe, an die Stelle oberflächlicher Halbwisserei, ein gründlicheres Verständniss zu setzen.

Es handelt sich nicht darum die Grenzen des zu bebauenden Feldes zu erweitern, sondern dessen Cultur zu verbessern.

In diesem Sinne wird natürlich nur ein Lehrer wirken können, welcher neben wissenschaftlicher Bildung auch einen richtigen pädagogischen Tact besitzt, der die Dinge nicht in einer Art behandelt, welche über die Fassungskraft und den

Standpunkt der Schüler hinausgeht und sie daran gewöhnt, sich mit Halb- oder Missverstandenem zu begnügen.

Wie die hier nur kurz angedeutete Idee in's Leben zu rufen, wie sie in der Ausführung zu gestalten sei, muss ich natürlich Männern überlassen, welchen bei lebendigem Interesse an der Ausbreitung gediegener Bildung auch praktisch in die Gestaltung des Schulwesens einzugreifen gestattet ist.

Kleinere Mittheilungen.

Einige Bemerkungen zu dem Aufsatze Herrn Diekmann's: Zur Theorie der Gleichungen zweiten Grades (IV, 392).

Von Prof. Dr. K. L. Bauer in Karlsruhe.

Ausser dem Verfasser dieser Zeilen haben sicherlich noch zahlreiche Collegen mit gleichem Interesse von der Methode Kenntniss Genommen, welche Herrn Diekmann zu einem durch Allgemeinheit ausgezeichneten Ausdrucke für die Wurzeln einer quadratischen gleichung gelangen liess (diese Zeitsch., 4. Jahrg., S. 392 bis 403). Folgende Bemerkungen dürften indessen einigen Anspruch auf Beachtung haben.

I.

Wie man das nämliche Resultat, ohne geometrische Interpretation und auf bedeutend kürzerem Wege, ableiten kann, lehrt Bardey in seinen algebraischen Gleichungen (Leipzig, bei Teubner, 1868) auf Seite 51 folgendermaassen.

Hat man für eine und die nämliche Zahl x zwei äusserlich verschiedene Ausdrücke gefunden:

$$x = \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1},$$

so lässt sich hieraus immer ein allgemeinerer Ausdruck ableiten, der die zwei zuerst gefundenen als besondere Fälle einschliesst. Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich:

$$B.\, x = A;\; B_1.\, x = A_1,$$

und wenn m und m_1 zwei ganz beliebige Zahlen bedeuten, so erhält man daher:

$$x = \frac{(Bm \pm B_1 m_1)\, x}{Bm \pm B_1 m_1} = \frac{Am \pm A_1 m_1}{Bm \pm B_1 m_1}.$$

Vgl. J. H. T. Müller, Arithmetik, Halle 1855, Seite 86 Nr. 66! Diese Formel, welche Bardey den Correspondenzsatz (mit Addition, oder mit Subtraction) nennt, ist auch auf den Fall der quadratischen Gleichungen anwendbar. Aus

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

findet man zunächst auf bekannte Weise:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{A}{B}.$$

Erweitert man den Bruch mit $-b \mp \sqrt{b^2 - ac}$, so folgt für x ein zweiter Ausdruck:

$$x = \frac{c}{-b \mp \sqrt{b^2 - ac}} = \frac{A_1}{B_1}.$$

(Hier dürfte das Doppelzeichen $\mp$ nicht durch $\pm$ ersetzt werden, wie Herr D. immer schreibt.) Nach Anwendung des Correspondenzsatzes mit Subtraction wird daher allgemeiner:

$$x = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - ac})\, m - cm_1}{am - (-b \mp \sqrt{b^2 - ac})\, m_1}$$
$$= \frac{-bm - cm_1 \pm m\sqrt{b^2 - ac}}{am + bm_1 \pm m_1 \sqrt{b^2 - ac}}$$

Dividirt man noch Zähler und Nenner durch m_1 und setzt

$$m : m_1 = \vartheta,$$

so folgt:

$$x = \frac{-b\vartheta - c \pm \vartheta \sqrt{b^2 - ac}}{a\vartheta + b \pm \sqrt{b^2 - ac}},$$

was mit Herrn Diekmann's Formel genau übereinstimmt (mit Ausnahme des Vorzeichens von c im Zähler; S. 401 steht dreimal nach einander $+c$, statt des richtigen $-c$). Die zwei für x anfangs aufgestellten Specialausdrücke ergeben sich aus dem allgemeineren durch die Substitutionen:

$$m_1 = 0,\ \vartheta = \infty, \text{ und } m = 0,\ \vartheta = 0.$$

II.

Statt der zwei besonderen Formen, welche Herr D. am Schlusse seines Aufsatzes der quadratischen Gleichung gibt, hätte man deren auch vier aufstellen können:

1) $(ax + b)^2 - (b^2 - ac) = 0$; 2) $(\frac{1}{x}. b + a)^2 - \frac{1}{x^2}(b^2 - ac) = 0.$

3) $(c \cdot \frac{1}{x} + b)^2 - (b^2 - ca) = 0$; 4) $(x \cdot b + c)^2 - x^2(b^2 - ca) = 0.$

(Herr D. gibt die erste und vierte dieser Formen.) Zwei derselben ergeben sich aus den beiden andern, nicht blos durch Division oder Multiplication mit x^2, sondern auch durch Vertauschung von a mit c, und von x mit $\frac{1}{x}$. Die Berechtigung hierzu erhellt schon aus dem gleichzeitigen Bestehen der zwei Gleichungen:

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$c \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{x} + a = 0.$$

Die Auflösungsresultate der vier Gleichungen sind:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{c}{-b \mp \sqrt{b^2 - ac}},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - ac}}{c}.$$

III.

Die von Herrn D. gegebene geometrische Deutung der quadratischen Gleichungen könnte durch folgende kürzere Darstellung ersetzt werden.

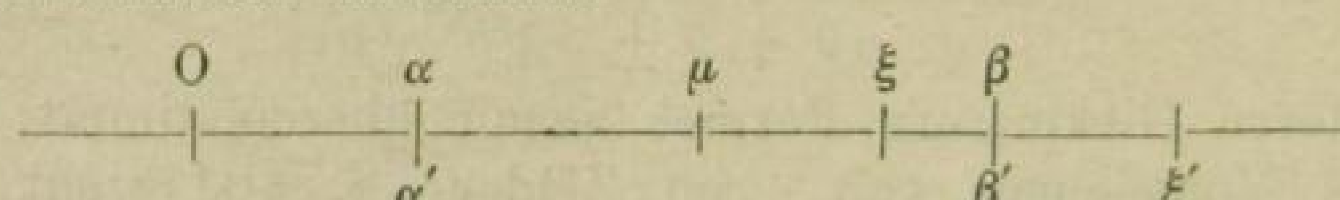
Sind α und β die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\left|\begin{array}{l} ax^2 + 2bx + c = 0 \\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \end{array}\right|,$$

so bestehen die Beziehungen:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = -\frac{b}{a}; \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

Die Wurzeln α, β lassen sich nun als die von einem Punkte O des Trägers (siehe die Figur!) gerechneten Abscissen der Doppelpunkte einer hyperbolischen Involution



von Punktpaaren betrachten; dann ist

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

die Abscisse des Mittelpunkts der Involution. Bedeuten ferner ξ und ξ' die Abscissen irgend zweier entsprechenden Punkte beider Reihen, so sind diese Punkte den Doppelpunkten harmonisch zugeordnet, weshalb:

$$\frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta} + \frac{\xi' - \alpha}{\xi' - \beta} = 0.$$

$$(\xi - \alpha)(\xi' - \beta) + (\xi' - \alpha)(\xi - \beta) = 0.$$

$$\left|\begin{array}{r} \xi\xi' - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)(\xi + \xi') + \alpha\beta = 0 \\ a\xi\xi' + b(\xi + \xi') + c = 0 \end{array}\right|.$$

Aus dieser Gleichung, welche bei der besondern Annahme: $\xi = \xi' = x$ in die ursprüngliche quadratische Gleichung übergeht, ergibt sich:

$$\xi' = \frac{\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\,\xi - \alpha\beta}{\xi - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)} = -\frac{b\xi + c}{a\xi + b}.$$

Zum gleichen Resultate führt die bekannte Beziehung:

$$(\xi - \mu)(\xi' - \mu) = [\tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)^2,]$$

wenn man $\mu = \frac{1}{2}(\beta + \alpha)$ setzt. Nicht ganz so zweckmässig wäre es, von einer der folgenden (mit Rücksicht auf die Figur gebildeten) Relationen auszugehen:

$$\beta - \alpha = \frac{(\xi - \alpha)(\xi' - \alpha)}{\frac{1}{2}\{(\xi - \alpha) + (\xi' - \alpha)\}} = \frac{(\xi - \alpha)(\xi' - \alpha)}{\frac{1}{2}(\xi + \xi') - \alpha}$$

$$\xi' - \xi = \frac{(\xi' - \alpha)(\xi' - \beta)}{\frac{1}{2}\{(\xi' - \alpha) + (\xi' - \beta)\}} = \frac{(\xi' - \alpha)(\xi' - \beta)}{\xi' - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)},$$

obgleich auch vermittelst dieser ohne lange Rechnung ξ' als Function von ξ gefunden werden kann.

Mathematische Sophismen.

Von G. Hellmann in Berlin.

Herr Dr. Bender in Speier hat bereits in IV, 357 dieser Zeitschrift auf die Nützlichkeit der „mathematischen Sophismen," wie ich jene Ungereimtheiten nennen möchte, hingedeutet und dazu ein Beispiel gegeben*). Ich füge daher demselben noch einige bei.

1. Das Ganze ist gleich der Hälfte:

$$x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$$
$$x(x - x) = (x + x)(x - x)$$
$$x = x + x = 2x \text{ folglich}$$
$$\frac{x}{2} = x$$

2. Das Positive ist gleich dem Negativen:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{-a \cdot -a} = \sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^2 = -a$$
$$a = -a$$

3. Jede positive (ganze oder gebrochene) Zahl ist kleiner als Nichts und jede negative (ganze oder gebrochene) grösser als Nichts.

Wenn n eine ganze positive Zahl ist, gilt

$$2n - 1 < 2n, \text{ multiplicirt mit } -a,$$
$$-2an + a < -2an$$
$$a < 0$$

Aehnlich für die negative ganze Zahl.

Für die positive gebrochene Zahl hat man

---

*) S. jedoch die Entgegnungen von Meier nnd Scherling ds. Jahrg. (Hft. 1) S. 50. Doch hatte wohl Hr. Dr. Bender die gute Absicht die Lehrer der Mathematik (namentlich jüngere) zu ermahnen, sie möchten gelegentlich ihre Schüler auf solche math. „Sophismen" aufmerksam machen.
D. Red.

$$2n - 1 < 2n, \text{ dividirt durch } - a \text{ (ganze Zahl)}$$

$$-\frac{2n}{a} + \frac{1}{a} < -\frac{2n}{a}$$

$$\frac{1}{a} < 0$$

u. s. w.

Namentlich die Lehre von den Ungleichheiten ist in den Lehrbüchern dürftig behandelt und daher das letzte Beispiel um so beherzigenswerther.

Noch einmal die Trisection des Winkels mittelst der Kreisconchoide.

Von M. Curtze in Thorn.

In diesen Blättern ist mehrfach*) ausführlich von der Trisection des Winkels durch die Kreisconchoide oder die sogenannte Limaçon des Pascal die Rede gewesen. Herr Rector Hippauf hat dabei wohl, weil er in die ganze Literatur der Geschichte der Trisection nur einen Streifblick gethan hat, bei seinem Aufsatze sich ein zu grosses Verdienst zugemessen, das auf richtige Grenzen bis jetzt, meines Wissens, noch von Niemand zurückgeführt ist. Nun befindet sich ein Aufsatz von mir bereits theilweise gedruckt in der Schlömilch'schen Zeitschrift**), der dies an der Hand zum Theil erstmalig veröffentlichter Documente thut, ich glaube aber nichts Unnützes zu thun, wenn ich an dieser Stelle, von wo die Anregung die Sache wieder aufzunehmen — wenn auch nicht für mich — ausgegangen ist, wenigstens in Kürze die Resultate der betreffenden Untersuchung mittheile, sie werden keinen allzugrossen Raum dem eigentlichen Zwecke dieses Blattes entziehen.

Die erste Spur der von Herrn Hippauf gegebenen Lösung findet sich bestimmt bei Archimedes (Lemma 8), es ist aber wahrscheinlich, dass sie noch weiter zurück auf den Erfinder der Conchoiden überhaupt, auf Nikomedes zurückgeht, denn Copernicus behauptet in einer Notiz**) zu Euklid, dass er sie bei Nikomedes gefunden habe. Jetzt sind die Werke dieses Autors bekanntlich bis auf die Fragmente bei Pappos und Eutokios für uns verloren. Die Araber, denen wir ja auch die Erhaltung der Lemmata des Archimedes verdanken, entwickelten die Sache weiter (siehe Woepcke, l'Algèbre d'Omar Alkayâni Anhang D) und die drei Brüder Muhamed, Ahmed und Hasan ben Musa ben Schakir waren die ersten, welche die Lösung auf das Hippauf'sche

---

*) S. Bd. III, 215—240 und 537 (Albrich). — IV, 176. (Urtheile von Garthe und Minding). — V, 64 (Sidler). D. Red.

**) XIX, (1874). 1. Heft, Kl. Mitth. p. 81. D. Red.

Princip zurückführten. Ihre Lösung, welche sie für ihre Erfindung in Anspruch nehmen, habe ich aus dem Liber trium fratrum nach der Basler Handschrift bei Schlömilch mit abdrucken lassen. Abul Rissan, genannt Albirum, zeigt nun später, dass die Lösung mit der Conchoide auf gerader Basis, und die beiden verschiedenen Lösungen durch die Kreisconchoide — durch den innern Theil derselben, oder durch den Theil, welcher den Kreis umschliesst — auf demselben Princip beruhen und im Grunde nur ein und dieselbe sind. Wahrscheinlich aus arabischer Quelle stammt die Lösung, welche Campanus seiner Uebersetzung des Euklid (Venetiis 1482) am Ende des 4. Buches beigibt. Sie ist identisch mit der der drei Brüder und mit der des Herrn Hippauf. Letzterem bliebe nach allem Gesagten wohl nur das Verdienst, die besagte leichte Construction wieder in Anregung gebracht zu haben, — sein Curvencirkel ist übrigens nichts als eine leichte Veränderung des Nikomedischen Curvencirkels, wie die veränderte Basis ihn verlangt —, aber auch dieser Ruhm ist hinfällig, denn schon 1870 hat in den Nouvelles Annales de Mathématiques Jouanne die Limaçon des Pascal in derselben Weise wie Herr Hippauf zur Trisection verwendet*). Dass übrigens Herr Hippauf seine Construction in dem von ihm erwähnten Artikel des Klügel'schen Wörterbuches nicht hat finden können, ist eigenthümlich. Sie ist dort zweimal abgehandelt, da der Verfasser jenes Artikels die Identität der Methoden übersehen hat, und die eine dieser Methoden citirt Hippauf in seinem sogenannten historischen Ueberblick. Hat er seine Methode etwa nicht kennen wollen?

Anm. der Redaction: Die vorstehenden Bemerkungen des in der Geschichte der Mathematik rühmlichst bewanderten Herrn Verfassers und die darin gegebene Zurückführung des Verdienstes Herrn Dr. Hippaufs auf das richtige Mass richten auf's Neue an jeden, der an die Behandlung eines Themas geht, die ernste Mahnung, über die Leistungen seiner Vorarbeiter sich genau zu unterrichten.

*) s. dort S. 40. D. Red.

Literarische Berichte.

A) Recensionen und Anzeigen von Büchern.

Orelli, Joh. (Prof. am Eidgenössischen Polytechnikum), Lehrbuch der Algebra für Industrie- und Gewerbeschulen, sowie zum Selbstunterricht. Zweite umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Zürich. Schabelitz'sche Buchhandlung 1872.

Vorstehendes Lehrbuch soll „den Zuhörern des Herrn Verfassers ein bequemes Hülfsmittel zur Wiederholung der Vorlesungen über Algebra an die Hand geben und andrerseits dem Theil der studirenden Jugend, der bei seiner Vorbereitung theilweise oder ganz auf Selbstunterricht angewiesen ist, den Weg für höhere mathematische Studien ebenen.“ Die Rücksicht auf letztere erklärt die behagliche Breite der Darstellung, rechtfertigt es aber keineswegs, wenn die zahlreich eingestreuten, bis in das kleinste Detail der Ausführung durchgesprochenen Beispiele jedweden besonderen Interesses entbehren und theilweise sogar durch Gleichförmigkeit ermüden. So sind pg. 114 und 115 die Beispiele

$$\frac{7}{4}x - \frac{5x}{8} - 16 = \frac{x}{2} - 1,$$

$$\frac{7x}{12} + \frac{9x}{8} + \frac{x}{3} = \frac{61}{6} - \frac{x}{2},$$

$$\frac{11x-3}{9} - \frac{5}{2} - \frac{18-x}{3} = \frac{2x-3}{18}$$

der Reihe nach behandelt: das letzte Beispiel allein hätte offenbar genügt alles zu zeigen, was aus allen dreien erhellen soll.

Die Darstellung ist bei aller Breite im Allgemeinen klar und zeigt überall die erfolgreiche Bemühung den Stoff mit erschöpfender Gründlichkeit zu behandeln. Aber eigenthümlicher Weise unterscheidet der Herr Verfasser zwischen Arithmetik und Algebra und indem er die Arithmetik, d. h. die Methoden des gemeinen Rechnens mit ganzen und gebrochenen Zahlen, wobei sogar die unendlichen Decimalbrüche nicht ausgeschlossen zu sein scheinen, als be kannt voraussetzt, erlaubt er sich die Willkürlichkeit einen Theil der hierher gehörigen Lehren, nämlich im Allgemeinen diejenigen, welche sich auf die Rechnung mit ganzen Zahlen beziehen, in die algebraische Theorie hineinzunehmen, dagegen insbesondere alle Sätze auszuschliessen, welche die eigentliche Theorie des Rechnens mit Brüchen aufhellen. So findet sich in dem ganzen Werke nicht einmal die Erklärung, was ein gemeiner Bruch ist und doch handelt ein ganzer Abschnitt (pg. 52—60) von den algebraischen Brüchen. Viele Sätze der Arithmetik, welche für ganze Zahlen erwiesen sind, werden ohne Weiteres als giltig auch für gebrochene Zahlen angenommen und der ganze Process, vermöge dessen andere Sätze in die Algebra einverleibt werden, reducirt sich mitunter auf den Ausdruck des Inhalts derselben durch allgemeine Formeln.

Zum Belege des Gesagten möge die Art näher betrachtet werden, wie pg. 38 die Formel $a:(bcd) = a:b:c:d$ bewiesen oder vielmehr besprochen wird.

„Wenn man a auf einmal durch das Product bcd dividirt, so erhält man $\frac{a}{bcd}$ als Quotienten. Das nämliche Resultat erhält man aber auch, wenn man a successive durch die Factoren b, c und d dividirt; denn

$$a:b = \frac{a}{b},$$
$$\frac{a}{b}:c = \frac{a}{bc},$$
$$\frac{a}{bc}:d = \frac{a}{bcd}$$

nach dem aus der Arithmetik über die Division von Brüchen durch ganze Zahlen bekannten Satze. Es ist also hierbei vorläufig noch vorausgesetzt, dass b, c und d positive ganze Zahlen seien. Erst aus der Theorie der algebraischen Zahlen ergibt sich dann die Gültigkeit dieses Satzes für beliebige Factoren b, c und d."

Diese Erweiterung ist allerdings (pg. 57 unter 52) eingefügt. Aber die vorhergehenden Sätze aus der Theorie der algebraischen Brüche setzen durchweg voraus, dass der Satz von der Vertauschbarkeit der Factoren auch für gebrochene Factoren Giltigkeit hat. Nun ist derselbe allerdings für ganze Zahlen pg. 26 in aller Strenge bewiesen: aber seine Ausdehnung auf gebrochene Zahlen erfolgt nur auf Grund der Regel, nach welcher zwei Brüche miteinander multiplicirt werden. Was solche Multiplication theoretisch besagt, ist vermuthlich vorausgesetzt, aber nirgends auch nur angegeben.

Der entsprechende Multiplicationssatz

$$a\cdot(b\cdot c\cdot d) = a\cdot b\cdot c\cdot d$$

findet sich pg. 27 mit einer Art von Beweis vor, wobei wenigstens

b, c, d als ganze Zahlen vorausgesetzt werden. Hier wird untersucht, wie der Multiplicator bcd aus 1 entsteht, und gesagt: „bcd kann aus der Einheit dadurch abgeleitet werden, dass man entweder die positive Einheit auf einmal bcd mal als Summand setzt, oder dann auch dadurch, dass man dieselbe erst b mal nimmt, was herauskommt mit c und dieses Resultat noch mit d multiplicirt." Dies ist freilich nur dann richtig, wenn man

$$1. (b \cdot c \cdot d) = 1 \cdot b \cdot c \cdot d$$

setzt, d. h. wenn der zu erweisende Satz ohne Weiteres für den Multiplicandus 1 als richtig angenommen wird.

Abgesehen von dem Zirkelschlusse, der in dem Beweise zum Vorschein kommt, spukt darin auch das ganz haltlose Princip, dass „das Product aus dem Multiplicandus in der gleichen Weise abgeleitet wird, wie der Multiplicator aus der positiven Einheit." Bei dieser Ableitung soll es, wie ausdrücklich angegeben wird (pg. 15), durchaus nicht erforderlich sein, dass an das wiederholte Setzen von etwas gedacht wind; vielmehr ist das Wort „Ableiten" im allgemeinsten Sinne zu verstehen: „der Multiplicandus kann sein, was er will, der Multiplicator positiv oder negativ, ganz oder gebrochen." Um die Hinfälligkeit der aufgestellten Definition zu zeigen, genügt es darauf hinzuweisen, dass der Multiplicator stets auf mannigfaltigste Art aus 1 ableitbar ist; jede besondere Art der Ableitung wäre zu berücksichtigen, was sich als unmöglich ausweist und leicht genug auf Widersprüche führt. So entsteht a^4 aus 1, indem man 1 mit a multiplicirt und das Product auf die vierte Potenz erhebt: hiernach wäre $a^3 \cdot a^4 = (a^3 \cdot a)^4$! Oder: 5 entsteht aus 1, indem man die Quadratwurzel aus 1 zieht und das Resultat verfünffacht: hiernach wäre $4 \cdot 5 = \sqrt{4 \cdot 5}$!

Die Theorie der algebraischen Zahlen ist auf ungenügender Grundlage aufgebaut. Zunächst setzt sie den Satz $a - (b + c) = a - b - c$ als für beliebige absolute Zahlen giltig voraus und doch kann von demselben in der „Arithmetik" nur die Rede sein, wenn $a \geqq b + c$ ist. Ihn ohne Beweis für den Fall $a < b + c$ in Anspruch nehmen, wie es thatsächlich geschieht (pg. 10), schliesst den Verzicht auf die erforderliche mathematische Strenge in sich und entbehrt zudem, so lange die Existenz der herauskommenden Zahl nicht klar gelegt ist, jedweden bestimmten Sinnes. Die Reduction

$$12 - 19 = 12 - (12 + 7) = 12 - 12 - 7 = 0 - 7$$

sagt am Ende doch weiter nichts, als dass 7 zu subtrahirende Einheiten übrig bleiben. Wie diese Subtraction ausführbar ist, wird nicht angegeben, das Resultat aber dennoch als etwas Existirendes unter dem Namen „subtractive" und gleich darauf „negative" Grösse vorgeführt.

Der Satz von der Vertauschbarkeit der Summanden auch in dem Falle, wenn dieselben algebraische bestimmte Zahlen sind, wird ohne Beweis vorausgesetzt und (pg. 12) sogar schon zu der Herleitung derjenigen Sätze verwandt, welche auf die Berechnung zweigliedriger Summen sich beziehen.

Bei Betrachtung (pg. 45) der nicht aufgehenden Division von Polynomien werden diejenigen Glieder des Quotienten, welche durch allmählige Abstreifung der Vielfachen des Divisors vom Dividendus entstehen, irrthümlich als ganzer Quotient bezeichnet, während sie solchen erst mit dem Restbruche zusammen darstellen.

In der Lehre von den Potenzen und Wurzeln fehlt die Formulirung des in der Gleichung $(a^m)^n = (a^n)^m$ ausgesprochenen Satzes; die Lehre von der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung (pg. 77—105) ist jedenfalls ein wahres Muster weitschweifiger Darstellung.

Nicht minder breit (pg. 109—195) sind die Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten abgehandelt; aber die wirklich gründliche und wissenschaftliche Behandlung des Lehrstoffes bietet hierfür vollkommene Entschädigung. Insbesondere werden die fundamentalen Operationen, welche zur Umformung der Gleichungen dienen, mit grösster Präcision ins Auge gefasst, die Aequivalenz der umgeformten und der ursprünglichen Gleichung wird in allen Fällen, wo sie stattfindet, streng bewiesen und die gleiche Sorgfalt auf die Discussion der allgemeinen in Betracht kommenden Gleichungsformen verwandt. Ausstellungen sind in diesem Abschnitte nur wenige zu machen. Nach Besprechung der Substitutions- und Comparationsmethode fällt der Name „Eliminationsmethode“ für „Additionsmethode“ auf. Jene beiden sind doch ebensogut wie diese und die gleich darauf besprochene Methode von Bezout Eliminationsmethoden. — Die Auflösung der Mischungsaufgabe (pg. 137 und 138) durch ein noch dazu sehr weitläufiges Raisonnement lässt die nöthige Klarheit sehr vermissen. — Die Betrachtung der Symbole

$$\frac{m}{0}, \ \frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ 0 \cdot \infty$$

wird der Theorie der Gleichungen eingefügt, was dem Referenten neu und interessant war. — Von den Gleichungen höherer Grade, welche auf quadratische zurückführbar sind, sind nur solche betrachtet, welche von der Form

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0$$

sind: die Betrachtung auch anderer Formen lag nahe genug und war wünschenswerth. Endlich fällt die Betrachtung irrationaler Gleichungsformen ganz aus.

Der siebente Abschnitt (pg. 195—221) enthält Zahlentheoretisches, Sätze über Wurzelgrössen, die Betrachtung der Werthänderungen, welche die Potenz x^y bei allmähliger Variation des Exponenten y erfährt und im Anschlusse hieran die Theorie der incommensurabeln Zahlen — leider eine völlig verfehlte Theorie. In derselben wird nämlich angenommen, dass die Existenz incommensurabler Zahlen aus Radicirungen unzweifelhaft erhelle, und deren Grundeigenschaft, von Paaren commensurabler Zahlen mit beliebiger Annäherung eingeschlossen zu sein, durch Betrachtung der Resultate irrationaler Wurzelausziehungen leicht genug genommen. Da hätte denn aber doch, ehe die Technik dieser Rechnungen auseinandergesetzt wurde, die Vorfrage von der Existenz der Resultate erledigt werden sollen. Diese Erörterung fehlt gänzlich, ebenso die zugehörige Betrachtung, wie sich die Potenz x^y mit Aenderung der Grundzahl x ändere.

Der achte und neunte Abschnitt enthält den üblichen Lehrstoff in Bezug auf Logarithmen, Zinseszins- und Rentenrechnung und die Lehre von den Progressionen (pg. 221—265).

Der 10. Abschnitt endlich, mit welchem der erste Theil schliesst (pg. 265—288), handelt von Kettenbrüchen und beschränkt sich gleichfalls auf das Gewöhnliche: nur ist unzulässiger Weise bei Betrachtung von unendlichen Kettenbrüchen (pg. 278) deren Werth von vorn herein und ohne Erweis als eine existirende Grösse vorausgesetzt.

Der zweite Theil gliedert sich in folgende Abschnitte: Unbestimmte Analytik pg. 291—321, Combinationslehre pg. 321—329, binomischer und polynomischer Lehrsatz pg. 329—353, imaginäre und complexe Zahlen pg. 353—363, allgemeine Auflösung der Gleichungen dritten Grades pg. 363—376, unendliche Reihen pg. 376—414, höhere Gleichungen pg. 414—510.

Der Abschnitt über unbestimmte Analytik umfasst solche lineare Gleichungen, wo die Anzahl der Unbekannten die Anzahl der Gleichungen um Eins übertrifft, und am Schlusse die ganzzahlige Lösung einer linearen Gleichung mit dreien Unbekannten. Diese ganze Theorie ist mit musterhafter Gründlichkeit abgehandelt, die Darstellung allerdings auf das Bedürfniss eines Autodidakten berechnet, aber keineswegs überflüssig breit. Nur ist nicht recht einzusehen, warum der Anwendung, welche die Kettenbrüche hierbei finden, mit keinem Worte gedacht ist.

Auffallender Weise werden nur Permutationen, Combinationen und Variationen ohne Wiederholung in Betracht gezogen und von Complexionen ist nirgends die Rede.

Der polynomische Lehrsatz wird durch wiederholte Anwendung des binomischen abgeleitet, die Summirung der meisten Potenzen einer arithmetischen Reihe und die Berechnung von Kugelhaufen sind angeknüpft.

Die complexen Zahlen werden, wie pg. 359 ausdrücklich bemerkt wird, nicht durch die betreffenden „Zahlörter" (Punkte der Ebene), sondern durch deren nach Grösse und Richtung genommenen Abstände vom Nullpunkte repräsentirt. Mit dieser Auffassung verträgt sich die Multiplication zweier complexen Zahlen durchaus nicht. Eine Definition derselben ist gar nicht gegeben und der Satz von der Vertauschbarkeit der Factoren eines Productes wird ohne Weiteres angewandt, wenn gefolgert wird

$$(\alpha' + \beta' i)(\alpha'' + \beta'' i) \text{ oder } \varrho' (\cos\varphi' + i \sin\varphi') \cdot \varrho'' (\cos\varphi'' + i \sin\varphi'')$$
$$= \varrho' \varrho'' \cdot (\cos\varphi' + i \sin\varphi') \cdot (\cos\varphi'' + i \sin\varphi'').$$

Was soll hier $\varrho' \cdot \varrho''$ d. h. die Multiplication zweier Strecken bedeuten? Gesagt ist es nicht und eben so wenig wird der Sinn, den die Multiplication zweier Richtungsfactoren zufolge der S. 358 gegebenen Erklärung des Richtungsfactors $\cos\varphi + i \sin\varphi$ hat, zur Anwendung gebracht um sofort auf das Resultat

$$\cos(\varphi' + \varphi'') + i \sin(\varphi' + \varphi'')$$

zu schliessen, dieses vielmehr durch mechanische Multiplication der Ausdrücke $\cos\varphi' + i \sin\varphi'$ und $\cos\varphi'' + i \sin\varphi''$, sowie durch Anwendung trigonometrischer Formeln vermittelt.

Der 5. Abschnitt, welcher die allgemeine Auflösung cubischer Gleichungen behandelt, enthält alles Erforderliche, ist aber weniger ansprechend als die Abschnitte über lineare und quadratische Gleichungen.

Indem in dem 6. Abschnitt zu den unendlichen Reihen übergegangen wird, sind die Vorbegriffe von constanten und variabeln Grössen, von Functionen und deren Arten mit hinlänglicher Klarheit definirt, nur hätte der Begriff Grenze auch auf andere als unendlich zunehmende Werthe der unabhängig Veränderlichen bezogen werden sollen. Gleich aber der erste übrigens in praxi völlig bedeutungslose Satz, welcher an der Spitze der Theorie von den convergenten Reihen steht, entbehrt eines genügenden Beweises. Der Satz lautet: „Eine unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern ist stets convergent, wenn die Summe der n ersten Glieder bei unendlich wachsenden n endlich bleibt." Der gegebene Beweis läuft darauf hinaus die Eigenschaften, welche die Summe der in Rede stehenden Reihe haben muss, mit etwas anderen Worten, als die Definition enthält, zu umschreiben, und auf Grund dieser Umschreibung die zu erweisende Realität der Summe zu folgern.

Die Reihenentwickelungen für e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^n$ u. s. w. sind alle durch die Methode der unbestimmten Coefficienten hergeleitet und ist dabei der Gang eingeschlagen, dass für den nämlichen Ausdruck zwei unendliche Reihen aufgestellt werden und durch deren Identificirung die Coefficientenbestimmung erfolgt. Wenn hierbei auch a priori die Möglichkeit der Entwickelung einer Function in eine Reihe von der bestimmten Form vorrausgesetzt wird, so wird doch hinterher durch eine Convergenzuntersuchung die Berechtigung nachgewiesen die gegebene Function der gefundenen unendlichen Reihe gleich zu setzen, und die Grenzen werden angegeben, innerhalb deren die Reihe den Werth der Function repräsentirt.

Man kann die beschriebene Methode im Allgemeinen billigen: aber die Ausführung unterliegt schweren Bedenken. Um nämlich die zwei Reihenausdrücke, welche schlechthin nicht zu entbehren sind, für die betreffende Function zu erhalten, wurden mit unendlichen Reihen die mannigfaltigsten Operationen vorgenommen, deren Berechtigung doch zuvor hätte dargethan werden sollen. Das ist leider unterblieben und erscheint um so unwissenschaftlicher, als z. B. pg. 381 ausdrücklich an einem Beispiele dargethan wird, dass die Veränderung der Gliederfolge selbst in einer unendlichen Reihe eine Veränderung des Summenwerthes herbeiführen kann.

Der siebente und letzte Abschnitt (pg. 414 — 510) handelt von den höheren Gleichungen. Hierbei wird, was ja auch durchaus zwec mässig ist, der Begriff der Derivationen Lagranges eingeführt und mit Hülfe derselben eine Anzahl einleitender Sätze hergeleitet. Warum gerade der fundamentale Satz, dass jede algebraische Gleichung wenigstens eine reelle oder complexe Wurzel haben müsse, ohne Beweis zugelassen wird, ist nicht recht einzusehen. Abgesehen hiervon ist alles Wesentliche, was zur Auflösung numerischer Gleichungen gehört, und insbesondere die Horner'sche Auflösungsmethode mit sicherer Auswahl und klarem Verständnisse zusammengetragen.

Wenn also auch das Werk als Ganzes hin und wieder durch die Weitläufigkeit der Darstellung ermüdet und eigentlich auch nur in den Partien, welche von den Gleichungen handeln, den Anforderungen strenger Wissenschaft genügt, so kann es dennoch mangelhaft vorbereiteten oder auf den Selbstunterricht angewiesenen Studirenden als ein recht brauchbares Hülfsmittel zur Sichtung und Vervollständigung ihrer Kenntnisse empfohlen werden.

Ausser den verzeichneten Druckfehlern finden sich nur wenige von geringer Erheblichkeit vor: Druck und Ausstattung sind durchaus preiswürdig.

Gumbinnen. Dr. Schwarz.

Gauss, F. G. **Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauch für Schule und Praxis. Stereotypdruck.** Berlin, Rauch 1872. 2. Aufl. Preis 2 Mark.

Die meisten logarithmisch-trigonometrischen Tafeln verfolgen einen doppelten Zweck, einmal wollen sie dem praktischen Rechner die zu jenen Rechnungen nöthigen Tabellen liefern, dann aber auch dem Schüler zur ersten Einführung in den Gebrauch der Logarithmen und trigonometrischen Functionen dienen. Es ist dies unsrer Ansicht nach sehr verfehlt, denn da beide Ziele nur auf sehr verschiedenen Wegen erreicht werden können, so kommt es, dass alle derartigen Sammlungen mehr oder minder ein Conglomerat praktischer und unpraktischer Tafeln sind. So nehmen, um nur einige Beispiele anzuführen, mehrere Autoren die natürlichen Logarithmen einiger Zahlen auf, „zwar werden diese Tafeln schon wegen ihrer geringen Ausdehnung ein praktisches Hülfsmittel für Rechnungen kaum darbieten können, dagegen dem Schüler, sowie überhaupt demjenigen, der sich über die natürlichen Logarithmen zu unterrichten wünscht, bei näherer Betrachtung die Eigenschaften derselben in der einfachsten Weise zur Anschauung bringen“ (Gauss a. a. o. VI). August fügt seiner Tafel eine vollständige Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie hinzu, andre die trigonometrischen Formeln. Was sollen nun dergleichen Anhänge — die den Schüler bei Extemporalien nur zum Abschreiben verleiten — für den Fachmann, der ein möglichst handliches Buch und nur praktische Tafeln haben will, was die unendlich langen Erklärungen der Sammlung, die bei Gauss 38, bei August gar 59 ($^1/_4$ des Buches) Seiten ausmachen? Die Einleitung kann auf ein Minimum reducirt werden und muss der Bequemlichkeit wegen ans Ende des Buches verlegt oder noch besser gesondert ausgegeben werden; denn einmal ist der Rechner vollkommen mit der Einrichtung dergl. Sammlungen vertraut, so dass es für ihn nur der Erklärung der dem Buche etwa zukommenden Eigenthümlichkeiten bedarf, dann wird aber auch der Gebrauch der Tafeln gewöhnlich vom Lehrer erklärt. Der Autodidakt könnte also höchstens Ausführlicheres verlangen.

Die vorliegende Gauss'sche Logarithmentafel gehört auch zu der oben besprochenen Art von Tabellenwerken, welche für „Schule und Praxis“ bearbeitet sind; doch ist sie vorwiegend für den Fachmann bestimmt und wird gewiss die von Astronomen und anderen praktischen Rechnern bisher vielfach gebrauchten Lalande-Köhler'schen Tafeln (mit 5 Decimalen) verdrängen.

Sie enthält in der ersten Tafel die gemeinen Logarithmen der Zahlen von 1—11000, je 51 Zeilen auf der Seite, an deren unterem Ende, ähnlich wie bei Bremiker und Schrön, die Zahlen S und T zur Auffindung der Sinus und Tangente kleiner Winkel (in Secunden verwandelt) beigefügt sind.

Tafel II enthält Constanten (rein mathematische), die wir in so grosser Anzahl bisher nirgends gefunden.

Die III. Tafel gibt die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von 0^0 bis 1^0 von Secunde zu Secunde und 1^0 bis 6^0 von zehn zu zehn Secunden, während Tafel IV die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von Minute zu Minute gibt. Jede Seite umfasst einen vollen Grad, was den Vortheil gewährt, dass die gleich bezifferten Minuten auf jeder Seite an derselben Stelle wiederkehren; „das Auge des Rechners, hieran einmal gewöhnt, wird sich unwillkürlich von selbst nach der gesuchten Stelle richten, ohne durch lästiges Umherirren zu ermüden.“

Die Gauss'schen Logarithmen sind in der V. Tafel in derselben Anordnung wie bei Wittstein gegeben. Zur grösseren Bequemlichkeit sind die der Anwendung zu Grunde liegenden Formeln am Kopfe und Fusse jeder Seite angeführt.

Tafel VI ist den Napier'schen Logarithmen gewidmet, über die schon oben gesprochen; Vielfache von M und $\frac{1}{M}$ sind hinzugefügt.

Die VII. Tafel enthält die natürlichen Zahlen der goniometrischen Functionen, sowie Sehnen, Bogenhöhen und Bogenlängen für den Radius 1, die Kreisumfänge und Kreisflächen für den Radius 1 bis 100. Die erste Tafel schreitet in dem Intervalle von 10 Minuten fort (Wittstein 15′), gibt aber nur 4 Decimalen.

Eine Zierde des ganzen Buches ist die VIII. Tafel, welche die Quadratzahlen von 0,00 bis 10,00 enthält und mit einem sehr ausführlichen Interpolationsapparat versehen ist, wie überhaupt sämmtliche Tafeln. In dieser Ausführlichkeit findet man sie in anderen Tafeln nicht, und werden dieselben gewiss jedem praktischen Rechner, der sie bei allen Wahrscheinlichkeitsrechnungen braucht, sehr willkommen sein.

Die IX. Tafel gibt Cubikzahlen, Kugeloberflächen und Kugelinhalte, die X. die Dimensionen des Erdsphäroids nach Bessel. Tafel XI beschäftigt sich mit dem metrischen Maass-, Gewichts- und Münzsystem und die XII. dient zur Verwandlung sämmtlicher Maasseinheiten in pariser Zolle und Meter. Die XIII. Tafel endlich enthält chemische und physikalische Tabellen, wo wir die Angabe der Autoritäten vermissen.

Alle 13 Tafeln sind auf 142 grossen Octavseiten enthalten, mit Recht sind altenglische Typen gewählt, welche der Grösse nach die Mitte halten zwischen denen in Wittstein und Bremiker (7stellig).

Die Ziffer 5 in der letzten Stelle ist mit einem horizontalen Striche versehen, wenn sie aus 4 durch Abkürzung entstanden ist.

Um die einzelnen Tafeln besser aufzufinden, sind zwischen dieselben bunte Blätter eingeschaltet.

Man wird nach dem Angeführten obiges Urtheil, dass das Buch vornehmlich für den Rechner geeignet ist, gerechtfertigt finden, und will Referent nur hoffen, dass sich der Verfasser entschliessen möchte, alles auszumerzen, was für die Praxis überflüssig ist. — Die Ausstattung ist gut und liegt die Tafel beim Aufschlagen glatt und fest.

Berlin. GUSTAV HELLMANN.

HOFFMANN, J. C. V., Prof. und Director, Gründer und Redacteur dieser Zeitschrift. Vorschule der Geometrie, ein methodischer Leitfaden beim Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre für die unteren Classen der Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, sowie zum Selbstunterrichte, besonders für Volksschullehrer. 1. Lieferung: erste Hälfte der Planimetrie, Seite 1—154 mit 230 Holzschnitten und 2 lithographirten Figurentafeln. Halle, 1874 bei Louis Nebert. Preis der 1. Lieferung. 3 Mk.*)

Im sprachlichen Unterrichte denkt kein vernünftiger Lehrer mehr daran mit jungen Knaben sogleich abstracte Sprachwissenschaft zu treiben; einfache, concrete Uebungen treten Jahre lang in den Vordergrund, werden unablässig wiederholt und führen im langsamen Fortschritte zur Beherrschung des grammatischen Lehrstoffes. Wohl ist seit Pestalozzi mehr und mehr auch für die Mathematik die Nothwendigkeit erkannt das räumliche Anschauungsvermögen zu entwickeln und der Vortheil gewürdigt worden, welcher hierdurch der methodischen Einprägung des abstracten Lehrstoffes erwächst. Aber die dem Unterrichte wenigstens in unseren Gymnasien zugemessene wöchentliche Stundenzahl ist knapp und philologische Einseitigkeit arbeitet fortdauernd daran dies knappe Maass womöglich noch mehr herabzudrücken. So drängt der Unterricht vieler Lehrer vorwärts um nur den vorgeschriebenen Lehrstoff zu bewältigen; zum Theil auch in Ueberschätzung der mittleren Durchschnittswirkung, welche die an sich klare Darstellung einfacher Sätze haben müsse, gelangen sie factisch dazu nur für die Begabtern zu arbeiten und werden um so weiter auf dieser abschüssigen Bahn fortgetrieben, je mehr sie darauf angewiesen sind die häusliche Arbeitskraft im Interesse der sprachlichen Leistungen zu schonen. Beseitigung des Uebels ist nur von einem vorbereitenden Unterrichte zu erwarten, der neben dem wissenschaftlichen Unterrichte hergeht

*) Der Herausgeber dieser Zeitschrift hat Bedenken getragen, diese für ihn sehr schmeichelhafte Beurtheilung seines Büchelchens hier aufzunehmen, da sie natürlich jedem Leser als eine oratio pro domo erscheinen muss. Doch hat ihn schliesslich der Umstand, dass ja auch die Mängel des Buches nicht verschwiegen sind, sowie die jedem Menschen auferlegte Pflicht der Selbsterhaltung bewogen, die Besprechung zu veröffentlichen. Er knüpft hieran zugleich die Bitte, diejenigen Herrn Lehrer, welche das Buch benutzen oder einführen sollten, möchten ihm Druckfehler oder sonstige von ihnen aufgefundene Irrungen und Mängel gütigst mittheilen.

Der Herausgeber.

oder besser noch in gesonderten Stunden ihm vorhergeht, der die Schüler mit der Auffassung und Benennung räumlicher Verhältnisse bei Zeiten vertraut macht, der das Verständniss der wichtigsten geometrischen Sätze ohne strenge Beweisführung durch Zeichnen und Messen vermittelt, der endlich auch sonst durch geeignete praktische Uebungen und Anwendung der reinen Geometrie das Interesse für die Wissenschaft selbst hervorruft und befestigt. Derselbe lässt sich, wie es hin und wieder geschieht, in den Zeichenunterricht einschieben und bedarf für manche Arten von Schulen (als Mädchen-, Bürger-, Fortbildungs- und niedere Gewerbeschulen) gar nicht der wissenschaftlichen Erweiterung. Für die anzuwendende Methodik ist die angezeigte Vorschule der Geometrie ein ganz vortrefflicher Wegweiser, welchem Eigenartigkeit der Darstellung und verständige Sorgfalt in der Auswahl des Lehrstoffes einen hervorragenden Platz in der einschlagenden Literatur sicher stellen.

Die zweite Lieferung, welche im Laufe dieses Sommers erscheinen soll, wird die Lehre von der Aehnlichkeit, von der Flächengleichheit (Flächenberechnung), das Wichtigste von den Curven und einige Aufgaben der Geodäsie enthalten: die erste Lieferung beschränkt sich auf Punkt, Gerade, Kreis, Winkel, Parallelen, Dreieck, Viereck und Vieleck.

Indem nach Loreys Vorgange der Würfel zum Ausgangpunkte der Betrachtung genommen wird, gelangt die Einleitung (S. 1—7) zur Unterscheidung des realen (physischen) Körpers von dem idealen (mathematischen) Körper, sowie zu den Grundanschauungen von Fläche, Linie, Punkt. Die Unbeweglichkeit des allgemeinen Raumes wird hervorgehoben: bei eintretender Bewegung findet in demselben, als dem Elemente der Bewegung, nur eine Verschiebung der darin gesetzten räumlichen Grenzen statt. Was durch die Bewegung von Punkt, Linie und Fläche hervorgeht, wird veranschaulicht.

Der eigentliche Inhalt gliedert sich, wie folgt:

(Parallelen zwischen Parallelen). — §. 22. Winkelpaare bei durchschnittnen Parallelen.

Geschlossene geradlinige Figuren. §. 23. Anwendung der Gesetze in §. 22. A) Zwei Ungleichlaufende (Geneigte) von einer Secante geschnitten. B) Das Dreieck.

Arten der Dreiecke und Vierecke. §. 24. Das gleichseitige (reguläre oder allseitig-symmetr.) Dreieck. Bestimmungsstücke desselben. — §. 25. Deckung (Congruenz) gleichseitiger Dreiecke. — §. 26. Das reguläre Doppeldreieck oder der Normalrhombus. — 6. 27. Das gleichschenklige (einseitig-symmetrische) Dreieck. — §. 28. Bestimmungsstücke des gleichschenkligen Dreiecks. Congruenz gleichschenkliger Dreiecke. Drehung derselben. — §. 29. Das gleichschenklige Doppeldreieck oder der gemeine Rhombus. — §. 30. Construction des Rhombus aus seinen Bestimmungsstücken. — §. 31. Das rechtwinklige Dreieck. — §. 32. Construction des rechtwinkligen Dreiecks aus seinen Bestimmungsstücken. Congruenz.

Figuren, welche aus dem rechtwinkligen Dreiecke entstehen. Parallelogramme. A) Aus dem gleichschenklig-rechtwinkligen. §. 33. Das Quadrat. — B) Aus dem ungleichseitig-rechtwinkligen. §. 34. Das Oblongum (längliches Rechteck). — §. 35. Das ungleichseitige Dreieck. Construction desselben aus seinen Bestimmungsstücken. Congruenz. — §. 36. Uebersicht I. der Dreiecksbestimmungs-Stücke und der Congruenzsätze. II. der Eintheilung der Dreiecke. — §. 37. Das Rhomboid. — §. 38. Uebersicht über die Parallelogramme. A) Eintheilung. B) Verwandtschaft derselben.

Die übrigen Vierecke. — §. 39. Das Trapez. A) Das symmetrische oder gleichschenklige. B) Das gemeine. — §. 40. Das Deltoid. — §. 41. Das Trapezoid (unregelmässige Viereck).

Das Vieleck. §. 42. A) Das gemeine (unregelmässige). — §. 43. B) Das reguläre in Verbindung mit dem Kreise. a) Das eingeschriebene (Sehnenvieleck). b) Das umgeschriebene (Tangentenvieleck). — §. 44. Uebergang der gebrochenen Linie in die krumme (Curve). — §. 45. Der Kreis (Ergänzung zu den §§ 5—10 u. 12). A) Peripherie- und Centriwinkel. B) Secanten und die übrigen excentrischen Winkel.

Was das Werk zunächst auszeichnet, ist die consequent durchgeführte Berücksichtigung, welche der Bewegung von Figuren zu Theil wird: in der mannichfaltigsten Weise werden Figuren umgeklappt, gedreht, verschoben. Im Anschlusse hieran tritt verdienter Massen das Zeichnen in den Vordergrund, die genausten Anweisungen, Warnungen vor leicht vorkommenden Verstössen oder Ungeschicklichkeiten, Belehrungen über den Gebrauch von Zirkel, Lineal und anderen Instrumenten sind reichlich eingestreut. Auch sonstige praktische Anwendungen der Geometrie sind, wo immer die Gelegenheit sich bot, mit Geschick eingeflochten. Der Blick weitet sich bei solcher Behandlung des Stoffes, der die ihm sonst anklebende Trockenheit völlig verliert: Beziehungen auf die neuere namentlich auf die discriptive Geometrie fehlen nicht und schärfere Begriffs-Bestimmungen lassen sich in klarer Weise geben — genug durch die Behandlung des Stoffes erscheint das doppelte Problem glücklich gelöst, sowohl für den wissenschaftlichen Unterricht höherer Lehranstalten diejenige Vorbereitung zu geben, welche mit der kurzen Unterrichtszeit auszukommen gestattet und doch die Unterrichtserfolge sicher stellt, als auch für die erwerbenden Berufsclassen diejenige Summe von Kenntnissen, welche sie ohne Schaden nicht mehr entbehren können, in anschaulicher Klarheit zusammenzustellen.

Was das Zeichnen anbetrifft, so sei es dem Referenten gestattet auf die Vorschriften über die mannigfaltigen Arten der Versinnlichung von Punkt und gerader Linie (S. 8 und 9), über die Verbindung zweier Punkte durch einen geradlinigen Zug, über Schraffirung, über die Zeichnung von Parallelen und Kreisen hinzuweisen. Hinzuzufügen ist die Verwendung des Bogenzweiecks zu Spitzbögen (S. 31), die Construction von Schlangenlinien, Rosetten und Kleeblatt aus Kreisbögen (S. 33), endlich auch die Benutzung von Oblongum, Quadrat und Rhombus für das Musterzeichnen (S. 111). Alle diese Anwendungen beleben die vielfältigen Zeichnungen, welche die mathematischen Grundwahrheiten dem Bewusstsein erschliessen helfen.

In gleicher Weise sind die übrigen praktischen Anwendungen der Geometrie betont. — Gesichtslinie, Messschnur und Messkette, Schätzungen von Längen und Winkeln, Bestimmung des mittleren Beobachtungsfehlers, der hierbei stattfindet, Täuschungen über die genaue Lage einer Geraden, grosse und kleine Längen, physikalische uud geographische Ortsbestimmungen (horizontal, vertical, schräg, Mittagslinie, Himmelsgegenden), Setzwage, Canalwage, das Axenkreuz der Krystallographie, das Contact-goniometer, Bestimmung des Winkels an einer Mauerkante, Theodolith, Construction von Scalen und Maassstäben — alle diese Punkte sind gehörigen Ortes besprochen oder werden zum Gegenstande praktischer Uebungen gemacht.

Ganz besonders sind die Augenmassübungen hervorzuheben, welche sich auf die Bestimmung von Längen und Winkeln beziehen. In einzelnen gewerblichen Lehranstalten ist deren Wichtigkeit längst anerkannt, ihre Einführung in den Unterricht von Gymnasien und Realschulen eine nicht länger aufzuschiebende Nothwendigkeit. Derartige Uebungen sind hier in ein recht zweckmässig angelegtes System gebracht. Das Zeichnen fordert stets die Aufnahme ganz bestimmter Grössen und auf die Controle der Zeichnung soll mit Strenge gehalten werden. Dadurch allein wird es möglich die mathematischen Sätze als Ergebnisse der Erfahrung zu gewinnen, welche eine vollständige Analogie mit den Naturgesetzen zeigen und sie werden demgemäss auch geradezu als „Gesetze“ bezeichnet.

Allgemeine wissenschaftliche Beziehungen, insbesondere solche auf die höhere Geometrie, sind vielfältig vorhanden und verleihen dem propädeutischen Cursus ein Interesse, welches der Deduction der Elemente nach der starren euklidischen Methode abgeht. So finden die Begriffe von Strahlenbüschel und Transversale Aufnahme, desgleichen die Auffassung des Berührungspunktes einer Tangente als Doppelpunktes, die Theorie der Symmetrie, sowie die von Chordale und Centrale. Diese beiden Theorien ziehen sich durch das ganze Werk hin und tragen wesentlich dazu bei die Natur der Grundgebilde in helles Licht zu setzen. Indem z. B. das gleichseitige Dreieck als allseitig symmetrisches, das gleichschenklige als einseitig symmetrisches Dreieck erkannt wird, wie wesentliche Sätze und Eigenschaften erschliessen sich nicht sofort dem Bewusstsein! Auch sonst den Elementen ferner liegende Punkte finden dankenswertheste Berücksichtigung: pythagoreisches Dreieck, Deltoide und Trapezoide mit convexem Winkel, Vielecke mit sich kreuzenden Seiten, excentrische Winkel, Figuren, die entweder Kreisen oder Figuren derselben Art eingeschrieben, resp. umgeschrieben sind. Unter den zahlreichen Constructionen, die mitunter selbst für die Fundamentalaufgaben Neues liefern, erregen besonderes Interesse die Trisection von Winkeln, die Construction der wichtigsten regulären Vielecke, wobei auch die bekannte Relation zwischen der Seite von Fünfeck, Zehneck unb Sechseck, die demselben Kreise eingeschrieben sind, nicht fehlt, endlich die Renaldi'sche Näherungsconstruction der Seite eines regulären n-Ecks.

Nicht zu übersehen ist die sorgsame Berücksichtigung, welche der Begriff des Unendlichen erfährt: bei den verschiedensten Gelegenheiten wird hierüber gehandelt und überall findet sich die nöthige Strenge der Auffassung mit planster Einfachheit vereinigt.

Ein besonderes Verdienst besteht in der Feststellung einer vernünftigeren Nomenclatur, als in einzelnen Punkten die übliche ist, und verdienen die nach dieser Seite hin gemachten Vorschläge jedenfalls die eingehendste Beachtung aller Fachgenossen. Besondere Hervorhebung möchten folgende Einzelheiten verdienen: „Winkelrechte“ statt „senkrechte oder perpendiculäre“ Gerade, „Winkelrechte“ statt „Loth oder Senkrechte oder Perpendikel,“ „Winkelebene“ statt „Winkelraum,“ „Aussenwinkel“ (an Parallelen) statt „äussere“ Winkel, ferner Benennungen wie „überrechter“ Winkel ($= 270^0$) „überstumpfe“ und „überspitze“ Winkel (beziehungsweise zwischen 180^0 und 270^0 oder 270^0 und 360^0), „Grundseite“ (statt „Grundlinie“), „Gipfelwinkel“ (Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks), endlich „Normalrhombus“ (gleichseitiges Doppeldreieck).

Verwandter Art sind die Bemühungen den mathematischen Ausdruck von Weitschweifigkeit oder sprachlichen Unrichtigkeiten zu säubern, welche leider in weiten Kreisen sich eingeschlichen haben und durch den Gebrauch fast als sanctionirt erscheinen. So ist „Kreis“ gleichbedeutend mit „Kreislinie“ und nicht mit „Kreisfläche“ — wer denkt z. B. bei dem Worte „Parabel“ an eine Fläche? — Ausdrücke, wie „ich setze in O ein und beschreibe mit der Zirkelweite etc.“ werden mit Recht als breit bezeichnet. Warum sagt man nicht: „Ich ziehe (statt des veralteten „ich schlage“) aus O mit einem Radius von 3 Cm. einen Kreis“? „Treffen“ und „Schneiden“ werden in passender Weise unterschieden, der Ausdruck

„einander treffen" statt des Ausdruckes „sich treffen" empfohlen, desgleichen „Gegenseite" statt „entgegengesetzte" Seite, „Gegenpunkte" statt „entgegengesetzte" Punkte, „umgeschrieben" statt „umschrieben." Für die Ausdrücke „eine Winkelrechte (in einem Punkte auf einer Geraden) errichten oder von einem Punkt auf ein Gerade fällen wird gefordert zu sagen: Die Winkelrechte etc. Ebenso bei dem Ausdrucke „durch einen Punkt die (statt eine) Parallele zu einer Geraden ziehen etc.

Das methodische Verdienst der Arbeit ist sehr bedeutend. Von der accurat und sauber Seitens der Schüler anzufertigenden Zeichnung wird ausgegangen: die Besprechung der gezeichneten Figur schliesst sich von selbst an und wird alsdann durch geschickt gewählte Fragen das geometrische Gesetz, um das sich's handelt, aus der Figur heraus entwickelt. Vielfältige Uebungen und Verificationen mit Hülfe anderer Figuren, in passenden Fällen auch ausgeführte Beweise in strengerer Form — die Vorschule soll auch von solchen einen Vorgeschmack geben — erweitern, befestigen und vertiefen die gewonnene Erkenntniss. Wie dies unter stufenweisen Fortschritten vom Leichteren zum Schwereren geschehen müsse, ist in knappester, präciser Form auseinander gesetzt und selbst unerfahrene Lehrer werden sich sehr bald in der Methode zurecht finden.

Nur wenige und meist nicht sehr erhebliche Punkte sind es, in denen Referent eine abweichende Meinung geltend machen möchte.

So ist ihm auffällig gewesen, dass die Verschiedenheit der Lage, welche zwischen einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Kreislinie stattfinden kann, nicht besonders erörtert ist. Es lag ja so nahe den Paragraphen „Gerade und Kreis", Kreise in Verbindung mit einander" den Paragraphen „Punkt und Kreis" vorhergehen zu lassen.

Ein besonderer Paragraph handelt über die Krümmung verschiedener Kreise und wird hier sehr gut auseinandergesetzt, wie ein Kreisbogen, der zu einer Sehne von bestimmter Grösse gehört, um so weniger von dieser zu unterscheiden ist, je grösser sein Radius wird. Damit hätte der Absatz schliessen und der Zusatz: „Daher Mass der Krümmung $= \frac{r}{1}$ d. h." — wegbleiben sollen: denn mit den gegebenen Prämissen würde es sich auch allenfalls reimen, wenn man irgend einen andern Ausdruck, der mit unbegrenzt zunehmenden Werthen von r unbegrenzt abnimmt, als Mass der in Rede stehenden Krümmung annähme.

S. 43 und an andern Stellen kommt der Ausdruck „proportional" vor, indem es heisst, dass Winkel und Bogen zugleich mit einander wachsen und abnehmen, d. h. proportional sind. Hiergegen lässt sich gewiss nichts einwenden, sofern man das Wort „proportional" in seiner allgemeinsten Bedeutung nimmt. Gewöhnlich aber, wenn nicht ausdrückliche Zusätze, wie „umgekehrt“ oder „nach quadratischem Verhältnisse“ den Sinn des Wortes „proportional“ modificiren, bezieht sich der Ausdruck proportional nur auf solche Grössenarten, die in demselben Verhältnisse zunehmen oder abnehmen. Dass solches mit Winkeln oder Bögen der Fall ist, hätte nicht nur gesagt, sondern auch durch vielfältige Messungen verificirt werden sollen.

Das Grundgesetz: „die Summen zweier Dreiecksseiten ist grösser als die dritte“ gestattet auch noch den andern Ausdruck, den manche Lehrer ungern vermissen werden: „Die Differenz zweier Dreiecksseiten ist kleiner als die dritte Seite.“

Bei der Besprechung endlich des Verhältnisses zwischen Peripherie- und Centriwinkeln waren auch convexe Centriwinkel mit in die Betrachtung zu ziehen.*) Freilich subsumiren sich dieselben dem einen Hauptfalle. Aber es ist gut die convexen Winkel in den Elementen nicht blos zu erklären, sondern auch, wie es übrigens in der Vorschule reichlich geschieht, nach Möglichkeit zu verwenden.

Die beigefügte Uebersicht der wichtigsten Constructionen und das sorgfältig ausgeführte Verzeichniss von Druckfehlern und Irrungen bildet eine willkommene Zugabe des Werkes.

Die erste Lieferung soll 3 Mark kosten und mit Rücksicht auf Ausstattung und Umfang (154 Octavseiten), sowie auf die zahlreichen Holzschnitte und die beiden lithographirten Figurentafeln erscheint dieser Preis keineswegs hoch bemessen. Dennoch wird er ein Hinderniss für die Einführung an solchen Schulen bilden, welche weniger wohlhabenden Städten angehören, und Referent möchte der verehrlichen Verlagshandlung zu bedenken geben, ob sie im Interesse der Einführung nicht dennoch entweder eine Preisermässigung eintreten lassen oder wenigstens die erste Lieferung auch für sich allein verkaufen wolle. Mit der letzteren können Gymnasien und Realschulen allenfalls auskommen, während Seminarien, gewerbliche und Bürgerschulen unbedingt auf das ganze Werk angewiesen sind.

Referent behält sich vor auch die zweite Lieferung seiner Zeit eingehend zu besprechen: die erste Lieferung dürfte den Werth des ganzen Werkes verbürgen für Lehrer aller Arten von niederen und höheren Schulen als eine Fundgrube gesunder Methodik, für einzelne Schüler, wie für ganze Classen als Anhalt zur Repetition und zur Ausführung häuslicher Arbeiten, für Autodidakten endlich als eine willkommene Hülfe, um über die ersten Schwierigkeiten der Geometrie hinwegzukommen.

Gumbinnen. Dr. H. Schwarz.

---

*) Ist geschehen. S. Vorsch. § 45. S. 151. Folges. III. Fig. 166.
Der Verf.

B) Zum Repertorium neuer Entdeckungen und Erfindungen*).

a) Astronomie.

(Von G. Hellmann in Berlin.)

Da in dem Repertorium der Zeitschrift hinfort auch die Astronomie berücksichtigt werden soll, wird es nicht unangemessen erscheinen, einige Bemerkungen über den jetzigen Stand genannter Wissenschaft vorauszuschicken.

Als am Ende des vorigen Jahrhunderts nach dreitausendjähriger Beobachtung das Sonnensystem nach allen Seiten hin ziemlich erforscht war und seine Theorie mit Laplace's mécanique céleste als abgeschlossen betrachtet werden konnte, war es naturgemäss, dass sich die Astronomen der Fixsternwelt zuwandten, die man bis dahin fast ganz vernachlässigt hatte. William Herschel namentlich war es, welcher in dieses wüste Chaos einiges Licht brachte und die Grundlagen der Stellarastronomie legte. Seitdem hat dieses Feld astronomischer Forschung ungeheure Fortschritte gemacht: die Beobachtungen der Doppelsterne haben gezeigt, dass auch in jenen unermesslichen Fernen das allgemeine Gravitationsgesetz gilt; man bestimmte, Dank der vervollkommneten Instrumente, die ersten Fixsternparallaxen, registrirte die Nebelflecken und Sternhaufen und schuf eine Photometrie des Himmels.

Als sich dann mit Kirchhoffs und Bunsens glänzender Entdeckung der Spektralanalyse auch für die Astronomie neue Perspectiven eröffneten und über die Natur und physische Beschaffenheit der Himmelskörper nie geahnte Aufschlüsse erlangt wurden, konnte man mit Recht von einer Astrophysik sprechen. Immer mehr gewinnt dieser jüngste Forschungszweig Eingang; der Kammerherr von Bülow liess 1871 auf seinem Gute Rothkamp bei Kiel eine diesem speciellen Studium gewidmete Sternwarte errichten, die unter der ausgezeichneten Leitung Vogel's schon namhafte Resultate geliefert hat. Die Universität Oxford ist jetzt mit dem Baue einer ähnlichen Warte beschäftigt und auch der preussische Staat hat die Absicht, bei Potsdam eine „Sonnenwarte" zu errichten.

Ein würdiger Rivale der Spektralanalyse, war die Photographie nicht minder berufen, auf die weitere Entwickelung der Himmelskunde befruchtend einzuwirken. Wenn vor etwa 40 Jahren Beer und Mädler die Herstellung der berühmten Mondkarte circa 600 Nachtwachen kostete, stellen heutzutage Warren de la Rue, Rutherford u. a. in wenigen Augenblicken die genauesten Mondphotographien her, denen der Astronom auf seiner Studirstube mit dem Mikroskop alles mögliche Detail entnehmen kann.

Noch einen Zweig unsrer umfangreichen Wissenschaft möchte ich nicht unerwähnt lassen, da er bis vor wenigen Jahren von gewissen Astronomen gleichsam als nicht zünftig betrachtet und desshalb hintenangesetzt, erst in den letzten Decennien Dank der Bemühungen Schiaparelli's, Weiss's, Le Verrier's u. a. zu Ehren gekommen ist, ich meine die Meteorastronomie. Wir setzen jetzt Meteorsterne mit Kometen in Verbindung und berechnen ihre Bahnen fast ebenso sicher, wie die der Planeten. Dabei blieb auch die chemische Untersuchung der Meteoriten nicht zurück. Haidinger opferte ihr sein ganzes Leben und Meunier wagte es schon, einen „ciel géologique" zu schreiben.

Da sind in kurzen Umrissen die Gebiete der Himmelskunde, welche unser Jahrhundert theils neu geschaffen, theils weiter ausgebildet und vorzugsweise gepflegt hat. Dabei bleibt natürlich die weitere Erforschung unsres Sonnensystems nicht zurück. Seit Le Verrier's unvergesslicher Errechnung des Neptun hat man die Theorien der Planeten mit vielem Eifer zu vervollkommnen gesucht; ist zwar noch nicht entschieden, ob ein intramerkurieller Planet existirt, so seigen doch die neuesten Untersuchungen

*) Das Repertorium soll fortan in der 2. Abth. stehen, da es (logisch genommen) zu den liter. Berichten gehört. Ebenso die Bibliographie. D. Red.

Newcomb's über den Uranus, dass man bis jetzt keinen Grund hat, einen Wandelstern jenseits der Neptunsbahn anzunehmen. Dagegen wird die Anzahl der Planetoiden alle Jahre grösser und werden so immer mehr astronomische Rechner erforderlich, um sie uns durch Bahnbestimmung zu sichern. Nicht minder eifrig jagt man den Kometen nach, wesentlich angeregt durch die Wiener Akademie der Wissenschaften, welche seit einigen Jahren die Vermittlung der Kometenentdeckungen übernommen und zugleich auch Preise für dieselbe ausgesetzt hat.

Vor allem beschäftigt aber jetzt eine Frage die Astronomen lebhaft, die Bestimmung der Sonnenparallaxe. Die Venusdurchgänge bieten bekanntlich bis jetzt die beste Gelegenheit zur Entwicklung dieser wichtigen Constante dar und stehen uns solche am 8. December 1874 und am 7. December 1882 bevor.

Schon 1857 machte der königliche Astronom von England G. B. Airy auf die Wichtigkeit beider Ereignisse aufmerksam und sind seitdem bedeutende Arbeiten über den Gegenstand erschienen. Ich erwähne namentlich Hansen (Abhdlg. d. math.-phys. Kl. d k. Sächs. Gesellschft. d. Wissen. Bd. 9. No. 5), welcher zuerst allgemein die Theorie der Durchgänge behandelt und dann speciell den von 1874 bespricht. Er empfiehlt auch Beobachtungen der kürzesten Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne zu machen; dazu günstig gelegene Orte sind: Japan, das nordöstliche China und die Amurländer. Auf der Südhalbkugel sind die Inseln in der Nähe des 50. Breitengrades weniger günstig gelegen. G. Neumayer plaidirt für die antarktische Zone als Beobachtungsstation (Wiener Sitzungsberichte 1870 März). Th. v. Oppolzer empfiehlt die Beobachtung der Positionswinkel der Venus gegen den Declinationskreis des Sonnencentrums (Wien. Sitzb. 1870. April). Kanzleirath Paschen in Schwerin weist nach, wie die Photographie zur Fixirung der Momente des Durchganges geeignet ist (Astronomische Nachrichten No. 1883—85). Ebenso Faye (Comptes Rendus t. LX) und Warren de la Rue (Monthly Notices 1866). Die beiden französischen Astronomen Wolf und André haben das Phänomen des „schwarzen Fadens," welches bei den Contacten so störend wirkt, eingehender experimentell untersucht. Leider hat sich ergeben, dass zwischen verschiedenen Beobachtern in der Fixirung der Contacte eine beinahe constante und ziemlich beträchtliche Differenz besteht (Revue scientifique 1872 avril 20). —

Mit Hülfe eines Globus ist es leicht sich den Verlauf der Erscheinung vom 8. Dec. dieses Jahres auf der Erdoberfläche zu veranschaulichen.

Man stelle denselben mit einer südlichen Polhöhe von 22° 49′ ein, bringe Berlin unter den (Messing)meridian und hierauf den Zeiger des Stundenkreises auf 12^h. Dreht man nun den Globus um $14^h,5$ nach Osten, so begreift der östliche Theil des Horizontes am Globus diejenigen Orte, für welche die Venus bei Sonnenuntergang, der westliche Theil alle diejenigen, für welche sie bei Sonnenaufgang in die Sonnenscheibe eintritt. Um die Punkte kennen zu lernen, für welche der Austritt sichtbar ist, bringe man Berlin wieder unter den Meridian und drehe nun um $19^h,5$ gegen Osten. Der östliche Theil des Horizontes umfasst dann alle diejenigen Orte, für welche die Venus bei Sonnenuntergang austritt, der westliche diejenigen, für welche bei Sonnenaufgang die Venus die Sonnenscheibe verlässt.

Das deutsche Reich wird fünf Expeditionen absenden und zwar: nach den Kerguelen oder Macdonaldinseln, nach den Aucklandsinseln, nach China (wahrscheinlich Tschifu), nach Mauritius und nach Persien (wahrscheinlich Ispahan). Als hauptsächlichste Beobachtungsmethoden werden heliometrische Messungen der Venus auf der Sonnenscheibe, Contactbeobachtungen und photographische Aufnahmen in Anwendung kommen. Die englischen Astronomen gehen nach Alexandrien, den Kerguelen, Rodrigues, Sandwich- und Aucklandsinseln. Russland errichtet zahlreiche Stationen in Sibirien, welche mit den deutschen correspondiren sollen und Frankreich wird in Yokahama, Mascat, Suez, Réunion und der Insel St. Paul beobachten lassen.

Schliesslich mache ich noch auf einige Schriften aufmerksam, die den Dilettanten der Astronomie die Wichtigkeit des besprochenen Phänomens klar legen wollen.

Vor allen ist zu erwähnen: Dubois, Les passages de Vénus sur le disque solaire, considérés au point de vue de la détermination de la distance du Soleil à la Terre. Paris 1873 (3 fr. 50 c.). Das Buch ist mit grosser Sachlichkeit geschrieben und kann allen Interessenten, welche mathematische Kenntnisse besitzen, dringend empfohlen werden. Hermann J. Klein hat ein kleines Schriftchen erscheinen lassen: Die Vorübergänge der Venus vor der Sonnenscheibe und ihre Bedeutung für die Astronomie. Köln 1874 (10 Sgr.), welches von mathematischen Deductionen absieht, aber sonst auf 36 Seiten das Wichtigste der Erscheinung behandelt. Weniger zu empfehlen ist: Schorr, Der Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe am 8. December 1874. Braunschweig 1873 (1 Thlr. 10 Sgr.); es enthält viel Ungehöriges, ja Falsches; doch ist eine Karte beigegeben, welche den Lauf der Erscheinung auf der Erdoberfläche veranschaulicht.

b) Meteorologie.

Von demselben.

Wir glauben unsern ersten Bericht über die Fortschritte der Meteorologie mit keinem würdigeren Gegenstande beginnen zu können, als mit einer kurzen Besprechung des ersten internationalen Meteorologencongresses, welcher vom 2. — 16. September 1873 in Wien stattfand. Derselbe war bekanntlich durch die Leipziger Meteorologenconferenz von 1872, welche als eine neue Section der deutschen Naturforscher- und Aerzte-Versammlung tagte, hervorgerufen worden und hatte officiellen Charakter, indem 30 Delegirte, 17 verschiedenen Staaten angehörig, erschienen waren.

Es ist bei Braumüller in Wien ein ausführlicher „Bericht über die Verhandlungen des internationalen Meteorologencongresses“ erschienen, aus dem wir nur einige Fragen principieller Natur hervorheben.

Herr General Myer, der Delegirte der V. St. von Nord-Amerika stellte den Antrag, der Congress möge es als wünschenswerth erklären, dass mindestens einmal des Tages gleichzeitige Beobachtungen an möchlicst vielen Stationen der nördlichen Hemisphäre angestellt werden mögen, um auf deren Grundlage synoptische meteorologische Karten zu construiren. Der Congress bot dem Antragsteller die Gelegenheit, sich mit den Vorständen andrer Beobachtungssysteme zu verständigen, so dass derselbe in der Lage war, schon am 4. December 1873 ein Kabel-Telegramm an Herrn Jelinek, Director des Wiener meteorologischen Instituts, zu richten, worin er mittheilte, dass England und Russland die proponirten Modalitäten angenommen haben und um Mitwirkung österreichischer Seite ersuchte. Es werden demnach vom 1. Januar 1874 angefangen um $1^h\,49^m$ Nm. mittlerer Wiener Zeit Beobachtungen in Wien, Graz, Krakau, Kremsmünster, Lemberg und Pola angestellt und zweimal im Monate an Herrn G. Myer eingesendet werden. Auch die ungarische Centralanstalt in Ofen wird sich mit einigen Stationen betheiligen. (Zeitsch. d. österr. Gesellsch. f. Meteorol. IX., No. 2.)

Einen zweiten überaus wichtigen Antrag stellte Herr Plantamour, Director der Genfer Sternwarte, betreffend die Gründung einer internationalen Centralanstalt für Meteorologie. Es soll dieselbe die Daten, welche sich auf die vergleichende Meteorologie beziehen und von den Stationen der verschiedenen Länder eingesendet werden, sammeln, sichten (wo es nöthig ist, reduciren) und veröffentlichen. Diese so schwierige Frage wurde einer Commission von 5 Mitgliedern zur Berathung überwiesen.

Nicht minder wichtig als der Myer'sche Antrag ist die Organisation eines Beobachtungssystems an den chinesischen Küsten. Herr Hart, General-inspector des Centralbüreaus für die chinesischen Seezölle liess durch den Delegirten Campbelle, ersten Secretär, dem Congresse die bezüglichen

Documente vorlegen. Hiernach sollen an den chin. Küsten 23 meteorol. Stationen errichtet werden, von denen auch telegraphische Witterungsberichte und Sturmwarnungen ausgehen sollen. Centralstation wird Shanghai.

Unter anderen ist zu erwähnen, dass hinfort allgemein die englischen Buchstaben zur Angabe der Windrichtung gebraucht werden sollen, also N = Nord, E = Ost, S = Süd, W = West, und dass sozusagen ein A B C der Meteorologie geschaffen wurde, indem gewisse Symbole zur Bezeichnung der Hydrometeore und sonstiger Erscheinungen vorgeschlagen wurden. So bedeutet z. B. $\bigcirc$ Regen und zwar $\bigcirc^0$ schwachen, $\bigcirc^2$ starken etc. —

Eine Einigung über die den Beobachtungen zu Grunde liegenden Masseinheiten konnte noch nicht erzielt werden; der allgemeinen Einführung des Metersystems steht zur Zeit noch die grosse Verbreitung der engl. Masseinheiten entgegen. Als meteorol. Zeiteinheiten wurden gewählt, 1) der mittlere Sonnentag von Mitternacht zu Mitternacht gerechnet, 2) das Kalenderjahr, 3) der bürgerliche Monat, wobei das Monatsmittel als ein arithmetisches Mittel gebildet wird, und soll das Mittel der 12 Monatsmittel als Jahresmittel gelten, 4) Dove's Pentaden (13 im Jahre). Als grössere Zeitabschnitte für die Ableitung von Normalwerthen wurden solche von 5 Jahren (Lustra) vorgeschlagen, so dass das nächste Lustrum mit 1. Januar 1876 beginnt. (In Brüssel besteht diese Einrichtung schon seit 1833.)

Zur Durchführung der Congressbeschlüsse wurde ein Comité von 7 Mitgliedern unter dem Vorsitz von Buys Ballot in Utrecht gewählt, welches im Herbste dieses Jahres zusammentreten wird, um über einen zweiten Meteorologencongress (1876) zu berathen.

Ausführliche Berichte über den Wiener Meteorologencongress siehe:

E. Quetelet an die belgische Akd. der Wissenschaften und in Les Mondes 1873 Nov. 13, von M. Grad in der Revue scientifique de France No. 27 (1874 Januar 3.,) eine im „Ausland" 1874 Jan. 12. und eine grössere Abhandlung von Plantamour in der „Bibliothèque universelle et Revue suisse" 15. Dec. 1873.

Absolutes Barometer nennen die Herrn Hans und Hermary ein von ihnen construirtes Barometer, welches auf der Vergleichung eines Luftthermometers mit einem gewöhnlichen Thermometer beruht. Vergleicht man nämlich zwei gewöhnliche Thermometer mit einander, so werden die Höhenänderungen der Flüssigkeitssäulen in beiden Instrumenten stets einander proportional sein; denkt man sich also eine gerade Linie durch die Endpunkte beider Flüssigkeitssäulen gezogen, so wird diese gerade Linie bei jeder Temperatur durch einen und denselben Punkt gehen müssen. Diese Eigenschaft gilt für das Luftthermometer nur so lange, als der Luftdruck unverändert bleibt; ändert sich der letztere, so wird auch der erwähnte Punkt seinen Ort ändern. Es ist leicht einzusehen, dass der geometrische Ort desselben eine gerade Linie ist, die bloss der Eintheilung bedarf, um unmittelbar den Barometerstand ablesen zu können. Als Indexflüssigkeit für das Luftthermometer schlagen die Herren Hans und Hermary Schwefelsäure vor und fügen auf der Seite, wo die Flüssigkeit mit der freien Luft in Berührung kommt, eine kleine Quantität Uhrmacheröl hinzu. (Comptes Rendus P. 77 p. 121. Ztschrft. d. östr. Ges. f. Met. IX. No. 6.)

Einfluss der Exposition auf die Erwärmung des Barometers. Herr Prof. Gustav Karsten in Kiel hat den Unterschied der Erwärmung eines frei im Süden und Norden aufgehängten Thermometers aus den 15jährigen Beobachtungen des Dr. Neuber in Apenrade ermittelt.

Es wurden beide Instrumente täglich 10 mal gleichzeitig abgelesen und geben diese Beobachtungen im Mittel folgende Ueberschüsse des frei auf der Südseite angebrachten Thermometers.

Südseite — Nordseite.

	ec.	Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.
Mittel	1,5	1,7	2,7	3,6	4,8	6,1	6,4	6,0	5,6	5,2	3,5	2,8

Jahresmittel . . . . 4,2, Mittl. Maximum . . . 16,7

Mittl. Minimum . . . 7,0

(Beiträge zur Landeskunde der Herzogthümer Schleswig und Holstein Hft. 2.)

Ueber dasselbe Thema hat in einer andern Richtung Herr Wild, Director des Petersburger Centralinstituts, Untersuchungen anstellen lassen. Um den Einfluss der Höhe der Exposition auf die Angaben des Thermometers zu bestimmen, liess er an dem 24,7 m hohen geodätischen Gerüste der Nikolai-Hauptsternwarte in Pulkowa in den Höhen von 1,9 m 15,9 m und 26,3 m je ein Thermometer aufstellen und dieselben ganz gleichmässig gegen Strahlungseinflüsse schützen. Die Beobachtungen fanden im Winter einmal täglich, um 1 Uhr, in den übrigen Jahreszeiten dreimal, nämlich um 7 Uhr oder um 8 Uhr Vormittags und um 1 Uhr und 8 Uhr Nachmittags statt. Die Beobachtungen ergeben nun, Dank der gleichartigen Aufstellung der Thermometer im Allgemeinen einen viel geringeren Einfluss der Höhe auf die Temperatur, als ihn analoge Beobachtungen andrer Forscher ergeben haben. Die Mittelwerthe der Temperaturen in verschiedner Höhe sind nämlich für die Sommer- wie Wintermonate nur innerhalb 0,1° verschieden; zu dem einzelnen Termine stehen allerdings durchschnittlich die höhern Thermometer am Morgen niedriger und am Abend höher, als das untere; doch erreichen die Differenzen im Jahre blos einige Mal 2 bis 2,5° C. (Bericht über die Verh. d. Wiener Meteorologencongresses. Wien 1873.)

Ueber die zweckmässige Grösse und Aufstellung der Regenmesser sind in England und Schottland zahlreiche Versuche angestellt worden. Herr Symons gibt darüber Bericht. Die Auffangsfläche der kreisförmigen Regenmesser variirte von 0,0005 bis 0,291 m□ und die der quadratischen von 0,016 bis 0,065 m□. Während 8 Jahren haben diese Instrumente an drei Orten functionirt, welche sich durch ihre physikalischen und geologischen Eigenschaften wie auch durch den Charakter ihrer Niederschläge unterscheiden. Es hat sich nun gezeigt, dass Regenmesser von irgend welchen Dimensionen, vorausgesetzt, dass ihr Durchmesser nicht unter 3 engl. Zoll ist, ferner, dass sie übereinstimmend construirt sind und ihre Auffangsfläche in der Höhe von 0,m3 über dem Boden haben, Resultate liefern, die innerhalb eines Procentes miteinander übereinstimmen. (Bericht über d. Verh. d. W. Meteorologencongresses pg. 102, Ztschrft. d. östr. Ges. f. Met. IX. No. 2.)

Windstärkemesser. Da die Leipziger Meteorologenconferenz als allgemeines Mass für Windgeschwindigkeiten Meter pro Secunde empfohlen hatte, untersuchte Herr Wild an den bekannten, von ihm construirten und in der Schweiz, London und Russland eingeführten Windstärkemessern, bis zu welchen Winkeln solche Winde, welche die Geschwindigkeiten 1, 2, 3 . . . Meter pro Secunde besitzen, die Platte heben würden. Er fand, dass eine 250 gr. schwere Blechtafel, welche 0,30 m hoch und 0,15 m breit ist, von den verschiedenen Winden wie folgt gehoben wird.

Windgeschwindigkeit in Metern pro Secunde	Hebungswinkel der Tafel	Windgeschwindigkeit in Metern pro Secunde	Hebungswinkel der Tafel
1	2,0	6	42,3
2	7,0	7	52,6
3	14,0	8	62,0
4	22,8	9	66,3
5	32,7	10	69,9

(Bericht über d. Verh. d. Wiener Meteorologencongresses p. 109.)

Ueber die Wasserabnahme in Quellen, Flüssen und Strömen hat Herr Gustav Wex eine werthvolle Arbeit geliefert, welche die Berghaus'sche Behauptung von der fortschreitenden Verminderung des Wasserreichthums der grossen deutschen Ströme mit aller Entschiedenheit bestätigt. Das hauptsächlichste Material zu dieser Untersuchung lieferten die 28jährigen Beobachtungen am Rheinpegel von Sonderheim und die 32jährigen Beobachtungen am Donaupegel von Alt-Orsova. Der Verfasser findet die Ursache der Wasserabnahme der fliessenden Gewässer in der fortschreitenden Ausrodung der Wälder, der Austrocknung der Teiche und Moore etc. und gibt Verhütungsmassregeln. Die Abhandlung enthüllt Wasserstandstabellen des Rheines bei Emmerich, Köln und Germersheim, der Elbe bei Magdeburg, der Oder bei Küstrin, der Weichsel bei Kurzebrack, der Donau bei Wien (1826 — 71) und Orsova (1840 — 71). (Zeitschr. d. östr. Ingenieurvereins 1873.)

Zusammenhang zwischen Sonnenflecken und Cyclonen. Schon Meldrum hat auf den Zusammenhang der Anzahl der Stürme im indischen Ocean mit der Sonnenfleckenperiode aufmerksam gemacht (Nature 9. Oct. 1873, Jahrb. d. Erfdg. IX. pg. 183); neuerdings hat A. Poey der Pariser Akd. ebenfalls Mittheilungen über den Zusammenhang der Cyclonen mit den Sonnenflecken gemacht. Er findet, dass nicht nur für die Stationen Paris und Fécamp dieser Connex stattfindet, sondern auch für die Antillen. Die Zusammenstellung der Stürme beginnt mit 1750 und indem er nur immer zwei Jahre zusammennimmt (z. B. 1750 und 1751), untersucht er, ob die Zahlen der in denselben vorkommenden Stürme eine ähnliche Periode zeigen wie die Sonnenflecken. Es finden sich so unter 12 Fällen des Maximus der Sonnenflecken 10 Fälle des Maximus der Häufigkeit der Cyclonen, bei 11 Fällen von Flecken-Minima's ergibt sich jedoch nur fünfmal eine Uebereinstimmung mit dem Minimum der Cyclonenzahl. Im Allgemeinen findet Poey, dass das Maximum der Cyclonenanzahl um 1,4 Jahre später eintritt als das Maximum der Sonnenfleckenperiode und umgekehrt zeigt sich beim Minimum der Cyclonenhäufigkeit ein Voreilen vor dem Minimum der Sonnenflecken um 0,5 Jahre.

Wenn man jedoch mit Jelinek die bekannte Ausgleichung anwendet, indem die Summe der drei aufeinanderfolgenden Jahren entsprechenden Zahlen gebildet wird, findet man noch bedeutende Unregelmässigkeiten, so dass ein Gesetz schwer erkennbar ist.

(Compt. Rend. P. 75, pg. 1223; Oestr. Ztsch. f. Met. IX. No. 6; Heis Wochenschrift 1874 No. 6.).

Berlin, 26. April 1874. Gustav Hellmann.

C) Bibliographie. 1874.

Zusammengestellt von Dr. Ackermann in Hersfeld.

Januar. Februar. März.

Mathematik.

A) Reine Mathematik.

a) Arithmetik.

Dölp, die Determinanten nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben. Darmstadt, Brill. 20 Sgr.

Esersky, Multiplications- und Divisions-Tabellen bis zu jeder beliebigen Grösse. 2. Aufl. Dresden, Zahn. $1^1/_3$ Thlr.

Feld und Serf, Uebungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten. 3. Aufl. Mainz, Kunze. 20 Sgr.

Feller und Odermann, das Ganze der kaufmännischen Arithmetik. 12. Aufl. Leipzig, Schulz. 2 Thlr.

Finger, directe Deduction der Begriffe der algebraischen und arithmetischen Grundoperationen aus dem Grössen- und Zahlenbegriffe. Laibach, Kleinmayer. 10 Sgr.

Hauck, Lehrbuch der Arithmetik für Gewerb-, Handels- und Realschulen. 3 Thle. 1. Thl. 3. Aufl. Nürnberg, Korn. 15 Sgr.

Kantor, historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Halle, Schmidt. 6 Sgr.

Kleinpaul, Aufgaben zum praktischen Rechnen. 8. Aufl. Leipzig, Langewiesche. 18 Sgr.

Schüler, die Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung. 1. Thl. Die 4 Species mit ganzen und gebrochenen positiven und negativen Grössen und die Determinanten. Leipzig, Teubner. $1^1/_3$ Thlr.

Seeger, die Elemente der Arithmetik für den Schulunterricht bearbeitet. Schwerin, Hildebrand. 1 Thlr.

Vöckel's Beispiele und Aufgaben zur Algebra für Gymnasien, Realschulen und zum Selbstunterrichte. 7. Aufl. von Prof. Schröder. Nürnberg, Korn. 8 Sgr.

b) Geometrie und Trigonometrie.

Kieseritzky, Lehrbuch der elementaren Geometrie für den Schulgebrauch. St. Petersburg, Deubner. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Koppe, die Stereometrie für den Schul- und Selbstunterricht. 9. Aufl. Essen, Bädecker. 16 Sgr.

Liebemann, Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus, sowie der einfachen Tangenten und Cotangenten. Eisleben, Reichardt. $12\frac{1}{2}$ Sgr.

Lieber und Lühmann, geometrische Constructions-Aufgaben. 2. Aufl. Berlin, Simion. 27 Sgr.

Lübsen, ausführliches Lehrbuch der analytischen Geometrie. 10. Aufl. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Močnik, Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen. 12. Aufl. Wien, Gerold. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

Niemtschik, über die Construction der einem Kreis eingeschriebenen Ellipse, von welcher Mittelpunkt und eine Tangente gegeben sind. Wien, Gerold. 4 Sgr.

Rosenow, die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, nach der Invariantentheorie behandelt. Breslau, Maruschke. 15 Sgr.

Schendel, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten. Jena, Costenoble. 2 Thlr.

Spitz, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von Uebungsaufgaben. Leipzig, Winter. 20 Sgr.

—, dasselbe. Die Resultate und Andeutungen der im Lehrbuch bef. Aufg. Ebda. 10 Sgr.

Wittstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Stereometrie. Hannover, Hahn. 3. Aufl. 21 Sgr.

Zetzsche, Leitfaden für den Unterricht in der ebenen und räumlichen Geometrie. 2. Aufl. Chemnitz, Brunner. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

B) Angewandte Mathematik.

Astronomie. Geodäsie. Mechanik.

Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Leipzig, Teubner. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Mayer, Grundzüge der praktischen Geometrie. Mit 148 Holzschnitten und 4 Tafeln. Wien, Schmidt. $2\frac{1}{5}$ Thlr.

Oppolzer, über den Winnecke'schen Kometen. 2. Abth. Wien, Gerold. 8 Sgr.

Preyssinger, astronomischer Bilderatlas. 12 col. Tafeln. 2. Aufl. Stuttgart, Nitzschke. $3\frac{1}{2}$ Thlr.

Rammelsberg, über die Meteoriten und ihre Beziehung zur Erde. Berlin, Lüderitz. 6 Sgr.

Schucht, Lehrbuch der Astronomie. Leipzig, Matthes. 15 Sgr.

Zenker, über die physikalischen Verhältnisse und die Entwickelung der Kometen. Berlin, Hempel. 15 Sgr.

Physik.

Abbe, neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper. Jena, Mauke. 28 Sgr.

Dietlein, Ergebnisse des Unterrichts in der Naturlehre in Volks- und Bürgerschulen. Ein Wiederholungsbuch für Schüler. 2. Aufl. Braunschweig, Bruhn. 4 Sgr.

Dorner, Leitfaden der Physik. Hamburg, Meissner. 12 Sgr.

—, Grundzüge der Physik. 2. Aufl. Ebda. 24 Sgr.

Fritsch, über das stereoskopische Sehen im Mikroskop und die Herstellung stereoskopischer Mikrotypen. Hierzu Carton mit 6 Stereoskopplatten. Berlin, Dümmler. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Geisenheimer, Erdmagnetismus und Nordlicht. Berlin, Lüderitz. 6 Sgr.

Krebs, Lehrbuch der Physik und Mechanik. Für Real- und höhere Bürgerschulen, Gewerbeschulen und Seminarien. 2. Aufl. Wiesbaden, Kreidel. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

Kremers, physikalisch-chemische Untersuchungen. 5. Heft. Wärmecapacität und Affinität der Verbindungen erster Ordnung. Wiesbaden, Limbarth. 12 Sgr.

Külp, die Schule des Physikers. Experimentell und mathematisch durchgeführte Versuche als Leitfaden bei den Arbeiten im physikalischen Laboratorium. Heidelberg, Winter. $2\frac{1}{5}$ Thlr.

Mach, physikalische Versuche über den Gleichgewichtssinn des Menschen. Wien, Gerold. 4 Sgr.

Pfaundler, über einen Apparat zur Demonstration der Zusammensetzung beliebiger rechtwinklig auf einander stattfindender Schwingungen. Wien, Gerold. 5 Sgr.

Recknagel, Compendium der Experimentalphysik nach Jamin's petit traité de physique. 1. Abth. Schwere. Elasticität. Stuttg., Mayer. 24 Sgr.

Röntgen, die Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie. 2. Thl. Theorie der Dämpfe und ihre Anwendung auf die Berechnung der Condensatoren etc. Jena, Costenoble. $3\frac{1}{2}$ Thlr.

Rühlmann, Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. Nach E. Verdet's théorie mécanique de la chaleur bearbeitet. 1. Lieferung. Braunschweig, Vieweg. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

Schmidt, die Brechung des Lichtes in Gläsern, insbesondere die achromatische und aplanatische Objectivlinse. Leipzig, Teubner. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Autorisirte deutsche Uebersetzung v. H. Helmholtz und G. Wertheim. 2 Theile. Braunschweig, Vieweg. $6\frac{1}{3}$ Thlr.

Wiedemann, die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 2. Bd. Die Lehre von den Wirkungen des galvanischen Stromes in die Ferne. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Winkler, Probleme aus der Wärmelehre. Mit 2 Taf. Wien, Lehmann. 24 Sgr.

Chemie.

Emsmann und Dammer, des deutschen Knaben Experimentirbuch. Praktische Anleitung zum Experimentiren auf dem Gebiete der Chemie und Physik. Bielefeld, Velhagen. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Frickhinger, Katechismus der Stöchiometrie. 5. Aufl. Nördlingen, Beil. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Hinterberger, Lehrbuch der Chemie für Unterrealschulen, Realgymnasien und Gewerbeschulen. 12. Aufl. Wien, Braumüller. 1 Thlr.

List, Leitfaden für den Unterricht in der Chemie, bes. für Real- und Gewerbeschulen. 1. Thl.: Anorganische Ch. 4. Aufl. Heidelberg, Winter. 18 Sgr.

Pinner, Repetitorium der anorganischen Chemie. Berlin, Oppenheim. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Postel, Darstellung der Hauptlehren der Chemie. 5. nach den Anschauungen der modernen Chemie bearbeitete Aufl. Langensalza, Gressler. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

Rammelsberg, Leitfaden für die qualitative chemische Analyse für Anfänger bearbeitet. 6. Aufl. Berlin, Lüderitz. 28 Sgr.

—, Grundriss der Chemie gemäss den neueren Ansichten. 3. Aufl. Ebda. $2\frac{1}{5}$ Thlr.

Schreiber, Grundriss der Chemie. Berlin, Grote. 2. Aufl. 15 Sgr.

Mineralogie. Geognosie. Geologie.

Brauns, der obere Jura im nordwestlichen Deutschland von der oberen Grenze der Ornatenschichten bis zur Wealdbildung. Braunschweig, Vieweg. $4^2/_3$ Thlr.

Cotta, die Geologie der Gegenwart. 4. Aufl. Leipzig, Weber. $2^2/_3$ Thlr.

Frenzel, mineralogisches Lexikon für das Königreich Sachsen. Leipzig, Engelmann. 2 Thlr.

Frič, geologische Bilder aus der Urzeit Böhmens. Prag, Gregr. 1 Thlr.

Groth, tabellarische Uebersicht der einfachen Mineralien, nach ihren krystallographisch-chemischen Beziehungen geordnet. Braunschweig, Vieweg. $1^1/_3$ Thlr.

Helmhacker, Tafeln zur Bestimmung häufig vorkommender Mineralien mittelst der einfachsten Versuche. Wien, Hölder. 8 Sgr.

Kenngott, 60 Krystallformnetze zum Anfertigen von Krystallmodellen. Für Schüler. 23. Aufl. Wien, Lechner. 20 Sgr.

Naumann, Elemente der Mineralogie. 9. Aufl. Leipzig, Engelmann. 4 Thlr.

Runge, die Mineralogie in der deutschen Volksschule. Breslau, Morgenstern. 12 Sgr.

—, 160 Etiquettes für Mineralien-Sammlungen; insbes. für die mineralogische Unterrichtssammlung der Volksschule. Ebda. 24 Sgr.

Sadebeck, Repetitorium der Mineralogie und Geologie. Berlin, Mittler. $1^1/_6$ Thlr.

Scharff, über den Quarz. II. Die Uebergangsflächen. Frankfurt, Winter. 1 Thlr.

Schilling, Mineralreich. 11. Bearbeitung. Breslau, Hirt. $27^1/_2$ Sgr.

Schlotke, Krystallographie. Stereoskopische Darstellung einer Reihe der wichtigsten Krystalle, der Combination derselben etc. Hamburg, Friedrichsen. $1^1/_2$ Thlr.

Schrauf, Atlas der Krystallformen des Mineralreichs. 3 Liefgn. Wien, Braumüller. 3 Thlr.

Senft, analytische Tabellen zur Bestimmung der Classen, Ordnungen, Gruppen, Sippen und Arten der Mineralien und Gebirgsarten. Zugleich Ergänzungsheft zu Leunis' Schulnaturgeschichte. Hannover, Hahn. 16 Sgr.

Winkler, die Gesteinslehre. München, Beck. 1 Thlr.

Zirkel, die mikroskopische Beschaffenheit der Mineralien und Gesteine. Mit 205 Holzschnitten. Leipzig, Engelmann. $3^1/_3$ Thlr.

Botanik.

Drude, die Biologie von Monotropa hypopitys und Neottia nidus avis unter vergleichender Hinzuziehung anderer Orchideen. Mit 4 Tafeln. Göttingen, Rente. 1 Thlr.

Gressler, Deutschlands Giftpflanzen mit naturgetreuen Abbildungen. 9. Aufl. Langensalza, Gressler. 10 Sgr.

Hallier, Deutschlands Flora oder Abbildung und Beschreibung der wildwachsenden Pflanzen in der mitteleuropäischen Flora. Mit 500 Kupfertafeln. 35 Lfgn. Leipzig, Bänsch. à 10 Sgr.

Kummer, der Führer in die Flechtenkunde. Anleitung zum leichten und sichern Bestimmen der deutschen Flechten. Berlin, Springer. 28 Sgr.

Lüben, Anweisung zu einem methodischen Unterricht in der Pflanzenkunde. 5. Aufl. Halle, Anton. 3 Thlr.

Müller und Papst, Kryptogamen-Flora. Enthaltend die Abbildungen und Beschreibung der vorzüglichsten Kryptogamen Deutschlands. 1. Thl. Flechten. Mit 520 Abbildungen. Gera, Griesbach. $2^2/_3$ Thlr.

Seubert, Lehrbuch der gesammten Pflanzenkunde. 6. Aufl. Mit vielen Holzschnitten. Leipzig, Winter. 2 Thlr.

—, Grundriss der Botanik. Zum Schulgebr. bearb. 3. Aufl. Ebda. 12 Sgr.

Schwendener, die Geschichte der Culturpflanzen. 2 Vorträge. Basel, Schweighauser. 10 Sgr.

Thümen, herbarium mycologicum. Die für Land-, Forst- und Hauswirthschaft, den Gartenbau und die Industrie schädlichen und nützlichen Pilze in getrockneten Exemplaren. Berlin, Calvary. 5 Thlr.

Weberbaur, die Pilze Norddeutschlands mit besonderer Berücksichtigung Schlesiens. Breslau, Kern. 4 Thlr.

Zabel, synoptische Tabellen zur leichten Bestimmung der häufigeren deutschen Pflanzengattungen nach dem Jussieu'schen System. Zum Schulgebrauch. Münden, Augustin. 17 Sgr.

Zoologie.

Bär, der vorgeschichtliche Mensch, Ursprung und Entwickelung des Menschengeschlechtes. Leipzig, Spamer. $3^1/_3$ Thlr.

Büchner, der Mensch und seine Stellung in der Natur in Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. 2. Aufl. Leipzig, Thomas. 2 Thlr.

—, 6 Vorlesungen über die Darwin'sche Theorie. 3. Aufl. Ebda. $1^5/_6$ Thlr.

Carus, Geschichte der Zoologie bis auf Joh. Müller und Ch. Darwin. München, Oldenbourg. $3^1/_5$ Thlr.

Claus, die Typenlehre und E. Häckels sog. Gasträa-Theorie. Wien, Manz. 8 Sgr.

Gegenbaur, Grundriss der vergleichenden Anatomie. Mit 320 Holzschn. Leipzig, Engelmann. 4 Thlr.

Hess, Bilder aus dem Leben schädlicher und nützlicher Insecten. Die Hymenopteren. Leipzig, Wilfferodt. 20 Sgr.

Jäger, Deutschlands Thierwelt nach ihren Standorten eingetheilt. Als Leitfaden zu Naturbeobachtungen und Führer auf Ausflügen und Sammelexcursionen. Mit 6 Tafeln in Farbendruck, 8 Tonbildern und zahlreichen in den Text gedruckten Abbildungen. 2 Bde. Stuttgart, Kröner. 8 Thlr.

Kaltenbach, die Pflanzenfeinde aus der Classe der Insecten. 2. Abth. Stuttgart, Thienemann. $1^1/_3$ Thlr.

Körner, im Walde. Bilder aus dem Natur- und Menschenleben. Leipzig, Oehmigke. 20 Sgr.

Leunis, Schulnaturgeschichte. 1. Thl. Zoologie. 7. Aufl. Hannover, Hahn. 28 Sgr.

Lyell, das Alter des Menschengeschlechtes auf der Erde und der Ursprung der Arten durch Abänderung, nebst einer Beschreibung der Eiszeit in Europa und Amerika. Nach dem Engl. v. L. Büchner. Leipzig, Thomas. $2^2/_3$ Thlr.

Miller, die Schalthiere des Bodensees. Lindau, Stettner. 10 Sgr.

Oppel, Thiergeschichten. Erzählungen und Schilderungen aus dem Leben der Thiere. Mit 24 Tafeln in Tondruck. Wiesbaden, Niedner. 3 Thlr.

Praun, Abbildung und Beschreibung europäischer Schmetterlingsraupen in system. Reihenfolge zugleich als Ergänzung von dessen Abb. und Beschr. europ. Schmetterlinge herausg. von Dr. E. Hoffmann. 1. Heft. Nürnberg, Bauer. 2 Thlr.

Ratzel, Wandertage eines Naturforschers. 1. Thl. Zoologische Briefe vom Mittelmeer. Briefe aus Süditalien. Leipzig, Brockhaus. $1^2/_3$ Thlr.

Rebau's Naturgeschichte für Schule und Haus bearb. v. Jäger, Wagner und Fraas. 20 Lfgn. 7. Aufl. Stuttgart, Thienemann. 4 Thlr.

Schmidt, Oscar, Leitfaden der Zoologie zum Gebrauche an Gymnasien und Realschulen. 3. Aufl. Wien, Gerold. 1 Thlr.

Spengel, die Fortschritte des Darwinismus. Leipzig, Mayer. 16 Sgr.

Sprockhoff, Hilfsbuch für den naturkundlichen Unterricht in Volks- u. Mittelschulen. 2. Abth. 100 Thierbeschreibungen und das Wichtigste vom Bau des menschlichen Körpers. 2. Aufl. Berlin, Thiele. $^1/_4$ Thlr.

Taschenberg, forstwirthschaftliche Insectenkunde oder Naturgeschichte der den deutschen Forsten schädlichen Insecten nebst Angabe der Gegenmittel mit Hinweis auf die wichtigsten Waldbeschützer unter den Thieren. Leipzig, Kummer. $2^2/_3$ Thlr.

Wigand, der Darwinismus und die Naturforschung Newtons und Cuviers. Beiträge zur Methodik der Naturforschung und der Speciesfrage. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg. 4 Thlr.

Geographie.

Atlas, topographischer der Schweiz, veröffentl. vom eidg. Stabsbureau. 12 Blatt. Bern, Dalp. $4^3/_5$ Thlr.

Aubel, Polarsommer. Reise nach Lappland. Leipzig, Brockhaus. $2^2/_3$ Thlr.

Generalkarte der Schweiz. 4 Blatt. 1 : 250000. Bern, Dalp. à 27 Sgr.

Guthe, Lehrbuch der Geographie für die mittleren und oberen Classen höherer Bildungsanstalten. Hannover, Hahn. $1^3/_4$ Thlr.

Heer, die schwedischen Expeditionen zur Erforschung des hohen Nordens in den Jahren 1870 u. 1872. Zürich, Schulthess. 15 Sgr.

Hopf, Grundlinien der Handelsgeographie. Leitfaden für Realschulen. 6. Aufl. Nürnberg, Korn. $1^1/_3$ Thlr.

Keller, Schulkarte von Baden. 2. Aufl. Tauberbischofsheim. $1^1/_2$ Sgr.

Klun, Leitfaden für den geographischen Unterricht an Mittelschulen. 15. Aufl. Wien, Gerold. 28 Sgr.

Körner, die Erdtheile. Natur- u. Culturgemälde für Lehrer. Leipzig, Oehmigke. 20 Sgr.

—, Südafrika. Natur- und Culturbilder mit ausführlicher Uebersicht der neueren Reisen. 121 Illustr. u. 28 Tafeln. Leipzig, Hirt. 4 Thlr.

Kozenn, oro-hydrographischer Atlas in 12 Karten. 3. Aufl. Wien, Hölzel. 16 Sgr.

—, geographischer Schulatlas für Gymnasien, Realschulen etc. 16. Aufl. 36 Karten. Ebda. $1^5/_6$ Thlr.

—, dass. in 48 Karten. $2^1/_3$ Thlr.

—, Wandkarte der Planigloben. $1^1/_3$ Thlr.

Lüben, Leitfaden zu einem methodischen Unterrichte in der Geographie. Leipzig, Fleischer. $7^1/_2$ Sgr.

Maltzan, Reisen in Arabien. Braunschweig, Vieweg. 6 Thlr.

Masius, geographisches Lesebuch. Umrisse und Bilder aus der Erd- und Völkerkunde. 1. Bd. Halle. Waisenhaus. $1^1/_3$ Thlr.

Meyer, Karte vom Thüringer Wald. 1 : 200000. Berlin, Neumann. 25 Sgr.

Nieberding, Leitfaden bei dem Unterrichte in der Erdkunde für Gymnasien. 15. Aufl. Mit 13 in den Text gedruckten Kärtchen. Paderborn. 8 Sgr.

Petermann, map of the United States of Amerika. 1 : 3700000. Gotha, Perthes. $2^2/_3$ Thlr.

Reymann, topographische Specialkarte von Braunschweig. Glogau, Flemming. $1^1/_6$ Thlr.

Rosenthal, Diesseits und Jenseits der Cordilleren. Südamerikanische Reisebilder. Berlin, Staude. $1^1/_3$ Thlr.

Schaeffer, der erste Unterricht in der Geographie. Berlin, Thiele. 6 Sgr.

Schleiden, das Meer. 2. Aufl. Mit 25 Stahlstichen in Farbendruck, 300 Holzschn. u. 1 Karte. 10 Lfgn. Berlin, Sacco. à 25 Sgr.

Taschenatlas über alle Theile der Erde. 24 Karten nach Stielers Handatlas verkleinert. 13. Aufl. Gotha, Perthes. 20 Sgr.

Tuckelt, Hochalpenstudien. Uebers. von Cordes. Leipzig, Liebeskind. 2 Thlr.

Vambery, Reisen in Mittelasien von Teheran durch die Turkmannische Wüste an der Ostküste des kasp. Meeres nach Chiwa, Bochara und Samarkand. 12 Abbild. und 1 Karte. 2. Aufl. Leipzig, Brockhaus. 3 Thlr.

Vogel, Katechismus der Geographie. 3. Aufl. v. O. Delitzsch. 24 Karten. Leipzig, Weber. 12 Sgr.

Vogeler, Schulatlas über alle Theile der Erde, mit besonderer Rücksicht auf den preuss. Staat. 17. Aufl. 20 Karten. Berlin, Abelsdorff. 5 Sgr.

Pädagogische Zeitung*).

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dergl.)

Nekrologie von 1874.

Adolph Lambert Jacques Quetelet, geb. am 22. Februar 1796 zu Gent, gest. am 16. Febr. zu Brüssel. Er machte seine Studien zu Gent und wurde schon mit 18 Jahren Professor der Mathematik am dortigen Collège royale. 1819 ward er an das Athenäum zu Brüssel versetzt und 1824 erhielt er von der Regierung ein Stipendium, um in Paris astronomische Studien zu machen. 1828 wurde er Director der nach seinen Plänen erbauten Sternwarte in Brüssel, 1838 Professor der Astronomie und Geodäsie an der dortigen Militärschule, welche beiden Stellen er bis zu seinem Tode bekleidete. Er hat eine grosse Menge von Schriften über astronomische, mathematische und statistische Gegenstände herausgegeben und sich durch magnetische und phänologische Beobachtungen, namentlich aber durch seine Moralstatistik**) einen berühmten Namen erworben.

Carl Ernst Bock, geb. den 21. Febr. 1809 zu Leipzig, gest. den 19. Febr. in Wiesbaden. Er war der Sohn des Leipziger Prosectors Carl Aug. Bock, studirte an den Universitäten Leipzig, Prag und Wien, ging 1831, nachdem er promovirt hatte, nach Warschau, und wirkte während der polnischen Jnsurrection als Hospitalarzt erst in polnischen, dann in russischen Diensten. 1832 habilitirte er sich als Privatdocent und ward 1836 Professor der Anatomie zu Leipzig. Von seinen wissenschaftlichen Werken erwarben sich sein „Handbuch der Anatomie mit Berücksichtigung der Physiologie und chirurg. Anatomie“, sowie sein „Lehrbuch der pathologischen Anatomie“ die meiste Anerkennung; seinen bekannten populären Arbeiten — nicht in letzter Linie seinen drastisch geschriebenen Artikeln in der Gartenlaube, worin er gegen den Geheimmittelschwindel loszog, — verdankte er seinen ausgebreiteten Ruf. Namentlich sei von seinen populär-medicinischen Werken das als Schulbuch treffliche Werkchen „Bau und Pflege des menschl. Körpers“ (Leipzig, 5 Sgr.) hier noch ganz besonders erwähnt.

Joh. Heinrich v. Mädler, geb. am 29. Mai 1794 in Berlin, gest. am 14. März nach längerer schwerer Krankheit in Hannover. Er widmete sich anfänglich dem Lehrerstande und begann erst im Jahre 1829 als Seminar-Lehrer sich ernstlich mit dem Studium der Astronomie zu beschäftigen. Im Jahre 1833 besorgte er auf der Insel Rügen die Zeitbestimmungen für die russische Chronometerexpedition, mit Beer lieferte er 1836 die berühmte Mondkarte und eine genaue Topographie des Mondes, nachdem beide schon früher Aufsehen erregende Arbeiten über den Mars veröffentlicht hatten. 1840 zum Director der Berliner Sternwarte ernannt, folgte er im nächsten Jahre einem Rufe als Professor der Astronomie nach

---

*) Diese III. Abth. ist diesmal auf ein Minimum reducirt, um den Raum der ersten drei Hefte nicht ungebührlich zu überschreiten. Der Rest des Weltausstellungsberichts (Mineralogie) und der Bericht über die stehende math.-natw. Section der allgemeinen Lehrerversammlung in Breslau folgt in Heft 4. D. Red.

**) s. Quetelet, sur la statistique morale et les principes, qui doivent en former la base. D. Red.

Russland und zwar zunächst nach Petersburg, wurde geadelt und später als Director der Sternwarte zu Dorpat angestellt, wo er seine berühmten Untersuchungen über die Fixsternsysteme anstellte und zu dem Resultat gelangte, dass die Plejaden den Centralpunkt unseres ganzen Fixsternsystemes bildeten. Durch die Popularisirung seiner Wissenschaft in mehreren, in wiederholten Auflagen erschienenen Werken hat er sich einen weitbekannten Namen erworben. Ein heftiges Augenleiden setzte 1866 seiner regen Thätigkeit ein Ziel.

Moritz v. Jacobi, geb. 1804 zu Potsdam, gest. 10. März zu Petersburg. Der Verstorbene, russischer Geheimer Rath und Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, war der Erfinder der Galvanoplastik und vertrat vor 2 Jahren seine Regierung auf der internationalen Meterconferenz in Paris.

Peter Andreas Hansen, geb. am 8. Dec. 1795 zu Tondern in Schleswig, gest. am 28. März zu Gotha. Er war anfangs Gehülfe Schuhmachers auf der Altonaer Sternwarte und wurde 1825 Encke's Nachfolger an der Sternwarte Seeberg bei Gotha. Er gilt als die bedeutendste Autorität auf dem Gebiete der Mechanik des Himmels und erwarb sich den grössten Ruhm durch seine bis jetzt an Genauigkeit unerreichten Mondtafeln, sowie seine ebenfalls sehr genauen, im Verein mit dem 1855 als Director der Kopenhagener Sternwarte verstorbenen Prof. Olufsen herausgegebenen Tables du Soleil.

David Livingstone, der bekannte Afrika-Reisende, geb. 1817 zu Blansyre Works bei Glasgow, gest. in Unayembe im Gebiete des Albert-Nyanya-See's an der Dyssenterie.

Bei der Redaction weiter eingegangene Programme.

(Vgl. 2. Hft. Umschlag, Rückseite.)

1) Weimar. R. 1. O. Ost. 1874. Dr. Leidenfrost, Nepers Logarithmensystem und dessen Beziehungen zu andern Systemen.
2) Cöthen. G. Ost. 1874. Dr. Heinze, die prismatischen und pyramidalen Drehungskörper.
3) Aargau. Cantonschule 1873. Dr. Krippendorf. Die Photographie als Unterrichtsgegenstand der Gewerbeschule.

Die Proportionen und die Schlussrechnung.

Von Dr. J. van Bebber in Kaiserslautern.

Wir unterscheiden zweierlei Arten des Rechnens: das mechanische Rechnen und das Denkrechnen. Das mechanische Rechnen erfolgt nach bestimmten Regeln, wobei der Rechner sich des ganzen Verfahrens nicht, oder doch nicht klar bewusst ist; dagegen gelangt der Denkrechner durch logische Schlüsse zum Ziele. Der Denkrechner wendet allerdings bestimmte Formen an, besonders beim schriftlichen Rechnen, aber nur solche, von denen er ein klares Verständniss erlangt hat und die aus den Gesetzen des Denkens unmittelbar folgen.

Es ist klar, dass von den Schulen, welche vor Allem die Aufgabe haben, die geistigen Fähigkeiten der Schüler zu entwickeln, alles jene sorgfältig fern gehalten werden muss, welches nicht diesem Zwecke dient, oder demselben sogar hinderlich sein kann. In dieser Beziehung ist aber nichts schädlicher, als ein Geist und Geschmack tödtender Mechanismus des Rechnens, ein auswendig gelerntes Regelrechnen, wie es in den meisten Schulen vorkommt. Statt den denkfähigen Menschen zu bilden, macht ihn dieses Verfahren zu einer gedankenlosen Rechenmaschine.

Ganz besonders ist das praktische Rechnen ein Förderungsmittel der Geistesbildung, aber auch nur dann, wenn die Methode zur Anwendung und zur richtigen Durchführung kommt, welche den angestrebten Zweck auch wahrhaft fördern kann. Der Ausspruch Melanchthons in der Vorrede zu der Arithmetica integra von Michael Stiefel: „Mihi si linguae sint centum oraque centum, non possem enumerare, quam multis in rebus usus est numerorum“ hat nur dann seine volle Berechtigung, wenn das Rechnen in jeder Beziehung vernünftig und bildend betrieben wird.

Abgesehen von den künstlichen Ansätzen, die dieser oder jener Lehrer erfindet und für sein Eigenthum ausgibt, obgleich sie in unzählig vielen Variationen vertreten sind, die aber glücklicher Weise bei längerer Praxis der Vergessenheit anheimfallen, zeigen sich hauptsächlich zwei Wege zur Lösung der meisten Aufgaben, nämlich die Methode vermittelst der Proportionen und vermittelst der Schlüsse, die wir einer kurzen Betrachtung unterwerfen wollen.

Soll eine Aufgabe mittelst einer Proportion gelöst werden, so handelt es sich zunächst darum, die Proportion aus den Daten der Aufgabe zu bilden, und dann die Unbekannte aus der Proportion zu bestimmen. Was zunächst den letzteren Theil der Aufgabe betrifft, so ist die Lösung rein mechanischer Natur: es kehrt stets ein und dieselbe Form wieder und stets erhalten wir nach einer und derselben Schablone das Resultat. Also dieser Theil der Aufgabe kann den Zweck des Unterrichts nicht fördern.

Das Bildungsmoment könnte nur noch in der Bildung der Proportion liegen. Nehmen wir zunächst die einfachen Proportionen. Damit eine Proportion richtig sei, ist erforderlich, dass die einzelnen Grössen in solcher Beziehung zu einander stehen, dass das eine Verhältniss durch das andere bestimmt ist. Die Grössen können nun im geraden oder umgekehrten Verhältniss zu einander stehen. Ist dieses erkannt, so ergibt sich die Bildung der Proportion von selbst. In der Aufstellung der Proportion wäre nun das einzig Bildende, dass der Schüler jedesmal das Abhängigkeitsverhältniss der einzelnen Grössen erfasst und darnach jedesmal unterscheidet, ob die Proportion eine gerade oder ungerade ist. Allein wer längere Zeit den Rechenunterricht gegeben hat und auch einmal den Versuch gemacht hat, die Proportionen zur Anwendung zu bringen, wird finden, dass die Schüler meistens die Bildung der Proportion ohne jegliches Nachdenken zu Stande bringen und dass nur zu häufig die geraden mit den ungeraden Proportionen verwechselt werden.

Abgesehen davon, dass sehr leicht Veranlassung gegeben wird zur Bildung von unrichtigen Proportionen, indem die Ordnung der Glieder in einer Proportion nicht gleichgültig ist, da die Glieder eines Verhältnisses nur gleichnamig sein können, möchten bei der Anwendung der Proportionen leicht falsche Vorstellungen über Multiplication und Division mit benannten Zahlen hervorgerufen werden. Es möchte einem Schüler schwer fallen einzusehen, warum man bei der Aufsuchung der Unbekannten zwei benannte Zahlen und dazu noch ungleichartige mit einander multipliciren darf und dann durch Division mit einer benannten Zahl eine benannte Zahl erhält.

Bei den zusammengesetzten Proportionen kann die ganze Rechnung nur noch schablonenmässig betrieben werden; oder man müsste mehrere Unbekannte einführen und dann würde die Rechnung ebenso einförmig wie umständlich werden.

Vernachlässigen wir also den sehr geringen Werth, den die Bildung der Proportionen auf die Geistesbildung haben kann, so muss die Anwendung derselben höchst unzweckmässig und verwerflich erscheinen. Es ist ein grosser Missgriff, wenn man durch Regeln das Urtheil überflüssig machen will. Desshalb ist sehr zu wundern, weshalb die Anwendung der Proportionen beim Arithmetikunterricht in dem Programm für die technischen Anstalten Bayerns vorgeschrieben wird; daher fehlen auch in keinem Rechenbuche, so viel mir bekannt ist, die Proportionen.

Man gibt gewöhnlich an, dass man mit Hilfe der Proportionen rascher zum Ziele gelangt. Allein die Richtigkeit dieses Satzes ist sehr zu bezweifeln, und wäre er wirklich richtig, so frage ich, was nützt alles Rechnen, wenn es dem Erziehungszwecke nicht dient, wenn es zu einer mechanischen Handarbeit herabgewürdigt wird, bei welcher der Geist durch Unthätigkeit erschlafft und ihm der Zugang zu dem höher Liegenden erspart wird? Die Proportionen sind aus dem Arithmetikunterricht völlig zu bannen, in der Algebra und Geometrie finden sie ihren richtigen Platz.

Nichts lähmt die Elasticität und Regsamkeit des jugendlichen Geistes so sehr, nichts führt so leicht zur Gedankenlosigkeit und Zerstreuung, als wenn das Denken in die Zwangsjacke eines starren Mechanismus hineingezwängt wird. Diesem gegenüber bietet nun die Methode vermittelst der Schlüsse ein ausgezeichnetes Mittel, das Interesse und die Geistesthätigkeit zu wecken und zu erhalten. Diese Rechnungsweise ist allein natürlich und einfach und führt jedesmal am sichersten zum Ziele. Während der Schüler durch das Regelrechnen gelangweilt und ermüdet wird, ist ihm hier ein Feld gegeben, worauf er sich frei und selbstthätig bewegen kann; es ist ihm gestattet auf verschiedene Arten zum Ziele zu gelangen. Das Aufsuchen neuer einfacher Auflösungsarten hat für ihn einen ganz besonderen Reiz, er findet, dass nicht jeder Weg gleich rasch zum Ziele führt und nach einiger Uebung wird es ihm leicht, auf den ersten Blick zu unterscheiden, welche Auflösungsart im gegebenen Falle die zweckmässigste und kürzeste sei.

Ein Beispiel wird die Sache am besten erläutern. Gesetzt man hätte die Aufgabe: Eine Waare wird mit 10% Nutzen zu 20 fl. verkauft, wie hoch muss sie verkauft werden, wenn man 15% gewinnen will?

Würde nun diese Aufgabe mit Hülfe der Proportionen gelöst, so würde man von den Schülern meistens folgende Lösung erhalten

$$10 : 15 = 20 : x$$
$$x = \frac{20 \cdot 15}{10} = 30 \text{ fl.}$$

Oder ist der Schüler noch besser abgerichtet, so wird er sofort das Resultat hinschreiben. Würde nun auch die Proportion richtig gebildet werden, so wüsste ich doch nicht, ob hier etwas für die Bildung des Geistes geschehen wäre.

Lässt man aber die Aufgabe mit Anwendung der Schlüsse lösen, so werden die Schüler ungefähr auf folgenden Wegen zum Resultate gelangen.

I. Man berechnet den Einkaufspreis, etwa auf folgende Art: Bei 11% Gewinn ist der Gewinn der 11. Theil des Verkaufspreises, also ist gewonnen $\frac{20}{11}$ fl. $= 1\frac{9}{11}$ fl.; mithin ist der Einkaufspreis 20 fl. — $1\frac{9}{11}$ fl. $= 18\frac{2}{11}$ fl. $= \frac{200}{11}$ fl. An 100 fl. sollen 15 fl. gewonnen werden, an $\frac{100}{11}$ fl. $\frac{15}{11}$ fl. und an $\frac{10}{11}$ fl. $\frac{320}{11}$ fl. $= 2\frac{8}{11}$ fl., also muss die Waare zu $18\frac{2}{11} + 2\frac{8}{11}$ fl. $= 20\frac{10}{11}$ fl. verkauft werden.

Ebenso kann auch direct der Einkaufspreis und aus diesem direct der Verkaufspreis berechnet werden.

Die Auflösung würde man entweder ganz oder theilweise an der Tafel machen lassen.

II. Was früher für 110 fl. verkauft wurde, soll jetzt für 115 fl. verkauft werden; was also für 10 fl. verkauft wurde, wird jetzt für den 11. Theil von 115 fl. verkauft oder für $\frac{115}{11}$ fl.

$= 10\frac{5}{11}$ fl.; was für 20 oder 2. 10 fl. verkauft wurde, kostet jetzt zweimal so viel, also 2. $10\frac{5}{11}$ fl. $= 20\frac{10}{11}$ fl.

Diese Lösung ist natürlich ganz im Kopfe zu machen.

III. An 110 fl. will man gewinnen 5 fl.

an 10 fl. „ „ „ $\frac{5}{11}$ fl.

und an 20 fl. „ „ „ $2.\frac{5}{11}$ fl. oder $\frac{10}{11}$ fl.

Also muss man die Waare verkaufen

zu 20 fl. $+ \frac{10}{11}$ fl. $= 20\frac{10}{11}$ fl.

und so könnte man vielleicht noch einige Lösungen finden. Die letzte ist jedenfalls die einfachste Lösung.

Ich glaube, wenn der Lehrer auf diese Weise die im gegebenen Falle zweckmässigste Auflösung von den Schülern selbst suchen lässt, und die Antworten wieder zu passenden Zwischenfragen verwendet, kann es nicht fehlen, dass auch der mittelmässige Schüler Interesse an der Sache gewinnt und mächtig zum selbstständigen Denken angetrieben wird. Der Wetteifer, der hierdurch wach gerufen wird, leistet sehr gute Dienste. Ausserdem wird auch das sprachliche Element, dem an den technischen Anstalten durch die kärgliche Stundenzahl zu wenig Aufmerksamkeit gewidmet werden kann, nicht wenig ausgebildet.

Bei der Schlussrechnung ist vor Allem ein natürlicher systematischer Gang Erforderniss. Mit den allereinfachsten Rechnungen, bei denen mit einem einzigen Schlusse das Resultat gefunden werden kann, mache man den Anfang, dann nehme man auf dem Erkannten aufbauend Rechnungen, wobei mehrere Schlüsse zum Ziele führen. So führe man die Schüler allmählich, ohne Unterbrechung von den einfachsten zu den complicirtesten Rechnungen, stets ihr Entwicklungsstadium vor Augen haltend.

Man hüte sich, starr an bestimmten Formen festzuhalten (z. B. stets auf die Einheit zu schliessen, was namentlich für das Kopfrechnen durchaus zu verwerfen ist etc.). Einseitiges Festhalten an bestimmten Formen kann nur in Mechanismus ausarten. Aber Consequenz und Genauigkeit des Ausdrucks fordere man unbedingt. Dabei verlange man von den Schülern für jeden Schritt genügende Rechenschaft. Der Lehrer soll blos die Uebungen leiten; desshalb soll der Schüler die Regeln selbst finden, er soll durch Zwischenfragen und Nachhülfe von Seiten des Lehrers zur Auffindung der Regel geführt werden.

Ich kann die Methode Koppes, welche derselbe in seinem Leitfaden für den Rechenunterricht angegeben hat, nicht billigen. Er sagt pag. 88 Anm.:

„Das Verfahren in diesem Abschnitt ist folgendes: Der Lehrer spricht die Aufgabe aus und die Schüler schreiben die Auflösung (Ansatz) nieder, und lesen dieselbe vom Lehrer aufgefordert vor; die Geübteren sprechen vor, die Schwächeren sprechen dasselbe buchstäblich nach, bis alle die Fähigkeit vorzusprechen erlangt haben etc.“ — Und das soll ein Denkrechnen sein! Dann könnte man auch einige Auflösungen in Reime bringen, wodurch man das Memoriren ungemein erleichtern würde.

Bei der Auswahl der Aufgaben ist Bedacht darauf zu nehmen, dass der Stoff so viel wie möglich dem gewöhnlichen Leben entnommen werde, und dass derselbe in grosser Abwechselung auf einander folge. Einerseits bleibt dann die Aufmerksamkeit des Schülers rege, andrerseits aber erlangt er dadurch die Fertigkeit aus dem Sachverhalt leicht die Auflösung zu finden. Nichts ist ermüdender und unpraktischer als die Aufgaben in stofflicher Beziehung zu classificiren. Eine Abwechselung in den Aufgaben ist auch darum zweckmässig, weil die Schüler sehr geneigt sind, eine Aufgabe mechanisch durchzuführen, wenn sie in jedem Paragraphen auf jede Aufgabe dieselben Schlüsse anwenden können. Dabei sind noch häufige Einschaltungen von vermischten Aufgaben sehr wünschenswerth. Das Tafelrechnen sehe man nur als das an, was es eigentlich ist, es ist nur ein Mittel, Zahlen, die man im Gedächtnisse nicht bequem behalten kann, symbolisch darzustellen. Eine Hauptsache bleibe also das Kopfrechnen. Das Kopfrechnen ist (allerdings) eine Kunst, die aber bei einer richtigen Methode und einiger Uebung nicht unschwer zu erlernen ist. Ein vorzügliches Augenmerk hat man darauf zu richten, grosse Zahlen auf kleinere zurückzuführen, etwa durch Zerlegung oder durch Anwendung der aliquoten Theile etc. Fast bei jeder Aufgabe wird sich eine solche Reduction anbringen lassen. Dieses lässt sich nicht durch Regeln, sehr gut aber durch einige Uebung erlernen.

Vorrichtung zur experimentellen Erforschung der Wirkung einer continuirlich wirkenden unveränderlichen Kraft auf einen durch dieselbe bewegten Körper.*)

Von Dr. L. Morgenstern, Director der höheren Töchterschule zu Göttingen.

(Mit 1 Taf. [enth. Fig. 1—4b] und 4 Fig. im Text.)

Zur experimentellen Veranschaulichung des wichtigen Gesetzes über die Bewegung eines Körpers, der durch eine continuirliche und unveränderliche Kraft getrieben wird, dienen — so viel mir bekannt ist — zwei Vorrichtungen: die schiefe Ebene von Galilei und die Fallmaschine von Atwood.

Erstere besteht aus einer langen Holzleiste mit einer polirten Rinne, in welcher eine Kugel herabrollt. Ein hörbar schlagendes Metronom oder eine Secundenuhr dient als Zeitmesser. Von einem bestimmten Punkte lässt man gleichzeitig mit einem Pendelschlage die Kugel herabrollen und fängt sie weiter unten durch ein vorgehaltenes Brettchen wieder auf. Man rückt nun das Brettchen nach oben oder unten bis zu einem Punkte, auf welchem das Anschlagen der Kugel an das Brettchen gleichzeitig mit einem Pendelschlage erfolgt, und findet durch diesen Versuch einen Zusammenhang zwischen Zeit und Weglänge; und das ist es, was man von dem Versuche erwartet. Wäre diese Einrichtung zweckentsprechend, so könnte man sich kaum eine einfachere denken; aber schon der Umstand, dass man dieselbe kaum noch irgendwo sieht, spricht für das

*) Obgleich ältere Aufsätze und neuere vorzügliche Arbeiten aus dem Gebiete der Schulmathematik vorliegen und der Aufnahme harren, so glaubte die Redaction doch, diesem Aufsatze den Vorrang geben zu müssen, einmal, weil die Physik überhaupt in der Zeitschrift ohnehin wenig berücksichtigt worden ist und dann, weil der Aufsatz ein neues Lehrmittel bietet. D. Red.

Gegentheil; und Jeder, der mit solch einer Vorrichtung je gearbeitet hat, wird die grossen Mängel derselben bald erkannt haben. Die ganze Art der Beobachtung ist zu mangelhaft, als dass irgend genaue und zuverlässige Ergebnisse zu erwarten wären. Die Vorrichtung wird höchstens gebraucht werden können, um die gegebenen Lehrsätze einigermassen zu erläutern. Für die experimentelle Erforschung der betreffenden Gesetze dagegen scheint sie mir völlig unbrauchbar.

Auch die Fallmaschine von Atwood ist für letzteren Zweck dem Anfänger gegenüber schwer zu verwerthen; denn für ihn ist der Vorgang an derselben nicht einfach, nicht unmittelbar genug. Dazu ist diese Vorrichtung, wenn sie vollkommen sein soll, so theuer, dass die wenigsten Schulen in der Lage sind, sie anzuschaffen.

Der Wunsch, das wichtige Gesetz der Bewegung eines Körpers durch eine gleichmässig wirkende Kraft experimentell entwickeln zu können, veranlasste mich, eine Vorrichtung herzustellen, die allmählig immer vollkommener wurde, bis sie in der unten durch Zeichnung und Beschreibung erläuterten Gestalt alles leistet, was man irgend wünschen kann.

Die vier hölzernen Säulen A, B, C, D Fig. 1. (Taf. I) sind mittels einiger Schrauben an die schmalen Seiten einer 3 Meter langen Schulbank befestigt*). Ihre Länge über der Tischplatte beträgt 60—70 *cm.*, ihre Dicke und Breite je 5 *cm.* Der Raum zwischen A und C misst 18 *cm.*

Die Säulen A und B tragen die eisernen Rahmen G und H, deren Gestalt durch die in Fig. 2 (s. Taf. I) gegebene Nebenzeichnung genügend deutlich erscheint. Der Rahmen G umschliesst die Säule A auf allen Seiten ziemlich genau, dagegen ist der Rahmen H von links nach rechts lang genug, um eine Verschiebung in dieser Richtung um 3—4 *cm.* zu ermöglichen.

Durch die Löcher der vorspringenden Seitentheile des Rahmens G ist ein Stahlstift geschoben, welcher die Oesen einer starken (Piano-) Stahlsaite trägt, während die Schleife der Saite um die kleine um einen Stift drehbare Rolle R des Rahmens H gelegt ist.

*) In der Zeichnung erscheinen C und D der grösseren Deutlichkeit wegen auf der Rückseite der Bank.

Nachdem die Saite in dieser Weise aufgezogen worden, gibt man ihr durch geeignete Stellung der Rahmen eine etwas geneigte Lage und durch Anziehen der Schraube *S* eine möglichst straffe Spannung. Die Neigung betrage beispielsweise 19 *cm.* auf die Länge von 2,5 *m.* Der Durchmesser der Rolle *R* möge, abgesehen vom Rande, etwa 12 *mm.* sein. Eben so weit schiebt man die Oesen der Saite auseinander, um parallele Schienen für eine darauf herabrollende Kugel zu gewinnen.

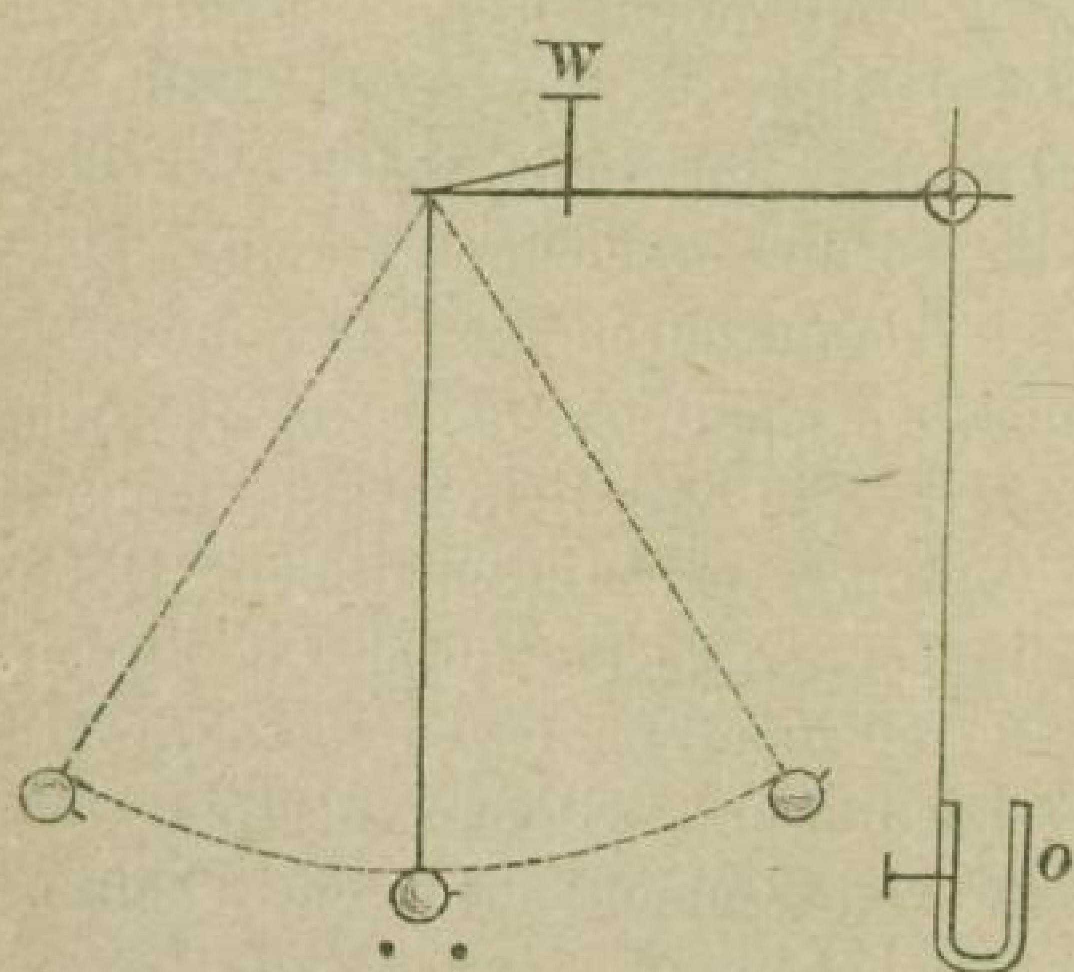
Da sowohl die Oesen, wie auch der zweifach im rechten Winkel gebogene Streifen *J*, der in seiner Gabelung die Rolle trägt, von vorn nach hinten verschoben werden kann, so kann man der Rollbahn eine parallele Lage zu der etwa 18 *cm.* entfernt hinter ihr liegenden Leiste *L* geben. Diese letztere ist 6 *cm.* breit und mindestens 2 *cm.* dick. Man gibt ihr eine der Rollbahn gleiche Neigung. Da diese Neigung später verändert werden soll, so darf *L* nicht an den Säulen *C* und *D* befestigt werden. Es sind zu dem Ende die Leisten *E* und *F* je durch eine Schraube am oberen Ende und einen in die Tischplatte eingelassenen Zapfen derartig befestigt, dass zwischen *C* und *E* und gleicherweise zwischen *D* und *F* ein Spalt bleibt, welcher die Leiste *L* aufnimmt. In der vorhin bezeichneten Lage, also parallel zur Rollbahn, wird sie dann durch die Schrauben *M* und *M* festgeklemmt. In denselben Spalten, und zwar parallel zu *L*, liegt auch die Leiste *N*. Sie ist nicht festgeklemmt, sondern freibeweglich auf zweien an *L* befestigten Rollen. Doch wird ihre Beweglichkeit von links nach rechts durch die beiden auf *N* befestigten Korkpolster *K* und *K* auf etwa 2 *cm.* beschränkt.

Die Verschiebung muss leicht sein. Es darf desshalb die Leiste in den Spalten nicht zu viel Reibung erfahren, ebensowenig darf sie zu viel Spielraum haben.

Die Höhe der Leiste *N* über *L* wird also durch die Rollen bestimmt; sie möge etwa 4 *cm.* betragen.

Auf der Leiste *L* befindet sich eine aus hartem Holze hergestellte Klammer *O*, die durch eine Schraube festgestellt werden kann. Es empfiehlt sich, die der Schraube gegenüberliegende Zinke der Klammer auf der inneren Seite etwas auszukehlen, weil die scharfen Ränder die Feststellung der Klammer erleichtern. An der vorderen Zinke ist ein etwa 45 *cm.* langer Stab befestigt, der in seinem unteren Theile kantig, höher hinauf aber rund sein mag. Durch entsprechendes Aufsetzen der Klammer erhält der Stab senkrechte Stellung. Er hat auf seinem oberen Theile eine eiserne Doppelhülse, die ein wagrecht nach vorn gerichtetes Rohrstäbchen trägt, welches nahe an seinem vorderen Ende in senkrechter Richtung möglichst fein durchbohrt ist. Durch diese Oeffnung wird ein Pferdehaar gezogen, an dessen unterem Ende eine kleine Blei- oder Messingkugel hängt, während das andere Ende um den im Rohrstäbchen drehbaren Wirbel *W* gelegt ist, so dass durch Drehung dieses Wirbels der Pendelfaden verlängert oder verkürzt werden kann.

Wir wollen diese Vorrichtung zur Aufstellung des Pendels den Pendelhalter nennen. Die Einstellung des Pendels geschieht so, dass die Pendelkugel in der Ruhelage etwa 1 *cm.* hoch und genau über der Mitte der Rollbahn hängt. Die Pendelkugel hat seitlich eine kleine Oeffnung, in welche ein etwa 1,5 *cm.* langes, am Ende mit einem Knoten versehenes Fädchen eingelassen ist. (S. beistehende Fig.)

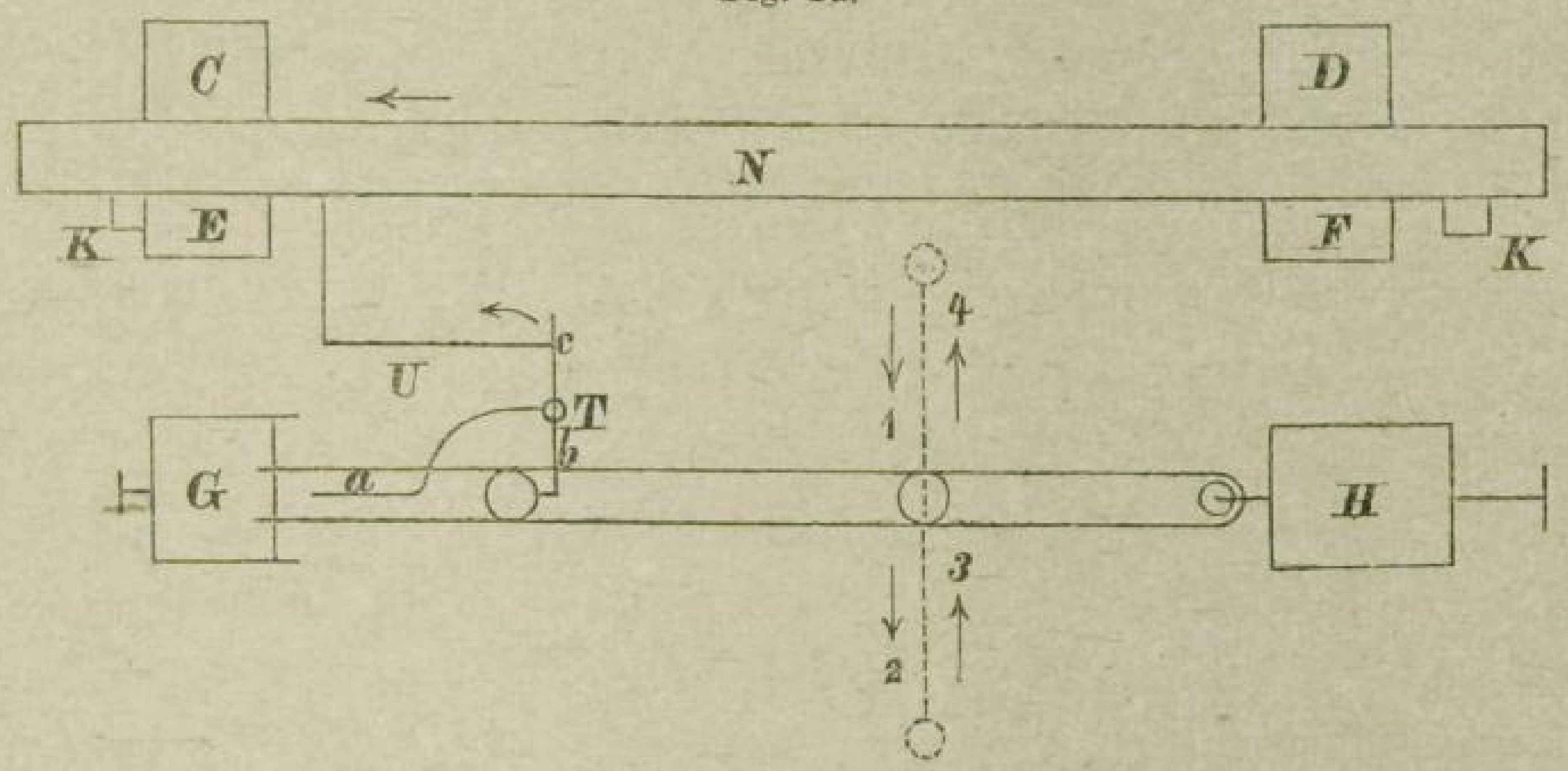


Man kann nun die Pendelkugel bei immer gleichmässig straffem Faden so gegen die Leiste *L* schieben, dass das kleine seitliche Fädchen sich gegen die linke Seite des Holzstäbchens *P* legt und zwischen diesem und einem zweiten Stäbchen *Q* einer auf der beweglichen Leiste *N* befestigten Klammer festgeklemmt werden kann. Um dies sicherer zu erreichen, sind *P* und *Q* an den aufschliessenden Kopfenden mit Korkstreifen belegt.

Wird nun die Leiste *L* durch einen sanften Stoss gegen das rechte Kopfende bei *K* nach links verschoben, so wird das Pendel frei und beginnt seine Schwingungen rechtwinklig über die Rollbahn hinweg.

Am oberen Ende trägt die Leiste *L* ebenfalls eine Klammer, deren Schraube abgekehrt ist, während in die der Schraube gegenüberliegende Zinke etwas unterhalb der Rollbahn ein wagerecht nach vorn gerichtetes Holzstäbchen eingelassen ist. Die auf letzterem befindliche Hülse Z hat der Schraube gegenüber eine Spitze, um welche ein cylindrisches Stückchen Holz T (Fig. 4ª u. 4ᵇ*) leicht drehbar ist. In dieses Holz sind drei Fischbeinstäbchen eingelassen.

Fig. 4a.



Es bildet mithin diese Vorrichtung, die wir den Kugelhalter nennen wollen, einen dreischenkligen Winkelhebel. Die Schenkel liegen in einer Ebene, etwa 1 *cm.* höher als die Rollbahn. Die Länge des linken Schenkels a beträgt 12 *cm.*, die des Schenkels b 4 *cm.*, der Schenkel c misst bis zur Gabel des Stabes U ebenfalls 4 *cm.* Die Spitze des Schenkels b liegt in der Verlängerung der Richtung des Schenkels a und parallel zur Rollbahn. Rechtwinklig dazu wendet sich der dritte Schenkel nach hinten gegen die Leiste N.

Die Spitze des rechten Schenkels soll die davor gelegte Kugel so lange am Herabrollen verhindern, bis sie selbst durch Drehung des Kugelhalters vor der Kugel zurückweicht und letztere frei gibt.

Diese Drehung soll durch denselben Stoss gegen die Leiste N bewirkt werden, durch welchen auch die Pendelkugel — wie vorhin erwähnt ist — frei wird. Es ist zu dem Ende auch hier auf die verschiebbare Leiste N eine zweite Klammer gesetzt. Sie trägt auf dem nach vorn gewandten Holzstäbchen eine eiserne Hülse mit einem cylindrischen Ansatz, in welchem das vorn in

---

*) Fig. 4b s. auf der beigegebenen Tafel I.

eine Gabel auslaufende Drahtende U*) mittels eines Holzkeiles befestigt ist. Der Zweck dieser Vorrichtung ist nach dem Vorhergehenden und durch die Nebenzeichnung genügend klar.

Im Uebrigen haben die letzterwähnten Klammern dieselbe Einrichtung, wie das Klammerpaar, welches am unteren Theile der Rollbahn aufgestellt ist. Das Pendel aber, das sie tragen, wird erst später gebraucht werden. Wir beseitigen es vorläufig, indem wir den Pendelfaden um das Holzstäbchen wickeln.

Um das Anschlagen der auf der Bahn herabrollenden Kugel am Ende der Rollbahn zu verhindern, klemmt man hier ein Stückchen Korkholz zwischen die Saiten. Ein in dieselbe eingelassenes Fischbeinstäbchen verhindert gleichzeitig auch das Abschnellen der Kugel; denn es ist so gestellt, dass die Kugel sich zwischen ihm und der Rollbahn festklemmt. — Man kann auch, wie in der Zeichnung geschehen, dieses Fischbeinstäbchen mit dem Streifen J verbinden,

Der obere Rand der Leiste N ist nach Centimetern eingetheilt. Den Punkt, welcher senkrecht hinter der Spitze des Kugelhalters liegt, bezeichnen wir mit 0. Gleicherweise bringt man an den Säulen A und B eine Scala an und bezeichnet die in der Ebene der Bank liegenden Punkte mit 0.

Zum Gebrauch muss die Vorrichtung etwa unter Anwendung einer auf die Oberfläche der Bank gestellten Cylinderlibelle oder eines mit einem Lothe versehenen Transporteurs wagerecht und vollständig festgestellt werden, so dass der Stoss gegen die Leiste N keine Erschütterung bewirkt. Dem Pendel gibt man, vom Mittelpunkte der Kugel ab gemessen, beispielsweise eine Länge von 27,5 *cm.*, es gebraucht dann zu einer einfachen Schwingung $^1/_2$ Secunde.

Wenn die Leiste N vollständig gleiche Neigung mit der Rollbahn hat, so wird die Pendelkugel, wo immer man den Pendelhalter aufsetzen mag, überall die früher bezeichnete Lage zur Rollbahn einnehmen. Sollte das jedoch nicht der Fall sein, so muss durch geeignete Nachhülfe der Fehler beseitigt werden. Als Kugel dient eine jener Steinkugeln, die unter dem Namen Knippel oder Knicker Knaben zu beliebtem Spiele dienen. Man

*) Ich benutzte dazu einen Strebestab aus einem Regenschirm.

wähle sorgfältig eine recht runde und glatte von etwa 2 *cm.* Durchmesser und lege sie vor die Spitze des Kugelhalters.

Die Verschiebung der Leiste N will etwas geübt sein. Der Stoss muss immer gegen das Kopfende der Leiste bei K erfolgen und darf nicht zu heftig sein.

Noch will ich bemerken, dass das linker Hand aufgesetzte Klammerpaar möglichst weit nach links verschoben werden möge, damit die Rollbahn möglichst lang bleibe. In der Zeichnung ist das nicht der Fall, weil die Deutlichkeit darunter leiden würde.

Wir schreiten nun zum Versuche. Wir lösen durch Verschiebung der Leiste N das Pendel I und gleichzeitig die Kugel. Da das Pendel seine Schwingungen quer über die Saiten nimmt, so kann es geschehen, dass die Pendelkugel im Augenblick des Ueberganges über die Bahn mit der rollenden Kugel zusammentrifft. Wäre das nicht der Fall, so kann ein solcher Zusammenstoss durch Verschiebung des Pendelhalters nach links oder rechts aufgesucht werden. Hat man einen solchen Punkt gefunden, so wiederholt man den Versuch und zählt die Schwingungen des Pendels. Fände z. B., wie das bei der vorhin angegebenen Neigung der Fall ist, ein Zusammenstoss statt bei 181, und das Pendel hätte fünf Schwingungen vollendet, die sechste aber wäre durch den Zusammenstoss unterbrochen, so geschah die Unterbrechung, nachdem das Pendel bis zur Ruhelage gekommen war, d. h. also, nachdem es die Hälfte der sechsten Schwingung zurückgelegt hatte. Wir haben demnach, wenn wir die Zeiteinheit mit T und die Weglänge mit s bezeichnen, für

$$T = 5^1/_2, \; s = 181.$$

Da aber die Wahl der Zeiteinheit ganz in unsrer Hand liegt, so können wir ja die Dauer einer halben Schwingung, also die Zeit, während welcher die Pendelkugel den Weg zwischen der Ruhelage und einem der Wendepunkte zurücklegt, als Zeiteinheit annehmen.

Dann vollzieht sich jede ganze Schwingung in zwei Zeiteinheiten; für

$$T = 5^1/_2 \text{ erhielten wir } t = 11,$$

und wir hätten für

$$t = 11, \text{ die Weglänge } s = 181.$$

Nun hat aber das Pendel bis zum Zusammenstosse die Rollbahn bereits fünfmal gekreuzt; es müssen also oberhalb des Punktes 181 noch fünf andere Punkte des Zusammenstosses aufgefunden werden können, wenn man den Pendelhalter entsprechend verstellt.

Diese Punkte suche ich auf, indem ich den Pendelhalter anfangs um je 10 *cm.* oder mehr nach links verschiebe, bis ich bei einiger Aufmerksamkeit bemerke, dass die beiden Kugeln nahe an einander vorbeigehen.

Dann schreite ich etwa um je 5 *cm.* und schliesslich um je 1 *cm.* vorwärts, bis ich für

$t = 9, \; s = 121$ erhalte.

In derselben Weise erhalte ich für

$$t = 7, \; s = 73$$
$$t = 5, \; s = 37$$
$$t = 3, \; s = 13$$
$$[t = 1, \; s = 1{,}495].$$

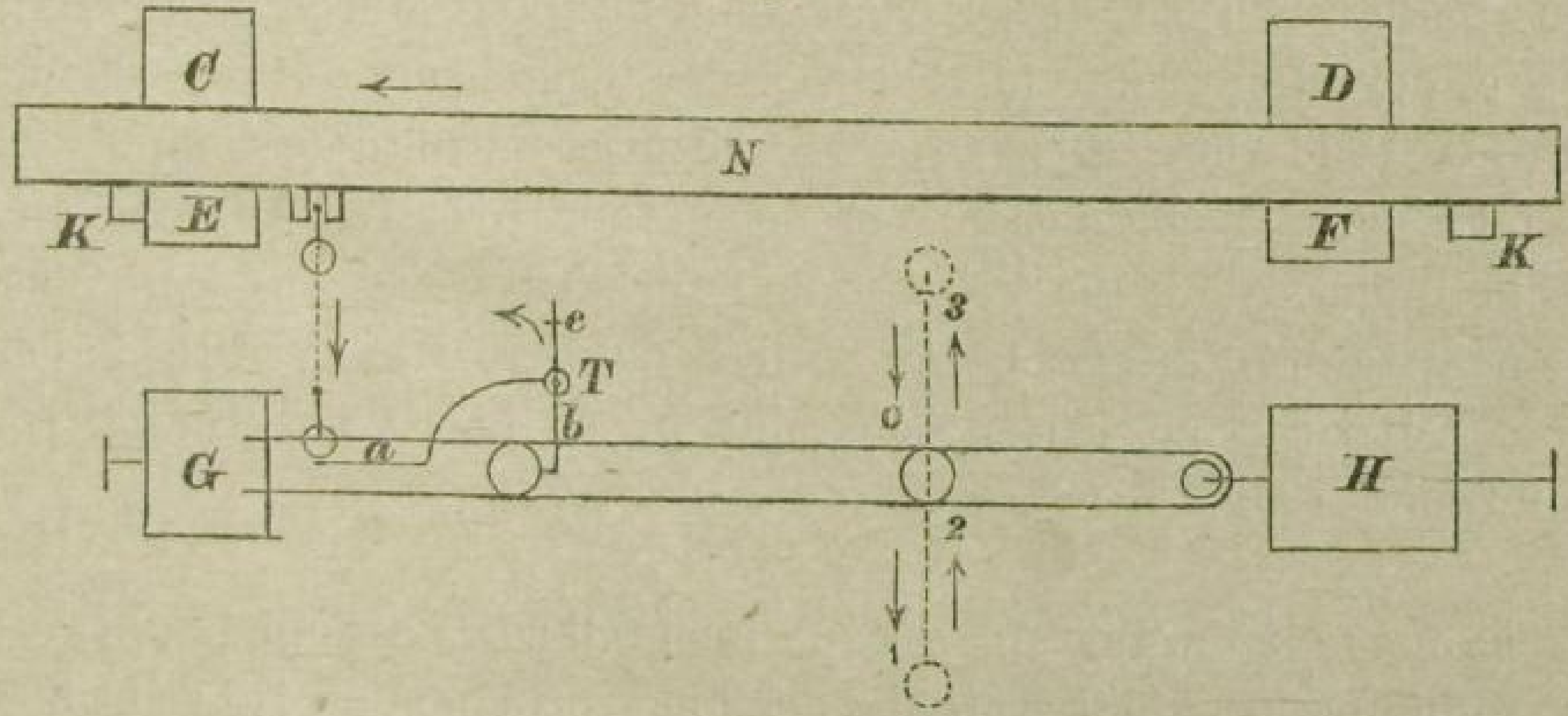
Da naturgemäss der Zusammenstoss nicht auf einem Punkte, sondern einer Strecke von einiger Ausdehnung erfolgt, so findet derselbe beispielsweise für $t = 11$ nicht nur auf 181, sondern etwa auch auf 180, 179, sowie auch auf 182, 183 — also auf der ganzen Strecke zwischen 179 und 183 statt. Diese Länge kann durch genügende Straffheit der Saiten auf etwa 2 *cm.* beschränkt werden.

Am merklichsten ist dieser Umstand für $t = 1$; einerseits, weil dieser Fehler nach oben hin etwas wächst, anderseits weil für $t = 1$ der Werth des s an und für sich schon gering ist. Doch wird die spätere Betrachtung über den wahren Werth von s für $t = 1$ uns nicht im Zweifel lassen; und wenn wir das Pendel etwas höher stellen, so dass nur der tiefste Punkt der Pendelkugel mit der rollenden Kugel in Berührung kommen kann, oder wenn man — was noch besser ist — in die Pendelkugel für diesen Versuch eine senkrecht nach unten gerichtete Nadelspitze einsenken will, so kann man auch diesen Versuch verwerthen. Der oben angegebene Werth $s = 1{,}495$ ist in dieser Genauigkeit durch Rechnung bestimmt.

Dass wir bei der jetzigen Einrichtung nur die Werthe des s für ungerade Werthe des t bestimmen können, ist leicht erklärlich. Es wäre aber ein Mangel, wenn wir nicht auch die Bestimmung des s für gerade Zahlwerthe des t möglich machten.

Um dies zu bewerkstelligen, haben wir auch das zweite links befindliche Klammerpaar mit einer Vorrichtung zum Festklemmen des Pendels versehen. Man gibt nun dem Pendel II eine dem ersten Pendel gleiche Fadenlänge und überzeugt sich durch Versuche, ob beide Pendel vollkommen gleiche Schwingungszeit haben. Ist das der Fall, so stellt man Pendel II so, dass es in der Ruhelage die innere Fläche des linken Schenkels des Kugelhalters eben sanft berührt (s. Fig. 4). Durch Einklemmen des Pendelfädchens bringt man das Pendel in die seitliche Lage, legt die Kugel auf die Rollbahn, stellt auch das Pendel I ein, zieht endlich den Stift *d* aus der Gabel *U* und wiederholt den Versuch. Die Kugel wird nun nicht mehr unmittelbar durch die Verschiebung der Leiste *N* frei werden, sondern erst dann, wenn das Pendel II durch sein Anschlagen gegen den Schenkel des Kugelhalters die Drehung des letzteren herbeigeführt hat. Mithin erfolgt die Auslösung der Kugel um eine Zeiteinheit später als die des Pendels, welches letztere bereits die Rollbahn kreuzt, wenn die Kugel ihre Bewegung beginnt. (Vgl. Fig. 4a und 4b.)

Fig. 4c.



Wir müssen also die Zeittheilchen von diesem lezterwähnten Zeitpunkte an zählen. Ein Zusammenstoss der beiden Kugeln kann mithin nur auf die geraden Zeittheilchen fallen.

So erhalten wir die Werthe zu $t = 10$, $t = 8$, $t = 6$ etc.

Durch Vergleichung der Zahlwerthe t und s erhalten wir dann die bekannte Formel

$$s = s'. \, t^2,$$

in welcher s' die Weglänge bezeichnet, welche die Kugel im ersten Zeittheilchen zurücklegt; im vorliegenden Falle ist also $s' = 1{,}495$.

Durch Veränderung der Neigung der Rollbahn zeigt man, wie allerdings s' für jede Neigung einen andern Werth erhält, wie aber der Zusammenhang zwischen den Grössen s, s' und t unverändert bleibt. Dadurch erhält das in obiger Formel aufgestellte Gesetz eine allgemeinere Bedeutung. Selbstverständlich wird man schon nach der ersten Versuchsreihe nicht wieder den ersten Weg des Aufsuchens der übrigen Punkte des Zusammenstosses der Kugeln einschlagen. Es muss vielmehr von vornherein höchst wahrscheinlich sein, dass freilich s' grösser werde, aber die Beziehung zwischen s, s' und t ungeändert bleibe.

Man wird deshalb für irgend eine Zeit die zugehörige Weglänge aufsuchen und — um sich von der Gültigkeit der aus der ersten Versuchsreihe gewonnenen Formel zu überzeugen — andere Werthe für andere Zeiten berechnen, ihre Richtigkeit durch den Versuch bestätigen und so die Allgemeingültigkeit der Formel

$$s = s' . t^2$$

für jede Neigung nachweisen. Ich brauche kaum zu erwähnen, dass man eben so diese Allgemeingültigkeit durch Aenderung der Pendellänge, durch Wechsel der Kugel und durch gleichzeitige Aenderung aller drei Verhältnisse bestätigen kann.

Es wird nach diesen Versuchen zur grössten Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe Gesetz auch für den freien Fall gilt, dass gleichzeitig für diesen freien Fall s' den grössten Werth haben muss. Bezeichnen wir diesen mit g, so heisst das Gesetz für den freien Fall

$$s = gt^2.$$

Es käme nun darauf an, g experimentell zu bestimmen. Diese Bestimmung ist nicht Aufgabe der hier vorliegenden Einrichtung. Ich werde vielleicht in einer anderen Nummer dieser Zeitschrift eine sehr einfache und erprobte Einrichtung auch für diesen experimentellen Nachweis des Werthes g wie überhaupt der Uebereinstimmung des Fallgesetzes mit dem soeben entwickelten Gesetze beschreiben.

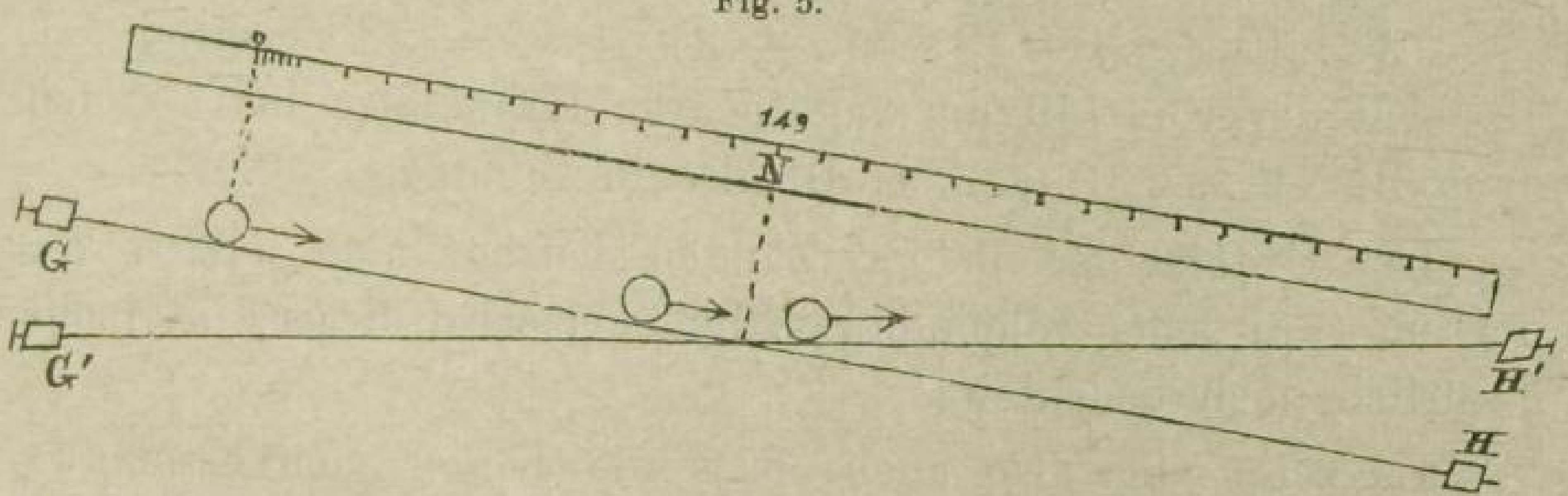
Ein besonderer Werth der vorliegenden Einrichtung besteht nun noch darin, dass durch eine kleine Zugabe unsre Vorrichtung tauglich wird zum experimentellen Nachweis der Formel

$$c = 2\, s' t$$

und damit zum Verständniss des Begriffes der Schnelligkeit bei beschleunigter Bewegung, sowie auch des Begriffes der Beharrung oder Trägheit. Darüber genügen wenige Worte.

Auf der Zeichnung ist noch eine zweite Rollbahn angedeutet, die für die bisher ausgeführten Versuche nicht in Anwendung kam. Um nun zu beweisen, dass die Weglänge beispielsweise des 11. Zeittheilchens für sich allein zusammengesetzt sei aus zwei Stücken, deren eins eine Folge des Beharrungsvermögens, deren anderes eine Folge der Neigung der Rollbahn auch auf dieser Strecke ist, hebt man die Neigung der Bahn dadurch auf, dass man zwischen den Rahmen G' und H' eine zweite Rollbahn mit Hülfe der Scalen an den Säulen A und B wagerecht in der Höhe aufspannt, welche der Punkt 149 der ersten Rollbahn über der Tischfläche hat. Mithin wird die wagerechte Bahn jene

Fig. 5.



schräge bei 149 kreuzen (vgl. Fig. 5). In dieser Lage gibt man ihr durch Anziehen der Schraube die nöthige Spannung, verbessert nöthigenfalls ihre Lage so, dass die Kreuzung genau auf 149 stattfindet, und verschiebt die Oesen und die Schleife dieser Rollbahn so, dass sich die Saiten der wagerechten Bahn bei 149 äusserlich an die der schrägen Bahn sanft anlegen, ohne dieselbe irgend einzuschnüren.

Gleichzeitig wird die Hülse des Pendelhalters I so weit nach oben verschoben, dass die Pendelkugel jetzt etwa 1 Ctm. über der wagerechten Bahn schwebt; und weil nun das seitliche Fädchen des Pendels nicht mehr zwischen P und Q eingeklemmt werden kann, so wird in die linke Klammer, die am Kopfende ein Zapfenloch hat, ein Stäbchen senkrecht eingefügt. Ueber dieses und den senkrechten Stab des Pendelhalters streift man Körke, deren kreisrunde Flächen aufeinander schliessen und das Fädchen des Pendels zwischen sich festklemmen.

Die herabrollende Kugel wird nun also am Punkte 149 auf die wagerechte Bahn übergehen. Jener Zuwachs, der in der Neigung der Bahnstrecke für das 11. Zeittheilchen seinen Grund hat, wird nun wegfallen, und der Zusammenstoss mit der Pendelkugel muss demnach statthaben nicht auf dem Punkte $s't^2$, sondern schon auf $s't^2 - s'$; also nicht auf $s'. 121$, sondern auf $s'. 120$.

Weil aber der Unterschied zwischen beiden Grössen nur gering ist, so wird der Nachweis, den man hier liefern will, mehr in die Augen fallend, wenn man die Werthe für einen spätern Zeitpunkt auf der einen und anderen Bahn vergleicht. So beträgt für $t = 12$ der Weg auf der schrägen Bahn

$$s = s'. 12^2.$$

Von der Kreuzungsstelle an legt also die Kugel im 11. und 12. Zeittheilchen beziehungsweise noch

$(2 s'. 10 + s') + (2 s'. 10 + 2 s' + s') = 44 s'$ zurück.

Auf der von 149 an wagerechten Bahn aber beträgt jener Weg nur $2 . s' . 10 + 2. s'. 10$ also in Summa $= 40. s'$.

Der Unterschied beider Längen beträgt also jetzt $4. s' =$ 6 Ctm. Für jedes folgende Zeittheilchen wird dieser Unterschied natürlich noch bedeutender.

Es zeigt sich also auch, dass die Kugel vom Kreuzungspunkte aus auf der wagerechten Bahn in jedem folgenden Zeittheilchen gleiche Längen zurücklegt, und dass also die Schnelligkeit, welche die Kugel im Augenblick des Uebergangs auf die wagerechte Bahn hat, sich nicht mehr ändert. Der Verlust, welchen die Kugel allmählig durch die Reibung erfährt, ist zu unbedeutend, als dass er diese Beobachtung wesentlich stören könnte.

Das wichtige Gesetz der Beharrung in der einmal gewonnenen Schnelligkeit und damit die Richtigkeit der Formel

$$c = 2 s' t$$

wird dadurch mit Bestimmtheit nachgewiesen.

Der Rahmen H' erscheint in der Zeichnung oben an der Säule B, und die 2. Bahn ist, um das Bild möglichst einfach zu halten, links nur angedeutet. Es ist indess keineswegs nöthig, diese Bahn ganz zu beseitigen, wenn sie nicht gebraucht wird. Man mache sie durch Nachlassen der Schraube H' ganz schlaff, schiebe H' dicht auf den Rahmen der schrägen Bahn, drücke an dieser Stelle die Saiten der wagerechten Bahn unter die der schrägen herab und halte sie in dieser Lage durch ein zwischengelegtes Stäbchen fest.

Anhang.

1) Es erschien zweckmässig, die vorbehandelte Einrichtung transportabel zu machen. Deshalb spannten wir die Saiten über einer Schulbank aus. Hat man für den Unterricht in der Physik ein besonderes Lehrzimmer, so ist es gar leicht, die ganze Vorrichtung an einer Wand anzubringen. Welche Aenderungen in dem Gestelle dadurch nöthig werden, wird jedermann nach der Art des Orts der Aufstellung leicht selbst beurtheilen.

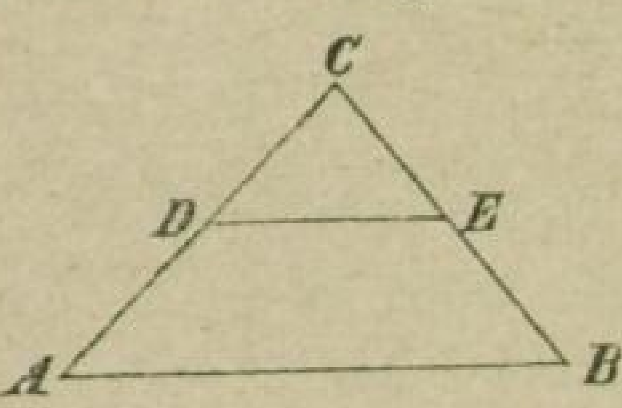
2) Herr Universitätsmechanikus Apel in Göttingen ist bereit, die verschiedenen einzelnen Stücke, welche — die Tischlerarbeit ausgeschlossen — zu meinem Apparate gehören, anzufertigen.

Kleinere Mittheilungen.

Beiträge zu den Kleinigkeiten aus der Schulstube.

Von Dr. Reidt in Hamm.

1. In den Beweisen der Aehnlichkeitssätze findet man nicht selten folgende Schlussfolgerung: „Zieht man im Dreieck ABC die Transversale DE parallel zu AB, so ist $\triangle DEC \sim ABC$, folglich $DC:CE = AC:CB$“ (cf. Kambly, § 134.).*)



Diese Folgerung scheint mir einen versteckten logischen Cirkel zu enthalten, denn die Aehnlichkeit des durch eine parallele Transversale abgeschnittenen und des ganzen Dreiecks wurde ja vorher (Kambly, § 132, Folg. 1) mit Hülfe eben derselben Proportion bewiesen, welche jetzt aus dieser Aehnlichkeit wieder gefolgert wird. Der Cirkel wird nur dadurch versteckt, dass derselbe aus zwei räumlich getrennten Theilen besteht. Die Proportion folgt also nicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke, sondern aus dem Satze, dass jede zu einer Seite parallele Transversale des Dreiecks die anderen Seiten in gleichen Verhältnissen theilt. (K. § 132.)

2. Aus der Congruenz zweier Dreiecke, welche in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, die Gleicheit der dritten Winkel als homologer Stücke zu folgern, wie z. B. (Kambly § 72) bei den gegenüberliegenden Winkeln im Parallelogramm, dürfte ebenfalls nicht ohne Bedenken sein. Die Gleichheit der dritten Winkel folgt ja schon aus der Gleichheit der beiden anderen Winkelpaare und ist völlig unabhängig von der in gewissem Sinn zufälligen Congruenz der beiden Dreiecke. Der Satz von der Gleichheit der dritten Winkel wird sogar zu einem der Beweise der

*) Dass hier und weiterhin vorzugsweise das Lehrbuch von Kambly als Beispiel benutzt ist, wird durch die weite Verbreitung desselben begründet erscheinen.

Congruenzsätze benutzt, und es ist mindestens ein Umweg, nun wieder die Congruenz zum Beweise jener Gleichheit zu benutzen. Mit noch anderen Worten: Sagt man, die gegenüberliegenden Winkel im Parallelogramm sind gleich, weil die beiden Dreiecke (nach dem erwähnten Congruenzfall) congruent sind, so heisst dies so viel, als die gegenüberliegenden Winkel seien gleich in Folge sowohl der Gleichheit der beiden anderen Winkelpaare, als auch ausserdem noch in Folge der Gleichheit der einen Seite. Das Letztere ist geradezu falsch, von der Uebereinstimmung der beiden Dreiecke in der einen Seite ist die Gleichheit der Winkel nicht abhängig.

Im vorliegenden Falle, bei dem Parallelogramm, folgt übrigens der Satz naturgemäss schon daraus, dass beide Winkel mit demselben anliegenden Winkel gleiche Summen geben. Auch das Ziehen der Diagonale ist ein dem Kern des Satzes fremdes, daher gekünsteltes Hülfsmittel.

3. In den mathematischen Lehrbüchern findet sich gewöhnlich der Lehrsatz: „Der Flächeninhalt eines regelmässigen Polygons ist gleich dem halben Product aus seinem Umfang in seinen kleinen Radius.“ (Kambly, § 126, 4.)

Dieser Satz ist, wie ja bekannt, zu eng, indem die Voraussetzung, dass das Polygon regelmässig sei, mehr verlangt als nöthig ist. Derselbe würde besser etwa so lauten:

„Der Flächeninhalt jeder ebenen geradlinigen Figur welcher sich ein Kreis einbeschreiben lässt, ist gleich dem halben Product aus ihrem Umfang in den Radius des einbeschriebenen Kreises.“ $F = \frac{1}{2} U \cdot \varrho$.

Wenn es nicht logisch richtig ist, unter die Bedingungen der Behauptung solche aufzunehmen, welche nicht nur zur Aufstellung der letzteren nicht erforderlich sind, sondern auch gar nicht, oder doch nur scheinbar im Beweise benutzt werden, so darf der obige Satz über das regelmässige Polygon nur als Zusatz dieses allgemeineren auftreten. Die Besonderheit des Falls kommt dann in der Behauptung $F = \frac{1}{2} n \cdot S \cdot \varrho$ zur Geltung. Als ein anderer Zusatz schliesst sich dann auch die Anwendung auf das Dreieck, $F = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \varrho$, an, welche als wichtig für manche Berechnungen überhaupt nicht fehlen sollte, sowie endlich die auf den Kreis selbst. Man kann auch — vielleicht in Form von Uebungsaufgaben — die Anwendung auf das Tangenten-Viereck ($F = [a + c] \cdot \varrho$), sowie auf den Rhombus machen und zeigen, dass der Satz für die letztere Figur auf den andern vom Product der Grundlinie und der Höhe zurückführt. Dass sich der Satz ferner auch auf die Fälle ausdehnen lässt, in welchen ein ausserhalb der Figur liegender Punkt von den Seiten gleichweit entfernt ist und daher statt des Umfangs algebraische Summen der Seiten zu benutzen sind, ist ebenfalls bekannt. Endlich haben wir für die Stereometrie den entsprechenden

Satz: „Das Volumen jedes Polyeders, welchem sich eine Kugel einbeschreiben lässt, ist gleich dem dritten Theile des Products aus seiner Oberfläche in den Radius der einbeschriebenen Kugel.“ Derselbe findet dann in seinen Zusätzen Anwendung auf die regelmässigen Polyeder, die dreiseitigen Pyramiden und auf die Kugel als Grenzfall.

Es könnte scheinen, als ob der vorher ausgesprochene Vorwurf des Mangels an logischer Strenge unbegründet sei, da man ja häufig besondere Fälle allgemeinerer Sätze besonders beweist. So stellt man z. B. den Satz auf, dass Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen inhaltsgleich sind, während doch die speciellen Voraussetzungen zur Richtigkeit der Behauptung ebenfalls nicht nothwendig sind, vielmehr hierzu schon die Gleichheit der Producte aus Grundlinie und Höhe genügt. Aber die Sache steht in solchen Fällen doch anders; die Flächen-Gleichheit ist in dem angeführten Beispiel wirklich eine Folge der Gleichheit der betreffenden Linien und bleibt nicht mehr bestehen, wenn eine der Voraussetzungen mit Beibehaltung der anderen verändert wird. Niemand aber würde z. B. den Satz beweisen, dass gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Grundlinien und Höhen inhaltsgleich sind, da er in diesem Falle eine Bedingung aufstellen würde, welche mit der Behauptung in keinem Causalnexus steht und daher auch zum Beweise derselben keine Anwendung findet. Dieser Fall liegt oben vor, sofern neben der Bedingung, dass die einzelnen Dreiecke des Polygons gleiche Höhen haben, die überflüssige gestellt ist, dass auch die Grundlinien gleich, bezw., dass die Dreiecke congruent sein sollen, die mit der Behauptung $F = \frac{1}{2} U \cdot \varrho$ in einem wirklichen causalen Zusammenhang steht, sondern nur im besonderen Fall zu der Bestimmung von $U = n \cdot S$ dient.

4. In der Wahrscheinlichkeits-Rechnung findet man zuweilen den Satz: „Wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Fall $\frac{n}{m}$, für einen anderen $\frac{p}{q}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der beiden Fälle eintritt, $\frac{n}{m} + \frac{p}{q}$.“ (Bardey, XXXVI, 21.)

Dies ist nur dann richtig, wenn die günstigen Ereignisse für beide Fälle einander ausschliessen. Nimmt man z. B. die von Bardey unmittelbar jenem Satze beigegebene Aufgabe: „wie gross ist darnach die Wahrscheinlichkeit, ans einem Spiel von 52 Karten entweder ein Bild oder eine rothe Karte zu ziehen,“ so erscheint der Schüler zu folgender Auflösung berechtigt: Unter 52 Karten sind $4 \cdot 3 = 12$ Bilder, also ist die Wahrscheinlichkeit, ein Bild zu ziehen, $\frac{n}{m} = \frac{12}{52}$. Unter 52 Karten sind 26 rothe, also ist die Wahrscheinlichkeit, eine rothe Karte zu ziehen, $\frac{p}{q} = \frac{26}{52}$. Demnach erhält man nach obiger Regel die Antwort $\frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{12}{52} \times \frac{26}{52} = \frac{38}{52}$. Dies ist aber falsch, denn von den 12 Bildern sind sechs zugleich rothe Karten, also doppelt gezählt; unter den 52 Karten gibt es also nicht 38, sondern nur 32, welche entweder Bilder oder roth sind.

5. Das bekannte Exempel von dem Pfennig, der zu Christi Geburt auf Zinseszinsen ausgeliehen wurde, liefert zwar ein staunenerregendes Resultat, ist aber streng genommen nicht richtig, da der genannte Pfennig bis auf den heutigen Tag nur der eine Pfennig geblieben sein würde. Aber wenn man auch in der Praxis einzelne Pfennige verzinsen wollte, so müssten dies doch immer ganze Pfennige sein; Bruchtheile einer nicht weiter theilbaren Einheit können in Wirklichkeit wohl nicht zum Capital hinzugefügt werden. Ich verkenne damit übrigens keineswegs den Sinn der Aufgabe und ihren Werth zur Illustration des bis in's Ungeheure beschleunigten Wachsthums der steigenden geometrischen Reihe; ich meine nur, dass man die Schüler auch auf die Grenzen der praktischen Anwendbarkeit ihrer Formel aufmerksam machen soll. Die meisten Beispiele der gebräuchlichen Aufgabensammlungen achten diese — wohl kaum in einer derselben überhaupt erwähnte — Grenze nicht, sondern berechnen in der Theorie selbst vom tausendstel Pfennig die genauen Zinsen. Wer sein Geld beispielsweise in einer Sparcasse anlegt, die zwar die Zinsen zum Capital schlägt, aber erst die vollen Thaler wieder verzinst, erhält andere Resultate, wenngleich dieselben erst bei höheren Anzahlen der Jahre erheblich abweichen.

6. Zu den sprachlichen Ungenauigkeiten in elementarmathematischen Schriften, welche früher in dieser Zeitschrift Erwähnung gefunden haben*), füge ich noch einige hinzu, auf die ich seitdem zufällig gestossen bin.

„Der Radius, nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogen, steht senkrecht auf ihr," oder ähnlich „die Senkrechte aus dem Mittelpunkte eines Kreises, auf eine Tangente gefällt, trifft den Berührungspunkt." Warum sagt man nicht, der nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogene Radius, u. s. w.? Es ist zu dieser sprachlich richtigeren Form nur ein Buchstabe mehr nöthig und dafür ein Komma weniger.

„Linien, welche zwei Winkel verbinden." Gemeint sind natürlich statt der Winkel deren Scheitelpunkte.

„Eine Senkrechte aus der Mitte einer Sehne trifft den Mittelpunkt des Kreises." Hier und in ähnlichen Fällen gestattet der

*) Man sehe: I, 272. 315. — II, 89. 209. (211. 333. 335. 516. — III, 19. 369. 375. D. Red.

Wortlaut unter Umständen eine Verwechselung mit einer aus dem Punkte auf irgend eine andere Linie gefällten Senkrechten. Am besten sagt man wohl errichtet in und gefällt aus dem Punkte.

In der Arithmetik sind Definitionen, wie „der Factor in Beziehung auf das Product heisst die Wurzel,“ zu vermeiden. Auch beim Logarithmus steht der Factor (als Basis) in einer Beziehung zum Product (dem Logarithmand).

Zum Capitel der Incorrectheiten.

Vom Realschullehrer Fuhrmann in Königsberg i. Pr.

Herr Redacteur! Als Einleitung zu dem, was ich mir erlaube, Ihnen vorzutragen, gestatten Sie mir, ein Beispiel aus meiner Schulpraxis zu bringen. Ich liess einen Schüler (Tertianer) einen Punkt ausserhalb eines Kreises mit einem Punkte der Peripherie verbinden, und fragte, ob dies eine Tangente sei. Es erfolgte die Antwort, dass diese Linie so lange eine Tangente sei, als sie nicht verlängert werde, da sie ja nur einen Punkt mit dem Kreise gemein habe. Als Ursache solcher unklaren Vorstellungen — ich bemerke, dass der betreffende Schüler sich sonst nicht unfähig zeigte — glaube ich angeben zu können, dass sowohl in den Erklärungen, als in den Sätzen nicht streng unterschieden ist, ob man von Linien der Länge oder der Lage spricht.*) Man wird manche sonst lobenswerthe Kürze einer präcisern Fassung opfern müssen. Ich erwähne nur folgende Sätze: „Wenn in einem Viereck die Gegenseiten gleich sind, so sind sie auch parallel.“ Gleich sind hier gewisse Längen, parallel dagegen Linien der Lage nach, also ganz verschiedene Gebilde, das Pronomen ist also nicht zu rechtfertigen. Man könnte den Satz vielleicht so fassen: „Wenn in einem Viereck die Gegenseiten gleich sind, so sind die unbegrenzten Linien, zu welchen diese Seiten als Stücke gehören, parallel.“ „Die Tangenten von einem Punkte an einen Kreis sind gleich.“ Statt dessen: „Von den 2 durch einen Punkt und einen Kreis bestimmten Tangenten werden durch diesen Punkt und den Kreis gleiche Stücke abgeschnitten oder begrenzt.“ — Ich erwähne ferner noch verschiedene Sätze, bei denen verschiedene Gebilde denselben Namen haben.

1) Die Summe der Höhen eines Dreiecks ist kleiner als die Summe der Seiten.

*) Man vergl. unsere Bemerkungen über „Lage und Richtung“ in den „Studien über geom. Grundbegriffe“ IV, 116. und in unserer „Vorschule d. Geometrie“ (Halle 1874) § 2, wo diese Begriffe nebst „Länge“ schon für den „propädeutischen“ Unterricht streng geschieden sind. — Der Herausgeber.

2) Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Im ersten Falle meint man gewisse Längen, im zweiten Linien der Lage nach, von welchen jene freilich Stücke sind. Würde man im zweiten Falle die begrenzten Stücke darunter verstehen, so würde der Satz nicht allgemein richtig sein, nämlich nicht für das stumpfwinklige Dreieck. Wenn auch der Sinn des Satzes für einen klaren Kopf unzweifelhaft ist, so zeigt das Beispiel aus der Schulpraxis doch, dass das Verständniss nicht sofort überall vorhanden ist. —

Man bezeichnet in ganz entsprechender Weise die Länge zwischen zwei Punkten A und B mit AB, ebenso aber auch die Linie der Lage nach, welche durch die beiden Punkte bestimmt ist. Es würde sich sicherlich empfehlen, die Entfernung AB consequent mit $\overline{AB}$ zu bezeichnen, wie es ja auch zu geschehen pflegt, wenn man mit der Linie rechnet, wenn man z. B. schreibt $\overline{AB}^2$. — Ich halte ferner die Bezeichnung einer ursprünglich gegebenen Linie durch 2 Buchstaben, wenn sie als unbegrenzt angesehen werden soll, nicht für geschickt, wie es noch in allen Lehrbüchern, die mir bekannt sind, mit den parallelen Linien geschieht, welche durch eine dritte geschnitten werden. Soll die Unbegrenztheit schärfer hervortreten, so ist es nöthig, für solche Linien nur einen Buchstaben zu setzen.*)

Ebenso kann ich mich nicht mit der gewöhnlichen Winkelbezeichnung durch drei Buchstaben einverstanden erklären. Fast jedes Mal hat ein Anfänger, der einen Winkel bezeichnen sollte, wenn die Buchstaben auf gewöhnliche Weise hingeschrieben waren, den Scheitelpunkt an den Anfang gesetzt, was auch ohne Zweifel natürlich ist. Man macht dies übrigens so bei der Ecke, man ist also ganz inconsequent, wenn man es beim Winkel nicht thut, obgleich doch Ecke und Winkel ganz analoge Grössen sind. Noch besser wäre es, wenn man den Scheitelpunkt dadurch hervorheben würde, dass man ihn ausserhalb einer Klammer setzt. Chasles bezeichnet bekanntlich einen Strahlenbüschel so; ein Winkel ist aber nichts anderes als ein Strahlenbüschel mit zwei Strahlen. Es würde dann auch hervortreten, dass der Winkel wesentlich durch zwei Gebilde bestimmt ist, was bei der Bezeichnung, wie sie gewöhnlich ist, nicht stattfindet. Es würde auch unzweifelhaft oft von Vortheil sein, einen Winkel durch die zwei Linien zu bezeichnen, die ihn bilden, indem man vielleicht noch einen Strich darüber zieht, oder eine Klammer darum setzt, entsprechend der Bezeichnung einer Länge.**)

In Hinsicht der Bezeichnung habe ich noch manche Gedanken auf dem Herzen, doch möchte ich erst vorstehende Vorschläge der

*) Könnte man nicht schreiben $A\overset{+}{\infty}$ und $A\overline{\infty}$? D. Red.

**) Meines Wissens bezeichnen einige den Winkel mit $\widehat{ab}$.
D. Herausgeber.

Beurtheilung vorlegen. Nur auf eine Erklärung möchte ich noch eingehen.

Man erklärt eine Secante als eine Linie, welche einen Kreis schneidet. Später tritt eine sogenannte ideale Secante auf, die durchaus reell ist und alle Eigenschaften der andern hat, wenn man nur die richtige Deutung versteht. Ich verstehe unter einer Secante nichts anderes, als eine Linie, die man zu einem Kreise in Beziehung setzt. Dann ist aber eine Tangente consequenter Weise auch eine Secante; wir wissen ja, dass eine Secante in gewissen Fällen in eine Tangente übergeht, es kann also Tangente und Secante nicht als Gegensatz hervorgehoben werden. Wie man nun jeden Begriff durch den nächst allgemeinern erklärt, so muss man also die Tangente nicht als Linie, sondern als Secante erklären, bei der die Schnittpunkte mit dem Kreise, seien sie reell oder imaginär, in einen zusammenschrumpfen.

Sprech- und Discussions-Saal.

Randbemerkungen zu Aufsätzen dieser Zeitschrift.*)

Falsche Beweise im Beitrage „zur Behandlung der Lehre von den Kegelschnitten" von G. Hellmann. II, 514.

Von J. Belović in Essek.

Herr Hellmann folgert aus der von ihm aufgestellten Definition des Kreises: „der Kreis ist eine Ellipse, deren Brennpunkte mit dem Centrum coincidiren," und dem Satze: „1) die Halbmesser eines Kreises sind gleich gross," das Gesetz, „die Summe der Entfernungen von den Brennpunkten ist für jeden Ellipsenpunkt gleich gross." Den Schluss vom Besondern aufs Allgemeine gestattet die formale Logik bekanntlich nur bei der vollständigen Induction; in allen Fällen, wo die Induction unvollständig ist, gilt er nur als Wahrscheinlichkeitsschluss. Hr. H. übersieht, dass er hätte eben so schliessen können, die Differenz oder der Quotient der beiden Leitstrahlen eines jeden Ellipsenpunktes seien constant, weil die Differenz,

*) Herr Prof. Belović in Esseg a. d. Drau hat eine Reihe von grössern Randbemerkungen zu frühern Aufsätzen dieser Zeitschrift eingesendet. Wir haben dieselben den betr. Verfassern zur Vertheidigung resp. Entgegnung zugestellt und bringen dieselben im „Discussions-Saal" hiermit zur allgemeinen Besprechung. Da ihr Umfang den dafür bestimmten Raum eines Heftes überschreitet, so werden die übrigen in den nächsten Heften folgen. Uebrigens sind wir Hrn. B. für diese Anregung nur dankbar. — D. Red.

bezüglich der Quotient, der beiden über einander fallenden Halbmesser eines jeden Kreispunktes constant ist.

Dasselbe gilt von der Ableitung des Satzes: „8) die Winkel, welche von den aus den Brennpunkten nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogenen Geraden gebildet werden, sind gleich gross.“ Dieser Lehrsatz sollte nach Hr. H. desshalb allgemeine Geltung haben, weil der Satz: „2) der Halbmesser bildet mit der durch seinen Endpunkt gelegten Tangente gleiche Winkel,“ gilt.

Der Satz 8) ist in der That die logische Folge des Satzes 2), aber nur dann, wenn man die Begriffe Kreis und Ellipse coordinirt und per analogiam exactam schliesst. (Siehe Neue Darstellung der Logik von M. W. Drobisch. III. Aufl. § 149.)

Ich erlaube mir noch die Bemerkung, dass die Definitionen des Kreises und der Parabel, von denen Hr. H. bei der Ableitung seiner Lehrsätze ausgeht, eine contradictio in adjecto enthalten. „Der Kreis ist eine Ellipse, deren Brennpunkte mit dem Centrum coincidiren,“ kann nichts anderes bedeuten als: der Kreis ist eine Kegelschnittslinie mit zwei in endlicher Entfernung von einander befindlichen Brennpunkten, welche im Centrum coincidiren. Und „die Parabel ist eine Ellipse, in welcher der eine Brennpunkt im Unendlichen liegt,“ kann keinen andern Sinn haben, als diesen: die Parabel ist eine Kegelschnittslinie mit zwei in endlicher Entfernung von einander befindlichen Brennpunkten, von denen der eine in der Unendlichkeit liegt. In diesen beiden Definitionen wird der Process, durch welchen die Coordinatengleichung der Ellipse in die des Kreises oder der Parabel übergeführt werden kann (Excentricität gleich Null bezüglich unendlich), unrichtig in die Wortsprache übertragen. Der Satz: „der Kreis ist eine Ellipse“ enthält einen Widerspruch, der Satz: „der Kreis entsteht aus der Ellipse“ eine Metapher. Im Unterrichte der Mathematik, der gewiss die Aufgabe hat, klare und deutliche Begriffe zu bilden, können Metaphern unmöglich irgend eine Berechtigung haben. Es ist wahr, dass Schüler an solchen Definitionen keinen Anstoss nehmen, denn die wenigsten halten die in der Lehrstunde gewonnenen geometrischen Begriffe in der ursprünglichen logischen Klarheit und Deutlichkeit durch eine längere Zeit fest. Das psychologische Gebilde des logischen Begriffes sinkt naturgemäss, wenn es nicht durch häufige Auffrischungen eine hinlängliche Anzahl Hilfen erhält, die es von den Hemmungen befreien können, so oft es im Bewusstsein steigen soll. Seine Stelle nimmt dann das Gemeinbild, in der Geometrie das dunkle Anschauungsbild, vollends ein. Ich glaube aber, dass eben der Lehrer der Mathematik am meisten berufen ist, bei den Schülern dem Denken in psychologischen Gemeinbildern entgegenzuwirken. Wird er aber diese Aufgabe lösen können, wenn er mit Widersprüchen behaftete Begriffe aufstellt oder Lehrsätze in blumige Redensarten hüllt? Wie viele solcher, die als Gymnasialschüler nie angehalten worden sind, in Begriffen zu denken, werden wohl einem wissenschaftlichen Universitätsvortrage mit Verständniss folgen können? —

Gegenbemerkung von G. Hellmann.

1) Aus dem Satze, dass die Radienvectoren (Halbmesser) eines Kreises constanten Werth haben, lässt sich auf die Ellipse übergehend nicht „ebenso schliessen, dass die Differenz oder der Quotient der beiden Leitstrahlen eines jeden Ellipsenpunktes constant seien, weil die Differenz, bezüglich der Quotient der beiden übereinanderfallenden Halbmesser eines jeden Kreispunktes constant ist,“ denn man würde sich von der Unrichtigkeit der gemachten Schlussfolgerung leicht durch die Betrachtung specieller Punkte überzeugen: so ergibt z. B. die Differenz der Leitstrahlen eines Endpunktes der kleinen Axe den Werth Null, während die Differenz der Radienvectoren eines Endpunktes der grossen Axe die doppelte lineare Excentricität beträgt, u. s. w.

Gleiches gilt vom Vorwurfe gegen Satz γ).

2) Ein Kegelschnitt wird bekanntlich dann Ellipse genannt, wenn $e = \frac{\varepsilon}{a} < 1$, wo e die numerische, ε die lineare Excentricität und a die halbe grosse Axe bedeuten. Wenn man also bei constant bleibendem a die lineare Excentricität ε in Null übergehen lässt, so bleibt obige Bildungsgleichung noch immer erfüllt, d. h. der Kreis kann als Ellipse betrachtet werden; u. s. w.

Uebrigens sind diese Begriffe jetzt so geläufig, dass ich mich wundern muss, wie Herr Belović ihnen eine contradictio in adjecto vorwerfen kann; vergl. namentlich Salmon, conic sections p. 228.

Bemerkungen zu der „Betrachtung irrationaler Linienverhältnisse“ vom Hrn. Dr. Zerlang IV, 415.

Von Prof. J. Belović in Essek.

Der vom Hrn. Zerlang IV. 6. pag. 415 gegebene Beweis des Satzes: „Eine Paralleltransversale in einem Dreiecke theilt zwei Seiten u. s. w.,“ scheint mir vom Gesichtspunkte eines methodischen Unterrichtes nicht empfehlenswerth. Der übliche Beweisgang, wobei die Abschnitte der einen Dreiecksseite durch das gem. Mass in m bezüglich n gleiche Theile getheilt werden, ist der natürlichere, weil aus der Sache hervorgehende. Das Gleiche gilt von dem Beweise des Satzes: „Gleich hohe in den Winkeln übereinstimmende Parallelogramme verhalten sich wie ihre Grundlinien.“ Gewöhnlich wird nun aus diesem Satze abgeleitet: „Gleich hohe Dreiecke verhalten sich etc.“ Ich halte es jedoch für methodischer, alle ähnlichen Sätze unmittelbar abzuleiten. Bei diesen Beweisen auf die beiden Fälle der Commensurabilität und Incommensurabilität in extenso einzugehen, dünkt mir vollständig überflüssig zu sein, wie O. Schloemilch in seiner Geometrie des Masses gezeigt hat. Nachdem er nämlich in den §§. 13. und 14. (2. Aufl.) das rationale und irrationale Verhältniss auseinander gesetzt hat, gibt er für den Satz: „Die Flächen zweier gleichwinkligen Parallelogramme von verschiedenen Grundlinien und gleichen Nebenseiten verhalten sich wie die Grundlinien,“ folgenden eben so kurzen als wissenschaftlich strengen Beweis. „Zwei solche Parallelogramme lassen sich eben so von einander wegnehmen oder vervielfältigen, wie ihre Grundlinien, es muss daher die Vergleichung der Flächen der Parallelogramme dasselbe Verhältniss liefern, wie die Vergleichung der Grundlinien.“ Dieser Schluss ist bei den Beweisen aller Sätze anwendbar, welche von der Proportionalität solcher Raumgrössen handeln, die zugleich zu- und abnehmen. Man ist bereits in allen Lehrbüchern, glaube ich, davon abgegangen (und zwar aus methodischen Rücksichten ganz mit Recht), diese Sätze für den Fall der Incommensurabilität durch weitläufige indirecte Beweise zu stützen. Dafür pflegt man durch nicht minder weitläufige Betrachtungen darzuthun, dass sich die Quotienten incommensurabler Raumgrössen, deren Gleichheit bewiesen werden soll, zwischen den nämlichen veränderlichen Grenzen einschliessen lassen. Diese Betrachtung ist bei jedem Satze in der Hauptsache die nämliche. Bedeuten nämlich die A Raumgrössen irgend einer Art, die B Raumgrössen irgend einer andern Art, so wird zuerst für den Fall, dass A und A' commensurabel sind, die Giltigkeit der Proportion $A:A' = B:B'$ bewiesen, sodann aber vorausgesetzt, dass B in B', B'', u. s. w. übergeht, wenn A in A' bezüglich A'' u. s. w. übergeht, und dass immer einem grössern A ein grösseres B entspricht. Dadurch ist aber offenbar alles das vorausgesetzt, was man beweisen will, es wird vorausgesetzt, dass B in $\frac{m}{n}B'$ und in $\frac{m+1}{n}B'$ übergeht, wenn A in $\frac{m}{n}A'$ und in $\frac{m+1}{n}A'$ übergeht, und dass immer

$$\frac{m}{n}B' < B < \frac{m+1}{n}B'$$

wenn

$$\frac{m}{n}A' < A < \frac{m+1}{n}A',$$

woraus schliesslich auf die bekannte Weise die Gleichheit der beiden Verhältnisse $A:A'$ und $B:B'$ (für den Fall, dass A und A' incommensurabel sind,) gefolgert wird.

Entgegnung auf die voranstehenden Bemerkungen.

Von Dr. Zerlang.

Die Ansichten des Herrn B. über die Behandlung incommensurabler Strecken weichen von den meinigen wenig ab. Die Differenz scheint mehr in der Auffassung meiner kleinen Notiz zu liegen, welche weniger einen methodischen, als einen sachlichen Zweck hatte. Es handelt sich bei ihr nicht darum darzuthun, wie sich der fragliche Satz am besten der Betrachtung der Commensurabilität und Incommensurabilität fügt, sondern darum, dass bei ihm diese Betrachtung ganz zu vermeiden ist. (Die beiden Druckfehler werden leicht als solche erkannt.*))

Repertorium für Aufgaben.

Vorwort der Redaction. In dem vorliegenden Hefte dieser Zeitschrift soll ein „Repertorium für Aufgaben“ aus der Elementarmathematik eröffnet werden. In demselben sollen in erster Linie neue Aufgaben zusammengestellt werden, wie sie in mathematischen Zeitschriften oder neu erscheinenden Aufgabensammlungen zur Veröffentlichung kommen, dann aber auch interessante ältere, namentlich solche, deren bisherige Bearbeitung noch zu wünschen übrig lässt. Die Aufgaben sollen aber, dem Zwecke dieser Zeitschrift entsprechend, wirkliche „Aufgaben für Schüler“ sein; nicht gerade solche, welche auch der Durchschnittsschüler ohne Schwierigkeit löst, wohl aber solche, zu deren Lösung die Schüler vom Lehrer angeleitet werden können. Eben dadurch nämlich soll diese Sammelarbeit weiter ihre Berechtigung erweisen und dem Unterricht förderlicher werden, dass von den gestellten Aufgaben auch möglichst entsprechende Lösungen — allemal im nächsten, spätestens übernächsten Hefte — in aller Kürze mitgetheilt werden. Dabei werden die geometrischen Aufgaben der Natur der Sache nach überwiegen, arithmetische aber keineswegs ausgeschlossen sein.

Die Bearbeitung dieses Abschnittes hat auf unsere Bitte Hr. Professor Binder in Schönthal (Würtemberg) übernommen; wir laden aber alle Leser dieser Zeitschrift freundlich ein, durch Einsendung von entsprechenden Aufgaben oder Lösungen, sei es an die Redaction d. Z., sei es unmittelbar an den Herrn Referenten, ihre Unterstützung dem Unternehmen zu leihen, für dessen Gedeihen die Betheiligung möglichst Vieler höchst wünschenswerth ist. —

---

*) s. das Druckfehlerzeichniss ds. Heftes. D. Red.

Selbstverständlich bleibt die Veröffentlichung der Einsendungen dem Herrn Refl. und der Redaction vorbehalten.

Vorbemerkungen des Referenten.

Von jeder Aufgabe wird der Fundort angegeben werden, wo mir ein socher bekannt ist; ich werde aber Prioritätsnachweise stets und namentlich dann dankbar annehmen, wenn damit zugleich auf eine bessere Bearbeitung, als die meinige hingewiesen wird.

Bei den (planimetrischen und stereometrischen) Constructionsaufgaben ist in erster Linie eine rein geometrische Lösung in Aussicht genommen, ohne dass damit eine wirklich elegante Behandlung durch Rechnung ausgeschlossen sein soll.

Geometrische Aufgaben 1—9.

Ein Rechteck mit gegebenem Umfang oder gegebener Differenz zweier Seiten, oder mit gegebener Diagonale zu zeichnen.

1. In einen gegebenen Kreissector und zwar
   a) so, dass zwei Ecken auf dem Bogen,
   b) so, dass zwei Ecken auf einem Halbmesser liegen.
2. In ein gegebenes Kreissegment.

(Die 6 Aufgaben unter 1, a) und b) finden sich bei Lieber und v. Lühmann, Geometr. Constructionsaufgaben, 2. Aufl. S. 120; aber mit Verweisung auf trigonometrische Lösungen.)

Geometrische Lehrsätze.

Wenn zwei Kreise mit den Mittelpunkten A und B einander von aussen in C, und eine gerade Linie in den Punkten D und E berühren; wenn man ferner durch C eine beliebige Gerade zieht, welche die Kreise zum zweiten Mal in F und G schneidet, so werden sich FD und GE in H rechtwinklig, und zwar so schneiden, dass FH gleich der Tangente von F an Kreis B, GH gleich der Tangente von G an Kreis A ist.

Dieser Satz ist für das Malfattische Problem von Bedeutung.

Schönthal. Binder.

Literarische Berichte.

A) Recensionen und Anzeigen von Büchern.

Schulbücher über die Determinanten.

1) Hesse, Dr. O. (ordentl. Prof. an dem kgl. Polytechnicum zu München). Die Determinanten, elementar behandelt. Zweite Aufl. Leipzig 1872, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 48 S.

2) Hattendorf, R. (Prof. am Polytechnicum zu Aachen), Einleitung in die Lehre von den Determinanten. Hannover 1872. Schmorl & Seefeld. XII, 60 S.

3) Dölp, Dr. H. (ordentl. Prof. am Grossherz. Polyt. zu Darmstadt), Die Determinanten nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben. Elementar behandelt. Darmstadt, 1874. Verlag von Ludwig Brill. 94 S.

Von den Partien der „neuern Mathematik" hat keine so schnell Eingang in weitere Kreise gefunden als die Theorie der Determinanten; es ist daher auch das Erscheinen von Werken, welche die Einführung dieser Disciplin in den Elementar-Unterricht bezwecken, ganz erklärlich. Vorliegende drei Schriften verdanken diesem Umstande ihre Entstehung. Das Werk Hesse's, auf Veranlassung der k. bairischen Unterrichtsbehörde verfasst, dürfte sich, wie der Herr Verfasser in der Vorrede selbst erwähnt, mehr für den angehenden Mathematiker eignen, als für die grosse Menge von Schülern, die Mathematik nicht als Hauptgegenstand treiben. Denn die ganz allgemein und abstract gehaltene Darstellung, die im Grossen und Ganzen mit dem vom Herrn Verfasser in den bekannten „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes" eingeschlagenen Gange identisch ist, dürfte beim ersten Unterrichte weniger begabten Schülern einige Schwierigkeit bereiten.

Für Anfänger fasslicher gehalten sind die beiden letzteren Werke, die ungefähr dieselben Partien der Determinanten enthalten. Die Schrift Hattendorf's entwickelt in einer Einleitung an den Gleichungen ersten Grades mit zwei und drei Unbekannten den Begriff und die Eigenschaften der Determinanten, diese inductiv gewonnenen Eigenschaften werden im ersten Abschnitt allgemein begründet. Der zweite Abschnitt enthält die Anwendung auf lineare Functionen und Gleichungen. Der dritte Abschnitt enthält die Multiplication nach Jakobi, der vierte die adjungirten Systeme. Die Sätze sind durchgehends durch passende Uebungsbeispiele erläutert. Die Dölp'sche Arbeit enthält die Permutationslehre und das Differenzproduct als Einleitung (vgl. Hesse S. 15), führt in einer der Salmon'schen Darstellung (Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der lineareu Transformationen) analogen Form den Begriff der Determinanten, deren Eigenschaften, die Zerlegung in Unter-Determinanten ein. Das Theorem für das Product zweier Determinanten wird nach Jacobi und durch zwei Systeme linearer Gleichungen erhalten; letztere Darstellung ist für Anfänger fasslicher als erstere. Den adjungirten Determinanten folgen sehr schöne Anwendungen auf die Geometrie und auf algebraische Entwicklungen (Resultante und Bestimmung der gleichen Wurzeln einer höheren Gleichung). Die ganz elementar gehaltene Darstellung mit Erläuterungen an allen schwierigeren Stellen durch Beispiele dürfte diese Schrift zum ersten Studium besonders geeignet machen.

Graz. J. Frischauf.

Emsmann, D. H., Professor. Zur Sectio aurea. Materialien zu elementaren, namentlich durch die Sectio aurea löslichen Constructionsaufgaben etc.

Unter diesem Titel veröffentlicht Hr. Prof. Emsmann in Stettin eine Abhandlung, die wohl dem Programme der Stettiner Schule von Ostern d. J. beigegeben ist, wenigstens spricht dafür, dass uns dieselbe ohne Titelblatt zugegangen ist. Die Veranlassung dazu war einerseits der Umstand, dass die Aufgabensammlungen keine grosse Auswahl bieten und die gebotenen hieher gehörigen Aufgaben sich auch nicht immer an einer Stelle der betr. Sammlung zusammen befinden, andererseits ein neuer Satz, der den Verfasser darauf führte, die Aufgabe der Sectio aurea zu verallgemeinern. Dieser Satz ist, mit einer etwas andern uns verständlicher und kürzer scheinenden Ausdrucksweise, folgender:

Zieht man in einem Dreieck eine beliebige Ecktransversale und eine zweite, die drei Seiten schneidende, mit der ersten parallel, so ist das Product aus der Ecktransversale, der Seite, nach welcher sie gezogen ist und dem Stück dieser Seite zwischen den beiden Transversalen gleich dem Product aus dem Stück der zweiten Transversale, zwischen den andern Dreiecksseiten und den beiden Abschnitten, in welche die Ecktransversale die Dreiecksseite theilt.

Ist ABC das Dreieck, AD die Ecktransversale, EGF die mit ihr parallele Transversale, so dass E auf BC, G auf CA und F auf AB liegt, so ist

$$\frac{AD\,.\,BC\,.\,DE}{FG\,.\,DB\,.\,DC} = 1 \text{ oder } \frac{BC\,.\,DE}{DB\,.\,DC} = \frac{FG}{AD}$$

In der Andeutung des Beweises soll es wohl statt „oder aus dem Dreieck **A**EF“ heissen: „und aus . . . **B**EF“.

Wir bemerken zu diesem Satze zugleich noch, dass die so entstehende vierpunktige Reihe auf BC, nämlich B, D, E, C in eine harmonische Punktreihe übergeht, wenn $GE = GF$ wird, denn wenn man dieselbe als eine harmonische Punktreihe annimmt, so muss $BC\,.\,DE = DB\,.\,CE$ sein; dann verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$\frac{DB\,.\,CE}{DB\,.\,DC} = \frac{FG}{AD} \text{ oder } \frac{CE}{CD} = \frac{FG}{AD}$$

Es ist aber $\frac{CE}{CD} = \frac{CG}{CA} = \frac{GE}{AD}$

also muss auch $\frac{FG}{AD} = \frac{GE}{AD}$ oder $FG = GE$ sein.

Hieraus ergibt sich eine neue Methode, zu drei Punkten den vierten harmonischen zu finden.

Unser Verfasser verallgemeinert zunächst die Form der Sectio aurea

$$a : x = x : (a - x) \text{ oder } a : x = x : (a + x)$$

je nachdem der Theilpunkt zwischen den Endpunkten der zu theilenden Strecke BC oder auf der Verlängerung derselben liegt (vom Verfasser durch die Namen innere und äussere Sectio unterschieden), indem er auf der Strecke $BC = a$ ausser dem Theilpunkt D noch einen Punkt E so annimmt, dass $CE = \frac{q}{r}\,a$ ist, und als allgemeine Form der Sectio aurea annimmt

$$a : x = x : \left[x - \frac{p}{n} \quad - \quad \frac{q}{r}\,a)\right] \text{ für die innere Sectio}$$

$$a : x = x : \left[-x + \frac{p}{n}\ (x + \frac{q}{r}\,a)\right] \text{ für die äussere Sectio.}$$

Letztere Form geht aus der ersten hervor, wenn man $-x$ statt x setzt; und wiederum geht die specielle Sectio aurea hervor, wenn man $\frac{n}{p} = \frac{q}{r} = \frac{1}{2}$ setzt.

Jetzt wird die Uebereinstimmung des obigen Lehrsatzes und der allgemeinen Form der Sectio aurea nachgewiesen, und dann eine grosse Reihe von Aufgaben angedeutet, nämlich

I. Aufgaben, die durch die einfache Sectio lösbar sind, und zwar

A) Theilung einer Strecke
  a) durch die innere Sectio
  b) durch die äussere Sectio
  c) durch die innerere und äussere zugleich.
B) Construction eines Rechtecks.
C) Construction von Dreiecken.
  a) Relationen, die durch die Sectio aurea bedingt sind, am Dreieck überhaupt,
  b) wenn die Ecktransversale senkrecht auf der Gegenseite steht,
  c) wenn der Winkel, durch welchen die Ecktransversale geht, ein rechter ist und diese zugleich die Hypotenusenhöhe ist,
  d) wenn die Ecktransversale den Winkel halbirt,
  e) wenn das Dreieck gleichschenkelig ist.
  f) Dreiecksconstructionen mit Hülfe der vorausgehenden Relationen.
D) Construction von Trapezen.
E) Theilung oder Vergrösserung eines Parallelogramms.
F) Kreisaufgaben.

II. Aufgaben, die sich aus der allgemeinen Sectio aurea ergeben, wenn $\frac{n}{p} = 2$ und $\frac{q}{r} = \frac{1}{2}$ ist,
mit ähnlichen Unterabtheilungen.

III. Andeutung weiterer Aufgabenreihen, die sich aus der Proportion für die allgemeine Sectio aurea ergeben und zur Construction der einfachen Sectio führen.

IV. Andeutung von Aufgaben-Reihen, die sich aus der allgemeinen Sectio aurea ergeben

1) für den Fall $\frac{n}{p} = 1$ und $\frac{q}{r} = \frac{1}{2}$
2) „ „ „ $\frac{n}{p} = \frac{1}{2}$ und $\frac{q}{r} = \frac{1}{4}$
3) „ „ „ $\frac{n}{p} = 2$ und $\frac{q}{r} = \frac{1}{4}$
4) Allgemeine Aufgaben-Reihen.

Man erkennt aus dieser Uebersicht, wie eingehend und umfassend der Herr Verfasser seine Aufgabe behandelt hat. Mehr als 350 Relationen und Aufgaben sind geliefert. Wer also um Uebungsstoff zur Anwendung der Sectio aurea verlegen ist, findet in dieser Abhandlung reichlichen Vorrath.

Lübeck. Chr. Scherling.

Thomson & Tait, Handbuch der theoret. Physik. Uebersetzt von Helmholtz & Wertheim. Erster Band, erster Theil: „einleitende Begriffe“ auf XIX und 380 Seiten in gr. 8. mit 437 §§. 2 Thlr. 10 Sgr. Vieweg 1871.

Der vorliegende erste Theil ist eine vollständige theoret. Mechanik mit einem Anhange über Experiment nebst Ausgleichung und Interpolation, über Hypothesen und über Messen, eingetheilt unter die 3 Titel: „Kinematik, Gesetze und Principien der Dynamik, Erfahrung,“ ausführlich und eindringend in der Sache, knapp in Worten, aber verständlich und gut zu lesen. Diese Mechanik nimmt Rücksicht auf die Bedürfnisse nicht blos dessen, was wir im engeren Sinne Physik nennen, sondern auch der Astronomie (Störungstheorie) und der Technik. Der einzelne § ist, wo es nützlich erschien, getrennt in einen gross und einen klein gedruckten Theil. Im Wesentlichen gibt der erste die zu behandelnden Begriffe und Thatsachen und den allgemeinen Zusammenhang, der zweite mathematisch-analytische Ausführungen und Anwendungen. Die Einrichtung ist so getroffen, dass der grossgedruckte Theil des Werkes allein ein stattliches wohl zusammenhängendes Lehrbuch „in einer dem nicht mathematischen Leser verständlichen Sprache“*) bildet, während der klein gedruckte „denen, welche des Privilegiums tieferer mathematischer Kenntnisse theilhaftig sind, einen zusammenhängenden Umriss der analytischen Processe“ liefert, „durch welche die meisten jener Resultate auch in Gebiete ausgedehnt worden sind, deren die experimentelle Untersuchung sich noch nicht hat bemächtigen können.“*) — Es ist natürlich, dass ein solches Werk bei seinen Lesern die Kenntniss der Infinitesimal-Rechnung und der analytischen Geometrie voraussetzen muss. Jedoch ist hier das Maass der unerlässlichen Vorkenntnisse so gering genommen, wie es ohne Weiterungen und ohne Schaden für das Eindringen geschehen konnte. Mancher rein geometrische Satz ist im ersten Capitel, manche rein analytisch-mathematische Theorie (z. B. die der Kugelfunctionen) namentlich in den Zusätzen und in den kleingedruckten Theilen der spätern §§ abgehandelt.

Voran geht dem Theile ein „Verzeichniss neuer oder in deutschen Büchern weniger gebrauchter Benennungen“ (nebst englischem Orginal-Ausdruck) „mit Angabe des Orts ihrer Erklärung.“

Ueber die Güte des Werks, das selbst zu übersetzen Helmholtz & Wertheim (der eigentliche Uebersetzer) gut befunden haben, meinerseits ein Urtheil drucken zu lassen, scheint mir trotz Abneigung gegen bequemen Autoritätsglauben unbescheiden: um so mehr, als mich mannichfaltige Abhaltungen noch nicht dazu haben kommen lassen das Werk so durchzustudiren, wie es mir durchaus wünschenswerth erscheint.

Hin und wieder möchte vielleicht eine grössere Ausführlichkeit in — hier zwar nicht nöthigen, aber doch für nützlich gehaltenen —

*) Worte der Verfasser.

mathematischen Deductionen manchem angenehm sein z. B. hätte S. 5 der Gedankengang dadurch angedeutet werden können, dass bei Formel (3) bemerkt wäre „Länge der Linie LL′“, bei (4) und (5) „Projection des Mittelpunkts der Verbindung zwischen den Einheitspunkten der OL und OL′ auf die Axen“ und bei (6) Dreiecksprojection.“

Für die Güte der Uebersetzung bürgt die Sorgfalt der Methode, welche auch die Verfasser heranzog; für die Ausstattung der Name des Verlegers.

Das praktische Motiv für die Uebersetzung war nach Helmholtz, dass bei uns „sich jeder, der ein eingehendes wissenschaftliches Verständniss auch nur einzelner Theile dieser Wissenschaft suchte, wie es ohne mathematische Behandlung eben nicht zu gewinnen ist, dem Studium der einzelnen Original-Abhandlungen zuwenden“ musste, diese „aber fast alle in akademischen Denkschriften oder anderen wenig verbreiteten periodischen Schriften und gewöhnlich nur in grösseren Bibliotheken zu finden“ sind, und dass diese „rein äusserliche Schwierigkeit einen wesentlichen Theil der Schuld davon trägt, dass mathematisch-physikalische Kenntnisse auch bei uns in Deutschland nur eine sehr geringe Verbreitung haben.“

Von dem ganzen dreibändigen Werke, wovon hier der erste Halbband besprochen wird, sagt H.: „Das Werk arbeitet auf eine möglichst allseitige und eindringende Einsicht in die Wechselbeziehungen der Naturkräfte hin, wobei es wesentlich die Hervorhebung des physikalischen Zusammenhanges im Gegensatz zu der Eleganz der mathematischen Methoden bevorzugt . . . Dieser Richtung ihrer Arbeit entsprechend haben die Verfasser sich auch bemüht, wo es anging, mathematische Methoden zu gebrauchen und Begriffe einzuführen, die der Anschauung fähig sind.“

Lucrativ kann ein solches Unternehmen schwerlich sein. Möge ihm aber diejenige Anerkennung zu Theil werden, welche nöthig ist, den Liebhabern und Jüngern der Physik den Nutzen des von den Verfassern und Uebersetzern erstrebten Zieles zu Gute kommen zu lassen, und vielleicht auch dazu, dass die Uebersetzer ihre Arbeit nicht als Opfer fühlen!

Altona. Dr. Funke.

Trappe, A. (Prof. und Prorector an der Realschule am Zwinger zu Breslau.) Schul-Physik. **Sechste** vermehrte und verbesserte Auflage mit 256 Abbildungen im Text. Ferdinand Hirt. Breslau. 1873.

Ein Buch, das beim Schulgebrauche die sechste Auflage erlebte, hat dadurch eine Läuterung erhalten, die es von etwaigen Schlacken säubern musste und man wird unwillkürlich für ein solches Buch günstig gestimmt, wenn es noch in gefälligem Gewande, mit deutlichem Druck, gutem Papier und sauberen Holzschnitten, geboten wird. Das war der erste Gedanke, den uns das vorliegende Werkchen erregte und — wir können es gleich sagen, der gute Eindruck blieb auch bei näherer Durchsicht, wenn gleich wir im Bezug auf Anordnung des Ganzen, sowie einzelner Theile nicht immer ganz gleicher Ansicht mit dem Verfasser sein können.

Verfasser will ein Schulbuch schreiben, nicht aber für das Selbststudium, da beide Zwecke sich schlecht vereinigen lassen. In dem Unterrichte sollen die wichtigsten physikalischen Erscheinungen und Gesetze gelehrt werden, es soll die geistige Kraft des Schülers geübt werden, der Schüler soll beobachten und combiniren lernen, endlich noch seine Fachgewandtheit üben. Das bezweckt vorliegendes Buch.

Das Stoffliche des Gegenstandes hat Verf. sehr reichlich ausgemessen. Er glaubt selbst, dass kaum eine der Anstalten, für die er das Buch bestimmte, ihn ganz wird bewältigen können, und das ist wohl ein wenig inconsequent. Glaubt Verfasser mit einem Buche nicht zweierlei Zwecke zu erreichen, wie die ersten Zeilen seines Vorwortes besagen, warum hält er sich nun nicht auch ganz an das eine.

Was die Methode anlangt, so will Verfasser den Lehrer, der — wie er meint und wir mit ihm, auch ohne jene ausdrückliche Bemerkung — seines Stoffes völlig mächtig sein soll — nicht allzustreng binden, und daher ihm nicht vorschreiben, ob und wann er das Experiment voranstelle, wann er mit mathematischer Ableitung eines Gesetzes beginne; dennoch gibt Verfasser für jüngere, noch unerfahrene Lehrer im Buche mancherlei Winke. Bei den Abbildungen sind unwesentliche Dinge weggelassen, das Ganze soll mehr ein Hülfsmittel für das Gedächtniss sein, gewissermassen ein Heft ersetzen, welches das Erlernte enthalten soll und dessen Führung durch den Schüler als unpädagogisch verurtheilt wird. Nur zur Ausführung schriftlicher Aufgaben darf ein Heft benützt werden. Zur Uebung der Schüler im Beobachten und Erklären von Naturerscheinungen dienen vielfach eingestreute Fragen und Bemerkungen. Durch besonderen Druck sind wichtigere Gesetze hervorgehoben, Anwendungen sind zu Ende der Capitel besprochen u. s. w.

Die Reihenfolge der Capitel sind 1. Ruhe und Bewegung der Körper, 2. Schall, 3. Licht, 4. Wärme, 5. Magnetismus, Elektricität, Galvanismus. Als Anhang folgen einige chemische Erscheinungen. In einer kurzen Einleitung werden die allgemeinen Eigenschaften der Körper betrachtet, so weit sie nicht in den folgenden Capiteln vorkommen müssen. Diese Einleitung erscheint wohl sehr kurz, was bei der Ausdehnung verschiedener anderer Capitel auffällt. So wäre bei der Cohäsion wohl einiges über die Festigkeit der Körper zu sagen, bei der Härte hätte der Härtescale gedacht werden können, sowie der verschiedenartigen Härte eines Körpers nach verschiedener Behandlungsweise. Mit der Adhäsion in Verbindung, als eine Art derselben hätte die Auflöslichkeit genannt werden können. Bei der Capillarität ist der Ausdruck: „die Flüssigkeit steigt in ihm etwas über das äussere Niveau“ wohl genauer mit der Weite in Verbindung zu setzen und als Beispiel über die Macht dieser Kraft hätte man wohl auch das Aufsteigen des Pflanzensaftes nennen können, wenn gleich Endosmose ebenfalls mithilft, bei deren Besprechung übrigens jenes Beispiel ebenfalls fehlt. Bei Besprechung der Dichte ziehen wir die in Oesterreich übliche Trennung des Begriffes von dem des specifischen Gewichts (dem Gewichte der Raumeinheit) vor. Das Capitel über chemische Anziehung, welches als Anhang folgt, möchte in der Einleitnng — besonders in dieser Kürze passender am Platze sein, da ja bei den übrigen Abschnitten, besonders in dem Abschnitt „Elektricität," bei der Besprechung des Spektralapparats, bei welcher auch die unter den Elementen nicht aufgezählten Elemente Thallium u. a. genannt werden. Chemiker scheint Verfasser nicht zu sein, die gegebene Bereitungsweise der Kohlensäure lässt es uns schliessen, indem ein Chemiker die Kreide wohl in Stücken, nicht aber als Pulver verwenden würde. Die Erklärung der Irrlichter ist ebenfalls eine wohl verlassene Theorie, die Explosion des chlorsauren Kali setzt Gegenwart brennbarer Stoffe voraus. Neuere nchemischen Anschauungen begegnen wir in dem überaus kurzen Anhange nicht. Kürzere Fassung bei einzelnen Dingen (z. B. Sauerstoffbereitung) hätte Platz für Wichtiges gegeben. Für das Hauptcapitel des Buches haben diese Nebensachen keine Geltung, hier können wir das bereits als günstig geschilderte Urtheil fast ohne Ausnahme gelten lassen, wir sagen fast und müssen das begründen. So ist bei der Ableitung der Fallgesetze die Endgeschwindigkeit mit dem Fallraume hie und da verwechselt und geht das soweit, dass selbst die Wurflinien Fig. 36, 37 und 39 unrichtig gezeichnet sind. Es ist das um so bedauerlicher, als das Buch für einen Leserkreis bestimmt scheint, der einen solchen Fehler schon vollständig zu entdecken im Stande ist. Mehr vermissen wir auch gewisse Verallgemeinerungen, welche auf das einheitliche Wesen aller Naturkräfte sich beziehen, so bei Betrachtung der Wellenbewegung, das Gesetz über Abnahme der Kräfte mit der Entfernung. Bei der Schwere vermissten wir die Angabe dieses Gesetzes vollkommen und so fehlt hie und da eine ähnliche Verallgemeinerung. Man hätte um so mehr darauf rechnen können, als an vielen andern Stellen des Buches eine solche übersichtliche Darstellung verwandter Erscheinungen sehr anschaulich und lehrreich gegeben ist. Wir können durch diese Wahrnehmungen uns nicht dazu bewogen fühlen, unser oben als günstig hingestelltes Urtheil zurückzunehmen, möchten aber wünschen, dass bei einer neuen Auflage unsern Anschauungen in etwas Rechnung getragen würde. Das Buch würde gewiss dadurch gewinnen, und bei seinen übrigen guten Eigenschaften in immer weiteren Kreisen Gutes wirken können.

Wien. Dr. C. Rothe.

Peters, Dr. K. F. (Prof. an der k. k. Univers. Graz), Leitfaden zum ersten Anschauungsunterricht aus der allgemeinen Anorganographie (Mineralogie). Für Mittelschulen und den Privatunterricht. Mit 58 Holzschnitten und 3 lithogr. Tafeln. Graz 1874, Leuschner und Lubensky (Univ.-Buchh.) Preis ?

Dieses aus der Feder eines Fachgelehrten geflossene, und zunächst für dessen zahlreiche an österreichischen Mittelschulen lehrende Schüler bestimmte Büchlein, unterscheidet sich wesentlich von jenen Leitfäden, die nichts sind als die Summe der Ueberbleibsel einer gewaltsam auf einen kleinen Raum gebrachten Wissenschaft, durch welche Zubereitung dieselbe an Verdaulichkeit für das betreffende kindliche Alter gerade nicht gewinnt. Statt eines bunten Strausses, der im Gedächtnisse des unreifen Kindes unrettbar verwelken muss, bietet die vorliegende Schrift vor allem den Keim eines umfassenden Verständnisses der anorganischen Welt, dies aber in so harmonischer und allseitiger Verbindung der leitenden Gedanken, dass ein solides Gerüste von Grundvorstellungen entsteht, dessen weiterer Ausbau dem detaillirten Unterricht in den oberen Classen vorbehalten bleibt. Pädagogen, welche nicht im alten Schlendrian eingerostet sind, sondern aus ihren Universitätsjahren einen echt wissenschaftlichen Geist in die Praxis mit hinübergenommen haben, und welche anderntheils erfahren genug sind, um zu wissen, dass sie erst säen müssen, ehe sie ernten können, werden den vorgezeichneten Weg freudig betreten und der neuen Methode durch ihre thätige Mitwirkung in der eingeschlagenen Richtung Bahn brechen.

Dr. Conrad Clar.

Nachschrift der Red. Die Redaction hat sich von der Vortrefflichkeit dieser kleinen Schrift durch die Lectüre ders. überzeugt und steht nicht an, sie den Lehrern der Naturw. zu ihrer eigenen method. Ausbildung im Vortrage, sowie zum Ankauf für Schulbibliotheken zu empfehlen.

Frischauf, Dr. J. Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien. Graz 1871. Leuschner und Lubensky, k. k. Universitätsbuchhandlung.

Eine lange Reihe von Decennien hindurch war ein wirklich drückender Mangel in der astronomischen Literatur fühlbar. Denn ausser der Astronomie von Littrow gab es kein Buch, das die Lehren der theoretischen Astronomie behandelte; dieses aber war längst veraltet und man war so gezwungen, aus den Quellen selbst, aus den Schriften Gauss's, Olbers's, Enke's und den zahlreichen Bänden des Berliner astronomischen Jahrbuches sich Belehrung zu holen. Wie fühlbar der Mangel war, zeigt das fast gleichzeitige Erscheinen dreier verwandter Bücher: „des Verfassers Grundriss," „Klinkerfues's theoretische Astronomie" und „Oppolzers Bahnbestimmungen." Während nun die beiden letzteren Werke wesentlich als Handbücher für den Astronomen gelten können, verfolgte das erstre weitere Ziele. Es stellt sich die Aufgabe, seinen Lesern eine klare Einsicht in die Theorie der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen zu eröffnen und zugleich den künftigen Astronomen zum vollen Verständniss seiner Fachliteratur und seiner praktischen Thätigkeit zu befähigen. Wollte aber der Verfasser dieses ziemlich weitgesteckte Ziel erreichen, so konnte er sich nicht etwa begnügen — wie es häufig beliebt wird — den nach Bedarf verkürzten Inhalt der Originalschriften in willkürlicher Systematik aneinanderzureihen, sondern er musste die von der Forschung gewonnenen Resultate zu einem einheitlichen Ganzen verschmelzen. Einer solchen stets mühevollen, wissenschaftlich wenig lohnenden, und gewöhnlich auch wenig gewürdigten Arbeit unterzog sich der Verfasser mit anerkanntem Geschick.

Der Herr Verfasser gliedert seinen Stoff in drei Abschnitte, von denen die beiden ersten den theoretischen, der dritte den geschichtlichen Theil des Buches bilden.

Im ersten Abschnitte werden die „Beziehungen zwischen den die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Grössen" entwickelt. Also unter anderen: die Relation der Anomalie, die Lambert'sche Formel für die Parabel, die Verwandlung der helio- und geo-centrischen Distanzen in einander, die Bestimmung der heliocentrischen Coordinaten durch die wahre Anomalie und den Radiusvector, die Beziehungen zwischen den Coordinaten und den Dreiecksflächen dreier Orte eines Himmelskörpers etc.

Der zweite Theil behandelt sodann die „Bahnbestimmung der Planeten und Kometen." Im ersten Abschnitt entwickelt der Verfasser die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei geometrischen Beobachtungen nach Gauss mit Benutzung der Abhandlung Enkes im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1854. Eine bemerkungswerthe Verbesserung der Gauss'schen Methode hat der Verfasser bei Berechnung der Bahnelemente mittelst der curtirten Distanzen eingeführt. An Stelle der Gauss'schen Gleichung:

$$\sin z^{n} = m \sin (z + n)$$

setzt er die Gleichung

$$x' = \lambda + \frac{\mu}{(a'^2 + x'^2)^{3/2}}$$

Diese Gleichung besitzt vor der Gauss'schen den Vorzug, dass das bekannte Glied $x' = \lambda$, unmittelbar ein Näherungswerth ist, dass sie in Folge der nahezu gleichen mittleren Entfernung aller Asteroiden von der Sonne noch eine weitere Annäherung bietet, also des oft langwierigen Suchens nach der brauchbaren von den möglichen Wurzeln der Gauss'schen Gleichung enthebt.

Im zweiten Abschnitt geht der Verfasser zur „Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geocentrischen Beobachtungen nach der Methode von Olbers, im dritten zur Bestimmung einer elliptischen aus vier geocentrischen Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind“ über. Der vierte Abschnitt handelt „über die Vorbereitungsrechnungen bei Bahnbestimmungen,“ also über die Verwandlung der Coordinaten, Parallaxe, Aberration, Präcession etc., der fünfte über die „Bahnbestimmungen aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen;“ der sechste über „Bahnbestimmung mit Berücksichtigungen der Störungen.“ Die Darstellung ist überall ungemein klar und bündig; die Theorien durchwegs an gewählten Beispielen erläutert.

Eine überaus dankenswerthe und werthvolle Zugabe des 3. Theils ist die Geschichte der Planetentheorien. Der Verfasser zeichnet hierin zuerst den Stand der astronomischen Kenntnisse in der Zeit vor Keppler, geht dann in ausführlicher Weise auf die Entdeckungsgeschichte der Keppler'schen Gesetze ein und schliesst mit der Geschichte des Problems der Bahnbestimmung.

Die Darstellung ist durchwegs aus den Quellen geschöpft, die Entwicklung der einzelnen Theorien stets streng die ihrer Erfinder und überall sind zur Beurtheilung der Genauigkeit die Fehler der Methoden im Sinne der heutigen Wissenschaft berechnet. Diese Geschichte der Keppler'schen Gesetze wird um so willkommener sein, als sie die erste wissenschaftliche sein dürfte und bisher jeder, dem die abstrusen landläufigen Traditionen nicht genügten, genöthigt war, sich durch die Keppler'schen Schriften hindurchzuarbeiten. Ich schliesse die Anzeige dieses Buches, die nur annähernd den Reichthum seiner 159 Seiten schildert, mit dem Wunsche, etwas zu seiner Verbreitung beizutragen und der Hoffnung, seine Verwendung am Polytechnikum in Aachen werde nicht vereinzelt bleiben.

Wien. Escherich.

B) Bibliographie. 1874.

April. Mai. Juni.

Unterrichts- und Erziehungswesen.

Bach, Joh. Heinr. Deinhardt. Ein Beitrag zur Geschichte des preuss. Gymnasialwesens. Lpzg., Teubner. 10 Sgr.

Beiträge zur Statistik des Königr. Bayern. 27. Heft: Statistik des Unterrichtes für die J. 1869—72 mit Rückblicken auf die Ergebnisse früherer Jahre Bearb. v. Dr. Mayr. 1. Thl. Das höhere Unterrichtswesen. $5^1/_3$ Thlr. München, Ackermann.

Bratuschek, die Philosophie als obligatorischer Gegenstand der Schulamtsprüfung. Giessen, Ferber. 4 Sgr.

Cohn, die Schulhäuser und Schultische auf der Wiener Weltausstellung. Eine augenärztliche Kritik. Breslau, Morgenstern. 12 Sgr.
Diesterweg's Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer. 5. Aufl. 1. Bd. Das Allgemeine bearb. v. Rudolph. Essen, Bädeker. $1^1/_3$ Thlr.
Guckeisen, Aufgabe und Organisation des naturwissenschaftlichen Unterrichts an höheren Lehranstalten. Lpzg., Mayr. 10 Sgr.
Kreyenberg, die höheren Töchterschulen. Lpzg., Siegismund. 8 Sgr.
Kummer, Geschichte des Schulwesens im Canton Bern. Bern, Dalp. 20 Sgr.
Loew, die Stellung der Schule zur Naturwissenschaft. Berlin, Gülker. 10 Sgr.
Münch, das Missverhältniss zwischen geistiger und körperlicher Ausbildung und seine Folgen naturwissenschaftlich begründet. Mannheim, Schneider. 10 Sgr.
Ostendorf, die Conferenz zur Berathung über das höhere Schulwesen des preuss. Staates. Vortrag geh. im Bürgervereine zu Braunschweig. Düsseldorf, Schaub. 10 Sgr.
— das höhere Schulwesen unseres Staates. Ein Bericht, den städt. Behörden zu Düsseldorf erstattet. Ebda. 12 Sgr.
Protocolle über die im vor. Jahre im preuss. Unterrichtsministerium gepflogenen, das mittlere und höhere Mädchenschulwesen betr. Verhandlungen. Berlin, Hertz. 10 Sgr.
— der im vor. Jahre im preuss. Unterrichtsministerium über verschiedene Fragen des höheren Schulwesens gehaltenen Conferenz. Ebda. 20 Sgr.
Richter, die Reform der Lehrerseminare nach den Forderungen unserer Zeit u. der heutigen Pädagogik. Lpzg., Brandstetter. $1^1/_3$ Thlr.
Ruegg, die Pädagogik in übersichtlicher Darstellung. Ein Handbuch für Lehramtscandidaten, Volksschullehrer und Erzieher. 4. Aufl. Bern, Dalp. $1^1/_3$ Thlr.
Schaching, der Materialismus in der Erziehung und die Revolution. Ein Beitrag zu der Erziehungs- und Schulfrage. Kempten, Kösel. $^1/_2$ Thlr.
Schmelzer, fromme Wünsche. Ein Beitrag zur Schulfrage. 2. Aufl. 10 Sgr.
Schumann, Lehrbuch der Pädagogik. 1. Thl. Hannover, Meyer. 1 Thlr.
Schulaufsicht u. Lehrerbildung in Bayern. Würzburg, Stuber. 6 Sgr.
Verfügung des Ministeriums betr. die Gesundheitspflege in den Schulen. Stuttgart, Grüninger. 5 Sgr.
Volksbildung u. Schulwesen. Eine cultur-polit. Studie v. Dr. M. Egger. Wien, Hölder. 9 Sgr.

Mathematik.

A) Reine Mathematik.

a) Arithmetik.

Blancke, Uebungsschule im bürgerlichen Rechnen. 3. Heft. Verhältnisse, Regeldetri, Procentrechnung etc. 3. Aufl. Hannover, Schmorl. 6 Sgr.
Blunck, deutsches kaufmännisches Rechenbuch. 5. Aufl. Hamburg, Nolte. 15 Sgr.
Bourquin, Rechenbuch für Elementar- und Kreisschulen. Dorpat, Gläser. 16 Sgr.
Buchenau, Aufgaben zum bürgerl. Rechnen. 4 Hefte. Halle, Gesenius. à 8 Sgr.
Dorn, Anleitung zum Unterricht im Rechnen. 5. Thl. Decimalbrüche, Wurzelausziehen etc. 3. Aufl. Glogau, Handel. 15 Sgr.
—, Aufgaben dazu. Ebda. 2 Sgr.

Fix, Rechenbuch für Volksschulen. Münster, Nasse. 3.

Fölsing, Rechenbuch für Gymnasien u. Realschulen. 11. Aufl. Berlin, Enslin. à 8 Sgr.

Gallenkamp, die Elemente der Mathematik. Ein Leitfaden für den math. Unterricht an höheren Lehranstalten. 4. Aufl. 1. Thl. Arithm. u. Algebra. Iserlohn, Bädeker. 20 Sgr.

Gruber, der arithm. Unterricht an Gymnasien, höheren Bürgersch. und Realsch. Für die Schüler bearb. 1. Thl. 4. Aufl. Carlsruhe, Gross. 14 Sgr.

Harms und Kuckuck, Rechenbuch für Realschulen, Gymnasien, Gewerbesch. u. Seminare. 3. Aufl. Oldenburg, Stalling. $22^1/_2$ Sgr.

Herold, das kaufmännische Rechnen. Ein leichtfasslich auf Grund der neuen Währung bearb. Lehrbuch für Handels-, Gewerb- und Realschulen. 2. Aufl. Hof, Büching. 25 Sgr.

—, der gewandte Rechner. Lehr- u. Uebungsbuch zum Selbstunterrichte. 5. Hft Ebda. 5 Sgr.

Heuer, Rechenbuch. 4. Thl. 19. Aufl. Hannover, Helwing. 10 Sgr.

Heuner, Aufgaben zum Kopfrechnen. 3 Hefte. Ansbach, Seybold à 2 Sgr.

Marbach, arithmetisches Exempelbuch. 4 Hefte. Schleusingen, Glaser. $13^1/_2$ Sgr.

Niepoth, Aufgaben zum schriftl. Rechnen für Schulen. 9. Aufl. Giessen, Roth. 12 Sgr.

Paugger, Lehrbuch der allgemeinen Elementararithmetik oder Algebra für die oberen Classen der Mittelschulen. Triest, Literarisch-art. Anstalt. $1^1/_3$ Thlr.

—, Logarithmentafeln für die Zahlen v. 1—1000 und für die goniometrischen Functionen der Winkel im 1. Quadranten v. 10 zu 10 Min. auf 4 Decimalen. Ebda. 12 Sgr.

Reeb, Rechenbuch für höhere Lehranstalten. 2. Aufl. 6 Hefte. Giessen, Roth. à 4 Sgr.

Schlotterbeck, Aufgaben für das Kopfrechnen. Zum Schulgebrauch. 2. Hft. 2. Aufl. Schwerin, Hildebrand. 13 Sgr.

Scholz, Lehrbuch der Arithmetik für Handelsschulen. 2. Aufl. Wien, Braumüller. 1 Thlr. 2 Sgr.

Spitz, Lehrbuch der allg. Arithmetik zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. 3. Aufl. Lpzg., Winter. $2^1/_3$ Thlr.

—, dass. Anhang. Die Resultate und Andeutungen zur Aufl. der im Lehrbuch enth. Aufg. 3. Aufl. Ebda. 16 Sgr.

Stubba, Aufgaben zum Zifferrechnen. 5. Heft. Regeldetri und Zinsrechnung. 7. Aufl. Bunzlau, Appun. $1^1/_4$ Sgr. 3. Heft. Die Decimalen u. gem. Brüche. 12. Aufl. $1^1/_4$ Sgr.

b) Geometrie und Trigonometrie.

Achterberg, die Geometrie im Zeichenunterricht. Görlitz, Remer. $^1/_4$ Thlr.

Baltzer, die Elemente der Mathematik. 2. Bd. Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. 4. Aufl. Lpzg., Hirzel. 2 Thlr.

Gallenkamp, die Elemente der Mathematik. Ein Leitfaden für den math. Unterricht an höheren Lehranstalten. 4. Aufl. 1. Abth. Planimetrie. 2. Abth. Stereometrie u. Trigonometrie. Iserlohn, Bädeker. 20 Sgr. 24 Sgr.

Hartmann, genetischer Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie in Form methodisch geordneter Fragen und Aufg. 3. Hft. Kreislehre. Bautzen, Rühl. 8 Sgr.

Helwig, die Raumlehre in der Volksschule. 2. Aufl. Lpzg., Peter. 6 Sgr.

Hesse, 7 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. Fortsetzung der Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der geraden Linie, des Punktes u. des Kreises. Lpzg., Teubner. 16 Sgr.

Hoffmann, J. C. V., Vorschule der Geometrie. Ein methodischer Leitfaden beim Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre für die unteren Classen der Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, sowie zum Selbstunterricht bes. für Volksschullehrer 1. Lfg. 1. Hälfte die Planimetrie. Mit 230 Holzschn. Halle, Nebert. 1 Thlr.

Knapek, geometr. Formenlehre nebst den wichtigsten Regeln über das Ausmessen der Flächen und Körper für die Oberclassen der Volksschulen. 1. Abth. 4. Aufl. Znaim, Fournier. 10 Sgr.

Köstler, Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Geometrie an höheren Lehranstalten. Halle, Nebert $12^1/_2$ Sgr.

Leitfaden der Geometrie. Von einem Verein von Lehrern herausgegeben. Potsdam, Rentel. 4 Sgr.

Močnik, Geometrie in Verbindung mit dem Zeichnen. Prag, Temsky. 15 Sgr.

Müller, Hub., Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. 1. Die geradlinigen Figuren u. der Kreis. Lpzg., Teubner. 20 Sgr.

Ohlert, praktischer Lehrgang der Geometrie für Mittelschulen. 5. Aufl. Königsberg, Bon. 7 Sgr.

Salmon, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch von Fiedler. 1. Thl. Die Elemente u. die Theorie der Flächen 2. Grades. 2. Aufl. Lpzg., Teubner. $2^2/_3$ Thlr.

Toselowski, Raumlehre oder Geometrie für Volksschulen. 3. Aufl. Berlin, Mittler. 6 Sgr.

Wiegand, Lehrbuch der Mathematik. Für den Schul- und Privatunterricht. 1. Thl. Cursus der Planimetrie. 10 Aufl. 10 Sgr. 4. Thl. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 10 Sgr. 5. Thl. Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. 7. Aufl. Halle, Schmidt. 15 Sgr.

Wittstein, der goldene Schnitt und die Anwendung desselben in der Kunst. Ein stenograph. Vortrag geh. im Hannover'schen Künstlerverein. Hannover, Hahn. $7^1/_2$ Sgr.

B) Angewandte Mathematik.

(Astronomie. Geodäsie. Mechanik.)

Prel, der Kampf ums Dasein am Himmel. Die Darwinsche Formel nachgewiesen in der Mechanik der Sternenwelt. Berlin, Denicke. 18 Sgr.

Reuter, der nördliche gestirnte Himmel. 4 Sectionen nebst Begleitworten. Chromolithogr. Gotha, Perthes. $1^2/_3$ Thlr.

Schmarda, Lehrbuch der praktischen Messkunst. 3. Aufl. Wien, Seidel. $1^2/_3$ Thlr.

Wiegand, Cornelius und Schmöger, Grundriss der mathematischen Geographie. Für höhere Lehranstalten entworfen. 8. Aufl. Halle, Schmidt. 10 Sgr.

Physik.

Abendroth, über elektrisirte Flüssigkeitsstrahlen. Neue Versuche und Erklärungen. Dresden. 10 Sgr.

Arendt, Materialien für den Anschauungsunterricht in der Naturlehre. 2. Aufl. Lpzg., Voss. 20 Sgr.

Crüger, Grundzüge der Physik, mit Rücksicht auf Chemie als Leitfaden für die mittlere physikalische Lehrstufe meth. bearb. 16. Aufl. Lpzg., Körner. 21 Sgr.

—, Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. Ebda. $1^1/_2$ Thlr.

Decker, Physik und Chemie für die höheren Classen der Volksschulen und Töchterschulen. 4. Aufl. Wien, Gerold. 12 Sgr.

Dellingshausen, Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie. Heidelberg, Winter. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

Ermann und Petersen, die Grundlagen der Gaussischen Theorie und die Erscheinungen des Erdmagnetismus im J. 1829. Mit Berücks. der Säcularvariationen aus allen vorliegenden Beobachtungen. 13 Tab. u. 6 Karten. Hersg. im Auftrag der kaiserl. Admiralität. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Fahle und Lampe, Physik des täglichen Lebens. Lpzg., Quandt u. Händel. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

Lippich, Tinter, Ditscheiner, Waltenhofen und Schönberger, officieller Ausstellungsbericht der Wiener Weltaustellung. 60 Nrn. Physikalische und math. Instrumente. Wien, Hof- und Staatsdruckerei. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Lorenz und Rothe, Lehrbuch der Klimatologie. Mit Vorwort von Dove. Wien, Braumüller. 5 Thlr.

Mayer, die Mechanik der Wärme. 2. Aufl. Stuttg., Cotta. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Nussbaumer, Ton und Farbe. Wien, Braumüller. 10 Sgr.

Recknagel, Compendium der Experimentalphysik nach Jamin's traité de physique deutsch bearb. 2. Thl. Wärme. Stuttg., Meyer. 24 Sgr.

Scherling, Grundriss der Experimentalphysik für höhere Lehranstalten. 3. Aufl. Lpzg., Haessel. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Schilling, die beständigen Strömungen in der Luft und im Meere. Versuch dieselben auf eine gemeinsame Ursache zurückzuführen. Berlin, Reimer. 12 Sgr.

Schröder, Ergebnisse des physikalischen Unterrichts in der Elementarschule. 3. Aufl. Lpzg., Siegismund. 3 Sgr.

Werner, die Kosmologie u. Naturlehre des scholastischen Mittelalters. Mit spec. Beziehung auf W. v. Conches. Wien, Gerold. 15 Sgr.

Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. 1. Bd. Mechanik u. Akustik. 3. Aufl. Lpzg., Teubner. 3 Thlr.

Chemie.

Bunsen, Anleitung zur Analyse der Aschen und Mineralwässer. Heidelberg, Winter. 20 Sgr.

Drechsel, Leitfaden für das Studium der chemischen Reactionen. Lpzg., Barth. 15 Sgr.

Fresenius, Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse. 14. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 3 Thlr.

Heppe, die chemischen Reactionen der wichtigsten anorganischen u. organischen Stoffe. Tabellen in alphabetischer Anordnung zum Gebrauche im Laboratorium. Lpzg., Kollmann. $1\frac{3}{5}$ Thlr.

Langhoff, Chemie für Mittelschulen. Zugleich ein Leitfaden und Rathgeber für Lehrer der Chemie an Mittel-, höheren Knabenschulen u. Töchterschulen. 2. Aufl. Berlin, Denicke. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Liebig, J. v., Reden und Abhandlungen. Lpzg., Winter. $1\frac{4}{5}$ Thlr.

List, Leitfaden für den Unterricht in der Chemie bes. für Gewerbe- u. Realschulen. 2 Thle. Ebda. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

Regnault-Strecker's kurzes Lehrbuch der Chemie. Bearb. v. Joh. Wiscilines. 2. Bd. Organ. Chemie. 6. Aufl. Braunschweig, Vieweg. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Schorlemmer, Lehrbuch der Kohlenstoffverbindungen oder der organischen Chemie. Zugleich als 2. Bd. zu Roscoe's kurzem Lehrbuch der Chemie. 2. Aufl. Ebda. 3 Thlr.

Schwanert, Hülfsbuch zur Ausführung chemischer Arbeiten. Für Chemiker, Pharmaceuten etc. 2. Aufl. Braunschweig, Schwetschke. $1\frac{4}{5}$ Thlr.

Springmühl, die chemische Prüfung der künstlichen organischen Farbstoffe. Lpzg., Weigel. 20 Sgr.

Zoologie.

Altum, die Geweihbildung bei Rothhirsch, Rehbock, Dammhirsch. Mit 19 Fig. Berlin, Springer. 14 Sgr.

Bach, Studien und Lesefrüchte aus dem Buche der Natur. 3. Bd. 2. Aufl. Münster, Nasse. 24 Sgr.

Bütschli, Beiträge zur Kenntniss der freilebenden Nematoden. Jena, Frommann. 4 Thlr.

Eckhel, der Badeschwamm in Rücksicht auf die Art seiner Gewinnung, die geographische Verbreitung und locale Variation. Triest, Schimpff. 16 Sgr.

Fritsch, normale Zeiten für den Zug der Vögel und verwandte Erscheinungen. Wien, Gerold. 25 Sgr.

Hayek, Handbuch der Zoologie. 2. Lfg. Ebda $1^1/_5$ Thlr.

Kaltenbach, die Pflanzenfeinde aus der Classe der Insecten. 3. Abthl. Stuttg., Thienemann. $1^1/_3$ Thlr.

Leuckart, Bericht über die wissenschaftlichen Leistungen in der Naturgeschichte der niederen Thiere während der Jahre 1870 und 1871. Berlin, Nicolai. 3 Thlr.

Lüben, Naturgeschichte für Kinder in Volksschulen. Nach unterrichtl. Grundsätzen bearbeitet. 1. Thl. Thierkunde. 10. Aufl. Halle, Anton. $2^1/_2$ Sgr.

Martens, über vorderasiatische Conchylien nach den Sammlungen des Prof. Hausknecht. Cassel, Fischer. 12 Thlr.

Meuser, kurzgefasste Anthropologie. Mannheim. Bensheimer. 5 Sgr.

Planck, Anthropologie und Psychologie auf naturwissenschaftlicher Grundlage. Lpzg., Fues. 1 Thlr.

Riedel, Naturgeschichte für Volks- und Fortbildungsschulen. 1. Thierkunde. 4. Aufl. Heidelberg, Weiss. 4 Sgr.

Botanik.

Frank, Pflanzentabellen zur leichten und schnellen und sichern Bestimmung der höheren Gewächse Nord- und Mittel-Deutschlands, nebst 2 besonderen Tabellen zur Bestimmung der deutschen Holzgewächse nach dem Laube, sowie im blattlosen winterlichen Zustande. 2. Ausg. Lpzg., Schmidt. 20 Sgr.

Göppert, Führer durch den botanischen Garten der Universität Breslau. 3. Ausg. Görlitz, Remer, $2^1/_2$ Sgr.

Gutekunst, Botanik mit besonderer Berücksichtigung der württembergischen Flora. Für Lehrer und zum Selbstunterricht. Heilbronn, Scheurlen. 18 Sgr.

Hehn, Culturpflanzen und Hausthiere in ihrem Uebergang aus Asien nach Griechenland und Italien, sowie in das übrige Europa. 2. Aufl. Berlin, Bornträger. 10 Sgr.

Leitgeb, Untersuchungen über die Lebermoose. 1. Heft. Blasia pusilla. Mit 5 Taf. Jena, Deistung. $3^2/_3$ Thlr.

Lüben, Naturgeschichte für Volksschulen. Nach unterrichtl. Grundsätzen bearbeitet. 2. Thl. Pflanzenkunde. 10. Aufl. Halle, Anton. 5 Sgr.

Luerssen, die Pflanzengruppe der Farne. Mit Holzschn. 197. Heft der Sammlung gem. Vorträge v. Virchow u. Holtzendorff. Berlin, Lüderitz. $7^1/_2$ Sgr.

Murmann, Beiträge zur Pflanzengeographie der Steiermark mit bes. Berücksichtigung der Glumaceen. Wien, Braumüller. $1^1/_5$ Thlr.

Prantl, Lehrbuch der Botanik für Mittelschulen. Bearb. unter Zugrundelegung des Lehrbuchs der Botanik v. Jul. Sachs. Mit 186 Holzschn. Lpzg., Engelmann. 1 Thlr.

Rabenau, die Gefässkryptogamen, Gymnospermen und monokotyledonischen Angiospermen der Oberlausitz. Görlitz, Tzschaschel. 15 Sgr.
Redes, Vegetabilienkrankheiten. Berlin, Nicolai. 12 Sgr.
Riedel, Naturgeschichte für Volks- und Fortbildungsschulen. 2. Thl. Pflanzenkunde. 3. Aufl. Heidelberg, Weiss. 4 Sgr.
Sadebeck, zur Wachsthumsgeschichte des Farnwedels. Berlin, Friedländer. 16 Sgr.
Schneider, Grundzüge der allgemeinen Botanik nebst einer Uebersicht der wichtigsten Pflanzenfamilien. Für höhere Schulen und zum Selbstunterricht. Berlin, Springer. 20 Sgr.
Sprockhoff, Hilfsbuch für den naturkundlichen Unterricht in Volks- und Mittelschulen. Einzelbilder aus den 3 Reichen. 1. Abth. Pflanzenbeschreibungen und das Wichtigste aus der Terminologie. 2. Aufl. Berlin, Thiele. 10 Sgr.
Thomé, Lehrbuch der Botanik. 3. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.
Woditschka, die Giftgewächse der österr.-ungarischen Alpenländer und der Schweiz. 2. Aufl. 1. Lfg. Graz, Cieslar. 14 Sgr.
Wünsche, Vorarbeiten zu einer Flora von Zwickau. Zwickau, Dominik. 10 Sgr.

Mineralogie.

Benecke, und Cohen, geognostische Karte der Umgegend von Heidelberg. Strassburg, Trübner. 2 Thlr.
Leonhard, Grundzüge der Geognosie und Geologie. 3. Aufl. 3. Lfg. Lpzg., Winter. 28 Sgr.
Lüben, Naturgeschichte für Volksschulen. 3. Mineralkunde. Halle, Anton. 7. Aufl. $2^1/_2$ Sgr.
Riedel, Naturgeschichte. 3. Mineralogie. Heidelberg, Weiss. 4 Sgr.
Tschermak, mineralogische Mittheilungen. Wien, Braumüller. $2^2/_3$ Thlr.

Geographie.

Amthor und Issleib, Volksatlas über alle Theile der Erde. 24 Karten. 20 Aufl. Gera, Issleib. 10 Sgr.
Bastian, die deutsche Expedition an der Loango-Küste, nebst älteren Nachrichten über die zu erforschenden Länder. 1. Bd. Jena, Costenoble. $3^1/_3$ Thlr.
Baur, Schulwandkarte von Oesterreich-Ungarn in 9 Blatt. 1:800000. Wien, Hölzel. $3^1/_3$ Thlr.
Berghaus, physikalische Wandkarte der Erde in Mercators Projection zur Uebersicht von Höhen, Tiefen und Seeströmungen mit 2 Nebenkarten. Gotha, Perthes. $3^1/_3$ Thlr.
Bomsdorf, Schulatlas vom Königreich Sachsen. Lpzg., Reclam. 5 Sgr.
Cook, 3 Reisen um die Welt. Neu herausg. von Steger. 3. Ausg. 3 Bde. Lpzg., Senf. 1 Thlr.
Flemming's Elementarschulatlas der neueren Erdbeschreibung in 10 Karten. 13. Aufl. Glogau, Flemming. 5 Sgr.
Gräf, das deutsche Reich. 1:4500000. Weimar, Geograph. Institut. $2^1/_2$ Sgr.
Handtke, Wandkarte von Australien in 6 Blättern. 2. Aufl. Glogau, $^3/_4$ Thlr.; auf Leinw. 2 Thlr.
— Wandkarte des deutschen Reiches in 9 Bl. 10. Aufl. $1^1/_2$ Thlr.; auf Leinw. $2^5/_6$ Thlr.
Hay, Aschanti und die Goldküste. Aus dem Engl. Berlin, Stilke. 12 Sgr.
Heuglin, Reisen nach dem Nordpolarmeer in den J. 1870 u. 1871. In 3 Thln. 3. Thl. Beiträge zur Fauna, Flora und Geologie v. Spitzbergen und Novaja-Semlja. Braunschweig, Westermann. 3 Thlr.
Keil, Wandkarte von Thüringen und dem Harz. Für den Unterricht bearb. 2. Blatt. Kassel, Fischer. 1. Phys. Thl. 4 Sgr. 2. Polit. Thl. 3 Sgr.

Kiepert, Physikalische Wandkarten v. Amerika. 1:8,000000. Nord.-A. 5 Bl. $2^1/_3$ Thl. Süd.-A. 4 Bl. 2 Thlr. Berlin, Reimer.

Lange, 3 Schulkarten vom Königreich Sachsen. 3. Aufl. Lpzg., Brockhaus. 5 Sgr.

Leuzinger, Gewässer- und Gebirgskarte der Schweiz. 2. Ausg. Bern, Dalp. 1 Thlr.

—, neue Karte der Schweiz und der angrenzenden Länder. 1:400000. Ebda. $2^2/_3$ Thlr.

Livingstone, Neue Missionsreisen in Südafrica unternommen im Auftrag der engl. Regierung. Aus dem Engl. v. Martin. Jena, Costenoble. $2\,/_3$ Thlr.

Matthes, Schulatlas über alle Theile der Erde. 18 Karten nach Reliefs. Lpzg., Friese. 25 Sgr.

Meyer, Handkarte zu Guthe's Schul-Wandkarte von Hannover. 1:120000. Kassel, Fischer.

Olmsted, Wanderungen durch Texas und im mexicanischen Grenzlande. Aus dem Engl. 3. Aufl. 25 Sgr.

Rachel, Karte von Württemberg, Baden und Hohenzollern. 1:450000. 7. Aufl. Stuttg., Müller. 9 Sgr.

Radde, 4 Vorträge über den Kaukasus. Mit 3 Karten. Gotha, Perthes. $1^1/_3$ Thlr.

Rauchfuss, Reise nach Californien im J. 1870. 15 Sgr.

Rave, Leitfaden zu einem methodischen Unterrichte in der Geographie. 2. Aufl. 1. Cursus. Hannover, Hahn. 4 Sgr.

Reuschle, Elementargeographie oder Leitfaden für den ersten zusammenhängenden Unterricht in der Erdbeschreibung. 4. Aufl. Stuttgart, Schweizerbart. 12 Sgr.

Siebert, die geographischen Entdeckungen und Kolonisationen in unserem Jahrhundert und unsere jetzige Kenntniss der Erdoberfläche. Kassel, Hühn. 10 Sgr.

Südafrika und Madagaskar geschildert von den neuen Entdeckungsreisenden, namentlich Livingstone und Ellis. 3. Ausg. Lpzg., Senf. 25 Sgr.

Trampler, Kartennetz-Atlas der österr.-ungarischen Monarchie. 14 Karten. Wien, Gerold. 20 Sgr.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dgl.)

Die mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehrmittel auf der Weltausstellung zu Wien i. J. 1873.

III. Die Lehrmittel für Chemie und Mineralogie.

(Schluss — Fortsetzung von IV, 378*).

Wenden wir uns nun zu dem mineralogischen Theile unserer Aufgabe, so kommen wir zu einem bereits länger in Uebung befindlichen Lehrfache, einem Unterrichtsgegenstande, welcher ziemlich allgemein in Schulen eingeführt ist, aber trotzdem nicht überall den Eindruck macht, auf der Höhe der Zeit zu stehen. Sich aus dem, was die Weltausstellung bot, ein Bild zu machen, wie gegenwärtig die Mineralogie betrieben wird, gelang uns nur nach mancherlei Kreuz- und Querzügen. Man war behufs Ergänzung des Bildes zu weitern Studien genöthigt, ja — die Hauptsache hatte man anderwärts zu schöpfen, um zu Nebendingen eine erläuternde Illustration zu finden.

Zu diesem Schlusse kommen wir trotz der ungemein reichen Mineralschätze, welche im Prater aus aller Welt zusammengeführt und nun bereits wieder nach allen Richtungen der Windrose zerstreut wurden. Man sah dort die schönsten und werhvollsten Mineralstoffe von dem neuesten der grössern Diamanten an bis zu dem elenden Donauschotter, in welchem alle Menschenrassen dort von Bau zu Bau im Ausstellungsrayon waden mussten. Die Opale von Czerwenitza glänzten in ihrem Kiosk, die Malachite aus Katharinenberg lockten häufig die Käufer, die Glimmer aus dem Ural und die Asbeste aus Val Malengo erregten durch ihre besondere Form die Aufmerksamkeit des Laien, besonders in Erstaunen setzten diesen aber die massenhaften Producte des Bergbau's, die mächtigen Schalen mit haarförmigem Silber aus Przybram, die Wanne mit 15,000 Pfd. Quecksilber aus Idria und die Salzblöcke aus dem bereits als verloren betrachteten Wielitzka sowie die Tropfsteinsäulen aus Adelsberg. Aber auch dem Forscher waren es anregende Stunden, wenn er hier fast wie an Ort und Stelle in der Lage war, an einer viele Klafter langen Wand ein Kohlenflötz von Steierdorf im Banat in seiner ganzen Mächtigkeit mit Hangendem und Liegendem zu sehen, die Producte der Stassfurter Salzgruben in solcher Auswahl und so schönen Krystallen, die Skelette der neuseeländischen Riesenstrausse u. a. Seltenheiten betrachten zu können. Doch es wäre unmöglich, alle die Mineralschätze des Praters von 1873 aufzuzählen, wie

---

*) Durch besondere Ursache verspätet. Vergl. die früheren Berichte ds. Jahrg. S. 156. Anm. D. Red.

sie meist als Rohproducte durch die Berggewerke u. a. ausgestellt waren. Es hätte für uns auch keinen Zweck. Wir wollen uns nur an das Pädagogische halten und damit sind wir — leider — bald zu Ende.

Für unsern Unterricht lagen als Lehrmittel vor: Sammlung von Krystallmodellen, von Mineralien, Gebirgsarten, Petrefacten, sowie Lehrbücher und einige Apparate. Da diese letztern übrigens mehrentheils von den Mechanikern mit ihren physikalischen Sammlungen vereint vorgeführt wurden, auch in keiner Richtung speciell für den mineralogischen Unterricht wesentlich neu erscheinen, können wir sie füglich ausser Acht lassen.

Als historisch interessant dürfen wir indessen doch nicht die Ausstellung des Realschuldirectors Döll, Wien, Realschule der innern Stadt, ausser Acht lassen, welcher neben vorzüglich schönen Stufen, besonders sehr werthvollen Pseudomorphosen und Meteoriten, einen Theil der Original-Apparate vorgeführt hatte, welche Mohs und Haidinger zu ihren Untersuchungen verwendet haben. Wir sahen dort die ersten Krystallmodelle von Holz, die diese Forscher anfertigten, das von Mohs construirte und verwendete Aräometer, dünn geschliffene Turmalinplatten von schwarzer Farbe, welche sich in grössern Dimensionen erhalten lassen, als die gewöhnlich zu Turmalinzangen verwendeten grünen Turmaline, eine eigenthümliche Aufstellung dichroskopischer Apparate u. a.

Da bei der dem Zufall überlassenen Auswahl bei der Ausstellung überhaupt von Vollständigkeit bezüglich unserer Uebersicht keine Rede sein kann, wollen wir in Kürze nur die bei den verschiedenen Staaten ausgestellten Lehrmittel nennen. Wir dürfen dabei wohl mit Oesterreich beginnen, nicht nur weil dies Land durch das mit der Ausstellung verbundene grosse Geldopfer einen gewissen Anspruch auf Berücksichtigung hat, sondern wohl auch deshalb, weil man hier bemüht war, in einer gewissen Art Vollständiges zu liefern. Oesterreich und Deutschland hatten, wie in den übrigen Unterrichtsfächern, hier das Meiste geliefert.

Vor allen glänzte die geologische Reichsanstalt mit ihren vorzüglichen Karten und Sammlungen. Die nutzbaren Mineralschätze der ganzen Monarchie lagen hier in grossen Stücken, in Würfeln und Platten, besonders Bausteine, Erze, Brennstoffe, Salz, Gyps, Kalk. An den Wänden hing die Hauer'sche geologische Uebersichtskarte der österr. Monarchie (1 : 576,000), verschiedene General- und Specialkarten, Durchschnitte, insbesondere die beim Bau der Wiener Hochquellenleitung gewonnenen Resultate von Karrer, Karten über Vorkommen der Kohlen u. a.

Die Wiener „Anthropologische Gesellschaft“ hatte reiche Sammlungen von vorhistorischen Funden ausgestellt. Hauptsächlich durch Prof. Woldrich geordnet, lagen hier Funde der Stein- und Broncezeit, Funde aus Höhlen- und Pfahlbauten, Schädel unserer Vorfahren mit niedriger Stirn und schiefen Zähnen, vielfacher Schmuck und Waffen. Zu dem Interessantesten war wohl eine Tafel zu zählen, auf welcher das Gebiss des Höhlenbären in seiner Entwickelung dargestellt war, die Milchzähne und die bleibenden Zähne in den verschiedenen Stadien der Abnutzung. Das kleine Tableau war eine werthvolle Beigabe zu dem von Wankel ausgestellten Skelett des Höhlenbären, des ersten vollständig in Oesterreich gefundenen Exemplares dieses in Deutschland so häufigen Thieres.

Am Anschlusse daran hatte Prof. Dr. Mayr eine Sammlung von Insecten, in Bernstein eingeschlossen, aufgestellt, aus der die nahe Verwandtschaft dieser Faune mit der jetzigen europäischen, sowie mit manchen südasiatischen und neuholländischen Formen sich ergibt. Für die Pflanzenwelt zeigte in noch ausgedehnterer Weise Ettingshausen durch vergleichende Zusammenstellung die Verwandtschaft fossiler Formen mit lebenden Pflanzen der verschiedenen Zonen und Continente.

Sehr instructive geologische Suiten aus Mähren brachte Prof. Makowsky, welche sich auf alle eruptive und sedimentäre Gebilde Mährens erstreckten und besonders auf die technisch verwendbaren Producte des Mineralreiches Rücksicht nahmen.

Prof. v. Hochstetter legte eine geologische Karte über seine Forschungen in der Türkei vor und brachte ausserdem zwei vorzüglich schöne Modelle — Miniaturvulkane aus Schwefel, welcher bei hohem Dampfdruck geschmolzen, nach dem Erstarren Erscheinungen zeigt, wie sie die Entstehung der Vulkane vorzüglich illustriren können.

Prof. Simony hatte eine prächtige Gletscheransicht gemalt und die bei seinen Untersuchungen über die Gletscher am Dachstein gesammelten Gesteine (Gletscherschliffe u. a. zeigend) ausgestellt.

Eine sehr reiche Sammlung hatte Director Pokorny ausgestellt. Sie bestand aus einer nach seinem Lehrbuch ausgewählten ganz vorzüglich schönen Sammlung von 570 Mineralien, den dazu gehörigen 140 Krystallmodellen und einer terminologischen Sammlung sowie einer geologischen Sammlung, unter der eine Abtheilung, die Gesteine der Umgegend von Wien und Petrefacten des dortigen Tertiärbeckens besonders instructiv war.*)

Sehr schöne Mineralien hatten ferner die Händler Erber, Eger und Lenoir aus Wien, sowie Frič von Prag ausgestellt, doch keiner derselben hatte eine systematisch geordnete Sammlung vorgeführt, wie man sie doch bei ihnen allen und anderen Handlungen jetzt so billig und vorzüglich bekommt.

Emil Erxleben aus Landskron hatte eigenthümliche geologische Tableaux ausgestellt. Auf den gedruckten Tafeln war oben eine Landschaft der betr. Periode, darunter die Schichtenfolge gegeben und an der gehörigen Stelle jedesmal Gestein und Petrefact aufgekittet. Für Schulen, welche dem Gegenstand nicht viel Zeit widmen können, gewiss ein gutes Lehrmittel.**)

Frič hatte noch eine bereits als vorzüglich allgemeiner bekannte Sammlung von grossen Gypsmodellen der Foraminiferen ausgestellt, sowie Edelsteinimitationen, die den französischen nicht nachstehen. Dr. Schary aus Prag hatte eine Mustersammlung von silurischen Versteinerungen aus Böhmen vorgeführt, welche durch die klassischen Arbeiten Barrande's weltberühmt geworden sind.

Endlich hatte der mittlerweile als Professor nach Lemberg berufene Sectionsgeologe Niedzwiecky eine Sammlung der in Oesterreich häufiger vorkommenden Mineralien zusammengestellt, um die Lehrer auf diese am leichtesten zu beschaffenden Arten aufmerksam zu machen. Diese Arbeit hat ihr besonderes Verdienst, nur dürfte sich der Preis doch etwas höher stellen, als der Herr Aussteller annimmt.

Auch für Volksschulen waren einige kleine Mineraliensammlungen ausgestellt, so durch den Lehrer Grimme aus Baden u. a.

Wir wollen uns nun zu der Ausstellung des deutschen Reiches wenden. Diese hatte besonders eine grosse Ausstellung der Freiberger Mineralienhandlung aufzuweisen. Sie war wohl die vollständigste der im Ausstellungsraume vorhandenen systematischen Sammlungen, enthielt grosse instructive Exemplare von Mineralien und Gebirgsarten. Der Preis erschien wohl nicht gering, doch ist das bei einer zu solchem Zwecke ausgewählten Sammlung erklärlich, im Ganzen dürften die Preise mässiger sein. Von den sonstigen renommirten Mineralienhandlungen Deutschlands hatte keine ausgestellt. Eine kleine, obschon sehr schöne Sammlung von Pech aus Berlin sahen wir noch in einem netten Glaskasten an der Wand hängen. Sie enthielt vorzüglich schöne Krystalle.

Aus Baden lagen kleine Mineraliensammlungen für Volksschulen vor, ebenso aus Sachsen (Schaufuss in Dresden) für Volks- und Realschulen.

Sehr schön und instructiv waren die Krystallmodelle aus Glasplatten mit Papierkanten und durchgezogenen Axen, wie sie von mehrern Seiten, u. a. von der Gewerbeschule in Fürth vorlagen, auch Thomas aus Siegen

---

*) Eine ähnliche Sammlung wurde auf Veranlassung der Pichler'schen Verlagshandlung für Schulen zusammengestellt und ist durch diese um den Preis von 24 fl. ö. W. zu beziehen.

**) s. ds. Jahrg. Hft. 1. S. 70. D. Red.

hatte deren, sowie die sächsische Unterrichtsabtheilung, die Freiberger Handlung hatte sie aus Pappdeckel in ähnlich grossem Masstabe gefertigt.*)

Noch ärmer an hergehörigen Objecten waren die übrigen Theile der Ausstellung. In der Schweiz waren noch Sammlungen, meist Vorkommnisse des Landes, doch ohne besonders hervorragende Bedeutung, Russland hatte ein paar Mineralien-Sammlungen für Schüler ausgestellt — sehr unbedeutend.

In der amerikanischen Abtheilung befand sich eine geologische Karte der Erde in Merkators Projection von Jules Marcou, die eine gute Uebersicht über die bereits erforschten und die noch unbekannten Theile unseres Planeten geben. Ein geologisches Modell, Durchschnitte eines Berges auf Glasplatten dargestellt, stand in der Schweizer Abtheilung. Es ist höchst lehrreich, doch ein wenig zerbrechlich. Aehnlichen Darstellungen von Bergwerken begegnete man in der Ausstellung des österreichischen Ackerbauministeriums.

Nennen wir nun noch eine Sammlung von ungarischen Trachyten, welche Prof. Szabo gesandt hatte, so dürften wir die mineralogisch-geologischen Lehrmittel der Weltausstellung, soweit sie direct für den Unterricht bestimmt waren, genannt haben.

Was nun die Art und Weise des Unterrichtes anbelangt, so ist diese wohl nicht aus den aufgezählten Lehrmitteln, wohl aber aus verschiedenen Schulprogrammen und Lehrbüchern zu erkennen. Aus diesen ist zu entnehmen, dass man den Unterricht der Mineralogie nach zwei Richtungen zu ändern bestrebt ist. Einerseits wendet man mehr Rücksicht auf die häufigsten Mineralien, die Gebirgsarten nämlich, andererseits strebt man danach, die mineralogischen Beschreibungen durch grössere Betonung der chemischen Eigenschaften lebendiger und praktischer zu gestalten. Ueber diese Aenderungen dürfte indessen an anderer Stelle ausführlicher gesprochen werden, daher wir hier unsere Skizze über den mineralogischen Theil der Wiener Weltausstellung schliessen.

Wien. Dr. Carl Rothe.

Bericht über die Verhandlungen der math.-naturw. Section des XXI. deutschen Lehrertages in Breslau.

Pfingsten 1874. (Amtlicher Bericht.)**)

Erste Sitzung (den 28. März).

Im Prüfungssaale der Realschule a. Zwinger hatten sich am heutigen Tage eine grosse Anzahl***) Theilnehmer des 21. deutschen Lehrertages eingefunden, um den Vortrag des Herrn Dr. Löckermann aus Hamburg über die von ihm selbstconstruirte Armillarsphäre (Ringkugel) anzuhören. Nach 7 Uhr eröffnete Herr Dr. Pfennig die Sitzung, welche mit der Wahl eines Vorsitzenden und eines Schriftführers eingeleitet wurde. Als ersteren erwählte die Versammlung durch Acclamation Herrn Dr. Pfennig, als letzteren Herrn Menzel. Beide Herren erklärten sich zur Annahme der auf sie gefallenen Wahl bereit, worauf Herr Dr. Löckermann der Versammlung erklärte, dass in Folge irgend eines Missverständnisses die

---

*) Sie waren von Heger in Dresden. Vgl IV, 433. D. Red.

**) Vgl. die Berichte über die Verhandlungen der früheren Versammlungen I, 164 (Berlin 1869), I, 345 und 348 (Wien 1870), III. 505 (Hamburg 1872.). D. Red.

***) Nach einer ungef. Schätzung sollen es ca. 100 Zuhörer gewesen sein. Es sollte bei dergl. Versammlungen Regel sein, eine Theilnehmerliste zum Zwecke der Aufzeichnung auszulegen. D. Red.

Herbeischaffung des Apparates leider unterblieben sei. Der Vorsitzende legte hierauf der Versammlung 2 ihm vom Buchhändler Nebert in Halle übersandte Bücher: „Vorschule der Geometrie vom Prof. Dr. Hoffmann, Herausgeber der Zeitchrift f. mathem. und natw. Unterricht in Wien“ und: „Anfangsgründe der Geometrie von Oberlehrer Köstler“ vor. Der Vorsitzende bedauerte, dass die beiden Bücher zu spät eingesandt worden seien, um sie der Ausstellung einreihen zu können und theilte den Anwesenden mit, dass sie jederzeit an diesem Orte Einsicht von den genannten Büchern nehmen könnten. Hierauf begann Herr Dr. Löckermann seinen Vortrag. Da sich die von ihm gehegte Hoffnung, dass vielleicht im Verlaufe seines Vortrages der gen. Apparat noch zur Stelle geschafft werden würde, leider nicht erfüllte, so musste sich der Vortragende darauf beschränken, die an dem Apparate zu versinnlichenden Veranschaulichungen nur summarisch anzuführen, die Veranschaulichungen selbst hingegen der Sitzung des folgenden Tages zu überweisen. Der Vortragende begann deshalb damit, der Versammlung in kurzen Umrissen eine Beschreibung der von ihm angefertigten Ringkugel zu geben, welche von ihm nur deshalb „vervollkommneter Apparat“ genannt worden sei, weil er an demselben mehrere ihm bei Gelegenheit der Hamburger Lehrerversammlung vorgeschlagene Veränderungen — resp. Verbesserungen vorgenommen habe. Die Versammlung dürfe sich übrigens unter seiner Ringkugel keineswegs einen glänzenden, kostbaren Apparat vorstellen; auch sei die Grösse desselben nur seinem Bedürfnisse angepasst, also auf eine Classe von nur 20—25 Schülern berechnet. Endlich sei derselbe überhaupt noch nicht vollendet, indem die Fixsterne fehlten, welche an einem abnehmbaren Netze angebracht werden sollten; doch habe er durch kleine Blechstückchen einstweilen auch nach dieser Richtung hin für die nöthige Veranschaulichung gesorgt. Der ganze Apparat sei übrigens genau nach Diesterweg'schen Grundsätzen gearbeitet, so dass der Apparat zunächst die scheinbaren Bewegungen zeigt, indem die Ringkugel um den Horizont bewegt wird, nicht umgekehrt. Durch eine Umstellung des Apparats lässt sich dann zeigen, wie die wirklichen Bewegungen aus den scheinbaren herzuleiten sind, und umgekehrt.

Nach dieser Beschreibung ging dann der Vortragende zu den einzelnen Erläuterungen über, welche sich an dem Apparate vornehmen, resp. veranschaulichen lassen, und theilte dieselben in 5 Gruppen:

1. Allgemeiner Ueberblick,
2. die Bewegung der Sonne,
3. die Bewegung des Mondes,
4. die Bewegung der Gestirne und
5. Zusammenstellung der verschiedenen Sphären.

I. Zu dem ersten Punkte übergehend, theilt der Vortragende zunächst mit, dass sich an dem Apparate die einzelnen Cardinalpunkte der Himmelskugel nachweisen lassen, z. B Zenith, Nadir, Zenithdistanz, Polhöhe, geogr. Länge und Breite für jeden Ort der Erde u s. w. Der Apparat zeigt also für jeden Ort in Wirklichkeit, was sonst nur durch Rechnung ermittelt werden kann. Eine genaue Betrachtung ergibt durch Anschauung, dass die Polhöhe gleich der geogr. Breite, die Zenithdistanz gleich der Aequatorhöhe ist und dergl. Ebenso lassen sich die Coluren, die Declinations-, Rectascensions- und Meridiankreise, die 3 verschiedenen Horizonte (der scheinbare, wahre und natürliche Horizont) u. s. w. nachweisen.

II. Die Bewegung der Sonne. In Beziehung hierauf lässt sich für jeden Ort der Erde der Auf- und Untergang der Sonne nach Zeit und Ort genau anschaulich nachweisen. (Die Zahl der Grade ist durch einen Massstab angegeben.) Ebenso lässt sich die Mittagslinie, der Mittagskreis, die Sonnenhöhe, Declination, Rectascension, sowie auch der Tag- und Nachtbogen für jeden Punkt der Erde und für jede Zeit des Jahres an dem Apparat ablesen. (Hinsichtlich der letzteren Darstellung erklärt der Vortragende, dass sie ihm selbst noch nicht hinlänglich zusage.) Andere Erscheinungen, welche sich an dem Apparat ebenfalls nachweisen lassen, sind: die grösste und geringste Tageslänge für jeden einzelnen Ort der Erde, die Dauer der Morgen- und Abenddämmerung, die Zeit der mitternächtlichen Dämmerung, und die Bedingung für die hellen Nächte, ferner die Schiefe der Ekliptik u. s. w.

III. Die Bahn des Mondes. Dieselbe ist herausnehmbar und es lässt sich durch dieselbe veranschaulichen:

1. ihre Lage, welche gegen die Sonnenbahn um einen Winkel von 5,1° geneigt ist, woraus sich

2. die Knoten derselben ergeben. (Aufsteigender Knoten oder Drachenkopf, absteigender oder Drachenschwanz.)

3. Die Abendweite nach Ort und Zeit.

4. Die durchschnittliche tägliche Verspätung des Mond-Auf- und Unterganges um etwa 50 Minuten.

5. Die Bedingungen für die Finsternisse (centrale, totale und ringförmige, partiale).

6. Die verschiedenen Revolutionen des Mondes, namentlich die siderische, synodische, tropische, und drakonische. Die anomalistische lässt sich dagegen, da sie grosse Feinheit und Genauigkeit der Darstellung beansprucht, an dem Apparate nicht nachweisen.

IV. Der Lauf der Gestirne. Wie der Vortragende schon vorher bemerkt hatte, ist das abnehmbare Drahtnetz mit den Sternbildern noch nicht vollendet. Die wichtigsten Erscheinungen, welche sich an demselben vordemonstriren lassen sollen, sind:

1. Die gleichmässige scheinbare Bewegung der Fixsterne und ihre verschiedene Geschwindigkeit, welche am Aequator am grössten, und von demselben nach den Polen hin gleichmässig abnehmend, an letzteren selbst gleich 0 wird.

2. Die Bedingung der für uns sichtbaren Sternbilder, welche abhängig ist von der geogr. Br. des Beobachtungsortes.

3. Die Bestimmung der Circumpolarsterne. Es lässt sich ferner für jeden Stern nachweisen

a. in Beziehung auf den Horizont sein Azimuth und seine Höhe;

b. in Beziehung auf den Aequator seine Declination und seine Rectascension;

c. in Bezug auf die Ekliptik die Länge und Breite eines Gestirnes. — Es folgte hierauf

V. Die Zusammenstellung der einzelnen Sphären, der senkrechten, parallelen und schiefen Sphäre. An dem Apparat lassen sich durch Anschauung folgende Sätze nachweisen:

1. in Beziehung auf die senkrechte Sphäre:

a. Die Aequatorhöhe beträgt 90°, die Polhöhe 0°.

b. Die Circumpolarsterne unserer Breiten haben ebenfalls Auf- und Untergang.

c. Alle Tageskreise sind senkrecht und werden durch den Horizont in 2 gleiche Hälften zerlegt.

2. In Beziehung auf die parallele Sphäre ergeben sich folgende Sätze:

a. Die Aequatorhöhe beträgt 0°, die Polhöhe 90°.

b. Die Tageskreise gehen mit dem Aequator parallel (daher der Name parallele Sphäre).

3. In Beziehung auf die schiefe Sphäre:

Die Aequator- und Polhöhe sind abhängig von der Breite, ergänzen sich aber zu 90° u. s. w.

Durch eine andere Einstellung, nach welcher das Himmelsgewölbe fest erscheint, also so, wie es der Wirklichkeit entspricht, gehen alle wirklichen Bewegungen in scheinbare über, und umgekehrt. Es ergibt sich also dadurch die wahre Ursache der scheinbaren Bewegungen und die Schüler werden auf diese Weise auf natürlichem Wege vom Schein zur Wahrheit und zur Ursache derselben geführt.

Zweite Sitzung (den 29. Mai 1874).

In der heutigen Sitzung, welche ebenso stark besucht war, wie die gestrige, erläuterte Herr Dr. Löckermann die am gestrigen Tage vorgetragenen Sätze am Apparate selbst, welcher diesmal zur Stelle war. Zunächst wurde die Versammlung mit den einzelnen Theilen des Apparates bekannt gemacht, und an demselben die Cardinalpunkte vor allen Dingen festgestellt. H. Dr. L. stellte den Apparat für die Breite von Breslau (= 51°) ein, und zeigte daran, dass die Zenithdistanz gleich der Aequatorhöhe sei, u. s. w. wie in der gestrigen Sitzung dies schon angedeutet worden war. — Ferner wurde in Beziehung auf die Sonne der Auf- und Untergang anschaulich dargestellt, indem Herr Dr. Löckermann die Sonne für den heutigen Tag, also für den 29. Mai einstellte, woraus sich in Wirklichkeit ergab, dass dieselbe für Breslau am heutigen Tage ungefähr um 4 Uhr (genauer 3 Uhr 48 Min.) aufgehe. Ebenso ergab sich der Sonnenuntergang zu 8 Uhr 7 Min. — Aus der Darstellung der Declination ergab sich durch Anschauung, dass die Tageszu- und Abnahme in den Aequinoctien am bedeutendsten, in der Nähe der Solstitien am geringsten sei. Hierauf wurden die Sätze anschaulich entwickelt, welche sich aus der Rectascension ergeben. — Leider wurde H. Dr. L. verhindert, dies mit der nöthigen Anschaulichkeit klar zu machen, da der Tagesbogen des Apparates zerbrochen war. Die Darstellung der hellen Nächte, der Ekliptik, die Bedingungen für die verschiedenen Jahreszeiten u. s. w. waren die ferneren Gegenstände der Erläuterungen des Vortragenden, worauf derselbe zur Darstellung der Mondbahn überging, und zunächst die Lage derselben, ihre Knoten, die Phasen, die regelmässigen Verspätungen des Auf- und Unterganges, seine verschiedenen Monate oder Umläufe, die Bewegung der Knoten und damit zugleich die Bedingungen für die Finsternisse u. s. w. anschaulich erläuterte. Zu dem Laufe der Gestirne übergehend, zeigte der Vortragende zunächst die Gleichmässigkeit ihres Laufes, indem er je einen Stern in der Nähe eines Poles, des Aequators und des. einstellte, ferner die Bedingungen für die Circumpolar- und nicht sichtbaren Sterne daran klar machte. Wegen Mangel an Zeit sah sich der Vortragende genöthigt, das Capitel über Rectascension, Azimuth und dgl. der Gestirne zu überschlagen und sogleich zur Darstellung der senkrechten Sphäre überzugehen, um die daraus sich ergebenden wichtigsten Sätze zu erläutern, wie dieselben in seinem gestrigen Vortrage bereits namhaft gemacht worden waren, worauf derselbe noch zur Darstellung der parallelen Sphäre überging und schliesslich noch durch eine andere Einstellung bewies, dass alle scheinbaren Bewegungen nur ein Resultat der wirklichen seien. —

Th. Pfennig. R. Menzel.

Die Richtigkeit der Abschrift dieses officiellen Berichts beglaubigt
Breslau, den 30. Juni 1874. Dr. Thiel,
stellv. Vorsitzer des Ortsausschusses
u. Vors. der Redactions-Commission ders.

Nachschrift der Redaction. Während in den frühern Verhandlungen dieser Section (vgl. unsere Citate in der Anmerkung am Beginn dieses Berichts) die Verhandlungen und Vorträge reichlicher flossen, gewahren wir diesmal eine grosse Genügsamkeit. Ein einziger Vortrag über ein Lehrmittel füllt zwei Sitzungen aus! Von einer Discussion des Vortrags, von sonstigen Verhandlungen, von naturw. Excursionen oder von einer eingehenden Besichtigung mathem.-naturw. Lehrmittel schweigt der Bericht — Gerade in dieser Section wäre der richtige Ort gewesen, um einmal die Mängel und nothwendigen Verbesserungen des mathem.-naturw. Seminarunterrichts zu besprechen. Auch von einer Vorbereitung für die nächste Versammlung ist nichts zu hören. Der Herausgeber dieser Zeitschrift, welcher diese Section in Hildesheim 1867 gründete, aber schon längst nicht mehr zu den ständigen Ausschussmitgliedern gehört, wünscht — gewiss in Uebereinstimmung mit velen Fachgenossen — recht sehr, dass diese Section nicht einschlafe oder gar zu Grabe gehe, dass vielmehr gerade der mathem.-naturw. Seminarunterricht dort, wo der richtige Ort dafür ist, behandelt werde. Unterlagen dazu dürften bieten diese Zeitschrift I, 515—517. II, 121—122. III, 42—49 und 402—404. IV, 222—223 und unsere Anm. V, 101. —

Die diesjährige Naturforscher-Versammlung in Breslau betreffend.

Die Redaction erhielt folgendes Schreiben:

Breslau, den 2. März 1874.

Unterzeichnete gehören der provisorischen Commission an, welche sich zu Anfang Februar c. bereits bildete, um die Vorbereitungen für die Prüfung eines aufgestellten wissenschaftlichen Problems zu berathen und beabsichtigen dadurch die rege Theilnahme der Gelehrten von Nah und Fern für vorliegenden Gegenstand wachzurufen.

Bis jetzt können wir das allgemeine Interesse nur durch inliegenden kurzen Artikel auf die Vorlage der diesjährigen Naturforscher-Versammlung richten und ersuchen Sie höflichst um dessen Aufnahme.

Hochachtungsvoll ergebenste

gez. Aurel Anderssohn, Vors. d. K.
gez. E. Fritsch.
gez. Dr. med. Magnus, Privat-Docent an der Universität.
gez. von Schmidt, Premierlieutenant im 6. Artill.-Regim.
gez. Dr. med. Ludwig Heynemann.

Eine Arbeit der Deutschen Naturforscher-Versammlung 1874.

Die heutige Wissenschaft nimmt bekanntlich an, dass die Sonne, die Planeten und deren Monde gegenseitig unter der Wirkung der Anziehungskraft stehen, dass aber dagegen das directe Zusammenfallen dieser Himmelskörper durch die zweite Kraft aufgehalten würde. Diese andere geheime Kraft, welche der Attractions-Kraft entgegenwirke, rühre von einem ersten Wurf oder ersten Anstosse her, welcher Vorgang von dem menschlichen Verstande niemals werde zu erklären sein.

Demnach scheint der Forschung hier ein „Halt“ geboten und eine „Grenze“ gezogen zu sein, da keine Möglichkeit vorliegt das Geheimniss des Verbindungsbandes der Anziehung, sowie deren Sitz oder Wesen zu erklären, ebensowenig eine Kunde aus jener Zeit her zu erhalten, wo und wie einem Himmelskörper der erste Anstoss zu Theil wurde.

Einem deutschen Physiker ist es indess gelungen, in dieser Beziehung Licht zu schaffen, der seit vielen Jahren die Aufgabe vorfolgte, dem Sitz und Wesen der Anziehung nachzuspüren, obgleich er zu einem negativen Resultate gelangte.

Den centralen Sitz der Anziehung fand er zwar nicht, sowenig wie alle früheren Forscher, dagegen leitete ihn das Wesen der Wärme, in dem Lichte der neuen Wärmetheorie als Art einer Bewegung betrachtet, auf einen befriedigenden Standpunkt, welchen er der letzten deutschen Naturforscher-Versammlung unter dem Titel:

„Lösung des Problems über Sitz und Wesen der Anziehung“ mittheilte.

Da der Gegenstand vollständig neu war, fand er keine vorbereiteten Mitglieder und wurde nicht discutirt, dagegen soll derselbe auf der diesjährigen Versammlung zur genauen Erörterung kommen, weshalb sich schon jetzt eine vorberathende Prüfungs Commission ausschliesslich für diese wichtige Frage bildete, welche einer weiteren persönlichen Betheiligung von Gelehrten gern entgegensieht.

Der diesjährige Erläuterungs-Bericht enthält bis jetzt folgende Grundzüge nach den neuesten wissenschaftlichen Grundlagen ausgeführt:

„Es wirken allerdings bisher geheime Kräfte in verschiedener Richtung auf die Planeten und deren Trabanten ein und treiben dieselben einerseits von der Sonne her, andererseits in der Richtung zur Sonne hin aneinander an, aber nicht auf eine für immer unerklärbare Art, sondern glücklicher Weise jetzt nachweisbar durch

die Lehre von der Mechanik der Wärme, deren Begründer J. R. Mayer in Heilbronn ist.

Die Wärme, welche einerseits ausstrahlend von der Sonne ausströmt, andererseits von allen übrigen entfernteren Sonnen am Himmelsglobus strahlend entgegenströmt, diese Wärme, die man zwar sinnlich nur in ihren Folgen wahrnehmen kann, leistet grosse und endlose Arbeit auf und in der Materie der kühlen Himmels-Kugeln unseres Sonnensystems.

Zwischen den angeführten Richtungen der im All überall, gegenseitig herrschenden Wärmeströmungen befinden sich alle Planeten mit Zubehör, sie beschreiben nach den Keppler'schen Gesetzen in ihrer Bewegung in Bezug auf die Sonne ebene Curven, ihre Bahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte der Mittelpunkt der Sonne ist. Die Sonne bewegt sich wie bekannt mit ihrem ganzen System im Himmelsraume weiter, weshalb auch die Planeten zur Fortbewegung gezwungen werden. Durch die Annahme des mechanischen Wärme-Aequi alents, folglich durch den Beweis der Umsetzung der Wärme in Arbeit, besonders aber durch das 2. Gesetz der mechanischen Wärmetheorie, das Carnot'sche Gesetz, welches lehrt, dass Wärme nur dann zur Hervorbringung von Bewegung benutzt werden kann, wenn dieselbe von einem wärmeren auf einen kühleren Körper übergeht, wird die ganze Himmelsmechanik nach einem anerkannten System erklärt und es erhält zugleich die Einheit und Erhaltung der Kraft im Universum dadurch eine neue und glückliche Bestätigung."

Uebrigens hat Newton selbst schon ausdrücklich auf die Art des antreibenden Mechanismus aus der Ferne hingewiesen, nur dass er an Stelle des Begriffs „Wärme" sich noch des Ausdrucks bediente:

„**Ausgeschickte Geister** von dem Jenseits könnten auch ebensogut die Planeten und deren Trabanten gegenaneinander **von aussen her** antreiben."

Diese angeführte Stelle in Newton's „Mathematische Principien der Natur-Anschauung über die Bewegung kugelförmiger Himmelskörper" ist überaus wichtig, da dieser grosse Mathematiker selbst darin documentirt, dass die mathematischen Berechnungen des Gravitations-Gesetzes in diesem Falle ebenso genau zutreffen würden, als bei der von ihm vorausgesetzten sobenannten Attraction.

Der praktische Beweis für die Himmelsmechanik durch gegenseitge Einwirkung der Sonnen nach dem Gesetz der mechanischen Wärmelehre soll auf irgend eine Weise zur Zeit der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte im nächsten Herbst in Breslau zur öffentlichen Anschauung gebracht werden.

Kleine Zeitschriftenschau der Redaction.

1) Nouv. Annal. de Mathémat. p. Gerono et Brisse. Von dieser bekannten math. Zeitschrift liegen uns mittelst Tausch 4 Bände (9. 10. 11. 12. Bd. Jahrg. 1870—1873) und einzelne Hefte des Jahrgangs 1874 vor. Sie sind, wie für jeden Lehrer der Mathematik auch für die Redaction dieser Zeitschrift zugleich eine Quelle von Schüleraufgaben und deren

Lösungen und haben wir dieselbe dem Herrn Referenten über Schüleraufgaben zugestellt. Das 1. (Januar-) Heft dieses Jahrgangs (1874) enthält die Questions prop. 1125—1128 und die Solutions prop. 1098. 1118. von verschiedenen Autoren.

2) Revue de l'Instruction publique en Belgique herausgegeben von den Herren J. Gautrelle, D. Keiffer, L. Roersch, A. Wagener. Hiervon liegen uns vor: année 18. 19. 20. 21. und einige Hefte von 22. Obgleich diese Zeitschrift wie die deutschen Gymnasialzeitschriften z. B. Jahns Jahrbuch (Fleckeisen-Masius) und die Berliner Zeitschrift für Gymnasial-Wesen mehr sprachliche und pädagogische Abhandlungen enthält, bietet sie doch am Schlusse häufig auch mathematische Aufsätze und Aufgaben. So ist z. B. im 22. Jahrg. (1874) 1. Lfg. ein Aufsatz „Applications d'une forme particulière de l'équation de la ligne droite" v. C. B. Gaud. Mars 1871.

3) Pädagog. Archiv v. Langbein-Krumme. Diese bekannte Zeitschrift bietet unter der Redaction von Dir. Krumme und unter Beihilfe von Dr. Reidt lesenswerthe Artikel für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehrer. Das 4. Heft dieses Jahrganges (1874) enthält u. A. einen „Bericht über mathematischen Unterricht", deren 1. Theil enthält: Anzeigen der neuen Auflagen von Schlömilchs Geometrie des Masses, den Elementarmathematiken von Kambly, Gauss und Helmes, Reuschle, Trigonometrie, Grünfeld, Arithmetik, Colenso, Algebra. Diesen „Anzeigen" folgt eine 10 Seiten lange eingehende, zusammenfassende und übersichtliche Beurtheilung dieser Bücher nach Gesichtspunkten von Dr. Reidt. Die nur angezeigten Aufgabensamlungen von Grünfeld u. Sinram sollen nach Completirung derselben beurtheilt werden.

4) Die allgemeine Schulzeitung herausgegeben von Stoy, bekanntlich auch Zeitungsorgan des (Leipziger) Vereins für wissenschaftliche Pädagogik, liefert oft auch für den Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaft lesenswerthe Aufsätze; namentlich wendet sie neuerdings dem Seminarwesen grössere Aufmerksamkeit zu. Für den Fachlehrer der Mathematik und Naturwissenschaft sind von Werth die vierteljährigen Abhandlungsverzeichnisse der pädagogischen Zeitschriften, eine Art Revue, in welcher man auch mathematische und naturwissenschaftliche Aufsätze findet, z. B. in Nr. 7 und 24 dieses Jahrganges. — Nr. 26 enthält einen Bericht über die Hauptversammlung sächsischer Realschulmänner (92) in Dresden am 27. Mai d. J., wobei auch im Zeichensaale der Annenrealschule eine Ausstellung von Thierglasmodellen aus der Fabrik von L. Blaschka (Dresden), eine desgleichen von Skeletten der Wirbelthiere aus der Privatsammlung des Instiutslehrers Reibisch ebendaselbst und endlich von Farnkräutern veranstaltet war.

In derselben Nummer ist ein kurzer Bericht über die 21. allgemeine Lehrerversammlung in Breslau, welchem eine kurze Auslassung eines ausländischen Pädagogen über den Werth und die Resultate der Verhandlungen dieser Versammlung folgt, die viel Beherzigenswerthes enthält und namentlich das Eigenartige dieser Versammlung scharf rügt, wonach sie es liebt, in Gemeinplätzen sich zu bewegen und nie zum Besondern gelangt, sich in der Behandlung der Themen wiederholt und nur bei Wünschen und Resolutionen bleibt. Dem ständigen Ausschusse jener Versammlung dürfte die Lectüre und Beherzigung dieser Bemerkung eines ausländischen Pädagogen zu empfehlen sein! — Diesmal scheint man jedoch eine Aenderung insofern angebahnt zu haben, als man den ganzen zweiten Versammlungstag zu Sectionssitzungen benutzte, eine Aenderung, die wir bereits vor Jahren empfohlen haben! — Wir können uns der Bemerkung nicht enthalten, dass uns unter allen Volksschul-Zeitungen, die wir kennen, die allgemeine Schulzeitung wegen ihrer wissenschaftlichen Haltung die empfehlenswertheste scheint.

5) Zeitung für das höhere Unterrichtswesen Deutschlands (Leipzig, Siegismund und Volkening) bietet zwar dem Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaft weniger für seine Praxis, doch enthält sie

mancherlei Aufsätze, welche für denselben von Interesse sind. Auch das von der Zeitschrift sub 3) und 4) ventilirte Thema der Realschulfrage behandelt sie.*)

6) Petermanns geogr. Mittheilungen. Dieses anerkannt oberste Organ für geogr. Wissenschaft ist plötzlich auch einmal in die Schulstatistik herabgestiegen. Es enthält nämlich in XX (1874) Heft 5. Taf. 10 eine (ursprünglich für die pädagogischen Blätter von Kehr bestimmte) Charte der Volksschullehrer-Seminare des deutschen Reichs, die eine werthvolle Unterlage für statistische Berechnungen bietet und geeignet ist den Grad (die Intensität) der Volksbildung des Landes zu veranschaulichen. Wir gedenken die in jener Charte enthaltene geogr. Uebersicht zugleich mit den österr. Lehrerbildungsanstalten im nächsten Hefte tabellarisch zu geben. Einstweilen entnehmen wir den erläuternden Bemerkungen zur Charte (s. dort S. 186) Folgendes:

Die Statistik des deutschen Schulwesens bedarf noch sehr der Pflege. Selbst in Schmids bekannter Encyclopädie (Artikel: Volksschullehrer-Seminar) ist der statistische Theil der schwächste. Die ergiebigste Quelle ist noch immer (wiewohl auch noch unvollständig) Mushackes Schulkalender und das preussische Centralblatt. Die Statistik der Seminare muss parallel laufen der Statistik der Volksschulen. Für Preussen ist der letzte Nachweis über den Stand des Volksschulwesens für die Jahre 1862—64 im Jahre 1867 erschienen.**) Aus der fraglichen Charte lässt sich Folgendes entnehmen:

Die Bevölkerung des d. Reichs ist (n. Behm-Wagner) .	41,060,695 E.
Schulpflichtige Kinder sind 16%	6,569,711
Auf 1 Lehrer 60 Kinder gerechnet, gibt Lehrer	109,495
der jährl. Abgang der Lehrer ist 5%	5,475
diese müssen neu rekrutirt werden. Nun ist aber die höchste Zahl von Zöglingen die eine Lehrerbildungsanstalt jährlich bilden kann	30
Dies gibt also Seminare in Deutschland $\frac{5,474}{30}$ =	182
So viele Seminare müsste Deutschland haben, aber es hat deren nur	162
die jedoch (meist) weniger als 30 Zöglinge jährlich liefern.	
Nach obigem Resultat (182 S. auf Gesammt-D.) müsste im deutschen Reich ein Seminar kommen auf ca. . . .	225000 E.
In Sachsen aber kommt ein Seminar schon auf . . .	170000 E.
und es hat nicht (wie es nach Obigem haben müsste) nur 11 Seminare, sondern deren	15 (16?)***)

Es wäre eine verdienstliche Arbeit, wenn Lehrer der Mathematik berechneten oder (vielleicht als Uebungen für die Procentrechnung) von Schülern berechnen und dann controliren liessen, wie gross der Procentsatz der Seminare (und der Mittelschulen überhaupt!) für die einzelnen Länder ist. Es liessen sich dann diese Procentsätze in einer Curve graphisch darstellen und daraus liesse sich ein Schluss ziehen auf die Stärke (Intensität) der Volks- und Schulbildung überhaupt. Der Herausgeber dieser Zeitschrift will für jetzt hierzu nur vorläufig eine Anregung geben und wird vielleicht in nächster Zeit selbst an einem deutschen Lande die Ausführung zeigen. —

---

*) Die neueren Hefte dieser Zeitschrift lagen uns leider noch nicht vor.

**) Wir fühlen uns hier zu der Bemerkung gedrungen, dass nach der Wiener Weltausstellung im deutschen Unterrichtspavillon zu urtheilen die Schulstatistik besonderer Pflege sich zu erfreuen scheint in Baiern. Vielleicht sind wir nächstens in der Lage, darüber Genaueres zu berichten. D. Red.

***) 16 nämlich, wenn das kathol. Seminar zu Bautzen eine Separatanstalt ist. Darunter sind jedoch die sogen. „Nebenseminare" mitgerechnet.

Ueber eine Art biquadratischer Gleichungen, die sich mit Hilfe quadratischer Gleichungen lösen lassen.

Von Prof. Dr. K. L. Bauer in Karlsruhe.

§. 1.

Verschiedene Formen der biquadratischen Gleichung.

Gesetzt, eine vorgelegte biquadratische Gleichung:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

habe sich auf folgende Form bringen lassen:

$$\text{I}')\quad l\,(px^2 + qx + r)^2 + m\,(px^2 + qx + r) + n = 0.$$

Denkt man sich jetzt das Trinom $px^2 + qx + r$ durch das Binom $(px^2 + qx) + r$ ersetzt und entwickelt hierauf I′), so geht eine neue Form hervor:

$$\text{II}')\quad l\,(px^2 + qx)^2 + (2lr + m)(px^2 + qx) + (lr^2 + mr + n) = 0.$$

Substituirt man ferner

in I′): $px^2 + qx + r = (px^2 + qx + s) + (r - s)$,
oder in II′): $px^2 + qx \quad = (px^2 + qx + s) - s$,

so verwandeln sich beide Gleichungen in:

$$\text{A})\quad l\,(px^2 + qx + s)^2 + \{2l\,(r - s) + m\}\,(px^2 + qx + s) + \{l\,(r - s)^2 + m\,(r - s) + n\} = 0.$$

Führt man aber statt der willkürlichen Zahl s eine andere solche Zahl t ein, gemäss der Relation:

$$t = l\,(r - s)^2 + m\,(r - s),$$

woraus folgt:

$$r - s = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4lt}}{2l}; \quad s = \frac{(2lr + m) \mp \sqrt{m^2 + 4lt}}{2l};$$

$$2l\,(r - s) + m = \pm\sqrt{m^2 + 4lt},$$

so verwandelt sich A) in die Doppelgleichung:

$$\text{B)}\quad l\left\{px^2+qx+\frac{(2lr+m)\mp\sqrt{m^2+4lt}}{2l}\right\}^2 \pm \sqrt{m^2+4lt}$$
$$\cdot\left\{px^2+qx+\frac{(2lr+m)\mp\sqrt{m^2+4lt}}{2l}\right\}+(t+n)=0,$$

worin bei den Doppelzeichen gleichzeitig entweder die oberen (Gleichung B′), oder die unteren (Gleichung B″) zu benutzen sind.

Weil s in A) und t in B) ganz willkürliche Zahlen bedeuten, so folgt, dass wenn eine biquadratische Gleichung überhaupt auf die Form I′) gebracht werden kann, diess auf unzählig viel Arten möglich ist. Aus B) geht ferner hervor, dass eine biqu. Gl. von der Form A) sich im Allgemeinen durch eine andere solche ersetzen lässt, die von der ersten nur in der Grösse s und im Vorzeichen des zweiten Gliedes abweicht.

Setzen wir speciell:

$$t=0,\ \text{daher } s=r,\ \text{oder} =\frac{lr+m}{l},$$

so erhalten wir aus den allgemeinen Gleichungen A) und B) die Gleichung I′) als besonderen Fall, ausserdem aber eine sehr ähnliche, die jederzeit statt I′) benutzt werden dürfte, da ja die specielle Wahl von t und s, die Gleichung nur äusserlich beeinflussen kann:

$$\text{I″)}\quad l\left(px^2+qx+\frac{lr+m}{l}\right)^2-m\left(px^2+qx+\frac{lr+m}{l}\right)+n=0.$$

Ist zweitens:

$$t=lr^2+mr,\ \text{daher } s=0,\ \text{oder} =\frac{2lr+m}{l},$$

so ergibt sich ausser II′) die ähnliche Gleichung:

$$\text{II″)}\quad l\left(px^2+qx+\frac{2lr+m}{l}\right)^2$$
$$-(2lr+m)\left(px^2+qx+\frac{2lr+m}{l}\right)+(lr^2+mr+n)=0.$$

Wählt man indessen t so, dass die beiden entsprechenden Werthe für s einander gleich werden, nämlich:

$$t=-\frac{m^2}{4l},\quad s=\frac{2lr+m}{2l},$$

so entsteht aus A) und B) nur eine einzige Gleichung III), die sich unter den unzähligen in A) und B) enthaltenen Specialgleichungen durch die grösste Einfachheit auszeichnet, da sie in Bezug auf das Trinom $(px^2 + qx + s)$ rein quadratisch ist. Nach Division durch l lässt sie sich auf eine der folgenden Arten darstellen, wobei ϱ und ν zwei leicht zu verstehende abgekürzte Bezeichnungen sind:

$$\text{III.)}\left|\begin{array}{l} (px^2 + qx + \frac{2lr + m}{2l})^2 - \frac{m^2 - 4ln}{4l^2} = 0. \\ (px^2 + qx + \varrho)^2 - \nu = 0. \\ \{px^2 + qx + (\varrho + \sqrt{\nu})\}\{px^2 + qx + (\varrho - \sqrt{\nu})\} = 0. \\ px^2 + qx + (\varrho \pm \sqrt{\nu}) = 0. \end{array}\right|$$

Auf dasselbe Resultat führt auch die andere Substitution:

$$t = -n; \quad s = \frac{(2lr + m) \mp \sqrt{m^2 - 4ln}}{2l};$$

obwohl jetzt nämlich in B) die Wurzelgrösse nicht verschwindet, und obwohl die zwei in A) für s zu substituirenden Werthe ungleich sind, erhält man doch nur die einzige Gleichung III), weil es bei der resultirenden Doppelgleichung:

$$\{px^2 + qx + (\varrho \mp \sqrt{\nu}) \pm 2\sqrt{\nu}\}\{px^2 + qx + (\varrho \mp \sqrt{\nu})\} = 0,$$

oder

$$\{px^2 + qx + (\varrho \pm \sqrt{\nu})\}\{px^2 + qx + (\varrho \mp \sqrt{\nu})\} = 0$$

lediglich auf eine Factorenvertauschung hinausläuft, wenn man bei den zwei Doppelzeichen die unteren, statt der oberen, benutzt.

Wegen der ausgezeichneten Einfachheit der Gleichung III) soll sie auch den weiteren Betrachtungen zu Grunde gelegt werden.

§. 2.

Die Reducente, von welcher die Möglichkeit der directen Reduction einer biquadratischen Gleichung auf die angegebenen Formen abhängt.

Sobald es gelungen ist, eine biqu. Gl. auf die Form III) zu reduciren, lassen sich die vier Wurzeln nach folgendem Schema bestimmen:

$$px^2 + qx + (\varrho + \sqrt{\nu}) = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} = \cdots$$

$$px^2 + qx + (\varrho - \sqrt{v}) = 0;$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \cdots$$

Zugleich folgt hieraus, dass zwischen diesen vier Wurzeln eine eigenthümliche Beziehung besteht, indem:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = -q : p,$$
$$x_1 - x_3 = -(x_2 - x_4)$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,$$

was an die Relation zwischen den Seiten eines einem Kreise umschriebenen Vierseits erinnert (vgl. J. H. T. Müller, ebene Geometrie, 2. Auflage, 2. Theil, S. 155). Eine solche Beziehung findet immer statt, wenn die vier Wurzeln eine arithmetische Progression bilden, wie etwa die Zahlen 1, 2, 3, 4, doch ist diese Eigenschaft keineswegs erforderlich, da die vier Wurzeln nur arithmetisch proportionirt sein müssen, wie beispielsweise 1, 2, 4, 5.

Nur also, wenn die Wurzeln einer biqu. Gl. zufällig derart beschaffen sind, dass die Summe oder Differenz zweier derselben beziehungsweise gleich der Summe oder Differenz der beiden andern ist, wird es möglich sein, eine directe Reduction auf die Form III) und damit die Auflösung nach dem obigen Schema zu bewirken. Daraus folgt weiter, dass die Möglichkeit einer solchen Reduction an eine sogenannte Reducente gebunden ist, welche die Coëfficienten der biqu. Gl. einer gewissen Bedingung unterwirft, die der Bedeutung nach mit dem oben ausgesprochenen Satze über die unter den Wurzeln stattfindende Relation identisch sein muss; vgl. Dr. L. Matthiessen; Schlüssel zur Aufgabensammlung von Heis, Köln 1873, Bd. 2, Seite 300.*)

Die fragliche Reducente ist leicht zu ermitteln. Entwickelt man nämlich die linke Seite der Gleichung III) nach fallenden Potenzen von x, so wird:

$$p^2x^4 + 2pqx^3 + (2p\varrho + q^2)\,x^2 + 2q\varrho x + (\varrho^2 - v) = 0.$$

---

*) Diese verdienstvolle Arbeit des bekannten Verfassers möge hiermit angelegentlichst empfohlen sein; wenn sie nur nicht ausser der beträchtlichen Menge angezeigter Druckfehler deren noch so viel andere enthielte

Bauer.

Damit nun Harmonie mit der allgemeinen biqu. Gl.:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

stattfinde, müssen gleichzeitig folgende Coefficientengleichungen bestehen:

$$\begin{array}{ll} 1) & p^2 = a \\ 2) & 2pq = b \\ 3) & 2p\varrho + q^2 = c \\ 4) & 2q\varrho = d \\ 5) & \varrho^2 - \nu = e. \end{array}$$

Die vier ersten dieser fünf Gleichungen enthalten nun aber bloss drei der aus a, b, c, d, e zu bestimmenden Zahlen p, q, ϱ, ν; nachdem daher aus den beiden ersten Gleichungen p und q bestimmt worden, liefern die zwei folgenden Gleichungen zwei Werthe für ϱ, durch deren Gleichsetzung die erwähnte Reducente erhalten wird:

$$\begin{array}{ll} 1) & p = \sqrt{a} \\ 2) & q = \dfrac{b}{2\sqrt{a}} \\ 3) & \varrho = \dfrac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a} \cdot d}{b} \\ 4) & \nu = \left\{\dfrac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}}\right\}^2 - e = \left\{\dfrac{\sqrt{a} \cdot d}{b}\right\}^2 - e. \end{array}$$

Substituirt man die gefundenen Werthe in III), und dividirt noch beiderseits durch a, so erhält die reducirte biqu. Gl., auch kurz die Reducirte genannt (Matthiessen, S. 299), folgende Formen, von welchen die letzte sich durch grosse Einfachheit auszeichnet:

$$\mathrm{III}_1) \left| \begin{array}{l} \left\{\sqrt{a} \cdot x^2 + \dfrac{b}{2\sqrt{a}} x + \dfrac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}}\right\}^2 = \left\{\dfrac{4ac - b^2}{8a\sqrt{a}}\right\}^2 - e \\ \left\{\sqrt{a} \cdot x^2 + \dfrac{b}{2\sqrt{a}} x + \dfrac{\sqrt{a} \cdot d}{b}\right\}^2 = \left\{\dfrac{\sqrt{a} \cdot d}{b}\right\}^2 - e \\ \left\{x^2 + \dfrac{b}{2a} x + \frac{1}{2}\left[\dfrac{c}{a} - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]\right\}^2 = \frac{1}{4}\left[\dfrac{c}{a} - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]^2 - \dfrac{e}{a} \\ \left\{x^2 + \dfrac{b}{2a} x + \dfrac{d}{b}\right\}^2 = \left(\dfrac{d}{b}\right)^2 - \dfrac{e}{a} \end{array} \right|$$

Oder nach Potenzen von x entwickelt und auf Null reducirt:

$$\left| \begin{array}{l} x^4 + \dfrac{b}{a} x^3 + \dfrac{c}{a} x^2 + \dfrac{b}{2a}\left[\dfrac{c}{a} - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] x + \dfrac{e}{a} = 0 \\ x^4 + \dfrac{b}{a} x^3 + \left[\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{d}{b}\right] x^2 + \dfrac{d}{a} x + \dfrac{e}{a} = 0 \end{array} \right|$$

Von den Formen, unter welchen sich die Reducente darstellen lässt, dürften diese die bemerkenswerthesten sein:

$$R_1 = \frac{4ac-b^2}{8a^2} - \frac{d}{b} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{d}{b} = 0.$$
$$R_2 = 8a^2d - 4abc + b^3 = b^3 - 4a(bc - 2ad) = 0.$$
$$R_3 = \left(\frac{b}{2}\right)^3 - a\left(\frac{b}{2}\cdot c - ad\right) = 0.$$
$$R_4 = \left(\frac{b}{a}\right)^3 - 4\,.\,\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a} + 8\cdot\frac{d}{a} = 0.$$
$$R_5 = \left(\frac{b}{4a}\right)^3 - \tfrac{1}{8}\left(2\cdot\frac{b}{4a}\cdot\frac{c}{a} - \frac{d}{a}\right) = 0.$$
$$R_6 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0.$$

Vgl. Matthiessen S. 301; um unsere Bezeichnung mit der dort gebrauchten in Einklang zu bringen, hat man hier $a = 1$, $b = a$, $c = b$, $d = c$, $e = d$ zu setzen. Behufs Verwandlung der Reducente in den sogenannten Wurzeltypus $R_6 = 0$ (Matthiessen S. 300 u. 302), macht man in $R_4 = 0$ einige Substitutionen gemäss der bekannten Beziehungen:

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)$$
$$\frac{c}{a} = x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4$$
$$\frac{d}{a} = -x_1x_2(x_3 + x_4) - x_3x_4(x_1 + x_2),$$

entwickelt und aggregirt, bis man vier Glieder mit dem gemeinsamen Factor $[(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)]$ erhält, nach dessen Ausscheidung sich ergibt:

$$\{(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4)\}\,\{(x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2 - 4x_1x_2 - 4x_3x_4\} = 0, \text{ oder:}$$
$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\,\{(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - x_4)^2\} = 0,$$

worauf dann die Reducente $R_6 = 0$ folgt. Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn einer der drei viergliedrigen Factoren den Werth Null hat, was in der That mit der schon oben gefundenen Relation zwischen den Wurzeln übereinstimmt. Setzt man noch:

$$x_1 + x_2 = s_1; \quad x_3 + x_4 = s_2;$$
$$x_1 + x_3 = s_3; \quad x_2 + x_4 = s_4;$$
$$x_1 + x_4 = s_5; \quad x_2 + x_3 = s_6,$$

so verwandelt sich die Reducente $R_6 = 0$ in:

$$R_7 = (s_1 - s_2)(s_3 - s_4)(s_5 - s_6) = 0;$$

vgl. Matthiessen S. 356. Setzt man aber:

$$x_1 - x_2 = \varDelta_1; \quad x_3 - x_4 = \varDelta_2;$$
$$x_1 - x_3 = \varDelta_3; \quad x_2 - x_4 = \varDelta_4;$$
$$x_1 - x_4 = \varDelta_5; \quad x_2 - x_3 = \varDelta_6,$$

so kann jeder der drei Factoren von R_6 auf doppelte Weise (als Summe, oder Differenz zweier $\varDelta$) ausgedrückt werden, und die Gleichung $R_6 = 0$ verwandelt sich daher in acht neue Gleichungen, von welchen nur zwei angeführt werden mögen:

$$R_8 = (\varDelta_1 + \varDelta_2)(\varDelta_3 - \varDelta_4)(\varDelta_5 + \varDelta_6) = 0.$$
$$R_9 = (\varDelta_1 + \varDelta_2)(\varDelta_1 - \varDelta_2)(\varDelta_3 + \varDelta_4) = 0.$$

Unsere Reducente enthält das bekannte Glied e der biqu. Gl. gar nicht; in Bezug auf c und d ist sie vom ersten, in Bezug auf a vom zweiten, und hinsichtlich b vom dritten Grade; die Beschaffenheit des bekannten Gliedes ist also gleichgiltig. Hat man aber die Coefficienten a, b, c willkürlich gewählt, und will, dass die biqu. Gl. auf die Form III_1) reducirbar sei, so ist auch bereits der Werth von d eindeutig bestimmt, indem:

$$\frac{d}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} \left\{ \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right\}.$$

Hieraus folgt noch die Relation:

$$\frac{d}{b} = \frac{d}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \right\},$$

von welcher in §. 5. Gebrauch gemacht wird. Ebenso ist c eindeutig bestimmt, wenn von vornherein die Coefficienten a, b, d beliebig gewählt wurden, indem:

$$\frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{d}{b}.$$

Hat man dagegen über die Werthe von b, c, d verfügt, so lässt sich für a noch eine zweifache Wahl treffen, weil:

$$a = \frac{b}{4d} \left\{ c \pm \sqrt{c^2 - 2bd} \right\} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{c \mp \sqrt{c^2 - 2bd}}.$$

Aus dem zweiten Ausdrucke für a folgt auch, dass:

$$\frac{b^2}{a} = 2 \left\{ c \pm \sqrt{c^2 - 2bd} \right\},$$

eine Relation, die ebenfalls in §. 5. zur Verwendung kommt. Nimmt man schliesslich für a, c, d bestimmte Werthe an, so ist für b noch jede der drei Wurzeln zulässig, welche der (reducirten) cubischen Gleichung

$$b^3 - 4ac \cdot b + 8a^2 d = 0$$

genügen.

§. 3.

Einige bestimmte Beispiele.

1) Setzt man zunächst:

$$l = m = n = p = q = r = 1,$$

so ist eine biqu. Gl. bestimmt, die sich unter einer der folgenden Formen darstellen lässt:

$$\text{A)} \quad (x^2+x+s)^2 + (3-2s)(x^2+x+s) + (3-3s+s^2) = 0.$$

$$\text{B)} \quad \left\{x^2 + x + \tfrac{1}{2}(3 \mp \sqrt{1+4t})\right\}^2 \pm \sqrt{1+4t}\,\left\{x^2 + x + \tfrac{1}{2}(3 \mp \sqrt{1+4t})\right\} + (t+1) = 0.$$

$$\text{I}') \quad (x^2+x+1)^2 + (x^2+x+1) + 1 = 0; \quad (t = 0;\ s = 1).$$

$$\text{I}'') \quad (x^2+x+2)^2 - (x^2+x+2) + 1 = 0; \quad (t = 0;\ s = 2).$$

$$\text{II}') \quad (x^2+x)^2 + 3\,(x^2+x) + 3 = 0; \quad (t = 2;\ s = 0).$$

$$\text{II}'') \quad (x^2+x+3)^2 - 3\,(x^2+x+3) + 3 = 0; \quad (t = 2;\ s = 3).$$

$$\text{III}_1) \quad (x^2 + x + \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{3}{4} = 0; \quad [t = -\tfrac{1}{4};\ s = \tfrac{3}{2}, \text{ oder } t = -1;\ s = \tfrac{1}{2}(3 \mp \sqrt{-3})].$$

Ordnet man die linke Seite nach fallenden Potenzen von x, so verwandelt sich jede dieser Gleichungen in:

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0$$

Betrachtet man diese biqu. Gl. als ursprünglich gegeben, so ist:

$$a = 1,\ b = 2,\ c = 4,\ d = e = 3.$$

Man kann sich nun leicht überzeugen, dass die Reducente

$$R_3 = \left(\frac{b}{2}\right)^3 - a\left(\frac{b}{2} \cdot c - ad\right) = 0$$

erfüllt und demnach eine Reduction auf die Form III$_1$) statthaft ist, worauf die vier Wurzeln sich leicht ergeben. Oder man kann auch (Bardey, Aufgabensammlung, 2. Aufl., S. 179) auf die Prüfung der Bedingungsgleichung $R_3 = 0$ verzichten und sogleich eine Reduction auf II′) versuchen, welche Form sich alsdann am meisten eignet; es ist nämlich nur nöthig, die zwei ersten Glieder der biqu. Gl. zu einem vollständigen Quadrate zu ergänzen:

$$\{(x^2)^2 + 2\cdot(x^2)\cdot x + x^2\} + 3x^2 + 3x + 3 = 0,$$

um so gut wie am Ziele zu sein.

Wenn, wie hier, $b = 2$, $c = 4$, $d = 3$, so genügen der Reducente zwei Werthe für a, nämlich:

$$a = \tfrac{1}{6}(4 \pm \sqrt{4}) = +1, \text{ oder } = \tfrac{1}{3},$$

weshalb auch die der obigen sehr ähnliche Gleichung:

$$\tfrac{1}{3}x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0, \text{ oder}$$
$$x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 9x + 9 = 0$$

auf die Formen III_1) und II') reducirbar ist; reducirt:

$$(x^2 + 3x + \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{27}{4} = 0, \text{ oder}$$
$$(x^2 + 3x)^2 + 3(x^2 + 3x) + 9 = 0.$$

Wählt man aber von vornherein $a = 1$, $c = 4$, $d = 3$, so ergeben sich für den Coefficienten b drei Werthe aus der cubischen Gleichung

$$b^3 - 16b + 24 = 0.$$

Es liegt hier der sog. irreductibele Fall vor, weshalb die Gleichung drei reelle Wurzeln hat, worunter sich, wie wir wissen, ein rationaler Factor $+2$ des bekannten Gliedes befindet; die vollständige Auflösung ergibt sich daher durch die Zerlegung:

$$(b-2)(b^2 + 2b - 12) = 0;$$
$$b_1 = 2; \quad \left.\begin{matrix} b_2 \\ b_3 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{13} - 1.$$

Jetzt lassen sich noch zwei weitere, der obigen biqu. Gl. sehr ähnliche aufstellen, die gleichfalls durch Zerlegung in quadratische Factoren lösbar sind:

$$x^4 + (\sqrt{13}-1)\,x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0, \text{ und}$$
$$x^4 - (\sqrt{13}+1)\,x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = 0,$$

oder in reducirter Form:

$$\{x^2 + \tfrac{1}{2}(\sqrt{13}-1)\,x + \tfrac{1}{4}(\sqrt{13}+1)\}^2 + \tfrac{1}{8}(17-\sqrt{13}) = 0.$$
$$\{x^2 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{13}+1)\,x - \tfrac{1}{4}(\sqrt{13}-1)\}^2 + \tfrac{1}{8}(17+\sqrt{13}) = 0.$$

2) Ein anderes Beispiel entsteht durch die Substitutionen:

$$l = m = n = p = q = 1; \quad r = 0.$$

Wie aus den für t und s der Reihe nach zu machenden Substitutionen (§. 1.) hervorgeht, werden jetzt die beiden Formen I) mit den beiden Formen II) identisch:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{I}'\\ \mathrm{II}'\end{array}\right\} (x^2+x)^2+(x^2+x)+1=0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{I}''\\ \mathrm{II}''\end{array}\right\} (x^2+x+1)^2-(x^2+x+1)+1=0.$$

$$\mathrm{III}_1)\quad (x^2+x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}=0.$$

$$x^4+2x^3+2x^2+x+1=0.$$

Aus den Coefficienten $b=2$, $c=2$, $d=1$ bestimmt sich a ausnahmsweise bloss eindeutig, indem:

$$a=\tfrac{1}{2}(2\pm\sqrt{0})=1.$$

Dagegen findet man aus $a=1$, $c=2$, $d=1$ wieder drei verschiedene Werthe von b:

$$b^3-8b+8=0;$$

$$(b-2)(b^2+2b-4)=0;$$

$$b_1=2;\quad \left.\begin{array}{l}b_2\\ b_3\end{array}\right\}=\pm\sqrt{5}-1.$$

Diess führt auf zwei der obigen sehr ähnliche reducirbare Gleichungen:

$$x^4+(\sqrt{5}-1)x^3+2x^2+x+1=0;$$

$$x^4-(\sqrt{5}+1)x^3+2x^2+x+1=0;$$

$$\{x^2+\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)x+\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\}^2+\tfrac{1}{8}(5-\sqrt{5})=0;$$

$$\{x^2-\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)x-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\}^2+\tfrac{1}{8}(5+\sqrt{5})=0.$$

3) Hierher gehört auch die im vierten Jahrgange dieser Zeitschrift auf S. 136 und S. 285 nach zwei verschiedenen Methoden gelöste Gleichung:

$$x^4-2x^3+x-132=0,$$

indem die Coefficienten

$$a=1,\ b=-2,\ c=0,\ d=1,\ e=-132$$

der für den gegenwärtigen Fall geltenden Reducente

$$R=\left(\frac{b}{2}\right)^3+a^2d=0$$

genügen, und mithin eine Reduction auf die Formen II') und III_1) statthaft ist:

$$(x^2-x)^2-(x^2-x)-132=0$$

$$(x^2-x-\tfrac{1}{2})^2=(\tfrac{23}{2})^2,$$

wodurch die biqu. Gl. sofort in zwei quadratische Gl. zerfällt:

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - x - 12 = 0 \\ x^2 - x + 11 = 0 \end{array}\right|.$$

Aus $b = -2$ und $d = 1$ ergeben sich für a zwei Zahlen, die im absoluten Werthe übereinstimmen, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind:

$$a = \sqrt{\frac{-b^3}{8d}} = \pm 1.$$

Die Gleichung

$$- x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0,$$
$$x^4 + 2x^3 - x + 132 = 0$$

gehört daher ebenfalls zu den reducirbaren. Aus $a = 1$ und $d = 1$ folgen für b drei verschiedene Werthe, von welchen indessen zwei complex imaginär sind:

$$b = \sqrt[3]{-8a^2d} = -2\sqrt[3]{1}.$$
$$b_1 = -2; \quad \left.\begin{array}{l} b_2 \\ b_3 \end{array}\right\} = 1 \mp \sqrt{-3}.$$

Aehnlich findet man aus $a = 1$ und $d = -1$:

$$b = 2\sqrt[3]{1}$$
$$b_1 = 2; \quad \left.\begin{array}{l} b_2 \\ b_3 \end{array}\right\} = -1 \pm \sqrt{-3},$$

womit vier weitere reducirbare und den obigen sehr ähnliche Gleichungen bestimmt sind. Vgl. §. 5, III. und IV!

§. 4.

Specielle Fälle vollständiger Gleichungen.

I.

Erfüllen die Coefficienten einer biqu. Gl.

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

gleichzeitig die zwei Bedingungen:

$$1)\ R_5 = \left(\frac{b}{4a}\right)^3 - \tfrac{1}{8}\left(2 \cdot \frac{b}{4a} \cdot \frac{c}{a} - \frac{d}{a}\right) = 0.$$

$$2)\ \left(\frac{d}{b}\right)^2 = \frac{e}{a},$$

so wird die linke Seite der auf Null reducirten Form III_1) ein vollständiges Quadrat:

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{d}{b}\right)^2 = 0.$$

Unter den vier Wurzeln kommt dann jede Wurzel der quadr. Gl.

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{d}{b} = 0$$

zweimal vor. Beispiele:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + \tfrac{9}{4} &= 0; \\ x^4 + 2x^3 + 2x^2 + \ x \ + \tfrac{1}{4} &= 0; \\ x^4 - 2x^3 \qquad\qquad + \ x \ + \tfrac{1}{4} &= 0; \end{aligned}$$

vgl. die Beispiele in §. 3. Wird noch

$$3)\ \left(\frac{b}{4a}\right)^2 = \frac{d}{b},$$

so sind durch die zwei Coefficienten a und b die drei andern bestimmt, da:

$$\begin{aligned} \frac{e}{a} &= \left(\frac{d}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{4a}\right)^4 \\ \frac{d}{a} &= 4 \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{b}{4a} = 4 \cdot \left(\frac{b}{4a}\right)^3 \\ \frac{c}{a} &= \left\{8\left(\frac{b}{4a}\right)^3 + \frac{d}{a}\right\} : \left\{2 \cdot \frac{b}{4a}\right\} = 6 \cdot \left(\frac{b}{4a}\right)^2. \end{aligned}$$

Die linke Seite der auf Null reducirten biqu. Gl. ist dann ein vollständiges Biquadrat:

$$\left(x + \frac{b}{4a}\right)^4 = 0;$$

alle vier Wurzeln sind einander gleich:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -\frac{b}{4a}.$$

Beispiel: $2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + \frac{1}{8} = 0;\ (2x+1)^4 = 0.$

II.

Wird in der vollständigen biqu. Gl. $d = b$, also:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + e = 0,$$

so verwandeln sich Reducente und Reducirte in:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{4ac - b^2}{8a^2} - 1 = 0 \\ R_2 &= 8a^2 - 4ac + b^2 = 0 \\ \left(x^2 + \frac{b}{2a}x + 1\right)^2 &= 1 - \frac{e}{a}. \end{aligned}$$

In Bezug auf b ist die Reducente jetzt nur noch rein quadratisch:

$$\left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right\} = \pm 2\sqrt{a(c-2a)}.$$

Setzt man überdiess $e = a$, was auf die Reducente weiter keinen Einfluss hat, so wird die biqu. Gl. eine reciproke (Heis und viele andere) oder symmetrische (Bardey):

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

deren reducirte Form folgende ist:

$$(x^2 + \frac{b}{2a}x + 1)^2 = 0.$$

Von den sog. reciproken oder symmetrischen biqu. Gleichungen gehören demnach nur jene zu den auf die Form III_1) reducirbaren, deren Polynom ein vollständiges Quadrat ist.

Zu diesem Resultate gelangt man auch, wenn man eine beliebige symmetrische biqu. Gl. nach bekannter Methode erst auf die von III_1) abweichende Form

$$a\,(x + \frac{1}{x})^2 + b\,(x + \frac{1}{x}) + c - 2a = 0$$

bringt, und dann die Bedingung

$$8a^2 - 4ac + b^2 = 0; \quad \frac{c - 2a}{a} = (\frac{b}{2a})^2$$

hinzutreten lässt, wodurch die Gleichung auf

$$\left\{(x + \frac{1}{x}) + \frac{b}{2a}\right\}^2 = 0$$

reducirt wird, worauf nur noch beiderseits mit x^2 zu multipliciren ist.

Unter den vier Wurzeln einer solchen biqu. Gl. sind nur zwei von einander verschieden, und von diesen ist jede der reciproke Werth der andern. Beispiel:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

$$(x^2 + x + 1)^2 = 0.$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\,(-1 \pm \sqrt{-3}).$$

Die vier Wurzeln der biqu. Gl. stimmen hier mit den beiden complexen Cubikwurzeln aus 1 überein, deren Product bekanntlich $= 1$, weil das Product der drei Werthe für $\sqrt[3]{1}$, sowie der eine reelle Wurzelwerth selbst $= 1$ ist.

Wird noch

$$(\frac{b}{4a})^2 = 1; \quad b = \pm 4a; \quad c = 2a + \frac{b^2}{4a} = 6a,$$

so ist die linke Seite ein vollständiges Biquadrat, und alle vier Wurzeln werden $= \pm 1$:

$$ax^4 \pm 4ax^3 + 6ax^2 \pm 4ax + a = 0;$$
$$x^4 \pm 4x^3 + 6x^2 \pm 4x + 1 = 0;$$
$$(x^2 \pm 2x + 1)^2 = 0;$$
$$(x \pm 1)^4 = 0,$$

die zwei einzigen Fälle, in welchen die oben erhaltene Gleichung $(x + \frac{b}{4a})^4 = 0$ zu einer symmetrischen wird.

§. 5.

Fortsetzung, unvollständige Gleichungen.

I.

$$e = 0.$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0.$$
$$R_3 = (\frac{b}{2})^3 - a(\frac{b}{2} \cdot c - ad) = 0.$$
$$(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{d}{b})^2 = (\frac{d}{b})^2$$
$$x(x + \frac{b}{2a})(x^2 + \frac{b}{2a}x + 2 \cdot \frac{d}{b}) = 0.$$
$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \left\{(\frac{b}{2a})^2 + 2 \cdot \frac{d}{b}\right\}x^2 + \frac{d}{a}x = 0.$$

Beispiel: $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ (Bardey, algebr. Gleichungen S. 78).

Durch Multiplication mit x verwandelt sich jede cubische Gleichung in eine biquadratische, deren bekanntes Glied gleich Null ist. Gelingt es nun, die biqu. Gleichung zu lösen, so braucht man nur die Wurzel $x = 0$ zu streichen, um in den drei übrigen Werthen die Wurzeln der cubischen Gleichung zu haben. Die Coefffcienten:

$$a = 1,\ b = -6,\ c = 5,\ d = 12$$

genügen der Bedingung $R_3 = 0$, und die Reducirte heisst daher:

$$x(x-3)(x^2 - 3x - 4) = 0.$$

Zwischen den sich ergebenden Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = -1$$

besteht die Relation:

$$x_1 = x_2 + x_3;\ x_2 = x_1 - x_3;\ x_3 = x_1 - x_2.$$

II.

$$d = 0.$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + e = 0$$
$$R = b^2 - 4ac = 0;\ \frac{c}{a} = (\frac{b}{2a})^2.$$
$$(x^2 + \frac{b}{2a}x)^2 = -\frac{e}{a}$$
$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + (\frac{b}{2a})^2 x^2 + \frac{e}{a} = 0.$$

Fehlt in einer biqu. Gl. das Glied mit x, so ist sie nur dann reducirbar, wenn das Aggregat der drei ersten Glieder ein vollständiges Quadrat bildet.

III.

$$c = 0.$$
$$ax^4 + bx^3 + dx + e = 0.$$
$$R = (\frac{b}{2})^3 + a^2 d = 0;\ \frac{d}{b} = -\frac{1}{2}(\frac{b}{2a})^2$$
$$\left\{x^2 + \frac{b}{2a}x - \frac{1}{2}(\frac{b}{2a})^2\right\}^2 = \frac{1}{4}(\frac{b}{2a})^4 - \frac{e}{a}$$
$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 - (\frac{b}{2a})^3 x + \frac{e}{a} = 0.$$

Hierher gehört das in §. 3. behandelte Beispiel 3).

IV.

$$b = 0;\ \ a > 0.$$
$$ax^4 + cx^2 + dx + e = 0.$$
$$R = d = 0;$$
$$\frac{0}{0} = \frac{d}{b} = \frac{1}{2}\left\{\frac{c}{a} - (\frac{b}{2a})^2\right\} = \frac{c}{2a};\ \text{vgl. S. 323.}$$
$$(x^2 + \frac{c}{2a})^2 = (\frac{c}{2a})^2 - \frac{e}{a}$$
$$x^4 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{e}{a} = 0.$$
$$ax^4 + cx^2 + e = 0.$$

Bei den biquadr. Gl., in welchen nur die geraden Potenzen der Unbekannten vertreten sind, ist demnach die Reducente $R=0$ immer erfüllt, bei den biqu. Gl., in welchen bloss das zweite Glied fehlt, dagegen niemals. Wenn man deshalb eine vollständige und auf III_1) reducirbare biqu. Gl. auf bekannte Art in eine solche mit fehlendem zweiten Gliede transformirt, so verschwindet regelmässig auch das vierte Glied; vgl. S. 321 die nach Potenzen von x entwickelte Form III$_1$), oder auch die vorausgehende entsprechende mit p, q, ϱ, ν! Deshalb konnte das in §. 3. besprochene Beispiel 3) die in dieser Zeitschrift von Herrn Th. Schröder gegebene Lösung erfahren.

V.

$$a=0;\ \sqrt{a}=0.$$
$$bx^3+cx^2+dx+e=0.$$
$$R=b=0.$$
$$\frac{0}{0}=\frac{b^2}{a}=2\left\{c\pm\sqrt{c^2-2bd}\right\}=2(c\pm c).\ \text{Vgl. S. 323.}$$
$$1)\ \frac{b^2}{a}=4c;\quad \frac{b}{2\sqrt{a}}=\pm c;\quad \frac{\sqrt{a}}{b}\cdot d=\pm\frac{d}{2\sqrt{c}}$$
$$(\pm\sqrt{c}\cdot x\pm\frac{d}{2\sqrt{c}})^2=\frac{d^2}{4c}-e$$
$$(x+\frac{d}{2c})^2=(\frac{d}{2c})^2-\frac{e}{c}$$
$$x^2+\frac{d}{c}x+\frac{e}{c}=0$$
$$cx^2+dx+e=0.$$

Setzt man: $2)\ \frac{b^2}{a}=0;\quad \frac{b}{2\sqrt{a}}=0;\quad \frac{\sqrt{a}}{b}\cdot d=\infty,$

so wird der zweiten der Gleichungen III$_1$) ebenfalls genügt. Vgl. auch Fall I. dieses Paragraphen, nach welchem, wenn $a=0$, unter Umständen selbst dann eine Reduction möglich ist, wenn b nicht verschwindet.

§. 6.

Lösung einer nicht direct reducirbaren biquadratischen Gleichung durch Ableitung einer direct reducirbaren.

I.

Wenn die biqu. Gleichung

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

nicht zu den direct reducirbaren gehört, so ist doch zuweilen die durch Division mit x^4 entstehende Gleichung

$$e(\frac{1}{x})^4+d(\frac{1}{x})^3+c(\frac{1}{x})^2+b(\frac{1}{x})+a=0$$

eine reducirbare; die Wurzeln dieser neuen Gleichung sind denjenigen der ursprünglichen reciprok. Wenn nun auch $x_1 + x_2 \gtrless x_3 + x_4$, so kann doch offenbar

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

sein; oder, wenn $(\frac{b}{2})^3 - a(\frac{b}{2} \cdot c - ad) \gtrless 0$, so kann doch

$$(\frac{d}{2})^3 - e(\frac{d}{2} \cdot c - eb) = 0$$

sein. So ist beispielsweise die Gleichung

$$24x^4 - 50x^3 + 35x^2 - 10x + 1 = 0$$

nicht direct reducirbar, indem

$$(-25)^3 - 24\{(-25) \cdot 35 - 24 \cdot (-10)\} = -385;$$

die Gleichung der reciproken Wurzeln:

$$y^4 - 10y^3 + 35y^2 - 50y + 24 = 0$$

gehört dagegen zu den reducirbaren, weil

$$(-5)^3 - 1 \cdot \{(-5) \cdot 35 - 1 \cdot (-50)\} = 0.$$

Man erhält:

$$(y^2 - 5y + 5)^2 = 1.$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0; \quad \left| \begin{array}{ll} y_1 = 1; & x_1 = 1 \\ y_2 = 4; & x_2 = \frac{1}{4} \end{array} \right|$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0; \quad \left| \begin{array}{ll} y_3 = 2; & x_3 = \frac{1}{2} \\ y_4 = 3; & x_4 = \frac{1}{3} \end{array} \right|$$

Als zweites Beispiel geben wir die Gleichung

$$x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0,$$

welche nach IV. des vorigen Paragraphen jedenfalls zu den nicht reducirbaren gehört, und bilden die Gleichung der reciproken Wurzeln:

$$y^4 - 2y^3 + y^2 - 1 = 0;$$

diese erfüllt die Bedingung $b^2 - 4ac = 0$ (Fall II des vorigen §.) und ist mithin reducirbar:

$$(y^2 - y)^2 = 1$$

$$y^2 - y \mp 1 = 0.$$

Zum gleichen Resultate führt übrigens die Bemerkung, dass die ursprüngl. Gl. mit $(x^2)^2 - (x-1)^2$ identisch ist.

II.

Führt man in der allgemeinen biqu. Gl. eine neue Unbekannte ein:

$$x = y + h$$

und unterwirft man die variirte Gleichung (Mathiessen S. 288)

$$Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0$$

der Bedingung:

$$B^3 - 4A(BC - 2AD) = 0,$$

so verschwindet h aus dieser Bedingungsgleichung völlig, kann also nicht daraus bestimmt werden; man kommt lediglich auf die Bedingungsgleichung

$$b^3 - 4a(bc - 2ad) = 0$$

zurück, wie auch zu erwarten war.

Anders verhält es sich, wenn man die Bedingungsgleichung

$$D^3 - 4E(DC - 2EB) = 0$$

aufstellt, nach deren Erfüllung die Gleichung mit den reciproken Wurzeln der variirten Gleichung reducirbar wäre. Es verschwinden nur die drei höchsten Potenzen von h, und bleibt eine vollständige Gleichung sechsten Grades, die demnach zur Bestimmung von h unpassend ist.

In jedem Falle aber gelingt es, durch folgende Betrachtung eine reducirbare Gleichung abzuleiten (Matthiessen S. 369 und 370). Wenn

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4) = 0,$$

so gehörte diese Gleichung zu den reducirbaren, wenn

$$A^3 - 4AB + 8C = 0$$

wäre, und zwar könnte man die Gleichung dann unter der Form

$$y^4 + Ay^3 + By^2 - \tfrac{1}{8}A(A^2 - 4B)y + D = 0$$

darstellen. Lässt man $(-y)$ an die Stelle von y treten, so wird:

$$y^4 - Ay^3 + By^2 - Cy + D = (y + y_1)(y + y_2)(y + y_3)(y + y_4) = 0.$$

Durch correspondirende Multiplication folgt aus beiden Gleichungen drittens:

$$(y^4 + By^2 + D)^2 - (Ay^3 + Cy)^2$$
$$= (y^2 - y_1^2)(y^2 - y_2^2)(y^2 - y_3^2)(y^2 - y_4^2) = 0;$$

$$y^8 - (A^2 - 2B)y^6 + (B^2 - 2AC + 2D)y^4$$
$$- (C^2 - 2BD)y^2 + D^2 = 0.$$

Diess ist die Gleichung der Wurzelquadrate in Bezug auf die ursprüngliche Gleichung; für y^2 liefert sie vier, für y selbst acht Werthe; Matthiessen S. 297. Bestehen demnach gleichzeitig die beiden Gleichungen:

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0,$$
$$\eta^4 + \alpha\eta^3 + \beta\eta^2 + \gamma\eta + \delta = 0$$

und ist:

$$\eta = y^2; \quad y = \sqrt{\eta},$$

so hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} A^2 - 2B &= -\alpha \\ B^2 - 2AC + 2D &= \beta \\ C^2 - 2BD &= -\gamma \\ D^2 &= \delta \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass:

$$(\alpha^2 - 4\beta)^2 - 64\delta = \{A(A^3 - 4AB + 8C) - 8D\}^2 - 64D^2.$$

Im Falle nun in der zuerst angenommenen Gleichung $A^3 - 4AB + 8C = 0$ war, hat in der Gleichung der Wurzelquadrate die Differenz $(\alpha^2 - 4\beta)^2 - 64\delta$ ebenfalls den Werth Null. Wenn umgekehrt in einer biquadratischen Gleichung $(\alpha^2 - 4\beta)^2 - 64\delta = 0$, so ist in der Gleichung der Quadratwurzeln aus den Wurzeln $A^3 - 4AB + 8C = 0$.

Die Aufgabe, aus der irreducibeln biqu. Gl.

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

eine reducirbare abzuleiten, kommt mithin darauf hinaus: 1) eine solche Transformation vorzunehmen, dass die Bedingung $(\alpha^2 - 4\beta)^2 - 64\delta = 0$ erfüllt wird, falls diess nicht schon der Fall ist, und 2) aus der transformirten Gleichung die Gleichung der Quadratwurzeln ihrer Wurzeln zu bilden.

Die erste Operation gelingt, indem man

$$x = \eta + h$$

setzt, wodurch die biqu. Gl. übergeht in:

$$\eta^4 + \frac{f'''(h)}{1\cdot 2\cdot 3}\eta^3 + \frac{f''(h)}{1\cdot 2}\eta^2 + f'(h)\,\eta + f(h) = 0,$$
$$\eta^4 + \alpha\eta^3 + \beta\eta^2 + \gamma\eta + \delta = 0.$$

Damit für diese variirte Gleichung die Reducente

$$(\alpha^2 - 4\beta)^2 - 64\delta = 0$$

erfüllt sei, ergibt sich für h der einzige Werth:

$$h = \frac{a^4 - 8a^2b + 16b^2 - 64d}{8(a^3 - 4ab + 8c)} = \frac{\frac{1}{8}(a^2 - 4b)^2 - 8d}{a(a^2 - 4b) + 8c}$$

Nach dieser Wahl für h ist die erste Umwandlung vollzogen, und die transformirte Gleichung erhält die Gestalt:

$$\eta^4 + \alpha\eta^3 + \beta\eta^2 + \gamma\eta + \left(\frac{\alpha^2 - 4\beta}{8}\right)^2 = 0.$$

Bildet man jetzt die Gleichung der Quadratwurzeln, so muss diese von der Form

$$y^4 + Ay^3 + By^2 - \tfrac{1}{8}A(A^2 - 4B)\,y + D = 0$$

sein. Stellt man umgekehrt aus der letzteren die Gleichung der Wurzelquadrate dar, so entsteht eine mit der vorausgehenden identische Gleichung, und daraus erhält man nach dem Obigen folgende Coefficientengleichungen:

$$\begin{aligned} A^2 - 2B &= -\alpha \\ (A^2 - 2B)^2 + 8D &= 4\beta \\ \tfrac{1}{16}A^2(A^2 - 4B)^2 - 8BD &= -4\gamma \\ D^2 = \delta &= \left(\frac{\alpha^2 - 4\beta}{8}\right)^2 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung allein gibt für D zwei Werthe, von denen aber nur einer brauchbar ist, indem aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen folgt, dass

$$D = -\tfrac{1}{8}(\alpha^2 - 4\beta).$$

Die zwei andern Coefficienten A und B bestimmen sich leicht aus den Gleichungen:

$$\begin{gathered} A^2 - 2B = -\alpha \\ A^2(A^2 - 4B)^2 + 16(\alpha^2 - 4\beta)B + 64\gamma = 0, \end{gathered}$$

welche folgende zwei cubische Resolventen (Matthiessen S. 299 u. 300) liefern:

$$A^6 + 4\alpha A^4 + 4(3\alpha^2 - 8\beta)A^2 + 8(\alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma) = 0.$$

$$B^3 + \tfrac{1}{2}\alpha B^2 + \tfrac{1}{4}(7\alpha^2 - 32\beta)B - \tfrac{1}{8}(\alpha^3 - 64\gamma) = 0,$$

woraus indessen bloss eine Wurzel A^2 zu bestimmen ist, indem

$$B = \tfrac{1}{2}(A^2 + \alpha).$$

Nach Bestimmung der Werthe für A, B, D kann die reducirbare Gleichung gelöst werden, wobei sich ergeben wird, dass $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$; hieraus findet man weiter die $\eta = y^2$, und schliesslich die $x = \eta + h$.

Sollen mathematischen Aufgabensammlungen die Lösungen hinzugefügt werden, oder nicht?

Von Prof. Dr. Erler in Züllichau.

In dem 2. Hefte dieser Zeitschrift S. 134 wünscht der Herr Herausgeber die Besprechung der Frage, ob die mathematischen Aufgabensammlungen zugleich die Lösungen enthalten sollen, und Herr Reidt geht S. 138 schon von selbst in einer gelegentlichen Bemerkung auf diese Frage ein. Bekanntlich sind den früheren Sammlungen von Meier Hirsch, Arndt u. a., ebenso den Rechenbüchern von Diesterweg, Böhme u. a. die Lösungen beigefügt worden. Heis that es nur ganz ausnahmsweise bei schwereren arithmetischen Aufgaben, gab dagegen sämmtliche Lösungen der algebraischen in besonderen Paragraphen. Ein besonderes Verfahren hatte seiner Zeit der jüngere E. Fischer in seiner an das Lehrbuch seines Vaters E. G. Fischer sich eng anschliessenden, aber blos auf die allgemeine Arithmetik beschränkten, sehr trefflichen, wenn auch wohl wenig verbreiteten Aufgabensammlung eingeschlagen. Gewissen leichten und von dem Leser unmittelbar controlirbaren Aufgaben fügte er keine Lösung hinzu, für andere gab er gewisse Kennzeichen an, z. B. ob das Exempel aufgehe, den Rest, den eine Division, eine Quadratwurzelausziehung lasse, die Coefficienten gewisser Glieder, eine leichte Probe u. a. Bei den reinen Zahlenbeispielen waren die Kommata regelmässig weggelassen. Nur für wenige schwierige Aufgaben waren die Resultate vollständig gegeben. Die schöne Sammlung von Martus, welche wohl vorzugsweise in der Hand des Lehrers ist und mehr der Privatbeschäftigung einzelner Schüler, als der regelmässigen Benutzung in der Classe dient, enthält in einem besonderen gleich starken Bande nicht blos die Lösungen, sondern auch vielfache werthvolle Andeutungen in Betreff der Determination und anderweitige Bemerkungen. Die Sammlungen physikalischer Aufgaben von Fliedner, Kahl, Emsmann geben ebenfalls in besonderen Heften nicht blos die sultate, sondern deuten, wenn die Lösung irgendwie Schwierigkeiten der Entwickelung bietet, auch den einzuschlagenden Weg an. In der neueren Zeit ist bei Gelegenheit der Reidtschen und Bardeyschen für die Hände der Schüler bestimmten Sammlungen durch die Teubnersche Verlagshandlung der Versuch gemacht worden, sowohl denjenigen Lehrern, welche die Auflösungen nicht in den Händen ihrer Schüler wünschen, als auch denen, die entgegengesetzter Ansicht sind, dadurch entgegenzukommen, dass die Auflösungen zwar gedruckt worden sind, aber nicht durch den gewöhnlichen Buchhandel, sondern nur direct von der Verlagshandlung bezogen werden können und nur an Lehrer abgegeben werden sollen.

Ehe wir nun auf die Frage selbst eingehen, ob die Resultate wünschenswerth in den Händen der Schüler sind oder nicht, möchten wir auf den wesentlichen Unterschied aufmerksam machen, der zwischen mathematischen Aufgaben und der Forderung einer sprachlichen schriftlichen Leistung darin stattfindet, dass die Lösung der mathematischen Aufgabe in ein ganz bestimmtes Resultat hinausläuft, so dass gewöhnlich ein einziger Fehler im Laufe der ganzen Arbeit ein falsches Resultat zur Folge hat, während der vereinzelte Fehler auf die sprachliche Leistung im ganzen von geringerem Einfluss ist, jedenfalls sich nach seiner speciellen Natur beurtheilen lässt. Ein Versehen geringfügigster Art, infolge dessen sich gewisse Glieder heben oder nicht, kann den ganzen Charakter einer Aufgabe umgestalten, den Grad einer Gleichung erhöhen oder erniedrigen, eine schwere Aufgabe in eine ganz leichte umgestalten und umgekehrt. Weil sich nun aber die Lösung der ganzen Aufgabe in einem einzigen Resultate darstellt, ist es ganz natürlich, dass jeder, der eine Aufgabe rechnet, auch zu wissen wünscht, ob dieses Resultat richtig ist, indem er aus diesem allein schon mit einiger Sicherheit einen Rückschluss auf die Richtigkeit seiner ganzen Arbeit machen kann. Und dieser Wunsch wird um so grösser sein, je umfangreicher die Rechnung gewesen ist. Zwar kann jene Sicherheit eine sehr trügerische sein, da theils einzelne Fehler und oft der schlimmsten Art sich aufgehoben haben können oder für das Endresultat ohne Einfluss gewesen sind, theils die mechanische Rechnung zwar richtig, die Auseinandersetzung aber sehr mangelhaft sein kann. Doch wird sich der Schüler leicht mit der Richtigkeit des Resultates begnügen; umgekehrt aber hält der Schüler, sobald das Resultat falsch ist, alle seine Mühe für verloren und wagt nicht, mit seiner Arbeit vorzutreten. Ein lateinisches, französisches Exercitium gibt er bereitwillig ab, wenn er auch vorher weiss, der Lehrer werde manche, ja grobe Fehler darin finden, dagegen hat man Mühe, einen Abiturienten zu überreden, die Lösung einer Aufgabe, deren Resultat den Fehler an der Stirne trägt, z. B. einen negativen oder imaginären Werth ergibt, ins Reine zu schreiben, wenn man ihm auch zum Troste sagt, es sei leicht möglich, dass der Fehler ganz unerheblicher Art sei, das Gegebene zeige doch das, was er zu machen wisse, während der völlige Ausfall gar kein Urtheil gestatte.

Jenem so lebhaften und so natürlichen Wunsche der Schüler, die Richtigkeit der Resultate durch Vergleichung oder auf irgend eine Weise zu verificiren, namentlich bei einem irgend umfangreichen Exempel, wird man daher, glauben wir, Rechnung tragen müssen, man würde m. E. vergebens versuchen, seine Befriedigung bei häuslichen Arbeiten zu verhindern. Nun kann aber, worauf Herr Reidt wiederholt in seinen Aufgaben und auch in der oben erwähnten Bemerkung mit Recht aufmerksam macht, dem Schüler die Möglichkeit in die Hand gegeben werden, sich selbst von der Richtigkeit seiner Rechnung dadurch zu überzeugen, dass er die Probe mache. Man vermehrt nur allerdings dadurch seine Arbeit oft nicht unerheblich, so dass, wenn es in das Belieben des Schülers gestellt wird, ob er eine in der Sache selbst liegende und daher oft nicht ganz einfache Probe machen will oder nicht, vorausgesetzt werden kann, dass gerade der eigentliche Mittelschlag der Schüler diesen Weg nicht einschlagen, sondern den der Vergleichung des eignen Resultates mit dem seiner Mitschüler vorziehen werde. Wird aber von sämmtlichen Schülern die Anstellung der Probe verlangt und also auch controlirt, so muss man eben berücksichtigen, dass die Arbeit des Schülers dadurch theilweise nicht wenig vermehrt wird, so dass er in vielen Fällen in derselben Zeit, in der er sonst 3 Exempel rechnen kann, mit der Probe nur zwei wird rechnen können. Allerdings haben ja die Proben noch ihren besonderen Werth und auch ein besonderes Interesse, aber oft wiederholen sich doch auch die Operationen in dem eigentlichen Exempel und der Probe, so dass die Uebung nur eine gleichförmige ist. Ueberhaupt aber sind die Rechnungsproben ein Capitel, über welches einmal ausführlicher gesprochen werden könnte. Wir machen hier nur kurz auf einige Punkte aufmerksam. Gewisse Proben gewähren nur geringe Sicherheit für die Richtigkeit der Resultate, weil sie nicht weit zurückgreifen, vielleicht blos den Nachweis liefern, dass man sich in den letzten Zeilen nicht verrechnet habe. Und solche Proben sind die Schüler am meisten geneigt, anzustellen, weil sie die bequemsten zu sein pflegen. Andre Proben sind von der Art, dass, wenn man mit abgekürzten Zahlen rechnet, das Resultat stimmt, während innerhalb der Rechnung grobe Rechnungsfehler in einflusslosen Ziffern oder Grössen vorgekommen sein können. Auch bürgt eine Probe nicht dafür, dass nicht gewisse Fehler durch andre entgegengesetzter Art sich aufgehoben haben. Endlich lieben die Schüler, und wohl nicht blos sie, eine Art von Proben vorzunehmen, die abgesehen davon, dass sie vor Fehlern nicht schützt, weil man in der Probe dieselben Operationen vorzunehmen pflegt, wie in der eigentlichen Rechnung, auch Bedenken gegen ihre Zulässigkeit erregt. Man setzt nämlich den gefundenen Werth in beide Seiten der gegebenen Gleichung ein und stellt beide Seiten einander gleich, operirt also mit dieser Gleichung, deren Richtigkeit doch erst nachgewiesen werden soll, als sei sie schon richtig; man begeht also im Grunde denselben Fehler, als wenn man sich ohne weiteres die Umkehrung eines richtigen Satzes gestattet. Wenig Sicherheit gewährt die Probe dem Schüler namentlich bei denjenigen Aufgaben, die in Worten ausgedrückt sind, da er den Fehler, den er infolge einer verkehrten Auffassung der Aufgabe bei der Entwickelung der Gleichung selbst gemacht hat, bei der Probe wiederholen wird. Immerhin gewährt eine Probe, wie werthlos oder unsicher sie an sich betrachtet auch sein mag, dem Schüler eine gewisse Beruhigung. Viele Proben geben aber auch Veranlassung den Zusammenhang der Resultate unter sich und mit den gegebenen Grössen von andern Seiten zu betrachten, und so sind namentlich die tüchtigen Schüler, die zu ihren Exempeln wenige Zeit brauchen, recht sehr dazu aufzufordern, selbst ihre Rechnung einer Probe zu unterwerfen, auch habe ich sie gewöhnlich ganz bereit dazu gefunden. Daneben gibt es ganz allgemeine Kennzeichen, die keine besondere Zeit kosten, und die nicht blos zeigen, ob ein Fehler gemacht ist, sondern auch, was besonders wichtig ist, die

Stelle angeben, wo derselbe stattgefunden hat. Für gewisse Zahlenrechnungen kann hierher die Neunerprobe gerechnet werden, über welche Krönig 1855 ein beachtenswerthes Programm (Berlin· Kön. Realschule) geschrieben hat, bei den gewöhnlichen Rechnungen mit abgekürzten Zahlen und Logarithmen versagt sie freilich den Dienst. Hierher gehört ferner die Substitution einfacher Zahlenwerthe statt der Buchstaben, namentlich des Werthes 1, so dass man nur die Coefficienten mit ihren Vorzeichen zu berücksichtigen hat, des Winkels 60^0 oder 90^0 u. a. Ganz besonders aber rechne ich hierher die Beachtung der Dimensionen eines Ausdruckes, ferner der Symmetrie in den dazu geeigneten Aufgaben. Auf solche leicht anwendbare, allgemeine Kennzeichen sollten die Schüler schon frühzeitig aufmerksam gemacht und auch beim laufenden Unterrichte immer wieder hingewiesen werden.

Kehren wir nun nach diesem kleinen Excurs über die Proben, welcher natürlich den Gegenstand nur andeuten konnte, zu unsrer Frage zurück. Wir sahen, der Wunsch der Schüler, eine gewisse Sicherheit über die Richtigkeit des Resultates einer umfangreichen Rechnung zu erhalten, ist ein sehr natürlicher; die Probe gewährt eine solche, aber sie erfordert neue, oft umfangreiche Rechnung und die dadurch gewonnene Sicherheit für die Richtigkeit ist nicht selten eine trügerische. Bietet nun die Aufgabensammlung selbst die Lösung, so hat der Schüler, falls das Resultat mit der Lösung übereinstimmt, die gewünschte Beruhigung; stimmt es nicht, so wird er veranlasst werden, seine Rechnung zu wiederholen und selbst den Fehler aufzusuchen. Kann dagegen keine Vergleichung mit der Lösung im Buche selbst geschehen, so wird sie mit der Arbeit eines oder mehrerer seiner Mitschüler vorgenommen werden, und dann liegt die Versuchung nahe, dass, statt blos das Resultat zu vergleichen, auch schon für diese oder jene bedenkliche Stelle eine ähnliche Vergleichung stattfände oder schliesslich die ganze Arbeit von vornherein abgeschrieben werde; gewiss aber wird, wenn das Resultat nicht übereinstimmt, nun die Vergleichung auch auf den übrigen Theil der Arbeit ausgedehnt und so dieselbe nicht durch eigene Rechnung, sondern nach dem andern Hefte berichtigt werden. Wir glauben in der That, das Abschreiben, die Unselbständigkeit der Rechnung werde befördert, wenn die Resultate complicirter

Exempel dem Schüler nicht in irgend einer Weise zur Vergleichung mitgetheilt werden. Dies gilt nun nicht, oder wenigstens nicht in gleichem Grade von Exempeln, die, wie ein grosser Theil der arithmetischen, als Beispiele zu einer bestimmten Regel nur eine geringe Rechnung erfordern. Das Bedürfniss der Vergleichung ist für den Schüler dann minder erheblich; anderseits würde das Resultat, wenn es dem Schüler unmittelbar gegeben würde, ihm sehr häufig die Rechnung ganz ersparen, ihm die Möglichkeit gewisser häufig vorkommender, lehrreicher Fehler verhüllen, ihn von selbständiger Auffindung gewisser Vereinfachungen, die er noch vornehmen kann, abhalten. Insofern scheint uns das von Heis eingeschlagene Verfahren, seinen arithmetischen Aufgaben nur ausnahmsweise die Lösungen hinzuzufügen, ganz zweckmässig und aus klarer Erkenntniss der Bedürfnisse der Schule hervorgegangen. Dasselbe aber müssen wir auch in Bezug darauf sagen, dass er die Lösungen der algebraischen Aufgaben in besondern Paragraphen von den Aufgaben getrennt hat. In der That wird, wenn das Resultat, wie es bei Meier Hirsch geschah, unmittelbar neben der Aufgabe steht, die Kenntniss desselben dem Schüler vor Vollendung seiner Aufgabe gewissermassen aufgezwungen, und es ist gewiss sehr richtig bemerkt, dass dieser Umstand von vornherein auf den Schüler influirt, so dass er nicht mit der wünschenswerthen Selbständigkeit und nicht unbefangen genug seine Rechnung zu Ende zu führen vermag. Ob nun die Auflösungen, wie bei Heis, in besonderen Paragraphen, aber in engem Anschluss an die Aufgaben, oder insgesammt am Ende des Buches oder noch mehr isolirt in besonderen Heften erscheinen, das wird in der Hauptsache gleichgültig sein, wenn man überhaupt die Lösungen den Schülern in die Hände geben will. Was eben diese letzteren anbetrifft, so halten wir nach dem Gesagten das Verfahren von Heis für das zweckmässigste, weil er die Lösungen nur denjenigen Aufgaben hinzufügt, für welche dem Schüler in der That die Kenntniss derselben wünschenswerth ist, während bei den Bardey'schen Aufgaben der Lehrer genöthigt wird, entweder alle Auflösungen oder gar keine dem Schüler in die Hand zu geben, er müsste denn, was ja auch nicht schwer ausführbar wäre, die ersten Bogen der Lösungen cassiren.

Aber neben dem Schüler, dessen Bedürfniss wir bisher allein ins Auge gefasst haben, ist auch der Lehrer zu berücksichtigen, und so wenden wir uns der Frage zu, ob die Lösungen für den Lehrer wünschenswerth seien. Darüber wird allerdings kaum ein Zweifel sein; denn das Auskunftsmittel, welches der Herr Herausgeber a. a. O. als von einem Wiener Verleger*) ihm vorgeschlagen anführt, wonach die Richtigkeit einer Lösung gewissermassen durch Majoritätsbeschluss der Schüler ermittelt werden soll, hat nur eine spasshafte Seite. Freilich, das meinen wir nicht, dass dem Lehrer dadurch das Nachrechnen oder vielmehr das Vorherrechnen der Aufgabe erspart werden sollte. Wir sind der Ansicht, dass im allgemeinen kein Exempel von dem Lehrer aufgegeben werden sollte, welches er nicht selbst vorher gerechnet hat, um danach die Arbeit zu schätzen, die er dem Schüler mit demselben zumuthet. Allerdings geben wir zu, dass dies Urtheil trügerisch ist, der Schüler kann sich an einem einfachen Exempel so oft verrechnen, dass er die dreifache Zeit und mehr darauf anwenden muss, als an sich erforderlich wäre; er übersieht einen Factor, der sich hebt und der die ganze Rechnung ausserordentlich vereinfacht; er schlägt einen weitläufigen Weg ein, während der Lehrer darauf gerechnet, er werde den einfachen finden. Ich führe ein Beispiel an, welches mir vor wenigen Tagen begegnet ist. Mehrere Schüler hatten als Datum einer cubischen Gleichung statt 34689□^m 34,689□^m genommen, wodurch die Gleichung der cardanischen Formel verfiel, während sie bei dem richtigen Zahlenwerthe nach der trigonometrischen zu rechnen gewesen wäre. Das sind Missstände, die sich nicht vermeiden lassen und die man zwar bemüht sein kann, durch vorausgeschickte Warnungen oder Andeutungen auszuschliessen, aber nie ganz zu verhindern im Stande sein wird. Der Lehrer wird eben nur die normalen Verhältnisse in Rechnung ziehen können, aber auf diese muss er auch die Aufgaben, die er stellt, berechnet haben. — Wie weit ferner die Durchsicht der Rechnungen der Schüler gehen solle, lässt sich schwer allgemein bestimmen. Sich etwa blos mit der Controle der Resultate zu begnügen, halte ich namentlich in den oberen Classen für ganz unzulässig. Ich unterscheide Terminarbeiten, Extemporalien und

*) Ich fand diese Ansicht auch in Lehrerkreisen und diese Praxis in Schulen vor. Der Herausgeber.

laufende Aufgaben von einer Stunde zur andern,*) die ersteren in der Prima, die letzteren besonders in den andern Classen, während Extemporalien in allen Classen geschrieben werden. Bei den beiden ersten Arten prüfe ich jede einzelne Rechnung Zeile für Zeile, und zwar halte ich als Grundsatz fest, dass jede Rechnung, die von dem betr. Schüler nicht im Kopfe ausgeführt wird, auch in der Reinschrift dem Lehrer vorgelegt werde, dass also keine Nebenrechnung auf besonderem Zettel ausgeführt werde. Ich wünsche, dass meine Schüler sich üben, im Kopfe zu rechnen, dass also z. B. log. $2a$ gleich hingeschrieben werde, wenn log. a aufgeschlagen ist, dass log. $\frac{ab}{c}$ unmittelbar aus den hingeschriebenen log. a, log. b, log. c berechnet werde, ohne erst log. ab zu bilden, dass die Interpolationen bei 5stelligen Logarithmen oder den Bremikerschen 7stelligen Tafeln im Kopfe vollzogen werden u. a. m. Wer sich aber diese Rechnung nicht zutraut oder sie nicht ausführen kann, der soll auch Alles, was er nicht im Kopfe berechnet, hinschreiben; denn nur dann kann ihm genau nachgewiesen werden, nicht blos dass er sich überhaupt verrechnet hat, sondern auch welchen Fehler er gemacht hat. Und die Art des Fehlers ist mir unendlich wichtiger, als der Fehler als solcher. Das verkehrteste Resultat kann Folge eines ganz unerheblichen Versehens sein, ein völlig richtiges Resultat sich trotz grober, aber einflussloser Fehler ergeben. Infolge jenes oben erwähnten Irrthums in der Stellung des Komma verschwand $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ gegen $\left(\frac{q}{2}\right)^2$; welcher Fehler also auch bei der Berechnung von $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ gemacht worden wäre, in dem Resultate selbst hätte er nicht erkannt werden können,

Was nun die laufenden Arbeiten betrifft, so sei es mir erlaubt, das von mir befolgte Verfahren kurz anzugeben. Sämmtliche Aufgaben mit den vollständigen Rechnungen in der nach dem obigen Grundsatze bestimmten Ausdehnung werden in ein Heft reinlich eingetragen (meine Schüler, in den früheren Classen vortrefflich gewöhnt, gehen mir in dieser Beziehung eher zu weit,

*) Dies stimmt so ziemlich mit meinen Forderungen I. 216—227.
D. Herausg.

indem sie z. B. fast alle Bruchstriche mit dem Lineal zu ziehen pflegen); in der Stunde, für die sie aufgegeben sind, wird dann von einem Schüler das vollständige Exempel aus der Reinschrift vorgelesen, die andern haben dabei ihre Rechnungen zu vergleichen, resp. zu corrigiren. Nach einiger Zeit, etwa alle 4 Wochen, bisweilen in kürzeren, bisweilen in längeren Zeiträumen, je nachdem sich das Material der Aufgaben angehäuft hat, aber völlig unbestimmt, an welchem Tage, werden sofort alle Hefte abgenommen und sämmtliche Arbeiten von mir durchgesehen, was freilich bei einer Classe von 40 — 50 Schülern eine Zeit von 6, 8, ja 10 Stunden erfordert. Nun will ich nicht sagen, dass ich hierbei jede Zeile mit völliger Genauigkeit revidire, aber die Durchsicht erstreckt sich doch durchaus nicht blos auf die Vollständigkeit der Arbeiten, oder auf die Richtigkeit der Resultate, sondern sehr wesentlich auch, wie schon aus der oben angegebenen Zeit ersichtlich, auf die Art der Rechnung; jedenfalls wird bei falschem Resultate die Ursache des Fehlers aufgesucht und bezeichnet, daneben werden Mängel der Schreibweise, weggelassene Klammern u. s. w. gerügt. Aus dem Bisherigen ist wohl ersichtlich, dass ich eine blosse Controle der Exempel der Schüler nach den gedruckten Auflösungen für unzureichend halte. Dennoch sind die Auflösungen insofern für den Lehrer von Wichtigkeit, als er sich von der Richtigkeit seiner eignen Resultate überzeugen kann. Denn dass der Lehrer sich ebenfalls verrechnen kann, weiss Jeder. Gerade auch in dieser Hinsicht möchte ich von dem Lehrer verlangen, dass er die Exempel selbst ausrechne, damit er, indem er sich selbst manchmal verrechnet, Nachsicht gegen seine Schüler üben lerne, ebenso wie ich die Nothwendigkeit der Correctur stets für ein geeignetes Mittel halte, um den Lehrer davor zu bewahren, seine Schüler nicht mit zu vielen häuslichen schriftlichen Arbeiten zu überladen. Ueberdies können die Lösungen theils durch ihre Form, theils durch ihre Bemerkungen und Winke dem Lehrer selbst lehrreich sein, wie dies z. B. ganz besonders von der vortrefflichen Aufgabensammlung von Martus gilt.

Bisher haben wir nur den eigentlichen Classenunterricht berücksichtigt, für den ja manche dieser Sammlungen recht eigentlich bestimmt sind. Sie werden aber jedenfalls auch recht viel zur Privatbeschäftigung verwendet werden, sei es dass Schüler, die zurückgeblieben sind, das Bedürfniss oder die Nothwendigkeit fühlen, durch ausserordentliche Arbeiten die Lücken auszufüllen, sich grössere Gewandtheit und Sicherheit zu erwerben, sei es dass fähigere Schüler grössere Exempel oder schwierigere Partien, die im Unterrichte nicht zur Behandlung gekommen sind, zu bearbeiten und zu lösen versuchen. Wie wünschenswerth in diesem Falle die Kenntniss der Resultate dem Schüler sein muss, braucht nicht hervorgehoben zu werden; ohne dieselbe hat er keinerlei sicheres Urtheil über seine Arbeit und wird daher auch bald entmuthigt solche Privatbeschäftigung aufgeben. Man sage nicht, er könne ja dem Lehrer dieselbe vorlegen. Denn zunächst besitzen viele, und nicht die schlechtesten Schüler eine gewisse sehr natürliche Scheu, mit ihrer Privatbeschäftigung hervorzutreten, oder sich dem Lehrer aufzudrängen; ferner ist nicht jede Arbeit der Art, dass sie sich zum Vorlegen eignet, auch will jedes Exempel gleich revidirt sein, wenn es gerechnet ist, und der Schüler kann doch nicht immer wegen der kleinen Zahl von 3, 4 Exempeln den Lehrer anlaufen. Kurz, für diesen gewiss nicht seltenen Fall ist die Lösung in der Hand des Schülers durchaus nothwendig; und so geben denn auch diejenigen Sammlungen, die ihrer Natur nach mehr auf solche Privatbeschäftigung berechnet sind, wie die quadr. Gleichungen von Bardey, ferner die meisten physikalischen, nicht blos die Lösungen, sondern sogar noch manche Anleitung und Winke für dieselben.

Fassen wir nun das Gesagte zusammen, so scheint es uns wünschenswerth, dass die gewöhnlichen arithmetischen Aufgaben, die nur wenig Rechnung veranlassen, ganz ohne Auflösung gegeben werden; für andre Aufgaben wird es genügen, gewisse Kennzeichen z. B. die von Reidt erwähnte Quersumme, die Werthe ohne Komma, den Rest, die Coefffcienten u. a. anzugeben; sind die Rechnungen dagegen umfangreicher, so wird es der Selbständigkeit der Arbeit der Schüler nach unsrer Ueberzeugung nur förderlich sein und namentlich auch die Benutzung einer solchen Sammlung zur Privatbeschäftigung ermöglichen, wenn die richtige Lösung mit dem von ihnen gerechneten Resultate verglichen werden kann. Es ist aber wünschenswerth, dass die Lösungen dann örtlich von den Aufgaben getrennt seien. Dass der Lehrer sich der Auflösungen bediene, um sich selbst die Mühe des Rechnens zu ersparen, scheint uns nicht gerechtfertigt.

Das Capitel der Aehnlichkeit der Figuren im propädeutisch-geometrischen Unterrichte.*)

Vom Herausgeber.

Der gewöhnliche Gang in der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren scheint mir — wenigstens für den propädeutischen Unterricht — nicht didaktisch, weil nicht naturgemäss, da die Sätze nicht anschaulich und also auch nicht überzeugungskräftig genug und — was die Hauptsache ist — nicht vom rechten Punkte aus entwickelt werden. Schon als Gymnasialschüler muthete uns diese Partie der Planimetrie am wenigsten an und es blieb auch bei den meisten eine gewisse Unklarheit und Unlust zurück, welche letztere erst verschwand, wenn es zu Anwendungen kam. Aber auch in meiner Lehrpraxis hat diese Partie mir immer am meisten zu schaffen gemacht. Ich merkte es jedesmal den Schülern an, dass die Verdauung dieser Kost ihnen schwer werde. In der Entwickelung (Ableitung) der Dreiecks-Aehnlichkeitssätze ist eine gewisse Künstelei kaum zu verkennen und die Anwendung jener Sätze ist sehr ungleichmässig. Gewiss ist es schon jedem Lehrer der Mathematik aufgefallen, dass die Aehnlichkeit von Dreiecken weitaus am meisten durch den sogen. „Winkelsatz“ (oder durch die Gleichheit der Winkel) bewiesen wird, während die andern Aehnlichkeitssätze unverhältnissmässig seltner Anwendung finden und deshalb gewöhnlich der Vergessenheit anheimfallen, in den Schülern wohl auch die Meinung von ihrer Entbehrlichkeit erzeugen.

---

*) Die diesem Aufsatze zu Grunde liegende Idee, die mir früher nur dunkel vorschwebte, ist theils durch die Bearbeitung meiner „Vorschule der Geometrie“ (s. Hft. 3. S. 237), theils durch eine mir mitgetheilte ähnliche des Hrn. Dr. Pick auf's Neue angeregt worden.

Der Grund der erwähnten Unklarheit und dadurch erzeugten Unlust scheint mir darin zu liegen, dass man vom Dreieck ausgeht, während man — wie ja auch im Capitel von der Flächengleichheit geschieht — doch das Parallelogramm an den Anfang der Betrachtung stellen sollte. Wie ich mir dies denke und wie ich es für den propädeutisch-geometrischen Unterricht mir zurecht gelegt habe, möge die folgende Darstellung zeigen. Ich gehe dabei vom Oblong*) (vulgo: „Rechteck“) aus und lehre wie folgt:

1) Zeichne ein Oblong $ABCD$ (Fig. 1) aus der Seite $AB = 32^m$ (Basis) und $AD = 24^m$ (Höhe), so verhält sich darin**)

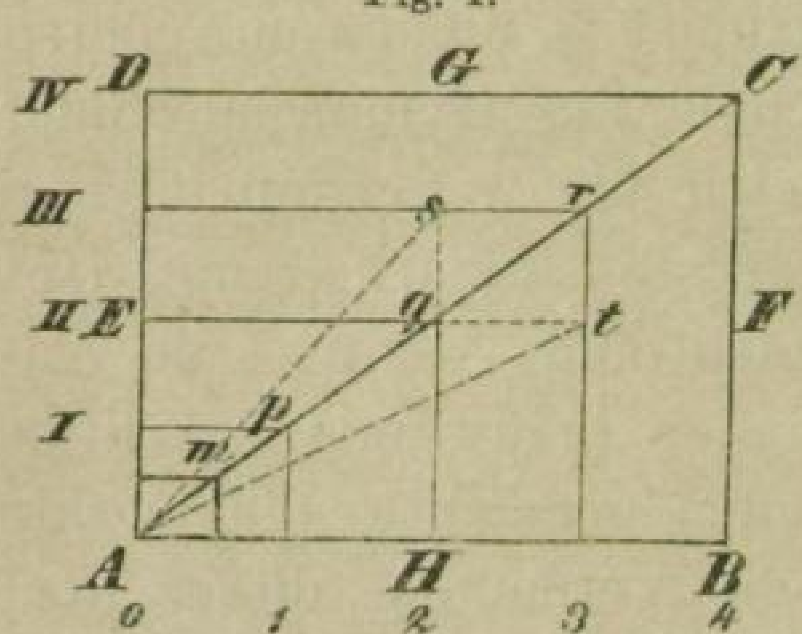
Basis zur Höhe***) wie 32 zu 24 oder wie 4 zu 3

in Zeichen $b : h = 4 : 3$

Ziehe nun im Oblong $ABCD$ die horizontale und die verticale Halbir- (oder Mittel-) Linien EF ($\parallel AB$) und GH ($\parallel AD$), so wird bekanntlich und wie leicht zu beweisen ist, das gegebene Oblong in vier kleinere unter einander congruente Oblonge zerlegt, in denen sich verhält $b : h = 16 : 12$ oder

$$b : h = 4 : 3$$

Fig. 1.



Von diesen vier congruenten Oblongen brauchen wir aber für unsern Zweck nur eins, nämlich $AHqE$, welches mit dem gegebenen den rechten Winkel bei A gemeinsam hat. — Viertelt man Basis und Höhe, so erhält man durch Parallelenziehen, w. o., 16 kleinere sich congruente Oblonge, in denen sich verhält $b : h = 8 : 6$ also ebenfalls

$$b : h = 4 : 3$$

Auch von diesen 16 brauchen wir nur das eine $A1pI$. — Wenn

---

*) Ich brauche für „Rechteck“ den alten Namen „Oblong,“ weil einige Autoren den ersteren für „rechtwinkliges Parallelogramm“ verwenden, worunter dann auch das Quadrat gehört. Vgl. III, 351 Anm. ††)

**) Obgleich der Ausdruck „verhält sich“ (wie sich auch bei den Proportionen zeigt) immer etwas Unklares an sich hat, so ist er doch oft nicht zu vermeiden oder zu entbehren.

***) Abgekürzter Ausdruck für: ihre Masszahlen oder ihre mit demselben Masse gemessenen Längen verhalten sich so.

man endlich die Seiten dieser letztern Oblonge nochmals halbirt, so erhält man aus dem gegebenen Oblonge 64 kleinere, in denen direct $b = 4$, $h = 3$ ist. Durch fortgesetztes Halbiren wird man dasselbe Verhältniss immer wieder finden z. B. zunächst $b : h = 2 : \frac{3}{2} = 4 : 3$ u. s. f. —

Aber auch, wenn man die Seiten und ihre Hälften nicht gerade halbirt, sondern von b und h ein Mehrfaches einer Hälfte, eines Viertels etc. nimmt, z. B. $\frac{3}{4}$ oder $\frac{5}{8}$, so erhält man ebenfalls Oblonge mit obigem Seitenverhältnisse. Ein solches ist z. B. das Oblong $A3rIII$, worin $A3 = \frac{3}{4}\,AB = 24^{\text{m}}$ und $AIII = \frac{3}{4}\,AD = 18^{\text{m}}$ ist; es verhält sich also $A3 : AIII = 24 : 18$ also ebenfalls $= 4 : 3$

Uebungen: a) Construire in $ABCD$ noch Oblonge mit gemeinsamer Ecke A, in welchen die Seiten $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ von AB und AD sind.

b) Was ist in allen obenerwähnten Oblongen ohnehin gleich?

Solche Oblonge, welche ausser den Winkeln das Seitenverhältniss gleich haben, oder in welchen Basis und Höhe in demselben Verhältniss stehen, haben gleiche Gestalt (Form) und man nennt sie daher gestaltgleich oder kürzer: „ähnlich.“ Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$ und wird gelesen: „ist ähnlich“ z. B. $AHqE \sim ABCD$. Aehnliche Oblonge haben, wie alle andern Oblonge, immer die Winkel gleich, und ebendeshalb kommen die Winkel gar nicht in Betracht.

Satz (Gesetz): Oblonge sind ähnlich, wenn das Verhältniss ihrer anstossenden (oder Nachbar-) Seiten gleich (oder dasselbe) ist.

2) Wenn du im Oblong $ABCD$ (Fig. 1) die Diagonale AC ziehst, so wirst du bemerken, dass sie durch die dem gemeinsamen Scheitel A gegenüberliegenden Ecken (m, p, q, r, C) der ähnlichen Oblonge geht. Auch das ist ein Kennzeichen der Aehnlichkeit von Oblongen, dass ihre gegenüberliegenden Ecken in ein und dieselbe Gerade (Diagonale) fallen, wenn man sie mit ihren gleichnamigen Seiten aufeinanderlegt (Basis auf Basis, Höhe auf Höhe).

Als Gegensatz hierzu und um ähnliche und unähnliche Oblonge recht sicher unterscheiden zu lernen, lege die Oblonge mit ihren ungleichnamigen Seiten aufeinander, lege z. B. das Oblong $AHqE$ so, dass die Höhe AE auf Basis AB und die Basis AH (od. Eq) auf Höhe AD liegt. Sodann construire Oblonge, in denen Basis und Höhe nicht in dem oben angegebenen Verhältnisse $b : h = 4 : 3$ stehen, sondern in einem andern z. B.

$$AHsIII, \text{ worin } b : h = 16 : 18 = 8 : 9$$
$$A3tE \quad \text{„} \quad b : h = 24 : 12 = 2 : 1$$

Diese Oblonge sind einander nicht ähnlich, obwohl sie gleichwinklig sind. Hieraus erkennst du zugleich, dass die Gleichheit der Winkel die Aehnlichkeit der Oblonge nicht allein bewirkt.

Uebungen: a) Geht bei diesen Oblongen die Diagonale AC auch durch die gegenüberliegenden Ecken s und t? Welche Lage haben die Diagonalen vielmehr? Punktire zwei (As, At)!
b) Suche mehr solche Oblonge auf!
c) Zeichne die Figur für 1) und 2) so, dass Ecke B die gemeinsame Ecke wird.

3) Hiermit hängt zusammen, dass nicht nur Basis (b) und Höhe (h) in ähnlichen Oblongen dasselbe Verhältniss haben, sondern auch Basis und Diagonale (d), sowie Höhe und Diagonale. So verhält sich z. B. in den obigen ähnlichen Oblongen, $ABCD$, wo $b = 32^{\text{m}}$, $h = 24^{\text{m}}$ $d = 40$ ist und $AHqE$, wo $b = 16$, $h = 12$, $d = 20$ ist:

$$b : d = \left\{\begin{matrix} 32 : 40 \\ 16 : 20 \end{matrix}\right\} = 4 : 5$$

$$h : d = \left\{\begin{matrix} 24 : 40 \\ 12 : 20 \end{matrix}\right\} = 3 : 5$$

Man kann also obigen Satz (sub 1) erweitern und sagen:

Oblonge sind ähnlich, wenn das Verhältniss ihrer anstossenden Seiten oder wenn das Verhältniss jeder einzelnen derselben zur Diagonale dasselbe ist. Andere Fassung: „in ähnlichen Oblongen ist“ . . . etc.

Uebungen: a) Construire Oblonge von verschiedenen Seitenverhältnissen z. B. 2 : 3, 3 : 4, 2 : 5 und 3 : 7 und gib (nach dem Massstab) die Längen der Diagonalen und das Verhältniss der Seiten zu der Diagonale an!
b) Lässt sich dieses Verhältniss immer in ganzen Zahlen darstellen?

4) Lasse das Oblong $ABCD$ übergehen in ein Quadrat, indem du entweder AB bis zu 24^{m} abnehmen oder AD bis zu

32m wachsen lässest. Wie verhält sich dann $b:h$? Ist das in jedem Quadrat so? Wie lautet also der Satz von der Aehnlichkeit der Quadrate?

Satz: Alle Quadrate sind ähnlich; denn alle sind gleichwinklig und in allen verhalten sich die (Nachbar-) Seiten, wie 1 : 1.

Uebungen: a) Stelle fünf Quadrate von den Seiten 5, 10, 15, 20, 25m, in einander so, dass sie einen Winkel gemeinsam haben!

b) Fallen bei den Quadraten die Gegenecken von A auch in die Diagonale AC?

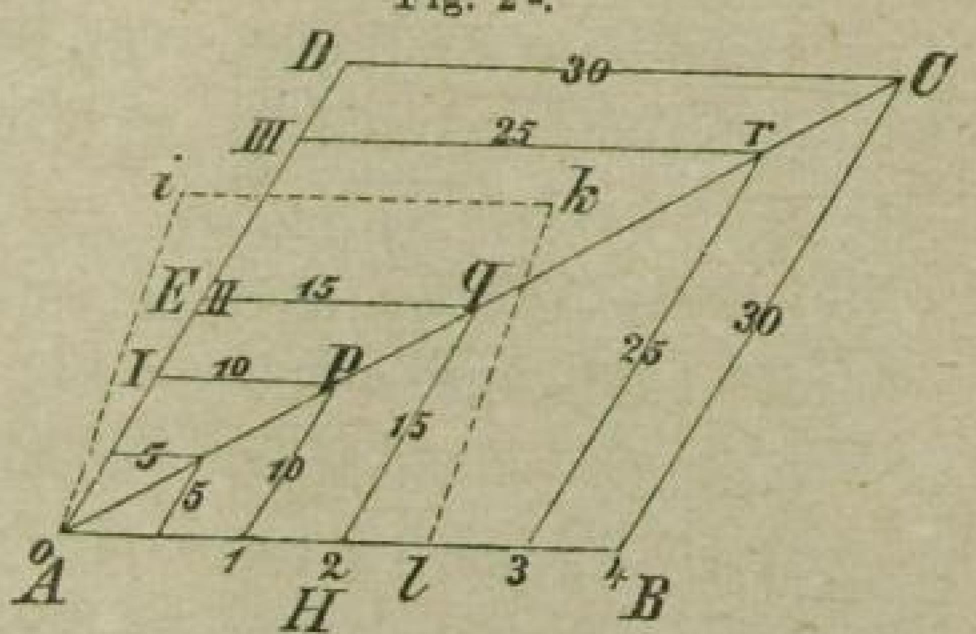
Es ist leicht zu sehen, dass hier das Verhältniss jeder Seite zur Diagonale dasselbe sein muss.

5) Uebergang zum Rhombus. Zeichne jetzt einen Rhombus von der Seite = 30m mit einem spitzen Winkel von 60° (Normalrhombus). (Fig. 2a.) Ziehe sodann ebenfalls die Halbirlinien wie oben, so wirst du Aehnliches finden wie beim Oblong, nämlich:

a) das Verhältniss der Nachbarseiten ist immer dasselbe (constant) und zwar wie beim Quadrat 1 : 1;

b) die Gegenecken von A liegen in der Diagonale.

Fig. 2a.



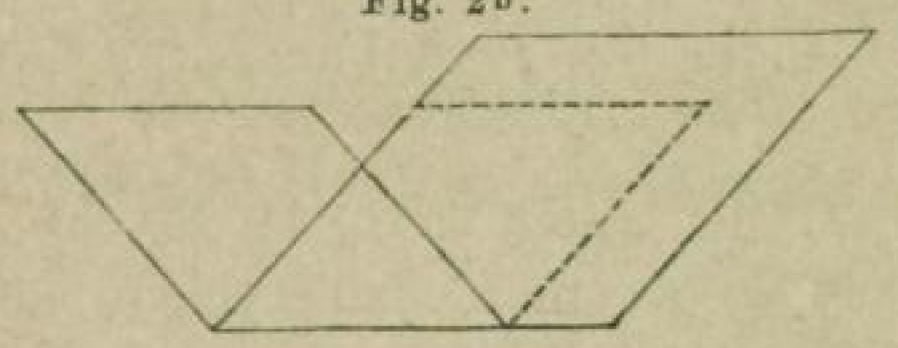
Will man aus derselben Seite andere Rhomben construiren, deren Gegenecken von A nicht in der Diagonale liegen, so muss man den Winkel verändern z. B. in Fig. 2a das punktirte Rhomboid $Alki$ oder umgekehrt: verändert man den Winkel, so fällt die Gegenecke von A ausserhalb der Diagonale.

Du siehst hieraus, dass zur Aehnlichkeit von Rhomben nur die Winkelgleichheit derselben nöthig ist, denn das Verhältniss ihrer Nachbarseiten ist ja ohnehin stets gleich, (1 : 1), Auch hier ist, wie beim Quadrat, das Verhältniss jeder Seite zur Diagonale dasselbe.

Satz: Rhomben sind ähnlich, wenn sie gleiche Winkel haben oder: Gleichwinklige Rhomben sind ähnlich.

Dies gilt auch von gleichwinkligen Rhomben, welche entgegengesetzt-gewendete Lage haben (rechts- und linksseitige), wie z. B. die Rhomben in Fig. 2b. Denn durch Wendung des einen (z. B. des kleinern) lässt er sich jederzeit in die rechte Lage (in der Fig. punktirt) bringen. Die Aehnlichkeit von Rhomben hängt also nicht von der Länge der Seiten ab, sondern nur von den Winkeln (also ähnlich wie beim Quadrat).

Fig. 2b.



Während also beim Oblong das gleiche Seitenverhältniss die Aehnlichkeit erzeugt, thut dies beim Rhombus der*) gleiche Winkel. Bei jenem sind die Winkel, bei diesem das Seitenverhältniss, beim Quadrat ist beides constant. Anders aber verhält sich's beim Rhomboid.

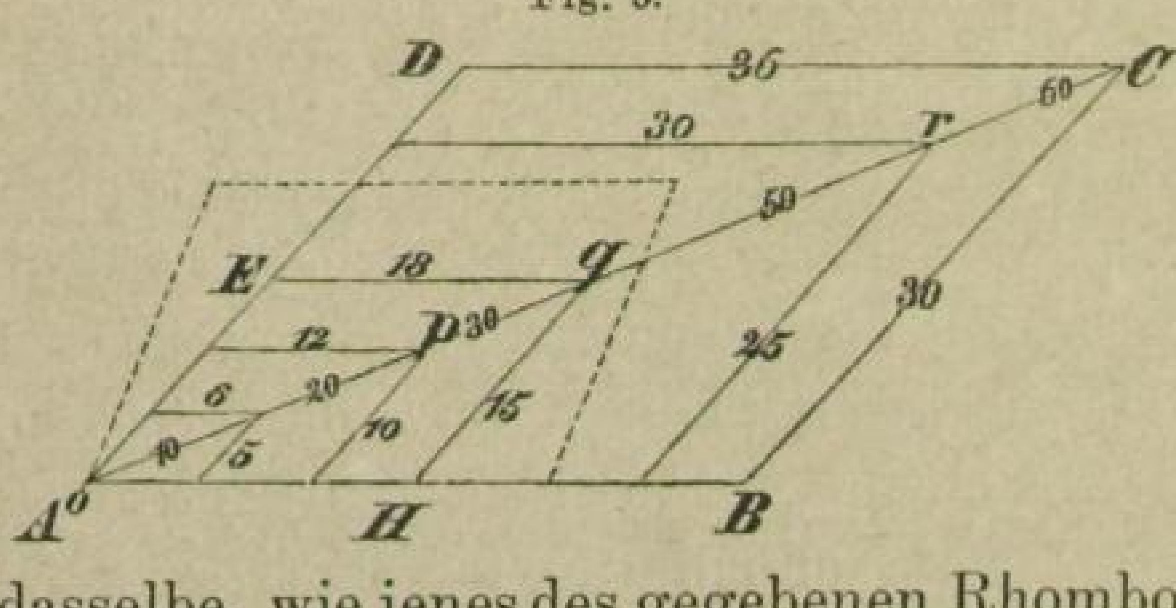
Uebungen: a) Suche in Fig. 2a mittelst Massstabes das Verhältniss der Seite zu den Diagonalen. Lässt es sich in ganzen Zahlen ausdrücken?**)

b) Zeichne einen Rhombus mit der Seite = 30m und der Diagonale = 50m und halbire, fünftele und zehntele die Seite. Welche Längen ergeben sich für die Diagonale und folglich welches Verhältniss zwischen der Seite und der Diagonale?

c) Zeichne die Figur auch so, dass die kleinere Diagonale BD die ähnlichen Rhomben durchschneidet.

6) Uebergang zum Rhomboid. Lasse jetzt in obigem Rhombus die Grundseite AB bis zu 36m wachsen, die Nebenseite ($AD = BC$) aber bleibe 30m, halbire sodann die Seiten und construire durch Ziehen von (Seiten-)Parallelen das ähnliche Rhomboid $AHqE$, so ist das Seitenverhältniss desselben genau dasselbe, wie jenes des gegebenen Rhomboids, nämlich 18 : 15 oder 6 : 5. Wenn du dann noch jede Seite des letzteren Rhomboids drittelst, so ergibt sich das Seitenverhältniss direct 6:5, so dass die Seitenverhältnisse der einzelnen Rhomboide in Fig. 3 sind:

Fig. 3.



*) „Der" — weil im Rh. die Winkel durch einen bestimmt sind.

**) Die Diagonale wird ca. 52m sein.

$$\left.\begin{array}{r} 36 : 30 \\ 30 : 25 \\ 18 : 15 \\ 12 : 10 \\ 6 : 5 \end{array}\right\} = 6 : 5$$

Das Verhältniss jeder einzelnen Seite zur Diagonale bleibt ebenfalls dasselbe, nämlich, wie die Zahlen in der Fig. angeben.

Nebenseite zur Diagonale wie $\left.\begin{array}{r} 30 : 60 \\ 25 : 50 \\ 15 : 30 \\ 10 : 20 \\ 5 : 10 \end{array}\right\} = 1 : 2$

Grundseite zur Diagonale wie $\left.\begin{array}{r} 36 : 60 \\ 30 : 50 \\ 18 : 30 \\ 12 : 20 \\ 6 : 10 \end{array}\right\} = 3 : 5$

Sowie man hier das Seitenverhältniss oder die Winkelgleichheit, oder beides, ändert, hört auch sofort die Aehnlichkeit der Rhomboide auf, wie z. B. in Fig. 3 bei dem punktirten Rhomboid.

Satz: Rhomboide sind ähnlich, wenn sie die Winkel und das Verhältniss der Nachbarseiten oder das Verhältniss der gleichnamigen Seiten zur Diagonale gleich haben (Andre Fassung: in den Winkeln und im Verhältniss der Nachbarseiten . . . . . . übereinstimmen).

Fasst man die für die vier Parallelogramme gewonnenen Resultate zusammen, so ergibt sich der

Hauptsatz: Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie gleiche Winkel und gleiches Verhältniss der Nachbarseiten oder gleiches Verhältniss der gleichnamigen Seiten und der Diagonale haben.

Wie nun hieraus die Aehnlichkeit der Dreiecke sich ergibt, das soll in einem folgenden Aufsatz gezeigt werden.

(Fortsetzung folgt.)

Kleinere Mittheilungen.

Bemerkungen zu meinem Aufsatz über Bruchrechnung.*)

Von D. Höhr in Schässburg i. Siebenb.

In der Meinung, es könne dem Verfasser eines Aufsatzes über die Behandlungsweise eines Unterrichtsgegenstandes, dessen Discussion noch wünschenswerth erscheint, nicht erlassen werden, dass er sich über die bei der Abfassung berücksichtigten Grundsätze und Erwägungen ausspreche, möchte ich zu meinem im 2. Heft des laufenden Jahrgangs dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz nachfolgende Bemerkungen hinzufügen.

Unter den Bemühungen, die mir in den ersten Jahren meines Lehramtes mehr oder weniger missglückten, stand obenan das Bestreben, meinen Schülern (9 bis 12jährigen Knaben) einen Einblick in die Wahrheit des Satzes

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{c \cdot b}$$

zu eröffnen. Die Erfolge wurden um so bedenklicher, je getreuer ich mein gutes Einvernehmen mit dem damals hier gebräuchlichen Lehrbuch aufrecht erhielt. Das Buch erklärt den obigen Satz:

„Wenn man den Zähler eines Bruches ungeändert lässt, den Nenner aber 2, 3, 4mal grösser nimmt, so erhält man eben so viele, aber 2, 3, 4mal kleinere Theile, somit wird der neue Bruch 2, 3, 4mal kleiner, als der frühere. Um daher den 2., 3., 4. Theil eines Bruches zu erhalten, darf man nur den Nenner desselben 2, 3, 4mal so gross nehmen. Ein Bruch wird daher durch eine ganze Zahl auch dividirt, wenn man die Zähler ungeändert lässt und den Nenner mit der ganzen Zahl multiplicirt. Z. B. $\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{5 \times 4} = \frac{3}{20}$.“

In den mir zur Verfügung stehenden Rechenbüchern fand ich im Wesentlichen dieselbe Erklärung dieses Satzes. Ueberall wird

*) Vgl. diesen Jahrg. Hft. 2, Seite 101—111.

der Zähler „ungeändert“ gelassen und der Bruch für n mal kleiner erklärt, nachdem der Nenner desselben n mal so gross gemacht wurde.

Diese Erklärung geht über die Fassungskraft von 9 bis 12jährigen Knaben hinaus. Gegenüber Schülern dieses Alters — und ganz besonders solchen, die sich an einem Lehrerseminar zu Volksschullehrern heranbilden wollen — muss die Möglichkeit dargeboten sein, dass die theoretische Auseinandersetzung mit der Veranschaulichung des zu Erklärenden Hand in Hand gehe. Der Versuch aber, den Satz $\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{4 \cdot 5}$ zu veranschaulichen, lässt in diesem Satz zweifellos eine Lücke erkennen; es fehlt darin eben diejenige Zahlenverbindung, welche zumal den minder begabten Schülern — und diese wollen doch auch berücksichtigt werden*) — auch in formeller Hinsicht klar zeigt, dass hier thatsächlich eine Division, eine Theilung einer Anzahl von Einheiten vollzogen wird. Zugleich geräth dieser Versuch mit der Möglichkeit eines ungeändert Bleibens des Zählers des Dividendus geradezu in Widerspruch, wie aus dem Nachstehenden hervorgeht. Ich behandle während des Unterrichts diesen Fall in folgender Weise. Ich zerschneide ein Stäbchen in 5 gleiche Theile und nehme 3 solcher Theile als Dividendus für die Rechnung $\frac{3}{5} : 4$. Ich frage nun: Kann man diese 3 Stabtheile (Fünftel), so lange sie der Zahl nach 3 sind und bleiben, in 4 gleiche Theile theilen? — Nein. — Wie hilft man sich in solchen Fällen? Denkt z. B. an die Rechnung 3 Gulden : 4 = ? Was muss hier mit dem Dividendus geschehen, damit die Theilung in 4 gleiche Theile möglich werde? — Man macht aus den 3 Gulden 300 Kreuzer. — Das heisst, man zerlegt jeden Gulden in 100 gleiche Theile. In wenigstens wie viele gleiche Theile muss jedes dieser 3 Fünftel zerschnitten werden, damit die Zahl der kleineren Einheiten durch 4 ohne Rest theilbar werde? — In 4 gleiche Theile. — Wenn aber jedes Fünftel in 4 gleiche Theile zerlegt wird, so ist ein solcher Theil der wievielte Theil von dem aus 5 Fünfteln bestehenden Ganzen? — Der 20. — Der Nenner, früher 5, muss also jetzt wie heissen? — 4mal 5 = 20. — Hiermit zugleich werden aber auch aus den 3 Fünfteln des Dividendus wie viel 20stel? — 4mal 3 = 12. — Indem ich also jedes Fünftel in 4 gleiche Theile zerschneide,

---

*) Sehr richtig bemerkt der österr. Organisationsentwurf auf Seite 163: „Es ist im mathem. Unterricht sehr leicht zu erreichen, dass ein Theil der Classe, welche man unterrichtet, in günstigen Fällen vielleicht die Hälfte, recht Gutes und Einzelne Ausgezeichnetes leisten, während die Uebrigen hinter den mässigsten Forderungen zurückbleiben; es ist dagegen schwer…., wenn die gesammte Classe, mit Ausnahme der überhaupt für die Studien nicht tauglichen Individuen, zu einem guten Mittelmass der Leistungen gebracht werden soll.“

verwandelt sich der Dividendus $\frac{3}{5}$ in $\frac{12}{20}$ d. i. eine durch 4 ohne Rest dividirbare Einheitsmenge!*) —

In dem voliegenden Falle sind also geradezu Aenderungen des Zählers, ist zunächst eine dem Divisor entsprechende Vervielfältigung der Einheitsmenge des Dividendus im Wesen der Sache begründet. Diese Aenderungen gibt die Rechnung

$$\frac{3}{5} : 4 = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 5} : 4^{*}) = \frac{(4 \cdot 3) : 4}{20} = \frac{3}{20}$$

vollständig an. Sie macht zugleich ersichtlich, was sonst die Mehrzahl der Schüler nicht begreift, dass hier $\frac{3}{20}$ wirklich ein durch Division erhaltenes Rechnungsergebniss ist. Sie empfiehlt sich in dieser Form der Ausführung auch im Interesse einer einheitlichen, Einsicht und Uebersicht fördernden Behandlungsweise einander ähnlicher Aufgaben. Hat doch der Knabe schon in der Elementarschule gelernt, in Fällen wo der Dividendus kleiner ist, als der Divisor, die Ausführung der Division durch Zerlegung des Dividendus vorzubereiten. Mag ihm derselbe Gedanke auch in den Aufgaben

$$4 : 7 = \frac{28}{7} : 7 = \frac{28 : 7}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{3}{5} : 4 = \frac{12}{20} : 4 = \frac{12 : 4}{20} = \frac{3}{20}$$

zuerst nahe treten. Einmal vertraut geworden mit dem ausführlichen (leichtfasslichen) Entwicklungsgang derartiger Rechnungen, wird der Schüler ohne Schwierigkeit den augenscheinlichen Rechnungsvortheil erkennen und in Zukunft die dieses Vortheils wegen abgeleiteten Regeln befolgen, indem er kürzer rechnet

$$4 : 7 = \frac{4}{7}$$

$$\frac{3}{5} : 4 = \frac{3}{20}$$

Trägt man aber derlei Abkürzungen von vornherein in die Erklärung solcher Sätze, so acceptirt man damit von vornherein Lücken in der Entwicklung dieser Sätze und erschwert dadurch dem Schüler unnöthiger Weise das Verständniss der ganzen Rechnungsoperation.

Weil ferner dem Schüler beim Multipliciren einer beliebigen Zahl ein Multipliciren der Zahl ihrer Einheiten, beim Dividiren einer beliebigen Zahl ein Dividiren der Zahl ihrer Einheiten als das normale Verfahren zunächst liegt (wenn im erstern Falle der Multiplicator, im letzteren der Divisor eine unbenannte ganze Zahl

*) Man dürfte dies wohl in anderer Form (als praktische Regel) auch so ausdrücken: „Erweitere zuvörderst den Dividend durch den Divisor und“ etc. Der Herausgeber.

ist), so erachte ich es aus didaktischen Gründen für angemessen, die Sätze

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$$
$$\frac{a}{b} : n = \frac{a : n}{b}$$

beide in dieser Form als sogenannte Hauptregeln hinzustellen. Wenn die Rechenbücher die Satzform $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{n \cdot b}$ für die überall anwendbare („Hauptregel") erklären und $\frac{a}{b} : n = \frac{a : n}{b}$ nur für den Fall, dass a durch n ohne Rest theilbar sei, anwendbar finden, so wird dabei übersehen, dass allemal der Zähler des (gegebenen oder erforderlichenfalls des zerlegten) Bruches durch den Divisor ohne Rest dividirt werden und sonach eine der Multiplicationsregel analoge Regel auch für die Division als Hauptregel gelten kann.

Bei Weitem einfacher sind die besondern zwei Fälle

$$\frac{1}{a} : n = \frac{1}{a \cdot n}; \quad \frac{1}{a} \cdot n = \frac{1}{a : n}.$$

Die Frage: Wie ändert sich der Werth einer Brucheinheit, wenn man den Nenner derselben mit einer ganzen Zahl n multiplicirt, oder durch n dividirt? wird von den Schülern leicht beantwortet, nachdem dieselbe durch einige Beispiele vorbereitet worden:

a) Wenn ich eine gerade Linie in 2 gleiche Theile, hierauf jeden dieser Theile in 3 gleiche Theile zerlege, der wievielte Theil der ganzen Linie ist alsdann einer von den zuletzt erhaltenen Theilen? — Oder:

b) der 3. Theil von $\frac{1}{2}$ Apfel ist der wievielte Theil vom ganzen Apfel? — In Zeichen $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{?}$

Aehnliches gilt von dem Satz $\frac{1}{a} \cdot n = \frac{1}{a : n}$.

Derlei Fragen aber dürften — statt unter den Divisions- und Multiplicationsaufgaben — passender ihre Stelle finden in der Reihe der Untersuchungen über Ab- und Zunahme des Werthes einer Brucheinheit, wenn der Nenner derselben beziehungsweise grösser (durch Addit. oder Multiplicat.) oder kleiner (durch Subtract. oder Division) gemacht wurde. Indem man durch diese Anordnung die Bedingungen der Veränderung des Werthes einer Brucheinheit, dann die hieraus leicht zu erklärenden Sätze über Zerlegung und Zusammensetzung der Brucheinheiten (§. 7 meines Aufsatzes) den vier Species in Brüchen vorausschickt, vermeidet man zugleich den — man wird wohl zugeben, anstössigen — Nothbehelf, welchen die Rechenbücher nicht entbehren zu können scheinen, indem sie der Addition und Subtraction ungleichnamig gegebener Brüche zwei

Sätze der Multiplication und Division vorausgehen lassen, nämlich die Sätze

$$\frac{n \cdot a}{b} = n \cdot \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{n \cdot b} = \frac{a}{b} : n$$

folglich $$\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \left(n \cdot \frac{a}{b}\right) : n = \frac{a}{b}.$$

Die Veränderungen der Brucheinheit an sich nehmen die Aufmerksamkeit des Schülers genügend in Anspruch, ebenso die Rechnungen mit den Zahlen, welche aus solchen Einheiten zusammengesetzt sind. Warum beide, von einander trennbare Unterrichtsobjecte gleichzeitig vornehmen und dadurch die Aufmerksamkeit der Schüler unnöthiger Weise zersplittern? Erleichtert wird dadurch dem Schüler die Sache nicht. Lernte er doch im Capitel des Rechnens mit „benannten“ Zahlen vorher durch Zusammensetzung und Zerlegung der benannten Einheit (1 Stunde, 1 Gulden etc.) die höheren und niederen Einheiten kennen (z. B. 24 Stunden = 1 Tag; 1 Stunde = 60 Min. u. dgl.), bevor er zu den vier Species mit Zahlen gelangte, deren Einheiten auf solche Weise zusammensetzbar und zerlegbar sind.

In meinem Aufsatz (S. 101 — 111) habe ich die Bedeutung des Bruches als Multiplicators im Anschluss an die Erklärung des Begriffs eines Bruches und den darauf folgenden Satz $a : b = \frac{a}{b}$ erörtert, während in den Rechenbüchern der Bruchmultiplicator erst in dem spätern Capitel der Multiplication zuerst auftritt. Für diese Abweichung von der üblichen Anordnung sprechen, wie ich meine, folgende Gründe:

Es ist nach dem Begriff eines Bruchs z. B.

$\frac{3}{4}$ einer Grösse = 3mal (diese Grösse : 4),

mag nun diese Grösse eine benannte Einheit (z. B. 1 Dutzend) oder eine Zahl (z. B. 12) sein. Die an die beiden Gleichungen

$\frac{3}{4}$ Dutzend = 3. (1 Dutzend : 4)

$\frac{3}{4} \cdot 12$ Stück = 3. (12 Stück : 4)

im Unterricht geknüpfte Mittheilung, dass, wenn an die Stelle der „Benennung“ eines Bruches eine Zahl (statt des Wortes) tritt, zwischen den Bruch und die als höhere Einheit aufzufassende Zahl das Multiplicationszeichen geschrieben wird, begründet unter Hinweis auf den Begriff eines Bruches in einfacher, ungezwungener Weise die Erklärung der Multiplication mit einem Bruch. Warum soll der Schüler an derselben Stelle, wo er lernt, wieviel Stück $\frac{3}{4}$ Dutzend sind, nicht zugleich lernen, wieviel „Einer“ $\frac{3}{4}$ der Zahl 12 sind, und wie man die Angabe „$\frac{3}{4}$ der Zahl 12“ schriftlich darstellt? Ich finde in dieser Beziehung bloss in „Heis, Rechenbuch für die Gymnasien . . . . Oesterreichs“ eine Ausnahme von der in Rechenbüchern üblichen Anordnung. Da steht in §. 19. (überschrieben: Begriff der Brüche) nach Aufg. 11): „Wieviel betragen $\frac{2}{3}$ Fuss in Zoll?“ in Aufg. 12) auch: „Wieviel beträgt $\frac{8}{19}$ der Zahl 133?“

Der Anschluss dieser Aufgaben an den Satz $a : b = \frac{a}{b}$ scheint mir sehr geeignet, zu erklären, wie der Bruch überhaupt dazu kommt, in formeller Hinsicht als Multiplicator zu gelten. Da nämlich eine Divisionsaufgabe, worin Dividend und Divisor benannte (gleichbenannte) Zahlen sind, fordert: Aus dem gegebenen, benannten Producte und dem gegebenen benannten Multiplicandus zu berechnen den unbenannten Multiplicator, so ist hierdurch, wenn der Quotient ein Bruch ist, der letztere unzweifelhaft in der Eigenschaft eines Multiplicators eingeführt. Z. B.

$$5 \text{ Pfund} : 6 \text{ Pfund} = (5 : 6) = \tfrac{5}{6}$$

daher $$\tfrac{5}{6}\text{mal } 6 \text{ Pfund} = 5 \text{ Pfund}.$$

Mathematische Sophismen.

Von N. Curtze in Thorn.

Den in diesen Blättern mehrfach beigebrachten mathematischen Sophismen*) will ich noch einige recht interessante beifügen, da bei ihnen dem nicht geschulten Mathematiker ernstliche Schwierigkeiten entgegentreten.

1) Alle Zahlen sind einander gleich. Sind die beiden Zahlen a und b gegeben, so sind dieselben entweder einander gleich, $a = b$, oder nicht. In letzterem Falle sei $a > b$; dann kann man setzen

$$a = b + c.$$

Man multiplicire beiderseitig mit $a - b$, so entsteht

$$a \cdot a - ab = ab + ac - bb - bc,$$

oder, wenn man ac nach links transponirt,

$$aa - ab - ac = ab - bb - bc,$$
$$a(a - b - c) = b(a - b - c),$$
$$\text{folgl. } a = b.$$

2) Es ist $n = n + 1$.

Man hat

$$n^2 - n(2n + 1) = (n + 1)^2 - (n + 1)(2n + 1).$$

---

*) Man sehe IV, 357 u. V, 225. Die Red.

Beides ist $= -n^2 - n$. Also ist auch

$$n^2 - n(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$$

d. h.
$$= (n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$$

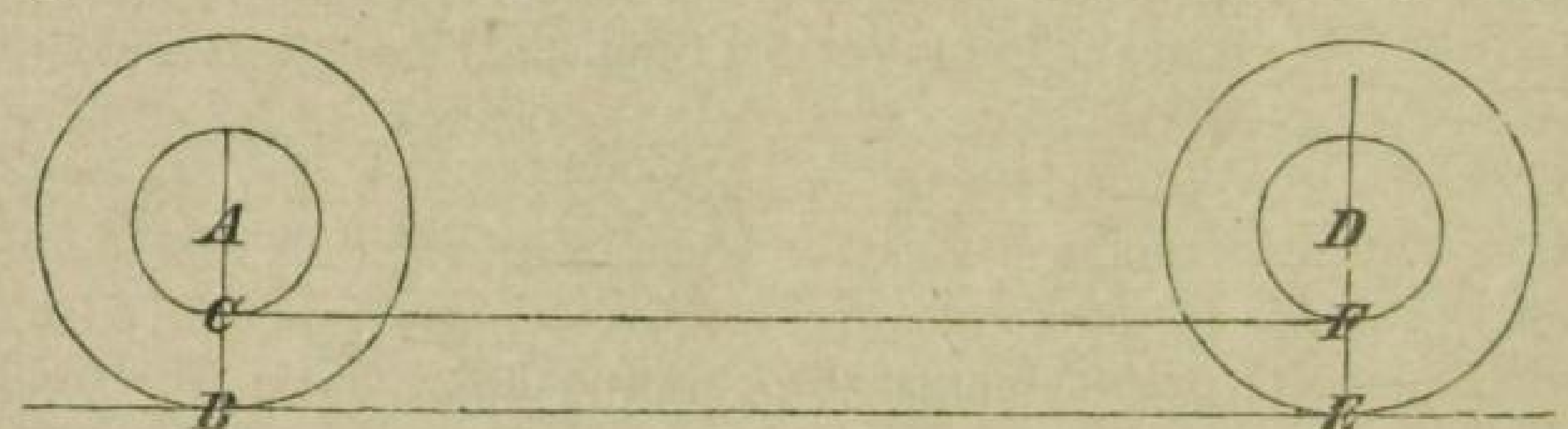
$$\left\{n - \frac{2n+1}{2}\right\}^2 = \left\{(n+1) - \frac{2n+1}{2}\right\}^2,$$

$$n - \frac{2n+1}{2} = n + 1 - \frac{2n+1}{2},$$

$$n = n + 1$$

3) Alle Kreise haben gleichen Umfang.

Die beiden concentrischen Kreise um A seien fest verbunden, der gemeinsame Radius ACB stehe senkrecht auf BE. Es rolle



nun der äussere Kreis auf der Graden BE so lange, bis der Punkt B wieder in diese Grade zu liegen kommt, etwa in E, so dass DE wieder senkrecht auf BE steht, dann ist BE gleich dem Umfange des äusseren Kreises. Während der äussere Kreis auf BE rollt, muss der Punkt C*) auf der zu BE Parallelen CF rollen, und ist B in E angelangt, so befindet sich C in F, der innere Kreis hat sich dabei auch nur einmal um A gedreht. CF ist also der Umfang des inneren Kreises, also dieser genau so gross als der des äussern Kreises, da $BCFE$ ein Rechteck ist.

4) Dass 64 = 65, dass man nämlich ein Quadrat von der Seite 8 in ein Rechteck mit den Seiten 5 und 13 verwandeln kann, sehe man in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik, 1868, S. 162. „Ein geometrisches Paradaxon.“

Kleinigkeiten aus der Schulstube.

Vom Herausgeber.

1) Zum Capitel der Incorrectheiten. Ein unbarmherzig über Bord zu werfender Ausdruck.**) Der immer noch oft gelesene und gehörte Ausdruck „2, 3, 4mal grösser (oder kleiner) als . . . .“

---

*) Wohl der kl. Kreis? D. Red.

**) Vgl. die Capitel von den Incorrectheiten citirt S. 229 im 4. Hft. d. Jahrg.

sollte doch endlich aus der math. Unterrichtssprache ganz verschwinden. Besser sagt man: „2, 3, 4 etc. mal so gross (so klein) als“ oder noch präciser: „Das 2, 3, 4 etc. Fache von“ etc. und „der 2., 3., 4 ... Theil von.“ Was kann es denn nur strenggenommen heissen: „4 ist dreimal kleiner, als 12? Doch nichts Anderes, als : 4 ist dreimal (was denn dreimal? doch wohl nur dreimal 4!) d. h. also 12 kleiner als 12, das wäre aber 0, also 4 = 0!! Oder noch vollständiger:

4 ist einmal	(näml. 1mal sich selbst = 4)	kleiner als	12	d. i.	8
4 - zweimal	(- 2 - - - = 8)	- -	12	d. i.	4
4 - dreilmal	(- 3 - - - = 12)	- -	-	d. i.	0

Aehnich ist's bei dem Ausdruck, 2, 3, 4mal grösser als!

2) Ein verdächtiger Ausdruck. Ein zwar nicht zu entbehrender, aber cum grano salis anzuwendender und wo irgend möchlich zu vermeidender Ausdruck ist der mathematische durch das Zeichen : oder ÷ dargestellte Ausdruck „verhält sich.“ Ich behaupte, dass er a priori etwas Unklares in sich trägt, wenigstens macht er auf mich stets diesen Eindruck und wie mir scheint, auch auf die Schüler, warum? weil er nicht eine anschauliche oder anschaulich zu machende Rechnungsoperation direct darstellt, sondern erst Zwischengedanken erfordert, so zu sagen eine Enthüllung oder Entpuppung bedarf, damit man seinen Inhalt erfasse. 4 verhält sich zu 6 kann sowohl arithmetisch als geometrisch aufgefasst werden und dann ist immer noch ein Nachsatz mit „wie“ (=) nöthig. Der Ausdruck ist ähnlich einer Frage, auf die man die Antwort erwartet. Diese Antwort aber wird in dieselbe unklare Form eingekleidet. Denn, wenn ich sage: 4 verhält sich zu 6, wie 2 zu 3, so muss ich aufs Neue fragen, wie verhält sich denn 2 : 3? — Recht auffällig ist die Unklarheit dieses Ausdrucks auch in der Hauptproportion der einfachen Zinsrechnung

$$100 : k = p : z$$

d. h. nach gewöhnlicher Lesart: Normalcapital 100 verhält sich zum Capital, wie die Procente (= Zinsen von 100) zu den Zinsen von k. Wäre es nicht viel besser, zu schreiben:

$$\frac{k}{100} = \frac{z}{p}?$$

und ist es nicht weit klarer zu sagen: So oft 100 im Capital enthalten ist, so oft müssen die Procente in den Zinsen enthalten sein? Oder: Das wievielfache k von 100 ist, das so vielfache muss auch z von p sein? — „Vielfaches“ und „Theil“ sind aber klarere arithmet. Begriffe, als der Begriff „sich verhalten“.

3) Ein bedenklicher physikalischer Versuch. Im 3. Hft. dieses Jahrg. (S. 127—129) gibt unser geschätzter Mitarbeiter Hr. Dr. Krebs in Wiesbaden „kleine physikalische Versuche,“ zu denen ich mir, wie ich dort bereits (S. 128) angezeigt habe, eine kleine

Bemerkung erlauben möchte. Hr. Dr. K. sagt: „die erste Art (durch Einblasen von Luft das Wasser springen zu lassen) gibt zu keiner weiteren Bemerkung Veranlassung." Mir aber gibt gerade diese Art zu einer Bem. Veranlassung.

Ich habe häufig diesen Versuch vor Schülern und Schülerinnen gemacht, bemerkte aber immer, wenn bei dem (auch noch so raschen und vorsichtigen) Wegziehen des Mundes der Strahl mir ins Gesicht, oder wenigstens an die Lippen spritzte, bei den Schülern resp. Schülerinnen ein zwar unschuldiges und sehr erklärbares, aber immerhin schadenfrohes Lächeln. Dazu kommt, dass man nicht einmal erreicht, was man will, nämlich einen continuirlichen Wasserstrahl. Deshalb sollte man diesen primitiven Versuch und ähnliche der Art ganz unterlassen, da man ja in der Spritzflasche ein weit bequemeres Mittel hat, um durch den Druck verdichteter Luft einen noch dazu continuirlichen verticalen Wasserstrahl zu erzeugen, wenn man die gebogene Röhre mit einer verticalen in eine Spitze auslaufende vertauscht oder (besser) einen mit solcher Röhre versehenen Kork zu diesem Versuche bereit hält. So haben es J. Müller und Weinhold in ihren Vorschulen der Physik. Man müsste denn zugleich die in Blasen aufsteigende Luft zeigen wollen, doch kann man dies ja bekanntlich auf andere sehr einfache Weise erreichen.

Die Versuche vor einer Schulclasse sollen zugleich, wenn nicht elegant — was wohl nur Meistern der Experimentirkunst möglich ist — so doch angemessen, so zu sagen schicklich und anständig sein. —

Sprech- und Discussions-Saal.

Zur Theorie der Gleichungen 2. Grades.

Gegenbemerkung zur Bem. des Hrn. Prof. Bauer (S. 222) zu IV, 392.

Von Dr. J Diekmann in Wesel.

Herr Professor Bauer liefert zu meiner Arbeit obigen Titels im 3. Hefte (S. 222) d. Ztschr. einige beachtenswerthe Bemerkungen, zu denen der Verfasser Folgendes hinzuzusetzen sich veranlasst sieht.

Es lag Verfasser daran, aus der quadratischen Gleichung selbst in strenger Gedankenfolge eine allgemeine Auflösungsform zu erhalten, besonders unter Vermeidung jedes algebraischen Kunstgriffes, der nicht vorher genetisch begründet sei. Dass die Ueberführung der beiden äusserlich verschiedenen Werthe für x in einander algebraisch sofort zu machen sei, ist längst bekannt und glaubte Verfasser dies um so mehr bloss erwähnen zu brauchen (S. 401 d. gedachten Arbeit), als sie Jeder wenn nirgends anderswo, so doch in Klügel's mathem. Wörterbuche schon ausgeführt finden kann. Dass dabei das Zeichen $\mp$ im Nenner nothwendig wird, wenn man im Zähler $\pm$ hat, liegt eben in der Art des algebraischen Kunstgriffes; die Lösung der Gleichung sagt darüber nichts. Die Thatsache aber, dass eine Grösse $\frac{x_1}{x_2}$, wenn sie unter den Formen $\frac{A}{B}$ u. $\frac{A_1}{B_1}$ erscheint, dann allgemein in der Form $\frac{A \pm \lambda A_1}{B \pm \lambda B_1}$ enthalten ist, gehört so sehr in die Elemente der Mathematik, speciell der Substitutionen, dass fast kein analytisch-geometrisches Problem ohne sie gelöst wird, und es hätte danach wohl des Beweises, zumal in der unhomogenen Form, sowie Heranziehung der Lehrbücher für die Leser einer mathematischen Zeitschrift nicht bedurft. Welch principieller Werth sonach auf das Manöver mit dem „Correspondenzsatz" unter Anwendung der „Subtraction" (Addition lag ebenso nahe) zu legen sei, ist um so weniger klar, als dadurch nicht nur nichts erklärt wird, sondern das Verfahren erst recht als ein gesuchtes erscheinen muss, wenn man, wie es häufig geschieht (u. a. Worpitzky) als allgemeine Form der quadratischen Gleichung die wählt, in der x^2 mit dem Coefficienten 1 erscheint. Es wird dabei dem unbefangenen Leser die Resultirung der Wurzeln aus dem Ausdrucke:

$$x = \frac{-(b\vartheta + c) \pm \vartheta\sqrt{b^2 - ac}}{(a\vartheta + b) \pm \sqrt{b^2 - ac}} \text{ *)}$$

durch Substitution der Werthe $\vartheta = 0$ in $\vartheta = \infty$, oder wenn man für ϑ die Bruchform $\frac{m}{m_1}$ wählt, $m = 0$, $m_1 = 0$ schon mehr eine „Hexerei" erscheinen müssen. (Verfasser gebraucht den Ausdruck eines Fachcollegen, dem er einst das algebraische Experiment mittheilte.) Jeder aber, der mit Aufmerksamkeit die Arbeit durchgelesen hat, wird gefunden haben, dass nicht nur durch die „speciellen" Werthe $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \infty$ aus obigem Ausdrucke die Wurzeln erhalten werden. Dem Werthe $\vartheta = 0$ entspricht als conjugirter Werth der von $\vartheta = -\frac{b}{a}$ und dem von $\vartheta = \infty$ ein anderer $\vartheta = -\frac{c}{b}$ (vergl. IV. S. 399 der Arbeit des Verfassers). Auch diese Werthe geben für ϑ aus obiger Form die gesuchten Wurzeln,

*) Verfasser glaubt nicht, dass durch die in Folge eines übersehenen Druckfehlers fortgebliebene Klammer ein ernstliches Missverständniss hat entstehen können, zumal die Gleichung, aus der x resultirt, unmittelbar vorhergeht. S. 401. 1 u. 2 a. a. O.

wie es sich aus der Theorie strenge und ohne Willkür ergibt. Auch diese Werthe ergeben aus Gleichung 5 S. 402 a. a. O. für $f(x)$ auch nur die beiden Aequivalente

$$(ax + b)^2 - (b^2 - ac) = 0$$
$$(xb + c)^2 - x^2(b^2 - ac) = 0$$

welche also zunächst als die einzig berechtigten angesehen werden müssen, während die beiden vom Hrn. B. hinzugefügten sich durch reciproke Umformung von x daraus ergeben, wie sich dieses aus dem Zusammenbestehen der Gleichungen

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$$
$$cx_2^2 + 2bx_1x_2 + ax_1^2 = 0$$

ergibt (Verf. wählt der besseren Uebersicht wegen statt x die homogene Form $\left.\frac{x_1}{x_2}\right)$.

Was schliesslich das „kürzer" der geometrischen Interpretation des Hrn. B. anbetrifft, so sei bemerkt, dass Verfasser bei Anfertigung der Arbeit an eine Verwerthung für den Unterricht dachte (vgl. Einleitung a. a. O.), also bestrebt sein musste aus der quadratischen Gleichung selbst, welche a priori mit der Involution nichts zu thun hat, zu der harmonischen Lage der Wurzelwerthe zu gelangen. Nachdem dies geschehen, ist ausdrücklich erwähnt (S. 398), dass eine derartige Beziehung unter dem Namen Involution bekannt sei. Dass die involutorische Lage projectivischer Gebilde sich quadratisch durch den Parameter zweier zusammengehöriger Elemente ausdrückt, ist gewiss bekannt und geometrisch und analytisch durchgeführt in Fiedler-Salmon „Kegelschnitte" Capitel 16. Will man überhaupt bei derartigen Untersuchungen die Principien der neueren Geometrie und Algebra zu Grunde legen, so wird man nach dem heutigen Stande der Wissenschaft, wohl etwas geschickter resp. eleganter verfahren, als es vom Hrn. B. geschehen ist. Verfasser erlaubt sich auf die betreffende Partie in Clebsch: Theorie der binären algebraischen Formen §. 17. und 24. hinzuweisen. Gewiss wird es der Wunsch sehr vieler Collegen sein, soweit es die elementaren Hilfsmittel zulassen, die Anschauungen der neueren mathematischen Disciplinen auch für die Schule zu verwerthen. Dass dabei der Ausgangspunkt ein anderer sein muss, als der von Hrn. B. substituirte, ist wohl zu erwarten, und durch manchen Versuch wird man dabei noch lernen müssen. Dass Verfasser mit Rücksicht auf den Leserkreis einer didaktisch-mathematischen Zeitschrift bei der gedachten Arbeit auch den Schein jeder schulmeisterlichen Anmassung vermieden wissen wollte, sei noch ausdrücklich hinzugefügt, um so mehr, da er vielleicht Gelegenheit haben wird, die Behandlung der cubischen und biquadratischen Gleichungen sammt den dabei auftretenden imaginären Verhältnissen in ähnlicher Weise behandelt mitzutheilen.

Bemerkung zu Lottners Aufsatz.*)

Vom Realschullehrer Fritel in Königsberg.

Im 2. Heft dieses Jahrganges findet sich auf Seite 129 ein elementarer Beweis des Satzes, dass jeder Lichtstrahl bei einer Brechung seinen Weg in der kürzesten Zeit zurücklegt. Veranlasst ist die kleine Arbeit durch eine Anmerkung in dem Koppeschen Lehrbuche der Physik (§. 97.). Hierzu ist zu bemerken, dass ein einfacherer und ganz elementarer geometrischer Beweis desselben Satzes in dem Traité de la lumière von Huyghens (Ausgabe Leiden 1690) im 3. Capitel Seite 40 zu finden ist.

Bemerkungen zu Aufsätzen dieser Zeitschrift.

Von Hrn. Prof. Belović in Esseg a/D.

(Fortsetzung von S. 286.)

Das vom Herausgeber dieser Ztschrft. IV, 226 lobend erwähnte Rechenbuch von Pick, das auch nach meiner Ansicht gründlicher ist, als die mir bekannten an den össterr. Mittelschulen stark verbreiteten Rechenbücher (von Močnik, Villicus, Teirich), behandelt in der That die Multiplication mit einem Bruche und die Division durch einen Bruch nicht eben musterhaft. Die Ableitungen

$$\frac{3}{5} \times \frac{6}{11} = \frac{3 \times 6}{5 \times 11} \text{ im § 22., pag. 186 und}$$

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{5 \times 7}{8 \times 3} \text{ im § 27., pag. 190}$$

sind ähnliche Erschleichungen, wie die Ableitungen der beiden Divisionsregeln beim Herrn Herausgeber.**) Ueberdiess sind in Picks Rechenbuch die in den erwähnten §§. 22. und 27. durchgeführten Ableitungen der Operationen $\frac{3}{5} \times \frac{6}{11}$ bezüglich $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ ganz überflüssig, was der Verfasser selbst sofort bemerkt haben würde, wenn er aus den Auseinandersetzungen in den §§ 24., 28. und 29. die richtigen Consequenzen gezogen hätte. So aber erscheinen die Aufstellungen der Operationen $\frac{3}{5} \times \frac{6}{11}$ und $\frac{5}{8} : \frac{3}{7}$ als willkürliche Einfälle, deren Berechtigung erst hinterher in den §§ 23. bezüglich 28. und 29. durch tiefer eingehende Erörterungen (aus denen mancher Rechenbücherfabrikant noch manches lernen könnte) plau-

*) 2. Hft. S. 129.

**) Herr B. meint unsere Entw. IV, 223—225, gegen die er ebenfalls polemisirt. Wir werden später sehen, ob der Vorwurf des Hrn. B. gegründet ist. Die Red.

sibel gemacht wird. Pick übersah, dass er ja durch die Erörterungen in den §§ 23. und 29. den Begriff der Multiplication mit einem Bruche bezüglich den Begriff des Theilens durch einen Bruch abzuleiten versucht. (Vergl. Neue Darstellung der Logik von Drobisch. III. Aufl. §§ 133. und 134., pag. 155—159.) Ich sage, versucht, denn auch diese Ableitung ist nicht ganz gelungen. So stellt er im § 29. die Frage auf, welche Bedeutung die Aufgabe, „eine Zahl in $\frac{3}{7}$ gleiche Theile zu theilen," haben könne, ohne vorher gezeigt zu haben, unter welchen Voraussetzungen man auf ein Theilen durch einen Bruch geführt werden kann. Aus der Aufgabe, „$\frac{3}{4}$ Ellen kosten $\frac{3}{10}$ fl., was kostet 1 Elle?" leitet er die Umkehrungsregel ab, indem er den eigentlichen Begriff, der in der Gleichung

$$\frac{3}{10}\text{ fl.} : \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{10}\text{ fl.} \times 4\right) : 3$$

steckt, bei Seite liegen lässt. Dadurch zwingt er den Schüler bei einer jeden Aufgabe des Theilens zu einem Umweg im Denken. Der Schüler muss, anstatt unmittelbar zu denken, „durch $\frac{m}{n}$ wird getheilt, indem das $n$fache des Dividendus durch m getheilt wird," sich zuvor die Theilung durch $\frac{m}{n}$ in eine Multiplication mit $\frac{n}{m}$ umsetzen. Dadurch lässt er sich aber auch die passende Gelegenheit entgehen, dem Schüler bemerken zu können, dass das Theilen durch einen Bruch ebenfalls ein Theilen in gleiche Theile sei, nur dass nicht der ursprüngliche Dividend selbst, sondern ein Vielfaches desselben in gleiche Theile getheilt werde.

Gegenbemerkung des Verfassers.

Ich danke dem Herrn B. einmal für die trotz der Ausstellungen meinem Rechenbuche gezollte Anerkennung, dann aber weil mir selbst hierdurch die Gelegenheit geworden, mich über dasselbe aussprechen zu können. Leider gestattet der zu einer Gegenbemerkung zugemessene Raum nicht, diess im ausgedehnteren Masse zu thun und so muss ich mich begnügen, nur auf die gerügten Punkte zu erwidern.

H. B. hält die §§ 22. und 27. für überflüssig, die Beweisführung für erschlichen. Mir erscheinen sie auch jetzt noch für wesentlich und die Beweisführung für correct. Es war mir darum zu thun, schon im Rechenunterrichte zu zeigen, wie sich der stolze Bau der Mathematik dadurch aufbaut, dass man mathematischen Gesetzen, die aus einer engen Definition erschlossen worden, eine Geltung zuschreibt, die über diese engen Grenzen hinausgeht, dass dieses Verfahren seine volle Berechtigung hat, vorausgesetzt, dass man das so gefundene Gesetz nicht als leere Form stehen lässt oder ihm Giltigkeit zuerkennt, ohne sich um seine Bedeutung weiter zu kümmern. Der Schüler weiss, dass er z. B. statt mit 25 zu multipliciren, mit 100 multipliciren und durch 5 dividiren kann, weil $25 = 100 : 4$; er weiss ferner, dass $\frac{6}{11} = 6 : 11$; warum sollte er hier nicht dasselbe thun dürfen? Die Antwort kann nur lauten: du darfst es thun, nur musst du dich fragen, was diess bedeute. Ich sehe gerade in dieser Art der Ableitung eine Schulung des mathematischen Geistes, die einerseits zur Erweiterung der Gesetze und Definitionen aufmuntert, anderseits aber vor Ausschreitungen ins leere, nichtssagende Formelwesen warnt. Das Streben aber bei jeder Erweiterung eines Begriffes einer gedanken- und bedeutungslosen Annahme der Folgen entgegenzuarbeiten hat Herr B. wohl im ganzen Buche bemerken müssen; ich mache nur auf die Multiplication mit 1 und 0 § 59., S. 51 aufmerksam.

Es wird mir nun zum Vorwurfe gemacht, ich hätte nicht nachgewiesen, unter welcher Voraussetzung man auf ein Theilen durch einen Bruch geführt wird. Aber eben das citirte Beispiel, so wie die (wahrscheinlich von Herrn B. übersehenen) Fragen unter A zu demselben Cap. S. 190 sagen diess ja deutlich. — Ferner wird ausgesetzt, dass ich die Gleichung $A : (m : n) = (A \cdot n) : m$ ausser Acht gelassen habe. Das ändert ja aber an dem Wesen der Sache ganz und gar nichts. Jene Gleichung hat doch wieder zunächst nur Giltigkeit, wenn m durch n theilbar ist; wollte man sie stillschweigend auch für den Fall, wo m durch n nicht theilbar ist, gelten lassen, dann wäre dies eine Erschleichung der allerärgsten Art. Anderseits ist die Gleichung $A : (m : n) = (A : m) \cdot n$ etwa weniger giltig? Die Sache steht also so: entweder man erklärt die Multiplication und Division in Brüchen als eine sogenannte Regel-de-tri-Aufgabe und dann entfallen diese Rechnungsoperationen gänzlich, oder man sieht beziehungsweise den Bruchmultiplicator und Divisor als Rechenzahl an d. h. man fügt die Brüche in die Zahlenreihe ein, und dann wird man immer auf die beiden alten Regeln kommen; nur dürfen diese nicht sinnlose Manipulationen bleiben; der Schüler muss sich jederzeit bewusst werden können, dass er es hier mit einer Zusammenziehung zweier Rechnungen infolge Begriffserweiterung zu thun habe. Dass man beim Einüben nicht immer die Umkehrungsregel anwenden solle, musste nach der Haltung des ganzen Abschnittes von den Brüchen in meinem Buche (vergl. S. 171 § 4., S. 174 Beisp. 6) nicht erst bemerkt werden.

Ganz unbegründet ist der Vorwurf, ich hätte mir entgehen lassen, dass auch das Dividiren durch einen Bruch ein Theilen in gleiche Theile sei. Ist denn $(A : m) \cdot n$ weniger ein Theilen in gleiche Theile als $(A \cdot n) : m$? Ich will jedoch zugeben, es hätte trotz der analogen Bemerkung zur Multiplication S. 188 ausdrücklich gesagt werden können.

Die Beziehung auf Drobisch l. c. erscheint mir in der ganzen Frage gänzlich irrelevant; ja ich finde sogar darin eher einen zu meinen Gunsten als gegen mich zeugenden Ausspruch, wenn man nicht bei den citirten Seiten, sondern noch etwas weiter S. 162 und zum nächsten Abschnitt „von den heuristischen Formen des Denkens" geht.

Dr. Pick.

Repertorium für Aufgaben.*)

Redigirt von Prof. Binder in Schönthal.

II.

(Vorbemerkung. Wir wollen der grösseren Bequemlichkeit halber und um Irrthümer zu vermeiden, von jetzt ab die Aufgaben ohne Unterschied der Kategorie mit fortlaufenden Nummern bezeichnen. Da das letzte Mal im Ganzen 10 Nummern (9 Aufgaben und 1 Lehrsatz) gegeben sind, so fahren wir mit Nr. 11 fort.)

11. Zwei Dreiecke OAB und Oab mit gemeinschaftlicher Ecke O sind nach Gestalt und Grösse, OAB ausserdem der Lage nach gegeben. Man soll Oab durch Drehung um O in eine solche Lage bringen, dass Aa und Bb einen gegebenen Winkel mit einander bilden.

(Nouvelles Annales de Mathématiques J. 1869 p. 47. E. Lemoire. Trigonometrische Lösung von einem Turiner Studirenden ebendas. J. 1871 p. 235 ff. Hübsche geometrische Lösung vom Redacteur Gerono ebds. p. 237 ff. Es lässt sich aber noch eine einfachere und elegantere finden.)

12. An zwei gegebene Kreise zwei Tangenten zu ziehen, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden, so dass die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen gegebenen Punkt gehe.

(Nouv. Ann. J. 1870 p. 283 ff. Trigonometrische Lösung von Kaher-Bey in Cairo. Es gibt eine elegante geometrische Construction.)

13. a) Von den Mittelpunkten der 4 Kreise M, welche die Seiten eines Dreiecks berühren, liegen 4mal je drei auf einem Kreise K. Diese Kreise sind alle einander gleich und ihre Mittelpunkte liegen selbst wieder zu viermal je dreien auf Kreisen K', welche unter sich und jenen Kreisen K gleich sind. Die Mittelpunkte dieser Kreise fallen beziehlich mit den Mittelpunkten der Kreise M zusammen. Die Mittelpunkte der Kreise K und K' sind beziehlich zu zweien einander zugeordnet und zwar so, dass der Kreis K durch den Mittelpunkt des Kreises K nicht geht und umgekehrt K' nicht durch

---

*) Vergl. Hft. 4. S. 286. Die Red.

den Mittelpunkt des Kreises K. Die Centrallinie zweier solcher Kreise K und K' geht durch den Mittelpunkt des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises und wird in diesem Punkte halbirt.

b) Bestimmt man auf dem Umfange irgend eines Kreises 4 Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, so bestimmen je drei dieser Punkte ein Dreieck und wir haben so die Dreiecke d_1, d_2, d_3, d_4, wo $d_1 \equiv p_2\, p_3\, p_4$ etc. ist. Fällt man von dem Punkte d_x auf die Seiten des Dreiecks d_x die Normalen, so liegen die Fusspunkte in der Geraden g_x. Diese so erhaltenen Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 gehen durch denselben Punkt p. Bezeichnen wir die Höhenpunkte der Dreiecke mit h_1, h_2, h_3, h_4, so gehen die Graden $p_x\, h_x$ durch den Punkt p und werden in diesem Punkte halbirt.

Nimmt man die zwei Sätze hinzu:

c) Die Kreise, welche den vier durch je drei von vier Geraden gebildeten Dreiecken umschrieben sind, gehen durch denselben Punkt, und

d) die Höhen dieser vier Dreiecke liegen auf einer Geraden, so kann man folgende Fragen stellen: In welchem innern Zusammenhang stehen diese vier Sätze, und wie leiten sich die Eigenschaften jeder Figur aus denen der andern ab?

(Fr. G. Affolter zu Solothurn. Mit anderen werthvollen Beiträgen, die wir in den folgenden Heften bringen werden, von der Redaction neuerdings uns überwiesen.)

14. „Wenn eine Primzahl, P, die Summe dreier Quadrate ist, so ist im Allgemeinen auch P^2 die Summe dreier Quadrate; eine Ausnahme könnte nur stattfinden, wenn P in zwei Quadrate zerlegbar wäre. Doch ist es nicht sicher, ob dieser Ausnahmefall vorkommen kann; z. B. $29 = 16 + 9 + 4 = 25 + 4$; nichts desto weniger $29^2 = 24^2 + 16^2 + 3^2$."

Diesen Satz stellt Catalan im Januarheft der Nouvelles Annales von 1874, p. 64 auf. Ob der sonderbare Irrthum, der hier dem tüchtigen Mathematiker begegnet ist, seither schon seine Berichtigung gefunden hat, wissen wir nicht, da wir die neueren Hefte nicht zur Hand haben. Der Satz gilt aber von jeder Zahl, und ist gar kein Satz der Zahlentheorie, sondern lediglich einer der Buchstabenrechnung, weswegen wir ihn hier zur Uebung für Schüler in folgender Gestalt geben:

Wenn eine beliebige Zahl a die Summe dreier Quadrate ist, so lässt sich auch a^2 in drei Quadrate zerlegen und zwar im Allgemeinen auf drei Arten. (Binder.)

15. Die Gleichung : $x^4 + 4\, x^3 - 20\, x^2 + 48\, x - 48 = 0$ ohne cubische Resolvente aufzulösen und das Merkmal anzugeben, an welchem man bei Gleichungen dieser Art die Auflösbarkeit auf einfacherem Wege erkennt. (Binder.)

16. Eine Gleichung von der Form

$$x \overset{b}{\log}\, x = m, \text{ (etwa } x \overset{5}{\log}\, x = 3125)$$

aufzulösen. (Prof. J. Belović in Esseg.)

Literarische Berichte.

HOFMANN, FR. Dr. (Prof. am Gymn. in Bayreuth), Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Gymnasien und Realschulen, 3 Theile. [I. Theil 6. Aufl., 20 Ngr., II. Theil 6. Aufl. 28 Ngr., III. Theil 3. Aufl. 29 Ngr.] Grau'sche Buchhandlung, Bayreuth.

Das Buch, welches mir zur Besprechung zugeschickt ist, bringt in drei Theilen, von denen die beiden ersten zu je 224 und 324 Seiten in der sechsten, das dritte zu 256 Seiten in der dritten Aufl. vorliegen, über fast alle Theile des gewöhnlichen Rechnens und der allgemeinen Arithmetik eine in der That ausserordentlich grosse Menge von Aufgaben, so dass es in dieser Hinsicht schwerlich von einer andern Sammlung übertroffen wird. Ein Lehrer wird viele Jahre aus demselben rechnen lassen können, ohne in die Nothwendigkeit versetzt zu sein, ganz dieselbe Aufgabe zweimal aufzugeben. Auch die Mannigfaltigkeit der Aufgaben ist in manchen Abschnitten sehr gross, so besonders bei den gemeinen Brüchen und den Decimalbrüchen, bei allen Operationen mit Buchstaben und bei den Reductionen. Auch finden sich namentlich bei den Reductionen und Gleichungen viele sehr hübsche und interessante Aufgaben. Da es bei den Schülern bald hier, bald da einer Repetition bedarf, so ist für den Lehrer eine sehr grosse Anzahl von Aufgaben wünschenswerth, ja nothwendig. Das Buch sollte daher in den Händen eines jeden Lehrers der Mathematik sein; er wird in demselben zur Einübung, Befestigung und Wiederholung der verschiedenen Operationen eine nie versiegende Fundgrube haben. Ausserdem hat das Buch noch den Vorzug, dass es auch Rechen-Aufgaben für die unteren Classen bringt. In den sonst üblichen Sammlungen von Aufgaben über Buchstabenrechnung finden sich solche Aufgaben nicht.

In einigen Punkten können wir uns jedoch mit den Ansichten des Verfassers nicht ganz einverstanden erklären, und es möge hier verstattet sein, auf dieselben etwas näher einzugehen.

Die Uebungen über Operationen mit Zahlen sowohl, als mit Buchstaben sind zu sehr als Zweck behandelt; sie können doch nur als Mittel zum Zweck angesehen werden. Die Anwendungen treten zu sehr in den Hintergrund. In I finden wir auf den ersten 67 Seiten, in II gar auf den ersten 215, in III auf den ersten 102 Seiten in den Uebungen kaum ein Wort, nichts als Zahlen und Buchstaben. Da kommt uns unwillkürlich der Gedanke: Der Buchstabe tödtet, der Geist macht lebendig; und ein Schüler wird sich gewiss die Frage vorlegen: wozu nützt eigentlich die Buchstabenrechnung? Ist das Buch für die Hand der Schüler bestimmt, so ist die Zahl der Aufgaben überhaupt zu gross, besonders die Zahl derjenigen, welche nur zur Einübung des Mechanismus des Rechnens gegeben sind. Sie sollte in keinem Abschnitt grösser sein, als man sie mit den besten Schülern in drei Jahren bewältigen kann; denn dann sind Wiederholungen nicht zu befürchten. Eine zu grosse Anzahl von Aufgaben macht den schwächeren Schüler muthlos; er verliert den leitenden Gedanken und weiss zuletzt nicht mehr, was er rechnet. Fast alle wichtigeren Rechnungen der Arithmetik, der Geometrie, der Trigonometrie und der Stereometrie hängen lediglich von der Auflösung von Gleichungen ab. In den Gleichungen liegt also der Knotenpunkt der Arithmetik. Von hier geht alles Leben aus. Wer auf diesen Punkt nicht ganz besonders seine Aufmerksamkeit richtet, ihn nicht gehörig zu besetzen bemüht ist und wirklich besetzt, ist machtlos, wird das Gebiet nicht beherrschen. Ein Schüler, der die einfachen Operationen recht gut kennt, aber in der Auflösung der Gleichungen nicht tüchtig geübt ist, wird überall anstossen; man bemüht sich vergebens, ihn in wünschenswerther Weise vorwärts zu bringen; und es ist daher auch durchaus nicht zu billigen, dass die Gleichungen erst in den oberen Classen vorgenommen werden, wie es ja in manchen Schulen geschieht. Ueberdies kommen bei den Gleichungen alle möglichen Operationen in der verschiedenartigsten Weise zur Anwendung. Alles, was daher in den Abschnitten über Addition, Subtraction, Multiplication, Division, die Potenzen, die Wurzeln und die Logarithmen weder zur Einübung der Gesetze oder zu einem praktischen Zwecke, noch zur Vorbereitung auf die Gleichungen als wesentlich erscheint, ist wohl von sehr zweifelhaftem Werthe. Ganz abgesehen von der vorliegenden Sammlung, wozu sind in den Sammlungen überhaupt die langen Multiplicationen und Divisionen, wozu die ungeheuerlichen Exempel über das Ausziehen der Wurzeln aus Buchstabenausdrücken, wozu die Aufgaben mit einer unübersehbaren Zahl von Klammern, wozu die endlosen verwickelten Reductionen, wozu die mit grosser Mühe zusammengestellten, wunderlichen Aufgaben über Logarithmen? Wirken sie nicht abschreckend, anstatt zu ermuntern und einzuladen? Selbst Gleichungen, welche weder in ihrer Form, noch in ihrem Resultat etwas Ansprechendes haben, welche die vom Verfasser bei ihrer Aufstellung verwendete Mühe verrathen, lasse man unbedenklich fallen. Es ist mit einer arithmetischen Aufgabe, besonders mit einer Gleichung, wie mit einem Gedicht; beide sind nicht mehr schön, wenn sie durchblicken lassen, dass der Verfasser es sich hat sauer werden lassen. Nehmen wir aber diese Gesichtspunkte als massgebend, so könnte auch in der vorliegenden Sammlung noch manche Aufgabe fallen, ohne den Werth derselben zu vermindern.

Will man diese Gesichtspunkte nicht als massgebend gelten lassen, so muss man sich doch gewiss bei jeder Aufgabe in einer für Schüler bestimmten Sammlung die Frage vorlegen: Ist sie wünschenswerth oder nothwendig, oder keines von beiden, sei es für die fähigsten oder unfähigsten Schüler, sei es für praktische oder theoretische Zwecke, sei es endlich um das Interesse der Schüler an der Sache zu fördern? Kann man diese Frage nicht bejahen, so ist es besser, einfach die Aufgabe zu streichen; ja, die Aufgabe muss schon gestrichen werden, wenn sie bei nur geringem praktischen oder theoretischen Werthe dazu geeignet ist, das Interesse der Schüler an der Sache zu vermindern. Nichts dient aber hierzu mehr als lange unförmliche Aufgaben. Hierher gehören z. B. I S. 24—31, 48—65, II S. 32—38, 94—115, 182—186, III S. 17—19, 37—42, 95—100 u. s. w. Auch selbst in einem nur für Lehrer bestimmten Buche würden solche Aufgaben besser fehlen.

Ausserdem sind die Abschnitte nicht gleichmässig behandelt, die leichteren Abschnitte sind unverhältnissmässig berücksichtigt, die schwierigeren auf wenigen Seiten abgethan. So nehmen die Potenzen mit ganzen positiven Exponenten 77 Seiten ein; die figurirten Zahlen, der binomische und der polynomische Satz, die Permutationen, Combinationen, Variationen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, alles in einem Abschnitt, nur 9 Seiten. Aufgaben über die allgemeine Theorie der Gleichungen und über cubische Gleichungen sind nicht vorhanden.

In Bezug auf die eingekleideten Aufgaben hat der Verfasser es zwar verstanden auf einem verhältnissmässig kleinen Raum eine grosse Anzahl von Aufgaben zusammenzudrängen, und es ist zu loben, dass sich an die allgemeine Aufgabe in Buchstaben specielle Beispiele in Zahlen anschliessen; aber die Aufgaben machen einen zu schematischen Eindruck. Für Schüler ist es wünschenswerth, dass die Aufgaben, wenn sie auch wesentlich kaum verschieden sind, in Form und Ausdruck immer neu erscheinen. Nur so wird man ihr Interesse rege erhalten. — Dass auch die gewöhnlichen Rechenaufgaben allgemein in Buchstaben behandelt werden, verdient Anerkennung.

Angabe der Art der Aufgaben und der Abschnitte oben auf jeder Seite würde zu schnellerer Orientirung beitragen und die Brauchbarkeit des Buches erhöhen.

Ungeachtet der hier gemachten Ausstellungen hat das Buch des Guten so viel, dass ich nicht umhin kann, es allen Lehrern der Mathematik als eine sehr fleissige und brauchbare Arbeit aufs nachdrücklichste zu empfehlen.

E. Bardey.

Liersemann, Dr. Karl Heinrich, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig bei Teubner. 1871.*)

Der Verf. hat eine streng systematische Anordnung des Stoffes erstrebt, um „den Lehrer, welcher dieses Lehrbuch seinem Unterrichte zu Grunde legt, von den Fesseln frei zu halten, welche eine aus pädagogischen Rücksichten hervorgegangene Anordnung anlegt.“

Die in den meisten Lehrbüchern an die Spitze gestellten allgemeinen Grundsätze hat der Verf. über Bord geworfen, weil sie für die Arithmetik unfruchtbar sind. Die Erklärungen hat er so aufgestellt, wie sie sich unmittelbar ergeben und dem genetischen Unterrichte zu dienen im Stande sind und wie sie geeignet erscheinen, die Rechnungsregeln zu beweisen. Aufgaben und Beispiele sind dem Lehrgebäude hinzugefügt und „mit besonderer Rücksicht auf Lehrhaftigkeit“ ausgewählt. In der Terminologie finden sich manche Abweichungen, die der Verf. „aus pädagogischen Gründen vorgenommen hat, um Verwechselungen zu vermeiden.“

Dem Lehrgebäude sind „einleitende und allgemeine Bemerkungen“ vorausgeschickt, die an geeigneten Stellen in den Unterricht einzuflechten sind. Hiernach theilt der Verf. die niedere Arithmetik in 3 Hauptgebiete:

1) natürliche Zahlen und Functionen im Gebiete der natürlichen Zahlen,

2) Erweiterung des Zahlbegriffs: die analytischen Zahlen,

3) Erweiterung des Begriffs der Function: die Algebra, woran sich dann als Anwendung schliesst,

4) die Arithmetik der bestimmten Zahlen.

Gehen wir nun etwas auf das Einzelne ein, so bemerken wir, dass der Verf., wie schon aus der mitgetheilten Uebersicht hervorgeht, sich von vornherein des Ausdrucks „Function“ bedient statt des üblichen „Form.“ Das 1. Buch behandelt die Rechnungsarten in 3 Stufen: Unterste Stufe: Addiren und Subtrahiren; mittlere Stufe: Multipliciren und Dividiren; oberste Stufe: Potenziren, Radiciren, Logarithmiren. Er beginnt mit dem Numeriren mit allgemeinen Zahlen als Vorübung. Dann werden die Hauptgesetze der Rechnungsarten aus den Definitionen naturgemäss abgeleitet, und die Transformationen auf jeder der 3 Stufen vollständig behandelt. Durchgehends werden die Lehrsätze streng bewiesen, die Beweise wenigstens ausreichend angedeutet, dann in Worten ausgedrückt und schliesslich die praktischen Regeln für die Anwendung angegeben. Die Null wird als Differenz gleicher Zahlen definirt. Bei der Multiplication werden sogleich die Primzahlen, Primfactoren, eingeführt. Bei dem Dividiren wird zweckmässig vom Messen ausge-

*) Durch besondere Ursachen verspätet. D. Red.

gangen und das Theilen von ihm sorgfältig unterschieden. Bei der obersten Stufe nimmt der Verf. von den inversen Rechnungsarten das Logarithmiren vor dem Radiciren, wir erkennen nicht, warum? um so weniger, als er nachher bei den Transformationen dieser Stufe doch die der Wurzelfunctionen vor den logarithmischen nimmt. Statt der Bezeichnung $\overset{c}{\log}\, a$ schlägt der Verf. vor $\frac{a}{c}$, womit wir uns nicht recht befreunden können, wir ziehen die von Worpitzky gebrauchte, nur etwas abgeänderte, Bezeichnung $\lambda\frac{a}{c}$ vor, weil sie dem umgekehrten Wurzelzeichen gleichkommt, namentlich, wenn man die Basis c nicht unter a, sondern weiter links schreibt, also $\underset{c}{\lambda}\frac{a}{}$. Als zweite Reihe der Transformationen dritter Stufe wird der binomische Lehrsatz gegeben, dem als Lemmata vorausgeschickt werden: die Multiplication mehrerer Binome und Polynome, das wichtigste aus der Combinationslehre, mit den abgekürzten Bezeichnungen für die Factoriellen:

$$n_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots k}.$$

Mit dieser vielfach gebrauchten Abkürzung haben wir uns nie befreunden können, weil dieselbe Bezeichnung zugleich gebraucht wird, um verschiedene gleichartige Zahlen nur durch einen Index von einander zu unterscheiden. Wir ziehen daher die Bezeichnung $\binom{k}{n}$ vor.

Im zweiten Buche: die Arithmetik der analytischen Zahlen, wird zuerst die negative Zahl behandelt und dieselbe definirt als eine Differenz mit dem Minuend 0. Absolute Zahlen nennt der Verf. diejenigen. welche das Zeichen — nicht vor sich haben. Wir sind der Meinung, dass auch diejenigen, welche das Zeichen + nicht vor sich haben, absolute Zahlen sind. Diese kleine Partie des Buchs will uns weniger gefallen. Zuerst sagt der Verf.: Negative und absolute Zahlen nennt man entgegengesetzte Zahlen, und bald darauf wieder: „Im Gegensatz zu den negativen Zahlen hat man die positiven (oder activen) Zahlen eingeführt.“ Das scheint uns für den Anfänger verwirrend und unklar zu sein. Die Rechnungsregeln werden mit gehöriger Gründlichkeit entwickelt.

Nun folgt die Betrachtung der gebrochenen Zahl, welche als ein Quotient, dessen Divisor kein aliquoter Theil vom Dividendus ist, definirt wird. Die Stammbrüche geben dem Verf. Gelegenheit, zunächst die Regel der Division zweier Potenzen mit gleichen Grundzahlen zu erweitern, um den Gebrauch negativer Exponenten zu erläutern. Es wird ferner der Begriff der unendlich kleinen und unendlich grossen Zahl festgestellt und die Bedeutung der Symbole

$\frac{a}{0}$ und $\frac{a}{\infty}$ erklärt. Endlich wird die Entwickelung $\frac{a}{m \pm n}$ in eine unendliche Reihe, als Ergänzung der betreffenden Divisionsaufgaben, gelehrt und auf den Unterschied zwischen convergenten und divergenten Reihen kurz aufmerksam gemacht, sowie die Verwandlung eines reducirten Bruchs in einen Kettenbruch gezeigt.

Es folgt nun ein Capitel über Verhältnisse und Proportionen, die in gewohnter Weise behandelt sind. Wir vermissen die harmonischen Proportionen. Die einfachen arithmetischen und geometrischen Reihen machen den Schluss der zweiten Abtheilung des 2. Buchs. Die 3. Abtheilung handelt von der irrationalen Zahl, die als Radix aus einer Zahl, welche keine Potenz vom Grade des Exponenten ist, aufgefasst wird. Es wird gezeigt, wie eine solche in nach und nach immer engere Grenzen eingeschlossen werden kann und wie man nach dieser Methode einen log. berechnen könnte, und wie irrationale Functionen umzuformen sind. In der 4. Abtheilung endlich wird die imaginäre Zahl behandelt. Warum der Verf. statt complexe Zahl sagt: complexe imaginäre Zahl, ist uns nicht klar. Eben so wenig wissen wir zu erklären, warum in der trigonometrischen Form der complexen Zahl $r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ der Name Modulus mit Norm vertauscht worden ist.

Eine besondere Beachtung verdient das dritte Buch dieses Werkes, welches die Algebra behandelt. Ausgehend von dem Unterschiede zwischen einer expliciten und impliciten Function und einer Aufzählung der verschiedenen Arten der Gleichungen wird die algebraische Gleichung als die Aufgabe, den Werth der Unbekannten als explicite Function der Bekannten darzustellen, aufgefasst. Dann werden zunächst die Gleichungen mit einer Unbekannten in folgender Reihenfolge behandelt.

A) Die Unbekannte kommt einmal vor, ausser ihr noch 2 Bekannte. Dabei kann sie in allen möglichen Rechnungsformen erscheinen.

B) Die Unbekannte kommt einmal vor, ausser ihr noch mehrere Bekannte, wie $a\,x + b = c$ oder $a\,x^n = b$.

C) Die Unbekannte kommt in der Gleichung mehrmals vor. Hier werden die Regeln für die Reduction der Gleichung ausführlich angegeben.

Es folgen nun die Gleichungen mit mehreren Unbekannten, namentlich die Gleichungen „erster Dimension;“ und werden die Eliminationsmethoden gelehrt und der Werth derselben geschätzt. Einer besondern, recht klaren und ausfürlichen Auseinandersetzung ist die Auflösung durch Determinanten für 2 und 3 Gleichungen unterworfen.

An die Spitze der Auflösung gemischter Gleichungen 2. Grades ist das Gesetz der Coefficienten in Beziehung auf die Wurzeln gestellt, und daraus sogleich der Schluss gezogen, dass die Wurzeln entweder reell oder conjugirt imaginär sein müssen. Sodann wird später mittelst desselben Gesetzes gezeigt, wie aus zwei Gleichungen, die dieselbe Unbekannte haben, von denen aber die niedere für diese Unbekannte vom 2. Grade ist, diese Unbekannte in eleganter Weise eliminirt werden könne (§ 116). — Die Auflösung der Gleichungen 2. Dimension mit mehreren Unbekannten wird sodann gelehrt an Gleichungen homogenen Charakters.

Es folgen nun die gemischten Gleichungen 3. Grades, wo wiederum, das Gesetz der Coefficienten an die Spitze gestellt ist; dann werden die einzelnen Fälle in üblicher Aufeinanderfolge behandelt. Den Schluss bilden die Gleichungen 4. Grades, die ziemlich kurz abgefertigt sind.

Das 4. Buch: Arithmetik der bestimmten Zahlen, lehrt 1) die Decimalbrüche, 2) die Quadrat- und Cubikwurzelausziehung, 3) die logarithmischen Rechnungen und 4) die Zinseszinsrechnung, diese nicht sehr ausführlich.

Aus dem oben Gesagten geht hervor, dass das Buch in der Schule nicht von § 1. an von der untersten Classe aufwärts nach und nach durchgenommen werden kann, was auch keineswegs die Meinung des Verf. ist; derselbe gibt vielmehr in einer Anmerkung zur Vorrede das Pensum für jede Classe genau an. Bei der Abfassung eines Lehrbuchs dürfen nicht methodische und pädagogische Rücksichten massgebend sein, sondern Gruppirung des Stoffs; und dies hat der Verfasser streng im Auge behalten. Die Darstellung ist eine streng wissenschaftliche, und wenn man im Einzelnen nicht überall mit dem Verf. gleicher Meinung sein kann, so weht doch aus dem Ganzen ein so frischer und ansprechender Hauch, dass wir das Buch unsern Fachgenossen mit gutem Gewissen zur Beachtung empfehlen können. Chr. Sch.

Bauer, Dr. K. L., J. N. T. Müller's Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Zweite, gänzlich umgearbeitete Auflage, mit vielen dem Text eingedruckten Holzschnitten. 1. u. 2. Theil. Halle, Buchhandlung des Waisenhauses. 1872. 1874.

Der Herr Verfasser der zweiten Auflage hat den Kern der ersten Auflage unversehrt zu erhalten gesucht, ist aber bemüht gewesen, „die muthmasslichen Gründe der unverdient langsamen Verbreitung des Buches zu beseitigen.“ Diese muthmasslichen Gründe werden von dem Verf. nicht näher bezeichnet, sie liegen ohne Zweifel in der ausserordentlich knappen Ausdrucksweise Müllers, die dem Anfänger, theilweise sogar dem Lehrer, Schwierigkeiten bereitet. Das erkannte der sel. Müller, in welchem auch Ref. seinen hochverdienten

Lehrer verehrt, selbst. Bevor das Buch fertig war, sagte er, „ich fürchte mich vor meinem eigenen Lehrbuche.“ Diese Knappheit der Sprache hat nun allerdings B. vermieden, wir geben ihm indess selbst zu bedenken, ob er nicht, wenigstens im ersten Theile, in das andere Extrem gerathen sei? Die Bauer'sche Bearbeitung ist so zu sagen ein vollständiger Commentar zu der Müller'schen Geometrie, der namentlich jüngeren Lehrern die vortrefflichsten Dienste leisten wird, zumal da auf die neueren Anschauungen gebührend Rücksicht genommen ist und Manchem hie und da etwas Neues geboten wird. Die Entwickelungen der Gesetze sind, abweichend von der ersten Auflage, grossen Theils genetisch, so dass, namentlich im ersten Theile, meistens das Gesetz am Ende des § steht. Diese Entwickelungen selbst aber sind ausserordentlich klar, hie und da vielleicht etwas zu sehr ins Detail gehend, so dass dem Lehrer, dessen Schüler das Buch in den Händen haben, eigentlich gar nichts weiter hinzuzusetzen bleibt und er höchstens nur zur Illustration und Versinnlichung dienende Manipulationen vorzunehmen hat.

Mit Rücksicht zuf den mathemischen Lehrplan der badischen Realgymnasien (der Verf. ist Professor am Realgymnasium in Carlsruhe) erscheint das Buch in 3 getrennten Abtheilungen, von denen die erste schon 1872 erschienen ist; die Herausgabe der zweiten Abtheilung verzögerte sich „durch eine seltene Conjunction widriger Vorfälle“ bis zu diesem Jahre, die Herstellung der dritten soll möglichst gefördert werden.

Gehen wir näher auf das Einzelne ein, so bemerken wir bald, dass, wie schon aus obigen Bemerkungen hervorgeht, nur der Kern der ersten Auflage und die massgebenden Principien: 1) Gruppirung des Stoffes nach sachlicher Verwandtschaft und 2) rationelle Bezeichnung durch Buchstaben, beibehalten sind; im Uebrigen aber die Darstellung völlig von der ersten Auflage abweicht, so dass eine genaue Vergleichung beider Auflagen von Seite zu Seite, wie sie der Verf. wünscht, sehr zeitraubend, wenn nicht unmöglich sein würde.

Nachdem die räumlichen Gebilde auf dem Wege der Abstraction vom Körper zur Fläche, zur Linie und zum Punkte und wiederum umgekehrt durch Bewegung entwickelt sind, bespricht der Verf. die verschiedenen Arten der Linien und Flächen, wobei uns aufgefallen ist, dass er bei der geraden Linie, die er als eine jedermann klare Vorstellung hinstellt, plötzlich von Richtungsveränderung spricht, während er bei der Entstehung der Linie durch Bewegung nicht auf die Richtung gehörig aufmerksam gemacht hat, was allerdings Müller auch nicht gethan hat. Sodann werden die wichtigsten Lagen von Punkten, unbegrenzten Geraden und Ebenen zu je zweien betrachtet im engeren Anschluss an die 1. Aufl., nur mit dem Unterschiede, dass in letzterer auf $2\frac{1}{2}$ Seiten abgemacht ist, wozu der

Verf. reichlich 5 Seiten gebraucht. Dies hat hauptsächlich seinen Grund darin, dass der Verf. einmal näher auf die Bestimmung einer Ebene eingegangen ist, ein andermal den Begriff des Parallelismus zweier Geraden weitläufig entwickelt hat, indem er die parallele Lage zweier Geraden als das Ziel oder die Grenze, welcher zwei sich schneidende Gerade beim Fortrücken des Schnittpunktes ohne Ende zustreben, darstellt. Er legt Werth darauf, zu sagen: „Wenn zwei Gerade einen Punkt gemein haben, so schneiden sie einander, oder sind parallel, je nachdem der gemeinschaftliche Punkt in endlicher oder unendlicher Entfernung liegt.“ Ausserdem entwickelt der Verf. gleich hier den Begriff der Convergenz und Divergenz und Kreuzung. Letztere erklärt er so: „Zwei Gerade können auch nichts (im Sinne des Verf.: auch nicht einmal einen unendlich entfernten Punkt) mit einander gemein haben; dann laufen sie mehr oder weniger quer über oder neben einander hin.“ Wir rathen, die Worte „oder neben“ zu streichen!

Im Anschluss an die erste Auflage definirt unser Verf. die Winkel als Drehungsgrössen. Dies führt ihn auf die Entstehung der Kreislinie (das Wort Kreisumfang hätte hier wegbleiben sollen, weil dieses erst seine Bedeutung erhält, wenn der Kreis als begrenzte Ebene aufgefasst wird). Hier hätte sollen des Zirkels kurz erwähnt werden. Die Betrachtung der Kreislinie führt auf die Eigenschaft, dass einerseits ein Winkel den Richtungsunterschied zweier Strahlen angibt, andrerseits als Merkmal der Grösse oder als Mass eines Winkels der Theil einer Kreislinie dienen kann, welcher zwischen den Schenkeln des Winkels liegt. Die am Schluss dieser Betrachtung (S. 17) hinzugefügte Illustration ist undeutlich, wenn man nicht einen Druckfehler in dem Zwischensatze „bis man gleichzeitig $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ erblickt,“ vermuthen darf.

Wenn der Verf. sagt: „Den kleinsten Werth hat der Winkel in dem Falle, wo der bewegliche Schenkel b noch gar keine Drehung gemacht hat,“ so meinen wir, dass eben dann noch gar kein Winkel existirt, weil nach der Definition der Winkel eine Drehungsgrösse ist. Wir würden daher lieber sagen: um diesen Fall mit in die Nomenclatur einzureihen, nennen wir die Lage zweier Strahlen auf einander und in gleichem Sinne den Nullwinkel.

Die Fragen in Aufgaben 1) auf S. 24 lassen es zweifelhaft erscheinen, ob gemeint sei: wann sind 2 Winkel, die Aussenwinkel zu einander sind, gleich? oder: wann sind die Aussenwinkel zweier Winkel gleich? Auf die letzte dieser Fragen: wann sind zwei Scheitelwinkel einander gleich? wird jeder Schüler antworten: zwei Scheitelwinkel sind immer einander gleich; es werden daher diese Fragen wohl im zweiten Sinne zu verstehen sein.

Auf S. 27 liest man: „Lässt man von einem Punkte ausserhalb einer Horizontalebene eine möglichst kurze Gerade auf sie hinab u. s. w." Es würde u. E. deutlicher sein, wenn gesagt würde: „die kürzeste Gerade, welche möglich ist." Uebrigens bezweifeln wir, dass das, was hier über die lothrechte Stellung einer Geraden gegen eine Ebene gesagt wird, von Jedermann als selbstverständlich und an sich klar hingenommen wird. Bei der sonstigen Ausführlichkeit des Verfassers hätte man einen Beweis erwartet, oder da ein solcher an dieser Stelle wohl nicht möglich ist, so würde es genügt haben, den Begriff des Verticalen, worauf es hier blos ankam, aus physikalischen Gesetzen zu erläutern.

Auf Seite 29 hätten wir die Sätze: „Alle Winkel über einer Geraden betragen zusammen einen gestreckten" und „alle Winkel um einen Punkt betragen zusammen einen Vollen" lieber nicht gesehen; der Verf. hatte beide Sätze vorher vollkommen scharf und richtig ausgedrückt, und hätte diese mindestens ungenauen, freilich landläufigen Ausdrücke nicht in sein gutes Buch aufnehmen sollen.

Auf S. 31 spricht der Verf. von hohlen Nebenwinkeln. Nach der Definition auf S. 23 sollte man erwarten, dass unter Nebenwinkeln nur hohle Supplementwinkel verstanden werden. Eben so ist auf S. 32 oben pleonastisch von „gleichen rechten" Winkeln die Rede.

Es folgt nun die Parallelentheorie, welche mit der Erklärung der correspondirenden und Wechselwinkel beginnt. Der Verf. sucht nach einem bequemen und kurzen Ausdruck für das innere oder äussere Paar der Winkel, die auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen und führt, offenbar mit Widerstreben, den „üblichsten," aber höchst unpassenden Namen „Gegenwinkel" an. Unsers Wissens gebrauchen die Oesterreicher den bequemen Ausdruck: innere und äussere „Anwinkel," und es wäre zu wünschen, dass die Mathematiker sich dieses Namens durchweg bedienten, damit endlich einmal die Confusion ein Ende nehme; denn es gibt noch Mathematiker, die sogar die correspondirenden Winkel Gegenwinkel nennen. — Der Parallelismus bei Gleichheit der correspondirenden Winkel wird aus der gleichen Richtungsabweichung von der durchschneidenden Geraden oder der Convergenz nach einem unendlich entfernten Punkte abgeleitet. Durch Drehung der einen Parallelen um ihren Schnittpunkt gelangt der Verf. zur Bestimmung des Convergenzwinkels als Differenz zweier correspondirenden Winkel und somit sogleich zu dem Dreieckswinkelsatz, ohne ihn schon so zu nennen. Weiter unterscheidet der Verf. gleichsinnig und ungleichsinnig parallele Gerade; erstere bilden den Nullwinkel, letztere den gestreckten Winkel.

Die in der ersten Auflage hier eingeschobene Bestimmung der gegenseitigen Lage zweier Ebenen aus den Lagen, welche diese gegen eine dritte Ebene haben, die Bestimmung der Lage sich kreuzender Geraden, sowie den kleinen Abschnitt über die Ecken hat der Verf. mit Recht ausgelassen.

Der zweite Abschnitt behandelt die ebenen Figuren. Von der Entstehung des einfachen Vielecks und Vielseits ausgehend, betrachtet der Verf. genauer das vollständige Viereck und Vierseit, als die wichtigsten, die verschiedenen Formen der einfachen Vielecke und Vielseite, den Strahlbüschel und die Transversale, die Zerlegung der Fläche in Dreiecke, wobei auf den Dualismus gebührend Rücksicht genommen ist. Die Summe der inneren Winkel eines hohlwinkeligen Vielecks wird aus der Summe der äusseren abgeleitet, nachdem letztere als Summe der Winkel, welche Strahlen mit einander bilden, die gleichsinnig parallel mit den gleichsinnig verlängerten Seiten von einem beliebigen Strahlpunkte aus gezogen werden, dargestellt ist. Die Bemerkung: „die Summe der n äusseren Polygonwinkel sei keine Function von n" findet passender ihren Platz weiter unten, nachdem erklärt worden ist, was es heisse: die Summe der n innern Winkel sei eine Function von n.

Es wird nun das Dreieck speciell betrachtet und zwar mit einer, wie uns scheinen will, unnöthigen Weitschweifigkeit. Die Wechselbeziehungen zwischen Seiten und Winkeln des Dreiecks sind auf dem Wege der Anschauung durch Umlegen und Wiederaneinanderschieben erläutert. Daran schliessen sich die besonderen Formen der Vierecke. Den Schluss dieses Abschnitts bildet die Betrachtung des Kreises und zwar der Beziehungen zwischen Centri- und Peripheriewinkeln, Sehnen- und Secantenwinkeln, eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecken und Vielseiten. Hier haben wir zu bemerken, dass der Verf. auf S. 74 ausdrücklich sagt, dass der Name Berührende, die er als eine Secante, deren Durchschnitte zusammengefallen sind, auffasst, statt Tangente gebraucht werden solle, dass er aber gleichwohl nachher, wie andere Mathematiker, Tangentenwinkel denjenigen nennt, den zwei Berührende mit einander bilden, um ihn von demjenigen zu unterscheiden, den eine Berührende mit einer durch den Berührungspunkt gezogenen Sehne bildet und den er Berührungswinkel nennt. Dieser letzte Name scheint uns unpassend, ganz überflüssig und nur zu Missverständnissen Veranlassung gebend zu sein. Er ist und bleibt, wie auch der Verf. selbst sagt, nichts anderes als ein Peripheriewinkel. Ferner bemerken wir, dass der Verf. stets sorgfältig unterscheidet Sehnenviereck und Tangentenvierseit. Dem entsprechend müsste, wenn ein Fremdwort gebraucht werden soll, es auch stets heissen: Sehnenpolygon und Tangentenpolypleuron, nicht Tangentenpolygon. Man behalte aber doch lieber die Namen Sehnenvieleck und Berührungsvielseit.

Erst im dritten Abschnitte wird die Congruenz der ebenen Figuren behandelt. Die Congruenzsätze werden in der Form vorgeführt: „Ein Dreieck ist unzweideutig bestimmt durch u. s. w." und am Schlusse jedes Satzes wird erörtert, dass zwei Dreiecke, welche dieselben drei Bestimmungsstücke enthalten, nur der Lage nach verschieden sind. Recht ausführlich ist die Bestimmung aus 2 Seiten und dem Gegenwinkel der einen durchgenommen. Eigenthümlich ist der Fall behandelt, wo 2 Dreiecke in 2 Stücken, aber nicht in einem dritten übereinstimmen; derselbe führte auf die Vergleichung der Strahlen, die aus einem Punkte einer Kreisebene an die Peripherie gezogen werden. Einer besondern Betrachtung ist sodann die Congruenz der Polygone und des Kreises, sowie die Beziehung zwischen einem umschlossenen und dem umschliessenden Polygon unterzogen. Die Eigenschaften des Antiparallelogramms, die Mittellinie zwischen begrenzten Parallelen des Dreiecks, die wichtigsten andern Transversalen des Dreiecks, der ein- und umgeschriebene Kreis und der Schwerpunkt des Dreiecks machen den Beschluss des ersten Theils.

Der zweite Theil beginnt mit einer Anleitung zur Lösung geometrischer Constructionsaufgaben. Dieser Abschnitt lässt an Klarheit und Vollständigkeit nichts zu wünschen übrig, enthält auch viele Aufgaben zur Uebung. Er umfasst 60 Seiten. Der folgende Abschnitt V handelt von der Gleichheit der ebenen Figuren und beginnt mit der Projection einer Strecke und eines Perimeters; es werden einige stereometrische, leicht zu veranschaulichende Hülfssätze eingeschaltet, worauf die Flächengleichheit der Dreiecke mit einer gleichen Seite oder mit einem gleichen Winkel behandelt werden. Sodann wird die Bedeutung des Schnittpunkts der diagonalen und der nichtparallelen Gegenseiten des Trapezes sowie der Schwerlinien und Mittellinien des Dreiecks hervorgehoben, die Flächengleichheit der Parallelogramme mit einer gleichen Seite oder einem gleichen Winkel und die Flächengleichheit der Trapeze und Polygone erörtert. Um zu den Wechselbeziehungen zwischen Dreiecken und Parallelogrammen zu gelangen, werden voraus die sechs Paare winkelgleicher Dreiecke im vollständigen Sehnenviereck besprochen und der Begriff des Antiparallelismus festgesetzt; letzterer spielt in den folgenden Betrachtungen eine interessante und wichtige Rolle. Lehrsätze über Rechtecke aus Strecken des rechtwinkeligen Dreiecks, in eigenthümlicher interessanter Weise behandelt, führen auf den pythagoräischen Lehrsatz, der in seiner allgemeinen Form dargestellt ist und dem die wichtigsten Beweise angereiht werden. Doch wir verzichten darauf, den reichen Inhalt dieses langen Abschnittes Schritt vor Schritt zu verfolgen und bemerken nur noch, dass eine längere Reihe von Paragraphen der Verwandlung der Dreiecke, Trapeze, Parallelogramme und Polygone in andere von gegebener Beschaffenheit, dem goldenen Schnitt, der Theilung des Kreises und der Affingleichheit gewidmet ist. Der ganze geniale Abschnitt von der Flächengleichheit, wie ihn der sel. Müller entworfen, ist von dem neuen Bearbeiter in genialer Weise umgearbeitet und so zu sagen mundgerecht gemacht.

Werfen wir noch einmal einen Blick auf die ganze mühevolle Arbeit des Verf. der neuen Auflage, so müssen wir erklären, dass derselbe sich um die Methode des Unterrichts in der Geometrie wohl verdient gemacht hat. Diese Wissenschaft in der hier vorliegenden Weise vorgetragen, verliert alles Trockene, was ihr sonst, wenn sie nach alter gewohnter Weise gelehrt wird, ankleben mag. Die von uns gemachten Ausstellungen, welche der Herr Verf. der zweiten Auflage freundlich, wie sie unsererseits gemeint sind, hinnehmen möge, fallen gar nicht in's Gewicht gegen die Bedeutung der ganzen Arbeit.

Wir wünschen dem Buche recht viele Leser; auch als Schulbuch in den Händen der Schüler wird es die besten Dienste thun, wenn nur der Lehrer, wie der sel. Müller sagte, „ein ganzer Mann ist, der es nicht verschmäht, sich auf die Lehrstunden gewissenhaft vorzubereiten.“

Es thut uns aufrichtig leid, dass wir nicht zugleich den dritten Theil mit haben anzeigen können und wir hoffen, dass nicht wiederum widerwärtige Umstände das Erscheinen desselben aufhalten.

Chr. Sch.

Zum Repertorium der neuesten Erfindungen, Entdeckungen etc.

Geognosie,

zusammengestellt von H. Engelhardt.

Der gewiss Allen unvergessliche grosse Geolog Dr. C. F. Naumann hat kurz vor seinem zu schnellen Tode noch eine treffliche Arbeit über die von ihm nachgewiesenen Felsenschliffe der Hohburger Porphyrberge beendet, die im N. Jahrb. f. Min. etc. abgedruckt worden ist. Denselben droht durch den energischen Steinbruchsbetrieb über kurz oder lang der Untergang, weshalb es dem besten Kenner derselben gedankt werden muss, dass er uns noch den für die Naturgeschichte der norddeutschen Ebene sehr wichtigen Beitrag geliefert hat. Ich theile das Wichtigste in Kürze aus demselben mit. Die Gruppe der kleinen Porphyrberge liegt am Südrande der norddeutschen Ebene, auf dem rechten Ufer der Mulde zwischen den Städten Wurzen, Eilenburg und Schildau. Fast alle Berge haben eine von NW nach SO, oder von W nach O langgestreckte Form. Auf wenig geneigtem und horizontalem Felsgrunde zeigen die Schliffflächen die meiste Aehnlichkeit mit den gewöhnlichen Gletscherschliffen (fein, stetig und geradlinig geritzt), auf stark geneigten oder senkrechten Felswänden erscheinen sie mehr wie Furchen oder convexe Falten. Erstere erscheinen bald mehr oder weniger undulirt, bald recht eben ausgedehnt, zwar nicht polirt, doch etwas mehr als matt geschliffen, so dass sie im Sonnenlichte bisweilen leuchten; dabei sind sie mit mehr oder weniger feinen, weit fortsetzenden, geradlinigen, parallelen Ritzen bedeckt, welche zumal bei schräger Beleuchtung recht sichtbar werden und durchaus dieselbe Richtung behaupten. Die emailähnliche Oberfläche und der firnisartige Ueberzug geht ihnen völlig ab. Die Schliffflächen sind von verschiedener Grösse z. B. von 4 Ellen Länge und Breite, von 5 Ellen Länge und 2 Ellen Breite, von 10 Ellen Länge und 5 Ellen Breite u. s. f. Dass sie nur stellenweise zu beobachten, darf Niemand wundern, da zu bedenken ist, dass seit Jahrtausenden die Atmosphäre, Frost und Verwitterung an den Bergen genagt und der Mensch eingegriffen hat. Beide Formen gehen in einander über, was darauf hindeuten dürfte, dass nur eine Ursache für sie anzunehmen sei. Naumann neigt sich der Ansicht Morlots zu, dass sie wohl von Gletschern, nicht von schwimmenden Eisschollen, welche Steine mit sich führen, oder von Brandung und Wellenschlag herrühren können.

Im N. Jahrb. f. Min. 1874, Hft. 4 gliedert O. Feistmantel die fossilen Equisetaceen folgendermassen:

A. Blätter in Scheiden verwachsen, nach dem Abfallen eine Kette zusammenhängender Tuberkeln zurücklassend.

a) Equisetum. (Equisetites.)

B. Blätter frei, nach dem Abfallen oder am Steinkerne getrennte Tuberkeln zurücklassend. (Bei den Gattungen dieser Abtheilung kommt besonders neben der Beschaffenheit der Blätter auch die Fruchtähre in Betracht.)

a) Calamites. — Fruchtähre mit fruchtbaren (die Sporangien an eigenen Mittelsäulchen in der Mitte des Internodiums) und unfruchtbaren Wirteln (Bracteen) — Huttonia — Calamostachys.

b) Asterophyllites. — Die eiförmigen Sporangien wirtelförmig in dem unteren Bracteenwinkel — Asterophyllostachys — Volkmannia; Asterophyllites daher eine selbständige Gattung.

c) Annularia. — Die kugelrunden Sporangien stehen auch wirtelförmig, kommen aber aus dem oberen Bracteenwinkel hervor.

d) Spherophyllum. — Hier sind die Blätter hinreichend charakteristisch.

Noch im Jahre 1872 konnte Dr. Jentzsch in seiner Arbeit „über die Gliederung und Bildungsweise des Schwemmlandes in der Umgegend von Dresden“ constatiren, dass nur drei Exemplare silurischer, versteinerungsführender Geschiebe aus dem gesammten sächsischen Diluvium bekannt geworden seien. Im Jahre 1873 glückte es aber Dr. Dathe bei Planirungsarbeiten vor dem Zeitzer Thore in Leipzig eine grosse Menge solcher aufzufinden, die so reich an organischen Resten sind, dass man viele derselben als zoogene bezeichnen könnte. Sie können nur aus dem Obersilur der Insel Gotland und zwar aus dem dortigen Korallenkalk, Crinoidenkalk und Beyrichienkalk herstammen.

(Wir nennen von denselben nur Beyrichia tuberculata Klöd., Calymene Blumenbachii Brongn., Tentaculites scalaris Schloth., Rynchonella borealis Schloth., Calamopora Gothlandica.) Hierdurch ist eine Lücke in der geographischen Verbreitung nordischer Silurgeschiebe ausgefüllt. (Jahrb. Hft. 4 S. 412 f.)

Der Geistliche der evangelischen Gemeinde zu Nazareth, Missionar Zeller, ein gründlicher Kenner des Landes jenseits des Jordans, des Gebietes der freien Beduinen (Landschaft Hauran und Gebirge Gilead) hat Prof. Fraas in Stuttgart 42 wohlerhaltene Fossilien aus dem Wadi Adjlûn und dem Gebirge Osha bei Salt, dem alten Rammoth Gilead, einer für die Naturforscher noch völlig unbekannten Gegend, gesendet, die darauf hinweisen, dass das genannte Gebiet unbedingt Cenoman sei. (Z. B. Ostrea Overwegi Buch, O. africana Lmk., Cardium hillanum Sow., Cytherea syriaca.) (Jahrb. 1874. Hft. 4.)

Ausser Stamm- und Rhizomfragmenten von Psilophyton waren bisher keine Reste von Landpflanzen in der Silurformation von Nordamerica bekannt. Neuerdings sind 2 Stücke einer Sigillaria in Ohio aufgefunden und zwar in einem Gestein, das dem unteren Theile der Trentongruppe angehört. (The Am. Journ. of sc. a. arts. 1874. N. 37.)

Die Gattung Eurypterus tritt schon im Silur auf. In den Ostseeprovinzen fand man z. B. E. remipes Eichw. Sie umfasst Krebse, welche den Trilobiten in mancher Beziehung noch ähnlich sind, aber sich als schon höher organisirt zeigen. F. Römer beschreibt 2 Exemplare eines neuen E., der in vieler Beziehung mit E. Scouleri übereinstimmt, in anderen von ihm abweicht. Dieselben stammen aus dem niederschlesischen Kohlengebirge und bieten insofern ein besonderes Interesse, als sie die jüngste Art dieses Typus darstellen. (Geol. Zeitschr. Bd. XXV. 562—565.)

Die für den Geologen ebenso interessante, wie für den Bergmann wichtige Genesis der Erzgänge kann weder vom rein geologischen, noch vom rein chemischen Standpunkte aus ergründet werden. Die Beobachtungen des Geognosten und die Erfahrungen des Chemikers müssen hierbei einander unterstützen und ergänzen. Erstere lehren nun in Bezug auf die Erzgänge im Allgemeinen: 1) dass Kalkspath, Schwerspath, Flussspath und Quarz die häufigsten Begleiter der meist aus geschwefelten Metallen bestehenden Gangerze sind: 2) dass Erze und Erzbegleiter durch die Art ihres Nebeneinandervokommens sich theils als aufeinanderfolgende, theils als gleichzeitige, fast stets aber als gleichartige Gebilde zu erkennen geben, sofern wir hierunter Gebilde von verwandter, chemischer Herkunft verstehen. Um der Bildungsweise der Erze auf die Spur zu kommen, erscheint es daher, wie Th. Scheerer im Jubelband von Poggendorff's Annalen ausführt, gerathen, zuvor die minder schwierig zu enthüllende Bildung ihrer mineralischen Begleiter in's Auge zu fassen. Wie sind sie in den Gangräumen krystallinisch abgesetzt worden? Der Kalkspath ist durch Krystallisation auf nassem Wege gebildet worden, wie bereits sicher feststeht. — Schwerspath, bei gewöhnlicher Temperatur fast ganz unlöslich im Wasser, wird erheblich löslicher bei einer über den Kochpunkt des Wassers gesteigerten Temperatur, wie durch Ueberhitzung bis auf 245° C. nachgewiesen wurde. Aber auch vermittelst Einwirkung von Schwefelsäure auf ein Barytsalz bilden sich unter gewissen Umständen Krystalle von Schwerspath. (Ueberschuss an Schwefelsäure und erhöhte Temperatur derselben.) Es gelang Scheerer ferner, aus saurer Kieselfluorcalciumlösung durch Beihilfe erhöhter Temperatur von 240° Flusspath in schönen Krystallen darzustellen, ebenso konnte Schwerspath und Flussspath, welche in Krystallen zusammenvorkommen, künstlich g l e i c h z e i t i g dargestellt werden, wenn sehr verdünnte Lösungen von Gyps und Fluorbaryum bei gewöhnlicher Temperatur und sehr langsam mit einander in Berührung gebracht wurden. Alle von ihm angestellten Versuche, Quarz, selbst nur in mikroskopischen Krystallen darzustellen, lieferten stets nur wasserhaltige Kieselsäure z. Th. jedoch in oxalartigen Gebilden. Sénarmont erhielt jedoch auf diese Weise mikroskopische Quarzkrystalle. Jedenfalls unterstützen diese Versuche die Ansicht von der Ausfüllung der Gänge auf n a s s e m W e g e und lassen uns als auflösendes Agens Wasser erkennen, zum Theil mit Kohlensäure gesättigt und in mehr oder weniger erhitztem Zustande. Das auflösende Wasser muss natürlich an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten ungleiche Temperatur besessen haben. Dies dürfte sich auch aus den ungleichen Krystallformen des Flussspathes ergeben. Die bei gewöhnlicher Temperatur gebildeten Krystalle waren Hexaeder, während die bei höherer Temperatur (240°—250°) erzeugten vorherrschend Oktaederform besassen. Damit stimmen manche in der Natur vorkommende Verhältnisse Wenn aber die Erzbegleiter auf nassem Wege entstanden, so musten es auch die Erze auf demselben. (Naturf. 1874. N. 21.)

Engelhardt gibt einen neuen B e w e i s f ü r d i e e r u p t i v e N a t u r d e r P o r p h y r e. In einem grossen Porphyrbruche des Thales der Freiberger Mulde bei Nossen fand er eine 1^{m} im Durchmesser haltende Thonschiefermasse ungefähr 10^{m} von der Oberfläche und 15^{m} von dem anstehenden Schiefer entfernt mitten im Porphyr eingeschlossen. Dieselbe zeigte sich innerlich wenig verändert, war aber am Umfange in hunderte von kleinen Stücken zerbrochen, die mit dem Porphyr eine interessante Breccie bildeten. (Isisber. 1874. Hft. 1.)

Programmenschau 1873.

(Zusammengestellt von Dr. Ackermann in Hersfeld.)

Erziehungs- und Unterrichtswesen.

Preussen.

Königsberg. Ueber die schulmässige Pflege des Gedächtnisses. Von Obl. Witt. G.

Danzig. Friedrichs des Grossen Grundsätze über Erziehung und Unterricht. Von Dr. Cauer. G.

Pillau. Ueber die Eigenthümlichkeit und den Werth der Basedowschen Erziehungslehre. Von Bergau. HB.

Tiegenhof. Ueber Schuldisciplin. Von Dir. Wuttge. PG.

Berlin. Wie lässt sich der Lehrplan der Realschule vereinfachen? Von Dir. Dr. Kleiber. Dorotheenstädtische R.

Fraustadt. Zur Concentration des Unterrichtes auf Realschulen. Von Dr. H. Siedler. R.

Striegnau. Aus dem Erziehungsleben. Von Dr. Schandau. HB.

Eisleben. Die Vergangenheit und die Zukunft der deutschen Realschule. Von Dir. Dr. O. Richter. R.

Münden. Die allgemeine Bildung und die Schulen der allgemeinen Bildung. Von Conrector Espe. HB.

Barmen. Ueber die Pflichten, welche die Pflege der Gesundheit unserer Schülerinnen den Eltern und der Schule auflegt. Von Rector Dr. Kleinpaul. TS.

Düsseldorf. Mittheilungen über die Erfolge, die im verflossenen Jahre für die gesetzliche Normirung der Organisation und Stellung des höheren Mädchenschulwesens erzielt sind. Von Dir. Uellner. TS.

Elberfeld. Ueber nationale Bildung, als ein Grundprincip für Erziehung und Unterricht, in besonderer Beziehung auf die weibliche Jugend. Von Dir. Schornstein. TS.

Sachsen.

Leipzig. Zur Entwickelung des Realschulwesens in Sachsen. Von Obl. Dr. Oertel. R.

Mittweida. Ueber die Berechtigungen der Realschulen. Von Dir. Gesell. R.

Württemberg.

Stuttgart. Flattich's psychologische Beiträge zur Gymnasialpädagogik. Von Prof. Weitbrecht. G.

Baden.

Karlsruhe. Einige Gedanken aus Roger Aschams: „the scholemaster," über Erziehung, besonders über Behandlung der Schüler. Von Prof. Damm HB.

Hessen.

Michelstadt. Einige Forderungen an Schulgebäude vom pädagogischen Standpunkte. Von Dir. Becker. R.

Mathematische Abhandlungen.

Preussen.

Provinz Preussen. Neustadt. Ueber Radien und Linien der grössten Krümmung der Schraubenfläche. Von Obl. Barthel. G.

Conitz. Analoga der ebenen und der sphärischen Trigonometrie. Von Dr. Prätorius. G.

Deutsch-Crone. Untersuchung der in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve $ax^4 + c^3xy + by^4 = 0$. Von Zielinsky. G.

Gumbinnen. Zur Methodik des arithmetischen Unterrichts. Von Rector Dr. Schwarz. HB.

Elbing. Der Rechenunterricht der Mittelstufe. Von Kutsch. R.

Provinz Brandenburg. Berlin. Ueber das Gleichgewicht elastischer Rotationskörper. Von Obl. Dr. Wangerin. Sophien-R.

— Die Theorie der Reste, insbesondere derer vom dritten Grade, nebst einer Tafel der cubischen Reste aller Primzahlen der Form $6n + 1$ zwischen den Grenzen 1 und 100. Von Dittmar. Köllnisches G.

Brandenburg a. d. H. Die Mascheronischen Constructionen. Von Dr. Hutt. G.

Berlin. Ueber die Massfunctionen der analytischen Geometrie. Von Stahl. Luisenstädt. G.

Potzdam. Verallgemeinerung der elementaren Fadenconstruction der Ellipse. Von Dr. Frick. G.

Cottbus. Ueber das zweifächerige Hyperboloid. Von Willert. G.

Frankfurt a. O. Die 4 Species in allgemeinen Zahlen. Von Dr. Börner. R.

Crossen. Das Maximum und Minimum der unbestimmten Function einer unabänderlichen Variablen. Von Dr. Knauer. HB.

Spremberg. Ergänzungssätze zum arithmetischen Pensum. Von Schmidt. R.

Provinz Pommern. Belgard. Genetische Entwicklung der Elemente der Arithmetik. Von Dr. Conradt. PG.

Putbus. Eine mathematische Abhandlung aus der Theorie der Krümmungslinien. Von Dr. Schulz. G.

Stettin. Ueber Lösung trigonometrischer Aufgaben. Von Dr. Lieber. G.

Stralsund. Bewegung eines Punktes auf einer gemeinen Kettenlinie. Von Dr. Glentzen. R.

Provinz Posen. Rawicz. Die neuere Geometrie und die Schule. Von Obl. Dr. Beyer. R.

Schrimm. Von der Congruenz der Zahlen. Von Dr. Szenic. G.

Provinz Schleswig-Holstein. Glückstadt. Bewegung der Energie in einem linearen Punktsystem. Von Dr. Thiele. G.

Provinz Schlesien. Glatz. Geometrische Uebungssätze und Construcaufgaben. Von Prof. Dr. Wittiber. G.

Gross-Glogau. Dreieckstafeln zum Gebrauch beim trigonometrischen Unterricht. Von Obl. Sachse. G.

Gross-Glogau. Wissenschaftliche Behandlung der Arithmetik. Von Prof. Uhdolph. G.

Kattowitz. Zur Integration einer partiellen Differentialgleichung. Von Dr. Frosch. G.

Reichenbach. Planimetrische Constructionen. Von Dr. Liersemann. R.

Landeshut. Ueber den mathematischen Unterricht. Von Pror. Schwarzkopf. R.

Provinz Sachsen. Magdeburg. Analystische Entwickelung von Sätzen der synthetischen Geometrie, welche Involutionen bei Curven 2. Ordnung betreffen. Von Dr. Silldorf. R. I. O.

Magdeburg. Ueber die windschiefe Fläche. $Z = Ry^3 x$. Von Dr. Hochheim. R. II. O.

Halberstadt. Polarcurven und Polcurven entsprechender Kegelschnitte. Von Heller. R.

Eilenburg. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit. Von Dr. Leiber. HB.

Naumburg. Eine Bemerkung zu einer Vierecksaufgabe. Von Dr. Neumüller. HB.

Seehausen. Ueber Kreiselbewegungen. Von Franke. G.

Nordhausen. Studien über Kegelschnittbüschel und eine gewisse Art von Curven 4. Ordnung. Von Dr. Wiesing. G.

Provinz Westfalen. Warendorf. Disputatio de linea curvata, quae respondet aequationi $x^3 + ay^2 + b^2 x = 0$. Von Zumloh. G.
Höxter. Analytische Beiträge zur Theorie der Kegelschnitte. Von Obl. Dr. Feldner. G.
Rietberg. Behandlung der Berührungsaufgaben. Von Pieper. P G.
Hamm. Anleitung zur Lösung planimetr. Constructionsaufgaben. Von Obl. Reidt. G.
Provinz Hessen. Cassel. Ueber die abwickelbaren Normalflächen bei Hyperboloiden, Erläuterungen zu den in Wien ausgestellten Unterrichtsmodellen. Von Dir. Wiecke. Gewerbsch.
Cassel. Untersuchungen über die Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems in seiner Ebene. Von Dr. Kramm. R.
Rheinprovinz. Mühlheim a. Rh. Zur Methodik des arithmetischen Unterrichts. Von Obl. Bode. R.
Coblenz. Die Seiten- und Ecktransversalen des Dreiecks. Von Dr. Maur. G.
Essen. Die Lehre vom Grössten und Kleinsten. Von Dir. Dr. Heilermann. R.

Bayern.

Hof. Beiträge zur Geschichte der Mathematik. Von Dir. Dr. Friedlein. G.
Eichstätt. Lehr und- Uebungsbuch für den Unterricht in der allg. Arithmetik und Algebra in der 4. Lateinclasse. Von Studienlehrer Hüdel. G.

Sachsen.

Dresden. Das Gompertz-Makehamsche Sterblichkeitsgesetz und seine Anwendung bei der Lebensversicherungs- und Rentenrechnung. Von Dr. Amthor. G.
Leipzig. Zur Geschichte des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an Gymnasien, insbesondere an der Thomasschule in Leipzig. Von Obl. Prof. Dr. Heym. G.
— Die Auflösung dreigliedriger algebraischer Gleichungen durch Reihen, mit einer Tabelle. Von Dr. A. Gebhardt. G.
Crimmitschau. Abriss der Projectionslehre für Realschulen. Von Dr. C. Fritsche. R.

Baden.

Karlsruhe, Neuere Geometrie für höhere Lehranstalten bearbeitet. Von Prof. Maier. R S.
Offenburg. Mathematische Geographie in erweiterten Volksschulen. 2. Thl. Von Stritt. R.

Hessen.

Bensheim. Mathematisch-physikalische Miscellen. Von Dr. Stoll. G.

Mecklenburg.

Güstrow. Ueber die Organisation des Unterrichts im Rechnen und in der Arithmetik. Von Dir. Seeger. R.
Neustrelitz. Ein kleiner Beitrag zum Schnellrechnen. Von Dir. Müller. R.

Oldenburg.

Jever. Versuch einer elementaren Erklärung der Nutation und Präcession der Tag- und Nachtgleiche. Von Obl. Happach. G.

Sachsen-Weimar.

Eisenach. Das Hyperboloid bei Räderwerken. Von Dr. Weissenborn. R G.

Sachsen-Altenburg.

Eisenberg. Ueber die geradlinige Bewegung eines Punktes. Von Obl. Dr. Franke. P G.

Schwarzburg.

Rudolstadt. Darlegung der hauptsächlichsten Richtungen, welche in der geometrischen Formenlehre eingeschlagen worden sind. Von Mohr. G.

Oesterreich.

Wien. Ueber die Zuverlässigkeitsgrenze der Resultate bei Rechnungen mit unvollständigen Zahlen. Von Prof. Treichl. G.

—. Untersuchungen über das Grundriss-Isophoten-System des elliptischen und hyperbolischen Paraboloids.

Seitenstetten. Compendium der Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Römern. Von Schlögelhöfer. G.

Cilli. Die merkwürdigen Punkte und Linien der dreiseitigen Pyramide. Von Prof. Dr. Maurer. G.

Bozen. Ueber das Wurzelziehen aus irrationalen Grössen. Von v. Aichinger. G.

Brüx. Einige Principien der analytischen Mechanik und ihre Anwendung zur Erklärung verschiedener Bewegungs-Erscheinungen, besonders derjenigen an Gyroskopen. Von Tamchyna. G.

Reichenberg. Untersuchung der Oberflächen und Rauminhalte jener Körper, die durch Rotation eines Kreissegmentes um eine in dessen Ebene liegende und zu dessen Sehne parallele Axe entstehen. Von Prof. Streit. G.

Laibach. Directe Deduction der Begriffe der algebraischen und arithmetischen Grundoperationen aus dem Grössen- und Zahlenbegriffe. Von Prof. Finger. R.

Leipa. Die schiefe Projection. Von Prof. Walda. R.

Prag. Theorie und Gebrauch des logarithmischen Rechenstabes. Von v. Ott. R.

Krems. Ueber die Functionen $C_n^{\nu}(x)$ und $D_n^{\nu}(x)$. Von Gegenbaur. R

Leitmeritz. Ein Beweis des Eulerschen Lehrsatzes über die Polyeder. Von Langer. G.

Marburg. Ableitung und einige Anwendungen des Begriffs „Rest einer discontinuirlichen Function." Von Wretschko. G.

Naturwissenschaftliche Abhandlungen.

Preussen.

Provinz Preussen. Danzig. Bemerkungen zu Laplace's Hypothese über die Entstehung unseres Planetensystems. Von Dr. Ohlert. G.

Tilsit. Ueber den naturwissenschaftlichen Unterricht. Von Bartsch. Töchtersch.

Rastenburg. Ueber die Schwingungsrichtung der Aethertheilchen im polarisirten Licht. Von Schaewen. G.

Provinz Brandenburg. Berlin. Was hat die Naturphilosophie geleistet, um die physikalischen Vorstellungen von der Constitution der Materie zu bereichern. Von Obl. Dr. le Viseur. Friedrichs-G.

Perleberg. Ein Sommerausflug nach Skandivavien. Von Dir. Dr. Laubert. R.

Luckenwalde. Flora der Umgegend von Luckenwalde. Von Dr. Lichtenberg. HB.

Lübben. Beiträge zur Geschichte der Gährungstheorien. Von Krause. R.

Berlin. Ueber Sprengmittel und deren Anwendung auf Torpedos. Von Dr. Schellbach. Stralauer HB.

Provinz Pommern. Anklam. Beobachtungen der Sonne. Von Prof. Dr. Spörer. G.

Demmin. Ebbe und Fluth. Von Seltmann. G.

Gartz. Die Beweise für die Achsendrehung der Erde in populärer Darstellung. Von Lühmann. PG.

Wolgast. Beobachtungen über die Entwickelungszeit der Pflanzen zu Wolgast in den Jahren 1870—72. Von Roth. HB.

Provinz Posen. Meseritz. Ueber die Verbindung elektromotorischer Elemente zu einer Batterie. Von Obl. Hahnrieder. G.

Ostrowo. Flora Ostroviensis. Von Obl. Marten. G.

Bromberg. Der naturwissenschaftliche Unterricht in der Bürgerschule. Von Freyer. Bürgersch.

Provinz Schlesien. Sprottau. Ueber den chemischen Unterricht an unserer Realschule. Von Dr. Schieweck. R.

Löwenberg. Vulkane und Erdbeben mit Rücksicht auf ihre wahrscheinlichen Ursachen. Von Dr. Meyer. HB.

Gleiwitz. Die Dampfmaschine auf der Wiener Weltausstellung. Von Dr. Kessler. Gewerbesch.

Neisse. Ueberflüssige Lamellen. Von Dir. Dr. Sondhauss. R.

Oels. Ueber Telegraphie. Von Dr. Anton G.

Görlitz. Ueber Linsensysteme. Von Dr. Putzler. G.

Beuthen. Schiaparellis Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. Von Dr. Fiebig. G.

Neustadt. O. S. Der Diamant, sein Vorkommen und seine Entstehung. Von Obl. Dr. Exner. G.

Provinz Sachsen und Hannover. Halle. Die Theorie der Spiegel für den Schulunterricht. Von Dr. Sommer. R.

Harburg. Bemerkungen über Einrichtung und Gebrauch der Aneroidbarometer. Von Obl. Dr. Schultze. R.

Provinz Schleswig. Flensburg. Die astronomische Geographie der Griechen bis auf Eratosthenes. Von Dr. Schäfer. G.

Hadersleben. Uber die Flora der Umgegend von H. Von Dr. Fischer und Steinvorth. G.

Altona. Der Regenbogen. Von Obl. Brunkhorst. R.

Kiel. Ueber den Ausfluss des Wassers aus Gefässen in 2 besonderen Fällen nach Eintritt des Beharrungszustandes. Von Dir. Dr. Meissel. R.

Provinz Westphalen. Bochum. Der deutsche Nord- und Ostseestrand von Obl. Faber. G.

Münster. Einiges aus den Elementen der Chronologie. Von Dr. Egen. R.

Iserlohn. Ueber den chemischen Unterricht auf Realschulen. Von Dir. Dr. Langguth. R.

Siegen. Bemerkungen über den Unterricht in der Chemie auf Realschulen. Von Dir. Dr. Schnabel. R.

Hagen. Der Portland-Cement. Von Bahls. Gewerbesch.

Rheinprovinz. Ruhrort. Mikrochemische Reactionen. Von Dr. Zösinger. R.

Mayen. Die Lehre Darwins über die Entstehung der Arten, kritisch beleuchtet. Von Dr. Riegel. HB.

Aachen. Ueber Athmung und Ernährung. Von Dr. Lieck. R.

Barmen. Der naturkundliche Unterricht in Haus und Schule. Von Rector Holthausen. Töchtersch.

Sachsen.

Chemnitz. Ueber die Gelenke der Insecten. Von Dr. O. Liebe. G.

—. Ueber die Messung hoher Temperaturen. Von Prof. Dr. Weinhold. Gewerbesch.

Württemberg.

Heilbronn. Flora der Heilbronner Stadtmarkung. 4. Beitrag. Von Prof. Kehrer. G.

Baden.

Donaueschingen. Ueber mikroskopische Unterrichtsobjecte. Von Dr. Schneyder. Pg.

Mannheim. Dichtigkeitsmessungen fester Körper. Von Dir. Schröder. R G.

Hessen.

Mainz. Der Manzanillo. Von Dir. Dr. Schödler. R.

Oldenburg.

Oldenburg. Das Verdichtungsgesetz für den Uebergang aus dem gasförmigen in den flüssigen Aggregatzustand. Von Prof. Osterbind. R.

Braunschweig.

Wolfenbüttel. Die geologischen Anschauungen des Philosophen Seneca. Von Dr. Nehring. G.

Sachsen-Coburg.

Coburg. Beschreibung einiger Versuche über tönende Flammen. Von Dr. Mauritius. G.

Gotha. Organisation des naturwissenschaftl. Unterrichts im sechsclassigen Seminar. Von Burbach. Seminar.

Sachsen-Meiningen.

Meiningen. Geologische Skizze der Gegend um Meiningen. II. Thl. Von Dir. Emmrich. R.

Reuss.

Schleiz. Populäre Darstellung der Entwickelung der mechanischen Wärmetheorie. Von Dr. A. Westphal. G.

Oesterreich.

Baden. Die Fermente. Von Dr. Bersch. RG.

Salzburg. Das Gletscherphänomen. Beitrag zu einer populären Geographie der Alpen. Von Prof. Richter. G.

Brixen. Gartenflora von Brixen. Von Dir. Bachlechner. G.

Pilsen. Geologische Verhältnisse der Umgebung von Pilsen. Von Prof. Jahn. G.

Prag. Ergebnisse der neueren Untersuchungen über die Spektra glühender Gase. Von Dr. Weisar. G.

Leitmeritz. Geologische Studien aus Böhmen. Von v. Wolfinau. R.

Prag. Die Gesetze der Ernährung, als Beitrag zur Beurtheilung des Preises menschlicher Arbeit. Von Dr. Willigk. R.

Znaim. Farbenringe in aus einaxigen Krystallen senkrecht zur Axe geschnittenen Platten bei Anwendung von linear und elliptisch polarisirtem Lichte. Von Prof. Schüller. R.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dgl.)

I. Referate über Schulgesetzgebung, Schulverwaltung und über Versammlungen.

A) Aus dem Regulativ für die Elementarschulen in Elsass-Lothringen (Allgm. Schulzeitung Nr. 27).

Obgleich unsere Zeitschrift den Volksschulunterricht nicht zum Gegenstande der Behandlung hat, so dürfte es doch nicht uninteressant sein, einmal zu hören, wie denn die von ihr vertretenen Lehrfächer nach einer preuss. Verordnung neueren Datums (4. Jan. d. J.) in der Volksschule, aus welcher ja die höheren Lehranstalten sich rekrutiren, behandelt werden sollen, namentlich auch deshalb, weil in einer Anmerkung des obigen Blattes (von der Redaction?) gesagt wird: „Sollte die Voraussetzung richtig sein, dass die Grundzüge dieses Regulativs sich in dem zu erwartenden preuss. Schulgesetze wiederspiegeln werden, so dürfte dasselbe die Beachtung der deutschen und namentlich preussischen Lehrer besonders beanspruchen.“ Die für unsern Leserkreis etwa wichtigen Bestimmungen sind:

11. Im Rechnen sollen die Kinder befähigt werden, die im bürgerlichen Leben vorkommenden Aufgaben zu lösen. Insbesondere ist das Kopfrechnen zu üben, welches bei jeder neuen Rechnungsart dem Tafelrechnen vorangeht. In den 4 ersten Schuljahren bilden die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen das Uebungsfeld. Danach muss die Rechnung mit gemeinen und endlich mit decimalen Brüchen nebst wiederholter Einprägung des metrischen Systems bis zur völligen Gewandtheit geführt und mit den gewöhnlichen Preis- und Raumberechnungen veranschaulicht werden.

12. Der Unterricht in der Raumlehre findet auf der Mittelstufe seine Grundlegung mittelst des Zeichenunterrichts, welcher sich im Wesentlichen auf Darstellung geometrischer Figuren und Körper, sowie einfach gestalteter Gegenstände der täglichen Anschauung beschränkt. Das Pensum der Raumlehre für die einclassige Schule bilden: die Linien, die Winkel, die regelmässigen Figuren, der Kreis und die regelmässigen Körper. In der mehrclassigen Schule kommt die Lehre von der Gleichheit und Congruenz hinzu. Die Berechnung des Flächenraums und des Körperinhalts für den Bedarf im bürgerlichen Leben bildet das praktische Ziel.

13. Der geographische Unterricht geht auf der Mittelstufe von der Heimathskunde aus, umfasst zunächst Elsass-Lothringen und darauf ganz Deutschland, hernach das Hauptsächlichste aus der allgemeinen Weltkunde: Gestalt und Bewegung der Erde, Tages- nnd Jahreszeiten, Zonen, Erdtheile, die grössten Gebirge und Ströme, die Hauptstaaten und Hauptstädte.

15. In der Naturgeschichte bilden, ausser der Belehrung über Bau und Pflege des menschlichen Körpers, den Gegenstand des Unterrichts: die einheimischen Gesteine, Pflanzen und Thiere; von den ausländischen hauptsächlich nur die hervorragenden Thiergestalten und die bekannten Culturpflanzen (z. B. Baumwollenstaude, Theestrauch, Kaffeebaum, Zuckerrohr). Von den einheimischen treten in den Vordergrund jene, welche durch den Dienst, den sie dem Menschen leisten (z. B. Hausthiere, Vögel, Seidenraupe, Getreide und Gespinnstpflanzen, Obstbäume, das Salz, die Kohle), oder durch den Schaden (Giftpflanzen), oder durch die Eigenthümlichkeiten ihres Lebens und ihrer Lebensweise (z. B. Schmetterling, Trichine, Bandwurm, Biene, Ameise), besonderes Interesse erregen und zur Belehrung über Landwirthschaft, Handel und Gewerbe Anlass bieten. In der mehrclassigen Schule findet neben Vermehrung der Gegenstände auch eine systematische Ordnung derselben und ein näheres Eingehen auf ihre gewerbliche Nutzbarkeit statt.

16. Die Naturlehre beschränkt sich in der einclassigen Schule auf die Oberstufe, und bilden die wichtigsten, im täglichen Leben vorkommenden Werkzeuge den Gegenstand einfacher, auf Anschauung gegründeter Belehrung. In der mehrclassigen Schule ist der Stoff so zu erweitern, dass das Wichtigste aus der Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung der Körper, vom Schall, vom Lichte und von der Wärme, vom Magnetismus und der Elektricität gegeben wird, und die Kinder im Stande sind, die gewöhnlichen Naturerscheinungen und die gebräuchlichsten Maschinen zu erklären.

18. Der Zeichenunterricht soll den Schülern die für das tägliche Leben erforderliche Geschicklichkeit im Gebrauche des Lineals und des Zirkels, sowie die Fertigkeit aneignen, auch ohne diese Hilfsmittel einfache Figuren in verjüngtem oder erweitertem Massstabe wiederzugeben. In der mehrclassigen Schule wird auf der Oberstufe nach Vorlagen und Modellen gezeichnet. Ebendaselbst wird die geometrische Formenlehre zu besonderer Behandlung erweitert und mit der Raumlehre und dem Rechenunterricht in Verbindung gesetzt.

22. Unterricht in der Obstbaumzucht soll das Interesse für dieselbe wecken und die Handgriffe einüben.

B. Aus den Verhandlungen der sächs.-thür. Realschulmänner zu Halle (6. 7. Juni d. J.) ist zu bemerken ein Vortrag des Realschuldir. Koch aus Erfurt „über die Unterstützung des naturw. Unterrichts durch das Zeichnen." Der Vortragende vertheilte eine hierüber verfasste Broschüre unter die Versammelten*). Die Versammlung erklärte sich mit der auf Grund dieses Vortrags gestellten These einverstanden. Hierauf sprach Director Schrader über die „Concentration des Unterrichts in der Realschule" und entwickelte dabei in lebhafter Weise die Ansicht, dass, um die so sehr wünschenswerthe Concentration zu erreichen, nach einander einzelne von den Unterrichtsgegenständen der Realschule in den Vordergrund treten müssten: 1) in den 2 untern Classen Latein, 2) in den 2 mittleren die neuern Sprachen, 3) in den obern Mathematik und Naturwissenschaften. Diese Ansichten erweckten starken Widerspruch, namentlich von Seiten des Directors Dr. Hüser aus Aschersleben, der in längerem Vortrage unter dem Beifalle der Versammlung sowohl das unzweckmässige jener aufeinanderfolgenden Bevorzugung nachwies, als auch entschieden betonte, dass die Klage über Zersplitterung der Kräfte der Realschüler gar nicht so begründet sei. Nachdem unter anderen Dr. O. Richter-Eisleben hervorgehoben hatte, dass die Realschule darnach trachten müsse, die Gegenstände dadurch möglichst in Beziehung zu einander zu setzen, dass sie dieselben für die vaterländische Erziehung nutz-

*) Wir bitten d. H. Verf., falls er dies lesen sollte, um Zusendung eines Exemplars.
D. Red.

bar mache (namentlich die fremden Sprachen, Geschichte, Geographie etc.), lehnte die Versammlung die wesentlichsten Punkte der Schrader'schen Thesen ab und sprach sich nur im Allgemeinen dafür aus, dass nach Concentration im Unterrichte der Realschule zu streben sei, und erklärte sodann, dass die häusliche Arbeit der Schüler im Interesse jener Concentration auf eine Anzahl von Hauptfächern möglichst beschränkt werden solle (letzte These des Directors Schrader). (Allg. Schulz.)

C. Aus den Verhandlungen des Vereins von Lehrern für Unterrichtsanstalten der Prov. Schlesien (25. 26. Mai d. J.) entnehmen wir dem Vortrage von Zopf-Brieg „über die Stellung der hohen Schulen zu dem in Aussicht stehenden Unterrichtsgesetze" folgende unsere Fächer berührende Thesen:

1) Realschulen und Gymnasien müssen als höhere Schulen betrachtet werden, welche ihre Zöglinge zu akademischen Studien befähigen.

2) In den Realschulen ist deshalb der Unterricht im Latein bis nach Prima hinein wesentlich zu verstärken und — sollen die Realschulen zu allen akademischen Studien befähigen — auch das Grichische in 4 Jahrescursen (IV bis IIb incl.) wie auf den Gymnasien zu betreiben, erst in Ober-Secunda aber in Wegfall zu bringen und durch die Beschäftigung mit dem Englischen und durch gesteigerten mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht zu ersetzen.

3) Dem Unterricht in der Geographie ist in allen Classen Raum zu gewähren.

4) Der Unterricht in den Naturwissenschaften ist in den Gymnasien durch alle Classen fortzuführen; er darf weder in IV noch in III ausfallen; in den oberen Classen ist er ein wenig (sic!) zu verstärken, damit die Schüler auch in der inductiven Forschungsmethode so viel Uebung erlangen, um naturwissenschaftliche Studien auf den Universitäten mit Erfolg betreiben zu können. (Allg. Schulz.)

D. Reorganisation der Unterrichtsabtheilung des sächs. Cultus-Ministeriums.

Im sächs. Unterrichtsministerium, das fortan von der Kirchenabtheilung (dem „Consistorium") getrennt ist, sind zu Referenten theils ernannt, theils von früher beibehalten worden:

Geheimrath Dr. Gilbert für die Gymnasien.
Geheimrath Dr Schlömilch für die Realschulen.
Geh. Schulrath Dr. Bornemann für die Seminarien.
Geh. Schulrath Dr. Kockel für die Volksschulen.

Die Realschullehrer Sachsens setzen, wie verlautet, grosse Hoffnungen namentlich auf die obengenannte zweite Persönlichkeit.

E. Nach einer Zeitungsnachricht erhält Jena jetzt (schon?) eine Prüfungscommission für Candidaten d. h. Schulamts. Wir haben unsrer Verwunderung über den Mangel einer solchen schon Ausdruck gegeben im 2. Heft d. J. S. 169. Wir werden hoffentlich später Genaueres über diese neue Errungenschaft mittheilen können.

II. Mathematische und naturw. Universitäts-Seminare.*)

Bekanntmachung,
die Errichtung eines physikalischen Seminars an der Grossherzoglichen Landes-Universität betreffend.

Seine Königliche Hoheit der Grossherzog haben die Errichtung eines physikalischen Seminars an der Grossherzoglichen Landes-Universität auf den Grund der nachstehenden Statuten Allerhöchst zu genehmigen geruht, was hiermit zur öffentlichen Kenntniss gebracht wird.

Darmstadt, den 29. April 1862.

Grossherzogliches Ministerium des Innern.

In Verhinderung des Ministers:

v. Bechtold. Zimmermann.

Statuten des physikalischen Seminars an der Grossherzoglichen Landes-Universität zu Giessen.

§ 1. Das physikalische Seminar ist ein öffentliches, praktisches, mit der Landes-Universität verbundenes Institut, bestimmt: im Allgemeinen, um die physikalische Bildung Studirender zu befördern, und insbesondere, um eine Pflanzschule physikalisch gebildeteter Lehrer für die höheren Unterrichtsanstalten zu werden.

§ 2. Die zu diesem Zwecke angeordneten Uebungen werden bestehen: 1) in examinatorischer Behandlung der verschiedenen Zweige der Physik und Mechanik; wo es erforderlich ist, verbunden mit experimentellen Uebungen und Erklärungen physikalischer Geräthschaften. 2) In Anleitung zur Bearbeitung physikalischer Arbeiten nnd Vorträge.

§ 3. Die Uebungen im physikalischen Seminar zerfallen in experimental-physikalische und mathematisch-physikalische. Für jede derselben, sowohl für die experimental-physikalischen wie für die mathematisch-physikalischen Uebungen sind zweimalige Zusammenkünfte wöchentlich festgesetzt und auf solche Tage und Tageszeiten verlegt, an welchen Collision mit andern akademischen Vorträgen möglichst vermieden wird.

§ 4. Der Unterricht wird von den daran betheiligten Lehrern insoweit gemeinschaftlich geleitet, als dieselben bezüglich der Wahl der Uebungsgegenstände sich mit einander zu besprechen und ihre Unterrichtspläne zu vergleichen haben.

§ 5. Um die Einheit des Institutes und die mit dieser Einheit verbundenen Vortheile in jeder Beziehung festzuhalten, ist dem einen Lehrer, als Director, ausser der Leitung im Allgemeinen, die Ueberwachung aller derjenigen Interessen des Seminars anvertraut, welche sich nicht unmittelbar auf die Anordnung und den Stoff des Unterrichts beziehen, wie die Verwaltung etwa entstehenden Eigenthums und die Vertretung gegenüber den Universitätsbehörden und dem Ministerium des Innern.

§ 6. Die Mitglieder des Seminars sind theils ordentliche, theils ausserordentliche. Nur die ersteren betheiligen sich selbstthätig an den experimentellen und schriftlichen Uebungen unter Controle der Lehrer.

§ 7. Die Zahl der ordentlichen Mitglieder soll die von 8 nicht übersteigen. Bedingung der Aufnahme unter diese Zahl ist: befriedigender Nachweis der erfoderlichen Vorkenntnisse, wozu wenigstens einjähriger Besuch mathematischer und physikalischer Vorlesungen auf einer Universität als unerlässlich gehört. Studirende, welche als ordentliche Mitglieder einzutreten wünschen, haben sich rechtzeitig bei dem Director des Institutes

*) Vergl. Hft. 2 d. Jahrg. Seite 169—175. D. Red.

zu melden und die Belege für ihre Befähigung beizubringen. Werden diese als genügend gefunden, so geschieht die Aufnahme, soweit erledigte Stellen vorhanden sind, durch den Director. Bei sonst gleicher Berechtigung verschiedener Bewerber entscheidet die Zeit der Anmeldung. Die ordentlichen Mitglieder verpflichten sich an sämmtlichen Uebungen und Verhandlungen im Seminar Theil zu nehmen, die von ihnen übernommenen Arbeiten mit Fleiss und Pünktlichkeit auszuführen und im Laufe eines Semesters aus dem Seminarium nicht willkürlich auszutreten.

§ 8. Die Zahl der ausserordentlichen Mitglieder bleibt unbestimmt. Als ausserordentliches Mitglied kann jeder Studirende eintreten, der sich zu Anfang des Semesters meldet, indem er seine Absicht ausspricht, gewissen Uebungsstunden, nach eigner Wahl, regelmässig beiwohnen zu wollen. Die Anmeldung geschieht in diesem Falle bei dem betreffenden Lehrer.

§ 9. Die ausserordentlichen Mitglieder erhalten durch fleissigen und eifrigen Besuch sämmtlicher Uebungsstunden des Seminars die Anwartschaft auf erledigte Stellen ordentlicher Mitglieder, wobei ihnen im Falle der Concurrenz mit solchen Bewerbern, die früher nicht ausserordentliche Mitglieder waren, der Vorzug zugestandeu wird.

§ 10. Ausländer können auf dieselbe Weise wie Inländer, sowohl unter die ausserordentlichen wie die ordentlichen Mitglieder aufgenommen werden.

§ 11. Bei der Aufnahme haben die ordentlichen Mitglieder 2 Gulden, die ausserordentlichen 1 Gulden zu erlegen. Diese Beiträge sollen für die Bibliothek der Universität und zwar zur Anschaffung physikalischer Zeitschriften verwendet werden. Armuthszeugnisse ertheilen keine Dispensation von Erlegung dieser beim Anfang jeden Semesters zu zahlenden Eintrittsgelder.

§ 12. Ordentliche Mitglieder erhalten zu ihrer Legitimation einen vom Director ausgestellten Receptionsschein, auf welchem später auch ihre Entlassung, wenn sie mit Ehren aus der Anstalt treten, vom Director bemerkt werden muss. Ohne diesen Beisatz hat der Schein, als Zeugniss stattgefundener Theilnahme an der Anstalt, späterhin keine gesetzliche Geltung.

§ 13. Um den ordentlichen Mitgliedern die Benutzung der Universitätsbibliothek zu erleichtern, kann jedem derselben eine Generalbürgschaft für die ein Semester hindurch zu leihenden Bücher vom Director ausgestellt werden.

§ 14. Diejenigen Seminaristen des Inlandes, welche sich durch gesittetes Betragen, Fleiss und wirkliche Fortschritte auszeichnen, sollen, wenn sie dürftig sind, bei der Vertheilung von Stipendien berücksichtigt werden. Auch sollen ihre Zeugnisse dereinst bei der Staatsprüfung, sowie bei der Besetzung entsprechender Lehrerstellen, Berücksichtigung finden.

Statuten des mathematischen Seminars an der k. Universität Würzburg.

§ 1. Das Seminar bezweckt zunächst die Ausbildung von Lehrern für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Zugleich soll es den Studirenden Gelegenheit bieten, sich mit solchen Theilen der Mathematik bekannt zu machen, welche in den gewöhnlichen akademischen Vorträgen kurz oder gar nicht behandelt werden. Auch soll die Anstalt überhaupt zur Hebung des Studiums der mathematischen Wissenschaften beitragen.

§ 2. Das Seminar zerfällt in 2 getrennte Abtheilungen, in das Unter- und Oberseminar. Dem Vorstande des Seminars wird zu Unterstützung ein Assistent beigegeben, in Bezug auf welchen dem Vorstande das Präsentationsrecht zusteht.

§ 3. Mitglied des Unterseminars kann jeder immatriculirte Student werden, der die nöthigen Vorkenntnisse aus dem Gebiet der Elementarmathematik nachweist und der zu diesem Zwecke sich beim Vorstande zu melden hat. — Für die Arbeiten des Unterseminars sind wöchentlich 2 Stunden bestimmt. Es werden schriftlich und mündlich zu lösende Aufgaben und Probleme vorgelegt, die den Gebieten der Elementarmathematik, der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie angehören, woran theoretische Erörterungen und gegenseitige Besprechungen sich knüpfen.

§ 4. Mitglied des Oberseminars kann jeder immatriculirte Student werden, der in einem von dem Vorstande des Seminars abzuhaltenden Examen eine genaue Kenntniss der Differentialrechnung und der Anfänge der Integralrechnung sowie der analytischen Geometrie nachweist. In der Regel erfolgt der Eintritt in's Oberseminar nicht vor dem 5. Semester. — Für die Arbeiten des Oberseminars sind ebenfalls wöchentlich 2 Stunden bestimmt. Die im Oberseminar zu behandelnden Aufgaben und Probleme werden den Gebieten der Integralrechnung, der höheren Functionslehre, der höheren Geometrie und der analytischen Mechanik entnommen. Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten und zu Referaten über ältere und neuere Literatur wird gegeben. Ebenso Gelegenheit zu Vorträgen über Gegenstände der reinen und angewandten Mathematik.

§ 5. Der Unterricht im mathematischen Seminar wird honorarfrei ertheilt. Dagegen sind die Mitglieder verpflichtet an allen Stunden der Abtheilung, der sie angehören, Theil zu nehmen und die vom Vorstande ihnen übertragenen Arbeiten zur rechten Zeit zu vollenden. Der Vorstand kann solche Mitglieder, welche ihren Verpflichtungen nicht nachkommen oder die nöthige Vorbildung sich zu verschaffen unterlassen, aus dem Seminare ausschliessen.

§ 6. Es wird eine Summe von jährlich 200 Fl. ausgesetzt, aus welcher gegen das Ende jeden Jahres denjenigen Mitgliedern, welche sich in demselben am meisten ausgezeichnet haben, Prämien zu bewilligen sind. Aus dieser Summe dürfen höchstens 6 Prämien gebildet werden. — Wird die Summe von 200 Fl. in einem Jahre nicht erschöpft, so wächst der Rest dem nächstjährigen Prämienfond zu. Die Vorschläge über die Prämien-Vertheilung hat der Vorstand des math. Sem. bei der philosoph. Facultät einzureichen. Dieselben gelangen mit der Facultätsäusserung an den Senat der k. Univ. Würzbg., der sie, begleitet mit einem Gutachten, dem k. Staatsministerium vorlegen wird.

§ 7. Zur Gründung und successiven Herstellung einer Seminarbibliothek ist eine Summe von jährlich 200 Fl. bestimmt. Die Verwaltung dieser Bibliothek und ihrer Regie hat der Vorstand.

§ 8. Es steht dem Vorstande frei, Zuhörer zu seinen Vorträgen im Seminar zuzulassen.

§ 9. Die Uebungen des math. Seminars werden in jedem Semester neben den sonstigen Vorlesungen im Vorlesungskatologe angekündigt.

§ 10. Der Vorstand führt ein Verzeichniss über die laufenden Arbeiten, in welcher zugleich die grösseren Arbeiten der Mitglieder anzugeben und zu beurtheilen sind. Dasselbe bildet die Grundlage des alljährlichen Berichts des Vorstandes über den Zustand des Sem., welcher dem Senate der k. Univ. Wzbg. und dem k. Staats-Ministerium vorzulegen ist.

NB. Ein mathematisch-naturwissenschaftliches Seminar besteht an hiesiger Universität nicht.

Wegen momentaner Abwesenheit des Decans der philosophischen Facultät.

Würzburg, 21. August 1874.

Kgl. Universitäts-Secretariat.
Pfeiffer v. n.

Statuten für das mathematisch-physikalische Seminar in Heidelberg.

§ 1. Das mathematisch-physikalische Seminar in Heidelberg hat den Zweck, die Studirenden der Mathematik und Physik 1) zu selbständigen und wissenschaftlichen Arbeiten anzuleiten und 2) sie im Vortrage, sowie in der schulmässigen Behandlung wissenschaftlicher Gegenstände aus den genannten Disciplinen zu üben.

§ 2. Das mathematisch-physikalische Seminar zerfällt in die Abtheilung für Mathematik und in die Abtheilung für Physik. Die Leitung der ersteren hat der Ordinarius der Mathematik, die Leitung der letzteren der ordentliche Professor der Physik.

§ 3. Als ordentliche Mitglieder einer dieser zwei Abtheilungen oder beider sind nur diejenigen immatriculirten Studirenden zuzulassen, welche sich vorzugsweise der Mathematik und Physik widmen.

§ 4. Die Aufnahme in jede der beiden Abtheilungen erfolgt mit dem Beginn des Semesters auf persönliche Anmeldung bei dem betreffenden Director. — Der Austritt findet nur mit dem Schlusse des Semesters statt. Die ordnungsmässig Austretenden erhalten auf Verlangen ein auf ihre ganze Seminarzeit sich beziehendes Seminarzeugniss.

§ 5. Alle Mitglieder haben die Verpflichtung an den sämmtlichen Uebungen ihrer Abtheilung regelmässig und selbstthätig sich zu betheiligen. — Mitglieder, welche ihren Pflichten trotz widerholter Mahnung nicht nachkommen, können durch den betreffenden Director ausgeschlossen werden.

§ 6. Nicht zur Mitgliedschaft befähigte Studirende sowie andere hinreichend vorgebildete Personen, insbesondere angestellte Lehrer und Lehramtspraktikanten können in jeder der beiden Abtheilungen als freie Zuhörer, welche an den Uebungen des Seminars Theil nehmen, jedoch auf Prämien (§ 10) keinen Anspruch haben, auf erfolgte Anmeldung durch den betreffenden Director, nach Bemessen desselben zugelassen werden.

§ 7. Die mathematische Abtheilung zerfällt wieder in 2 Abtheilungen. In die ersten werden die Studirenden, für welche die Bestimmung des § 3. zutrifft, auf ihre Meldung hin aufgenommen, in die zweite können sie nur eintreten auf Grund eines von dem Director anzustellenden Colloquiums. — Ausnahmen sind nur aus besonderen Gründen zulässig. Die Entscheidung hat der Abtheilungsdirigent.

§ 8. In jeder der beiden mathematischen Abtheilungen müssen alle 14 Tage Uebungen angestellt werden. Die schriftlichen Arbeiten sind von den Theilnehmern innerhalb der von dem Director zu bestimmenden Zeit an diesen abzugeben und werden von demselben beurtheilt.

§ 9. Die Uebungen der physikalischen Abtheilung sollen im Sommer stattfinden. In jeder Woche wird eine theils experimentelle, theils theoretische Aufgabe gegeben und allen Mitgliedern bezw. Zuhörern zusammen in einem Vortrage erläutert. Dann stellen diese die betreffenden Versuche einzeln unter Leitung des Directors an, führen zu Hause die nöthigen Betrachtungen und Rechnungen durch und legen schliesslich eine schriftliche Darstellung der ganzen Arbeit vor.

§ 10. Die im Laufe des Semesters eingereichten besten schriftlichen Arbeiten erhalten Prämien, deren Grösse innerhalb des bewilligten Betrags von den Dirigenten bestimmt wird. Für solche Prämien, sowie zur Bestreitung etwaiger Kosten der physikalischen Versuche wird dem Seminar ein Credit von 300 Thlr. aus Universitätsmitteln bewilligt. Die Vertheilung dieser Geldmittel ist zunächst dem Einverständniss der Directoren anheim gegeben.

§ 11. Ueber die verliehenen Prämien erstatten die Directoren durch Vermittlung des engeren Senats jährlich einen Bericht an das gr. Ministerium des Innern, in diesem Bericht werden zugleich die Nachrichten über die in den zunächst vorausgegangen Semestern angestellten Uebungen, über die eingelieferten Arbeiten und über den Zustand des Seminars aufgenommen.

Bei der mathematisch-naturwissenschaftlichen Prüfung der Lehramtscandidaten wird von den Examinatoren soweit thunlich billige Rücksicht auf die Disciplinen genommen werden, mit denen sich der Candidat im Seminar speciell beschäftigt und in welchen er selbständige Untersuchungen gemacht hat.

Nachschrift der Redaction.

Herr Prof. Königsberger in Heidelberg schreibt uns hierzu: „Durch meine Berufung nach Dresden scheide ich von Ostern 1875 ab aus dem Vorstande des Seminars aus, eröffne jedoch an der polytechnischen Schule zu Dresden in Verbindung mit der dortigen früheren Lehrerabtheilung (jetzigen mathem.-physikal. Abth.) ein Unterseminar für mathem. Uebungen und ein Oberseminar zur Anfertigung selbständiger Arbeiten.“

Keins der genannten Seminare, deren Statuten im Vorstehenden mitgetheilt wurden, ist eine Bildungsanstalt für Lehrer zum Zwecke ihrer praktischen Ausbildung für den Unterricht, denn keine hat eine Seminar-Uebungsschule; vielmehr sind es nur sog. wissenschaftliche Seminare zur Erweiterung und Vertiefung des Fachwissens. In der „Ausbildung“ von Lehrern (Würzburg § 1.) und in der „schulmässigen Behandlung“ (Heidelberg § 1.) scheint uns daher mehr versprochen worden zu sein, als gehalten werden kann.

4. Aus Kiel schreibt uns Hr. Prof. Himly, Decan der philos. Facultät: „Verfehle nicht auf Ihr Schreiben vom . . . . zu erwidern, dass ein math.-naturw. Seminar noch nicht besteht, aber in Aussicht genommen ist. Soviel als thunlich, wird dasselbe durch Privatissima ersetzt.“

Ueber das Universitäts-Seminar in Pesth sowie über die Wiener Anstalten der Art wollen wir im nächsten Hefte berichten, namentlich deshalb, weil wir über diese Anstalten etwas mehr, als über die andern zu sagen haben.

III. Notizen über Lehrmittel.

Institut verkäuflicher zooplastischer Präparate von Rudolph Koch in Münster i/W.

Verdienst-Medaille der Wiener Weltausstellung 1873. Goldene Medaille der internationalen Gartenbau-Ausstellung zu Hamburg. Verdienst-Medaille der internationalen landwirthschaftlichen Ausstellung zu Bremen 1874. Zwei Staats-Medaillen des Königl. Preuss. Ministeriums für landwirthschaftliche Angelegenheiten. Grosse und kleine silberne Medaille des westfälisch-rheinischen Vereins für Bienenzucht und Seidenbau. Silberne Medaille des Gartenbau-Vereins zu Münster.

1) „Wir stehen — so schreibt Herr Prof. Hoffmann in d. offic. Ausstellungszeitung No. 3233 (abgedr. in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Band IV. pag. 321) — im deutschen Unterrichts-Pavillon der Wiener Welt-Ausstellung vor jenen eigenthümlichen Präparaten, in denen der Laie ein anziehendes und belehrendes Object seiner Schaulust, der Naturfreund einen Gegenstand seiner stillen Bewunderung, und vor Allem der Lehrer der Naturgeschichte ein vorzügliches, fast möchten wir sagen — neues Lehrmittel findet, das ihm zeigt, wie er in der Schule Naturgeschichte treiben soll, ein Lehrmittel, das zugleich beweist, wie man mit ausserordentlich geringen Mitteln Bedeutendes zu leisten vermag, wenn sich Beobachtungsgabe mit ausdauerndem Fleisse vereint.“

„Gewiss durch diese Methode wird der naturgeschichtliche Unterricht aus den Fesseln todter Naturbeschreibung erlöst; er erhält neues Leben und wird zur wahren Naturgeschichte.“

„Deshalb darf die Methode des Herrn Prof. Dr. H. Landois, die vorher wohl kaum von Jemandem in dieser Ausdehnung auch nur versucht worden ist, bahnbrechend genannt werden. Wir fühlen uns verpflichtet, im Namen aller Lehrer der Naturgeschichte dem Herrn Prof. Dr. H. Landois öffentlich hier in diesem Unterrichtsorgane, den ihm gebührenden Dank für diese Unterrichtsmittel auszusprechen und wollen diese Präparate, von denen Herr Prof. Dr. Landois vermuthlich käufliche Sammlungen zusammenstellen wird, allen Lehrern der Zoologie aufs Wärmste empfohlen haben.

Diese ermunternden Worte des Herrn Prof. Hoffmann wiegen uns schwerer als alle Medaillen, welche sich diese Präparate bereits auf den internationalen Ausstellungen etc. zuletzt noch in Wien erworben haben.“

Ich bin nun augenblicklich in der glücklichen Lage, in dem Herrn Rudolph Koch einen Mann gefunden zu haben, der die von mir zuerst angefertigten Präparate mit Meisterschaft zu vervielfältigen übernommen hat. Und eben damit werden diese Präparate auch anderen Lehrern der Naturgeschichte zugänglich.

Münster i./W., im Juni 1874.

Prof. Dr. H. Landois.

Verzeichniss und Preis-Courant der zooplastischen Präparate.

Sämmtliche nachstehend aufgeführte Präparate werden gegen Baarzahlung sofort oder spätestens nach einer Frist von 4 Wochen versendet. Preis für ein Stück in Reichsmark = 10 Silbergr. — Für Emballage werden die Auslagen berechnet. — Alles ohne Verbindlichkeit. Jedes Präparat ist in einem hölzernen Kasten angebracht und mit einer Glasscheibe verschlossen. An der Wand aufgehängt ersparen sie die Anschaffung kostspieliger Schränke. — Gegen Motten und Staub sind sie völlig geschützt. Beim Unterrichte können sie von Hand zu Hand bei den Schülern circuliren, ohne alle Gefahr des Verderbens.

Nr.		Preis. Reichsmark.
1	**Spongiae**, Schwämme des süssen Wassers und des Meeres	6
2	**Polypi**, Polypen	5—7
3	**Asterida**, die Seesterne des Meeresbodens	6—8
4	**Echinoidea**, Seeigel	6—8
5	**Bryozoa**, Moosthiere	6
6	**Conchifera**, Typen der Muscheln	6—10
7	**Pulmonata**, Gehäuse- und Nacktschnecken in ihrem Leben	6
8	**Belemnites**, Belemniten (Donnerkeile) und ihr Bau	6
9	**Astacus fluviatilis**, Flusskrebse	5
10	**Pagurus Bernardus**, Einsiedlerkrebse	5
11	**Brachyura**, Krabben	5
12	**Scorpionida**, Skorpione	7
13	**Arachnida**, Spinnen	5
14	**Anatomia insectorum**, Anatomie der Insekten	6
15	**Aphidida**, Blattläuse	4
16	**Cicadida**, Cikaden	4
17	**Hydrocorida**, Wasserwanzen	4
18	**Geocorida**, Landwanzen	4
19	**Forficulida**, Ohrwürmer	4
20	**Blattida**, Schaben	4
21	**Acridida et Locustida**, Feld- und Laubheuschrecken	5
22	**Gryllotalpa vulgaris, Gryllus campestris et domesticus**, Maulwurfsgrillen, Feldgrylle und Heimchen	6
23	**Ephemerida**, Eintagsfliegen	5
24	**Libellulida**, Wasserjungfern	5
25	**Phryganida**, Frühlingsfliegen.	4
26	**Diptera**, Typen der Fliegen und Mücken	5
27	**Evolutio Lepidopterorum**, Entwickelung der Schmetterlinge	5
28	**Cerambycida**, Bockkäfer	4
29	**Pectinicornia**, Kaminhörner	5
30	**Coprophaga**, Mistkäfer	5
31	**Melolonthida**, Maikäfer	5
32	**Cetonida**, Blumenkäfer	5
33	**Nekrophorida**, Todtengräber	4
34	**Silphida**, Aaskäfer	4
35	**Dytiscida**, Wasserkäfer	6
36	**Carabida**, Laufkäfer	4
37	**Hymenoptera**, Typen der Immen	6
38	**Formicida**, Ameisen	5
39	**Perca fluviatilis**, Flussbarsch	6
40	**Salamandra maculata**, gefleckter Salamander	6
41	**Rana temporaria**, Landfrosch	7
42	**Coluber natrix**, Ringelnatter.	7
43	**Vipera berus**, Kreuzotter	8
44	**Anguis fragilis**, Blindschleiche	6
45	**Lacerta agilis**, Eidechse	6
46	**Talpa europaea**, Maulwurf	6
47	**Sorex vulgaris et araneus**, Spitzmäuse	7
48	**Mus musculus et sylvaticus**, Haus- und Waldmaus	7
49	**Mus minutus**, Zwergmäuse (junge und alte beim Nest)	15
50	**Cricetus frumentarius**, Hamster	7
51	**Hypudaeus amphibius**, Mollmäuse	6
52	**Arvicola arvalis**, Feldmäuse	7
	Fledermäuse	9

Ein zweiter Katalog, welcher die von mir zu beziehenden ausgestopften Säugethiere, Vögel, Reptilien und Fische enthält, kommt bald zur Versendung.

Gegen billige Kostenberechnung bin ich erbötig, alle mir eingesandten Thiere (sowohl im Fleisch, als in Bälgen oder in Spiritus) in ihren naturgemässen Lebensstellungen auszustopfen.

Auf frankirte etwaige Anfragen ertheile ich bereitwilligst und umgehend Antwort.

Münster i. W. Rudolf Koch, Präparator.

2) Notiz über Erxlebens geolog. Bilder (V, 70); der Preis für dieselben ist nicht wie S. 71 angegeben ist, 15 fl., sondern 75 fl. (= ca. 45 Thlr.), was Hr. E. hiermit zu berichtigen bittet. Uns will dieser Pr. doch etwas zu hoch erscheinen.

3) Lehrmittel in den Gemeindeschulen Berlins. Die allgem. Schulzeitung Nr. 30 ds. Jahrg. enthält folgende Notiz: „Für die Lehrer-Bibliotheken und für Lehr- und Veranschaulichungsmittel (also für Geographie, Physik, Botanik und Zoologie) waren ursprünglich bei jeder Schule 7½ Thlr. pro Classe auf dem Etat. Diese Summe wurde in den Jahren 1870 und 71 nicht verbraucht (unglaublich!); der Etat sank also auf 4½ Thlr. pro Classe herab. Jetzt hat die Schul-Deputation, um die vorhandenen Lücken auszufüllen und den Anforderungen der Gegenwart zu entsprechen, 10 Thlr. pro Classe beantragt und wird hoffentlich damit sowohl bei den Lehrern, wie bei den Communal-Behörden ein freudiges Entgegenkommen finden.“

In Sachen Hornsteins gegen Zängerle.

Hr. Dr. Hornstein in Cassel übersandte der Redaction eine Broschüre „Ein letztes Wort in Sachen Zängerle,“ dessen Inhaltsangabe uns wohl erlassen werden darf, da das Schriftchen nach einer Anmerk. auf Seite 2 diesem Blatte beigegeben werden soll. Hr. Dr. H. legt uns zugleich bei zwei Briefe von zwei wissenschaftl. Autoritäten dat. v. 9. Aug. 1871 u. v. 11. Oct. 1870, welche Antworten auf wissenschaftl. Anfragen enthalten u. auf die er sich in jener Anmerkung bezieht.

Bei der Redaction eingegangene Programme und Bücher.

Programme und Monographien.

1) R. G. Bonn 1873/74 enth. Abh. von G.-Lehrer Sonnenburg: „Ueber absolutes Mass und relative Bewegung.“

2) Fünf ungedruckte Briefe v. Gemma Frisius herausgegeben von M Curtze in Thorn (Abdruck).

3) Hornstein, ein letztes Wort in Sachen Zängerle (s. o.).

4) Schweder, Arbeiten des Naturf.-Vereins zu Riga N. F. 5. Hft. enth.: „der Hagelsturm des 10. (22.) Mai 1872 in den Ostseeprovinzen (mit 5 Taf. und 1 Ch.).

Schul- und Lehr-Bücher.

Schlömlich, Comp. d. h. Analysis I. 4. Aufl. Braunschw. 1874.

„ Grundzüge einer wissenschaftl. Darstellung der Geometrie des Masses I. Plan. u. ebene Trig. 5 Aufl. 1874. II. Geom. des Raumes 3. Aufl.

Letzteres Werk ist in Teubners Verlag übergegangen.

Schweder, Lehrbuch der Planimetrie 2. Aufl. Riga 1874.

Ziller, Leipziger Seminarbuch (Abdr. aus d. Jahrb. f. Pädag. VI). Lpzg. 1873.

Der Begriff des Imaginären.

Von Dr. Josef Kudelka, k. k. Lyceal-Professor zu Linz.

(Mit 7 Fig. im Text.)

§ 1. Einleitung.

Es ist eine Eigenschaft des rechtwinkeligen Dreieckes, dass das Perpendikel, welches vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt wird, die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen den Abschnitten derselben.

Da dieser planimetrische Lehrsatz die Grundlage eines neuen Theiles der Mathematik, namentlich desjenigen Theiles der algebraischen Analysis, der die Fortbildung des Imaginären anstrebt, geworden ist und somit unstreitig ein hohes Interesse erweckt; so dürfte es nicht überflüssig erscheinen, durch eine nähere Beleuchtung seine Berechtigung dazu nachzuweisen.

Eigentlich ist der Satz erst dadurch so wichtig geworden, dass man ihn, wiewohl ohne weiteren Nachweis, auch umgekehrt gelten lässt, etwa in der Form: Ist eine Gerade das geometrische Mittel von zwei andern, die man sich als Schenkel eines geraden Winkels denkt, so steht sie senkrecht auf der Geraden, in welcher diese Schenkel liegen.

Man macht also hier von zwei der Lage nach gegebenen Geraden einen Schluss auf die Lage ihres geometrischen Mittels. Unsere Aufgabe wird daher zunächst sein, zu untersuchen, in welcher Art und Weise das geometrische Mittel zweier Geraden hinsichtlich seiner Lage abhängig sei von der Lage dieser letzteren und an welche Bedingungen diese Abhängigkeit geknüpft ist.

§ 2. Die charakteristischen Merkmale des in dem vorhergehenden Paragraphen erwähnten Lehrsatzes.

Nun — der Satz folgt zunächst aus der Aehnlichkeit der beiden kleineren Dreiecke, in welche das gegebene durch das

Perpendikel getheilt wird; dann haben diese Dreiecke, wenn man sich dieselben getrennt von einander vorstellt, ein Paar gleich grosse Seiten, von denen bemerkt werden kann, dass es nicht homologe sind; ferner, wenn man die Dreiecke wieder in die anfängliche Lage zurückversetzt, so decken sich ihre gleichgrossen Seiten in der Art, dass sie zu einer einzigen, gemeinschaftlichen Seite werden und schliesslich sind diese Dreiecke rechtwinklig.

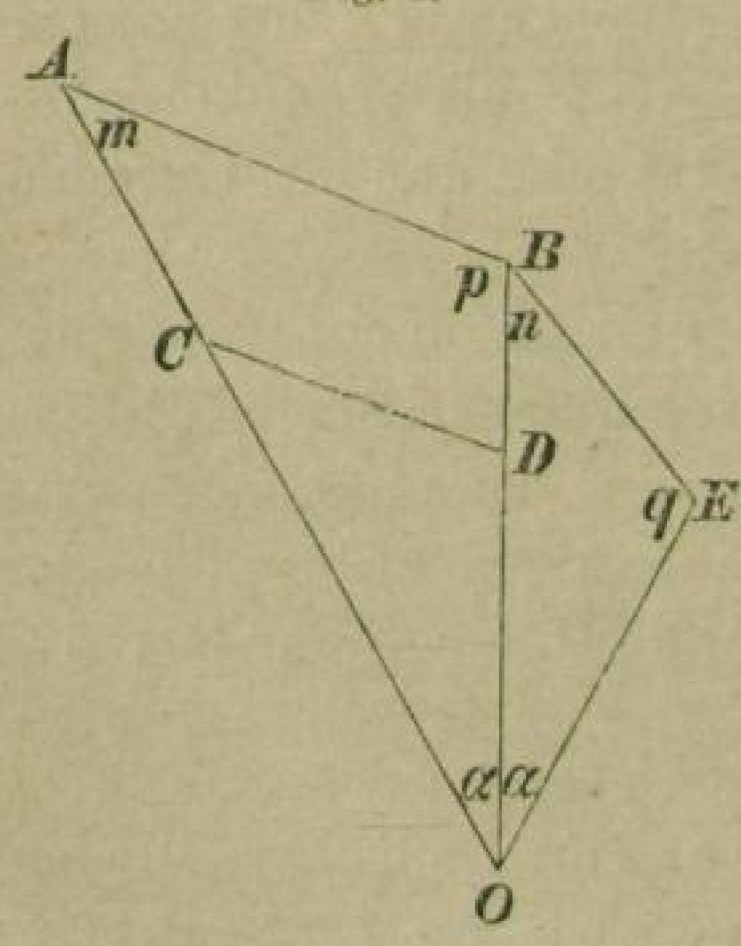
Das sind die Merkmale, welche den Lehrsatz als einen ziemlich speciellen charakterisiren und die wir nun nach einander zur Anwendung bringen wollen, um einen Einblick zu gewinnen, auf welche Art jedes derselben sich geltend macht.

§ 3. Auf welche Art macht sich jedes der genannten Merkmale geltend?

Beginnen wir mit dem Merkmale der Aehnlichkeit. Zwei Dreiecke sollen ähnlich sein, im Uebrigen aber ganz beliebig. Wir können sie an beliebige Orte des Raumes versetzt denken, wollen sie jedoch in einer Ebene so zusammenstellen, dass ein Eck des einen mit einem Ecke des anderen zusammenfalle und dass jene Winkel der Dreiecke, welche dieses gemeinsame Eck zum Scheitel haben, auch gleich seien. Der Fall, wo die Dreiecke von einander ganz getrennt sind und somit nichts gemeinsames haben, scheint mir für die vorliegende Untersuchung ohne Bedeutung.

Es sei also (Fig. 1) ein Dreieck AOB; zieht man darin $CD \parallel AB$, so erhält man das zweite ihm ähnliche COD, dessen Lage durch Drehung um den gemeinschaftlichen Punkt O in der Ebene der Figur bezüglich des ersteren beliebig geändert werden kann. Man bekommt die Proportion:

Fig. 1.



$$OA : OB = OC : OD,$$

deren vier Glieder ebensoviele Gerade repräsentiren, die von dem Drehungspunkte O, wie von einem Strahlenpunkte ausgehen, aber sie stellen die Geraden bloss der Grösse nach vor; über ihre relative Lage gibt die Proportion natürlich keine Auskunft. Nur das Eine wird verlangt, dass jede äussere Gerade mit der ihr zugehörigen inneren einen gleich grossen Winkel bilde, dass also $\sphericalangle AOB = DOC$ sei, eine Bedingung, welche unmittelbar aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt. Wir wollen diesen Winkel, dessen Grösse übrigens ganz beliebig ist, mit α bezeichnen.

Um die obige Proportion, oder was auf das Nämliche hinauskommt, um mittellst derselben die ähnlichen Dreiecke planimetrisch zu construiren, müssen ausser drei Gliedern derselben auch noch zwei Winkel gegeben sein, nämlich der eben besprochene Winkel α und dann der Winkel AOD, welchen die äusseren Geraden OA und OD mit einander bilden und der somit ihre relative Lage angibt. Dieser Winkel, den wir $= \omega$ setzen, erhält verschiedene Werthe, wenn wir z. B. das kleinere Dreieck COD schraubenrechts um den Punkt O drehen und somit in verschiedene andere Lagen bringen, während das grössere AOB an seinem Platze verbleibt.

Werden nun aber die inneren Glieder der Proportion als gleich gross angenommen: $OB = OC$, so geht sie in eine stetige über. Das geometrische Mittel wird in diesem Falle durch zwei Gerade repräsentirt, welche gleiche Grösse, aber im Allgemeinen verschiedene Lagen haben. Um eine solche Proportion zu construiren, braucht man ausser den beiden Winkeln ω und α, nur noch die zwei äusseren Glieder derselben zu kennen.

Drehen wir ferner das kleinere Dreieck soweit schraubenrechts, dass die gleich grossen Seiten OC und OB zusammenfallen, so kommt es in die Lage BOE und bildet mit dem anderen das Viereck $ABEO$. Jetzt ist die mittlere geometrische Proportionale einfach (individuell), eine und dieselbe Gerade, nämlich die gemeinschaftliche Seite OB der Dreiecke. Man braucht, um die Proportion zu construiren, ausser den zwei äusseren Gliedern OA und $OE = OD$ nur noch den Winkel $AOE = \omega$ zu kennen, denn der andere α ist $= \frac{\omega}{2}$.

Bis nun blieben bei der Aenderung von ω alle Bestandtheile der Dreiecke ganz dieselben. Sobald wir aber die Bedingung $\alpha = \frac{\omega}{2}$ voraussetzen d. h. sobald wir fordern, dass das geometrische Mittel ein und dieselbe Gerade sei, wird sich mit ω zunächst α, und mit α werden sich auch die beiden anderen Winkel, sowie auch die dem Winkel α gegenüberliegenden Seiten in jedem Dreiecke verändern.

Stellen also die beiden inneren Glieder einer Proportion eine individuelle Gerade vor, so halbirt diese den Winkel, den die äusseren Geraden einschliessen.

In diesem Sinne werden wir die Stetigkeit einer Proportion im Folgenden immer zu verstehen haben.

Durch die Gleichung $\alpha = \frac{\omega}{2}$ wird der Winkel α abhängig gemacht von ω. Heben wir nun die äussersten Fälle hervor, welche bei der Aenderung von ω sich ergeben, während die drei von O ausgehenden, die stetige Proportion bildenden Geraden OA, OB und OE ihre Grössen dabei unverändert beibehalten.

Ist also zuerst $\omega = O^0$, so ist auch $\alpha = O^0$ und alle drei Geraden fallen somit zusammen. Man kann sich zu diesem Zwecke die OE schraubenlinks und die OA schraubenrechts so lange gedreht denken, bis das Zusammenfallen mit OB erfolgt. Alle drei Geraden liegen alsdann auf der nämlichen Seite von O.

Dreht man hingegen OE schraubenrechts und OA schraubenlinks so lange, bis beide in die Verlängerung von BO fallen, so wird $\omega = 360^0$ und somit $\alpha = 180^0$. Es findet also jetzt der Unterschied statt, dass die gedachten Geraden und ihr geometrisches Mittel auf entgegengesetzten Seiten von O liegen.

Ist endlich $\omega = 180^0$, also $\alpha = 90^0$, so werden die Dreiecke AOB und BOE rechtwinklig. Die Seiten OA und OE fallen in dieselbe auf OB senkrechte Gerade und haben bezüglich O eine entgegengesetzte Lage. Während in den beiden vorhergehenden Fällen das Viereck $ABEO$ zu einer geraden Linie zusammenschrumpfte, verwandelt es sich jetzt in ein Dreieck, das rechtwinklig ist. Und dies ist nun der specielle Fall, der dem in § 1. citirten Lehrsatze zu Grunde liegt. Wir ersehen daraus, dass dieser Lehrsatz sich in der That umkehren lasse. Man kann in der That behaupten, dass, wenn man eine Gerade in zwei beliebige Theile theilt, das geometrische Mittel dieser in ihrer Lage verharrenden Theile im Theilungspunkte senkrecht darauf stehen müsse.

In Betreff des Viereckes ist noch eine Bemerkung zu machen. Es sind, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke folgt, die Winkel $n = m$ und $p = q$, somit auch $n + p = m + q$ oder wenn wir jeden Winkel mit dem an seinem Scheitel stehenden Buchstaben bezeichnen: $B = A + E$. Da nun die Seiten AB und EB mit ω sich ändern, so kann man die letzte Relation folgender Massen aussprechen: Der Winkel, den die veränderlichen Seiten dieses Viereckes einschliessen, ist gleich der Summe seiner beiden Nachbarwinkel.

Die Winkel p und n sind im Allgemeinen ungleich. Nichts hindert uns aber sie auch als gleich anzunehmen. Für diesen speciellen Fall sind dann aber die Dreiecke AOB und EOB nicht nur gleichschenklig, sondern auch congruent. Denkt man sich also zwei beliebige Radien in einem Kreise, so ist das geometrische Mittel derselben jener dritte Radius, der den von ihnen eingeschlossenen Winkel halbirt, und zwar nicht nur der Grösse sondern auch der Lage nach.

§ 4. Andere Zusammenstellung der zwei ähnlichen Dreiecke.

Wir haben in dem § 3. die relative Lage der beiden ähnlichen Dreiecke bloss an zwei Bedingungen geknüpft; sie sollen ein gemeinschaftliches Eck haben und ihre an diesem Ecke liegenden Winkel sollen gleich sein. Aber unter diesen zwei Bedingungen ist eine doppelte Anordnung der Dreiecke möglich. Die eine davon haben wir bereits durch die Fig. 1 zur Anschauung gebracht und uns auch mit den Folgerungen, zu denen sie Veranlassung gibt, bekannt gemacht. Die andere erhält man, wenn man dem kleineren Dreiecke DOC in Bezug auf Rechts und Links die umgekehrte Lage zu derjenigen gibt, die es in dieser Fig. 1 hat, oder wenn man das identische Dreieck BOE um die Gerade OB schraubenlinks dreht, so lange bis OE mit OA zusammenfällt. Diese letzteren Geraden sind aber die äusseren Glieder der stetigen Proportion und da sie zusammenfallen, so ist $\omega = 0$. Wird also das geometrische Mittel bei dieser zweiten Anordnung als individuell betrachtet, so ist $\omega = 0$; aber α kann natürlich beliebige Werthe erhalten, so dass also von der Lage der äusseren Geraden einer stetigen Proportion in diesem Falle gar kein Schluss auf die Lage ihres geometrischen Mittels erlaubt ist, ausser dass auch α gegeben ist.

Da es nun unsere Aufgabe ist, aus der Lage der äusseren Geraden einer stetigen Proportion die Lage ihres geometrischen Mittels zu erschliessen und da zu diesem Zwecke der Winkel ω

veränderlich sein muss, so können wir nur die erste Anordnung der Dreiecke berücksichtigen.

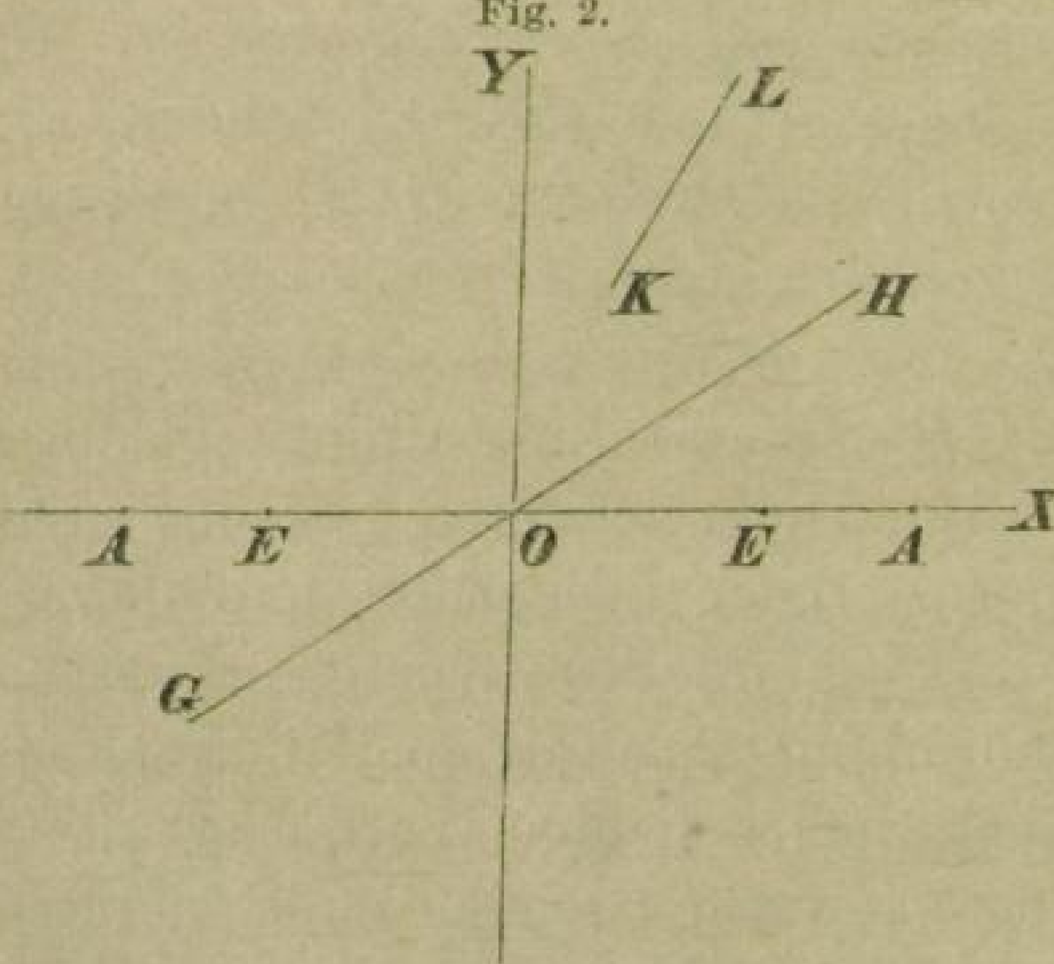
Die geraden Linien, welche irgend eine gegebene stetige Proportion: $m : y = y : n$ bilden, kann man sich, wenn keine Winkelangabe beigefügt ist, in unzähligen verschiedenen Lagen denken. Ist aber die Bedingung $\alpha = \frac{\omega}{2}$ beigegeben, so ist das geometrische Mittel seiner Lage nach abhängig gemacht von der Lage der Geraden m und n. Letztere Gerade sind aber sowohl ihrer Grösse als Lage nach ganz unserer Willkür anheimgegeben.

§ 5. Die Begriffe der Richtung und Lage gerader Linien.

Die Schenkel des Winkels ω (Fig. 1) stellen Gerade vor, die ihren Anfangspunkt im Scheitel desselben haben und von da an zu beliebiger Grösse wachsen können. So haben wir den Begriff einer Geraden, die einen Anfang hat und durch diesen ist auch die Richtung gegeben, in welcher sie gewachsen ist. Die Richtung einer Geraden ist nicht zu verwechseln mit ihrer Lage.

Um die Lage einer Geraden zu bestimmen, nehme man eine beliebige Gerade Ox (Fig. 2) als Achse und darin einen beliebigen Punkt O als Ursprung an. Denkt man sich nun die erstere zuerst so in die Achse gelegt, dass ihr Anfangspunkt in den Ursprung fällt, so kann sie in die Lage OH auf zwei verschiedene Arten gelangen, entweder indem man sie schraubenlinks oder schraubenrechts um O dreht. Die Lage der Geraden kann nun durch den einen oder anderen der beiden Winkel, die sie bei dieser Drehung beschreibt, bestimmt werden.

Fig. 2.



Wir werden im Folgenden voraussetzen, dass die Lage immer durch denjenigen Winkel bestimmt wird, der durch schrauben-linke Drehung entsteht. Zwei Gerade OH und OG (Fig. 2), von denen jede ihren Anfangspunkt in O hat, sind, obgleich jede bloss die Verlängerung der anderen ist, als ganz verschieden zu betrachten, denn ihre Lagen unterscheiden sich um 180^0 und ihre Richtungen sind entgegengesetzt.

Als Achse kann auch jede zu Ox Parallele und darin wieder ein beliebiger Punkt als Ursprung genommen werden, denn durch eine solche Annahme wird die Grösse der Winkel nicht geändert. Eine solche Achse ist also nicht identisch mit der Abscissen-Achse des Coordinaten-Systems, denn diese ist in der That eine fixe Gerade, sowie auch der Ursprung dieses Systems fix gedacht wird, denn bringt man die Abscissen-Achse in irgend eine andere parallele Lage und weiset man dem Ursprunge einen anderen Ort darin an, so werden sofort die Coordinaten geändert. Da jedoch die Achse, welche zur Bestimmung der Lage gerader Linien dient, sammt ihrem Ursprunge ganz beliebig ist, so ist es klar, dass man, ohne eine Begriffsverwirrung zu besorgen, auch die Abscissen-Achse zu diesem Zwecke verwenden kann und man kann auch noch die Ordinaten-Achse hinzunehmen, um die Ebene anzudeuten, in welcher alle bezüglich ihrer Lage zu vergleichenden Geraden zu liegen haben.

Die Richtung als solche ist nicht nothwendig an die Vorstellung einer geraden Linie geknüpft. Der Zeiger einer Uhr z. B. also auch ein beliebiger Punkt desselben, bewegt sich immer in derselben Richtung, obgleich ein solcher Punkt eine krumme Bahn beschreibt.

Lage und Richtung stehen in einer sehr innigen Beziehung. Wird die Lage einer Geraden direct durch den Winkel gegeben, so ist auch schon ihre Richtung bekannt und umgekehrt, wird die Richtung einer Geraden KL (Fig. 2) gegeben, wird gesagt, sie sei z. B. von K gegen L gewachsen, so ist auch schon ihre Lage bekannt. Wird aber bei dieser Geraden KL die Richtung nicht angegeben und man fragt nach ihrer Lage, so ist die Aufgabe unbestimmt, denn der Winkel, den die Gerade mit der Achse bildet, wird verschieden ausfallen, jenachdem K oder L als Anfangspunkt genommen wird, wie man sich überzeugt, wenn die Gerade parallel zu sich verschoben wird, bis der eine oder der andere ihrer Grenzpunkte mit O zusammenfällt.

Am Schlusse dieses Paragraphen muss ich noch der uns von

Altersher überlieferten Zeichen + und — und der ihnen entsprechenden Epitheta: positiv und negativ, erwähnen. Diese Zeichen bedeuten, wie bekannt, bloss einen Gegensatz und da je zwei Gerade, deren Lagen-Unterschied 180⁰ beträgt, entgegengesetzte Richtungen haben, so wird man die eine davon mit +, die andere mit — bezeichnen. Diese Zeichen sind somit bloss auf die Richtung der Geraden zu beziehen, nicht aber auf ihre Grösse, selbst wenn sie vor diese gesetzt werden, denn der Grösse als solcher kann überhaupt kein Zeichen zuerkannt werden.

Das doppelte Zeichen in der bekannten Formel, welche die analytische Geometrie für die Distanz zweier Punkte aufstellt, kann offenbar nicht anders gedeutet werden, als dass man bald den einen, bald den anderen der beiden Grenzpunkte dieser Distanz zum Anfangspunkte zu nehmen habe. Auch kann man sich dafür entscheiden, dass das Zeichen + immer derjenigen von den zwei entgegengesetzten Geraden zuerkannt wird, die den kleineren Winkel mit der Achse bildet.

Diese Zeichen geben somit keine Auskunft über die Lage; wenn man aber der einen von den zwei entgegengesetzten Geraden eine bestimmte Lage anweist, so wird dadurch sofort auch die der anderen fixirt. —

§ 6. Algebraischer Ausdruck für eine gerade Linie.

Wird die Lage einer Geraden dadurch bestimmt, dass man den Winkel angibt, den sie mit einer anderen einschliesst, so gehört diese Methode der Planimetrie an. Nun kann man aber den Winkel durch ein algebraisches Zeichen ersetzen, wodurch jedoch schon, indem man Algebraisches mit Geometrischem verbindet, das Gebiet der analytischen Geometrie betreten wird. Die analytische Geometrie wird also im Stande sein, für jede Gerade einen einfachen Ausdruck anzugeben, der dieselbe nicht nur der Grösse, sondern auch der Lage nach genau repräsentirt. Eine Proportion gerader Linien in der analytischen Geometrie wird sich also wesentlich unterscheiden von einer Proportion in der Planimetrie, denn die erstere reicht schon für sich hin, um eine Gerade z. B. das geometrische Mittel zu construiren, wenn die äusseren Glieder gegeben sind, während der letzteren immer noch eine Winkelangabe beigefügt werden muss.

In der That, die gerade Linie ist als Function ihrer Grösse und ihrer Lage aufzufassen. Setzt man die Grösse $= r$ und die Lage $= \varkappa$, so wird das Product $r\varkappa$ die Gerade vollständig repräsentiren. Das den Winkel vertretende algebraische Zeichen erscheint hier in der Form eines Factors. Wir wollen nun jene Gerade, für welche dieser Factor $\varkappa = 1$ ist, als Achse annehmen. Die Einheit wird also stets das Zeichen sein, dass eine Gerade in der Achse liegt.

§ 7. Analytische Bestimmung der Lage einer Geraden.

Nehmen wir an, die äusseren Glieder in der Proportion: $m : y = y : n$ bedeuten gerade Linien, die in der Abscissen-Achse rechts vom Ursprunge liegen (Fig. 2) und deren Anfangspunkte in den Ursprung fallen; setzen wir also:

$$m = OA \cdot + 1 \text{ und } n = OE \cdot + 1,$$

so erhält man: $$+ OA : y = y : + OE.$$

somit $$y = \sqrt{OA \cdot OE} \cdot \pm 1.$$

Hier bedeutet nun offenbar $\sqrt{OA \cdot OE}$ die Grösse des geometrischen Mittels, ferner bedeutet die Einheit, dass es in der Achse liege und das doppelte Zeichen bedeutet, dass es zu beiden Seiten des Ursprunges sich erstrecken könne.

Zu demselben Schlusse wird man auch gelangen, wenn die beiden Geraden links von O auf der Achse aufgetragen werden, wenn also $m = - OA$ und $n = - OE$ gesetzt wird.

Dieses Resultat stimmt nun ganz mit dem in § 3. erhaltenen planimetrischen überein, denn der Winkel, den die Geraden OA und OE (Fig. 2) bilden, kann, indem sie zusammenfallen, sowohl $= 0^0$ als auch $= 360^0$ gesetzt werden und somit wird $\alpha = 0^0$ und $= 180^0$.

Denkt man sich unter m und n wiederum zwei Gerade, die in der Achse liegen und ihre Anfangspunkte im Ursprunge haben, jedoch von entgegengesetzter Richtung, also:

$$m = + OA \text{ und } n = - OE,$$

so hat man: $$+ OA : y = y : - OE,$$

somit: $$y = \sqrt{OA \cdot OE} \cdot \pm \sqrt{-1}.$$

Hier wollen wir blos dem Factor $\sqrt{-1}$ unsere Aufmerksamkeit schenken, da das Uebrige durch sich selbst klar ist. Um nun die wahre Bedeutung desselben zu erkennen, wollen wir uns gegenwärtig halten, dass er das algebraische Zeichen (den Werth von $\varkappa$) vorstelle und dass dieses Zeichen für jene

Gerade gelte, welche den Winkel, den die äusseren Geraden der Proportion einschliessen, halbirt. Da nun im vorliegenden Falle die den genannten Winkel Halbirende d. i. das geometrische Mittel, senkrecht stehet auf der Achse, so ist $\sqrt{-1}$ das Zeichen der Perpendikularität.

Wir haben daher für $\varkappa$ bereits vier Werthe, nämlich:

$+1 = i^0$, für die positive x-Achse,

$+\sqrt{-1} = i^1$, „ „ „ y-Achse,

$-1 = i^2$, „ „ negative x-Achse,

$-\sqrt{-1} = i^3$, „ „ „ y-Achse.

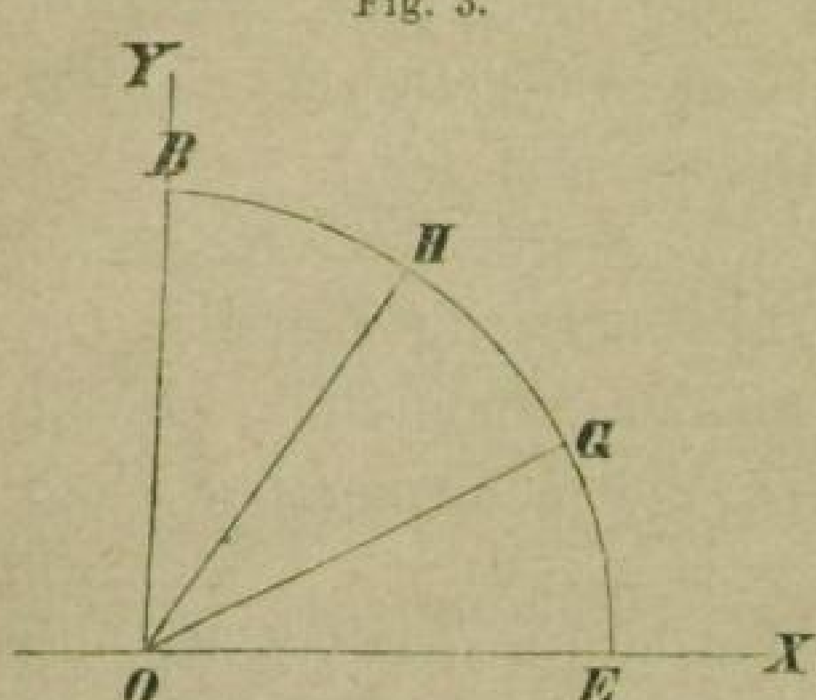
und setzt man $EO = AO = r$, wodurch auch $\sqrt{EO \cdot AO} = r$ wird, so erhält man für diese Gerade in den vier aufeinander folgenden Hauptlagen die folgenden Ausdrücke:

$$r \cdot i^0,\ r \cdot i^1,\ r \cdot i^2,\ r \cdot i^3. \text{ —}$$

Drehen wir daher eine Gerade von der Grösse r aus der positiven x-Achse schraubenlinks um $1\,R$, $2\,R$, $3\,R$ . . so ist diese Drehung äquivalent einer Multiplication ihrer Grösse mit: i^1, i^2, i^3 . . —

Die Exponenten dieser Potenzen sind also für die Hauptlagen ganze Zahlen, für intermediäre Lagen werden sie aber gebrochene Zahlen sein, wie aus folgenden zwei Beispielen zur Genüge erhellt.

Fig. 3.



Setzt man in der stetigen Proportion $m = OB = r \cdot i^1$ (Fig. 3) und $n = OE = r \cdot i^0$, so erhält man:

$$y = r. \pm i^{\frac{1}{2}}.$$

Da in diesem Falle das geometrische Mittel $\frac{1}{2} \cdot R$ mit der Achse bildet; so ist $i^{\frac{1}{2}}$ das Zeichen für diese Lage.

Sind ferner in Fig. 3 OG und OH zwei Halbmesser, welche den rechten Winkel BOE in drei gleiche Theile theilen, so ist:

$$\overline{OG}^2 = OE \cdot OH \text{ und}$$

$$\overline{OH}^2 = OG \cdot OB$$

somit $$\overline{OG}^3 = \overline{OE}^2 \cdot OB$$

und da $OE = ri^0$ und $OB = ri^1$ ist, so hat man:

$$\overline{OG}^3 = (ri^0)^2 \cdot ri^1 = r^3 i^1$$

und schliesslich $$OG = r \cdot i^{\frac{1}{3}}.$$

Da nun OG eine Gerade ist, die $\frac{1}{3} R$ mit der Achse bildet, so ist also $i^{\frac{1}{3}}$ das Zeichen für diese Lage.

Das Zeichenpaar $+ 1$ und $- 1$, womit wir den Anfang gemacht haben, löset sich also in unzählig viele Zeichen auf, die den ebenfalls unzähligen von dem Ursprunge des Systems ausgehenden Strahlen zukommen und die alle in dem allgemeinen Ausdrucke: i^{m} enthalten sind, wo m die Anzahl R bezeichnet, welche die Gerade mit der Achse bildet und von Null aufsteigend alle möglichen gebrochenen und ganzen Zahlen bedeuten kann.

Da jede volle Umdrehung $4 R$ beträgt, so kann man, wenn h die Anzahl der Umdrehungen bezeichnet, dem letzteren Zeichen auch das folgende:

$$i^{m + 4h}$$

substituiren, wo h nur eine ganze Zahl sein kann, Null nicht ausgenommen.

Bis jetzt wurde vorausgesetzt, dass die Drehung der Geraden schraubenlinks erfolge. Nichts hindert uns aber, diese Drehung auch in entgegengesetzter Richtung d. i. schraubenrechts vorzunehmen. Alsdann muss man aber für jeden rechten Winkel, um welchen man die Gerade dreht, ihre Grösse durch i^{1} dividiren, oder da $\frac{1}{i^1} = i^{-1}$ ist, mit i^{-1} multipliciren. Das allgemeine Zeichen wird also in diesem Falle die Form: i^{-m} haben.

§. 8. Das trigonometrische Zeichen für die Lage einer Geraden.

Bewegt sich ein Punkt vom Ursprunge O (Fig. 4) angefangen in der Achse nach B, dann weiter fort nach A und hierauf zurück nach B, so ist die Summe dieser Wege gleich:

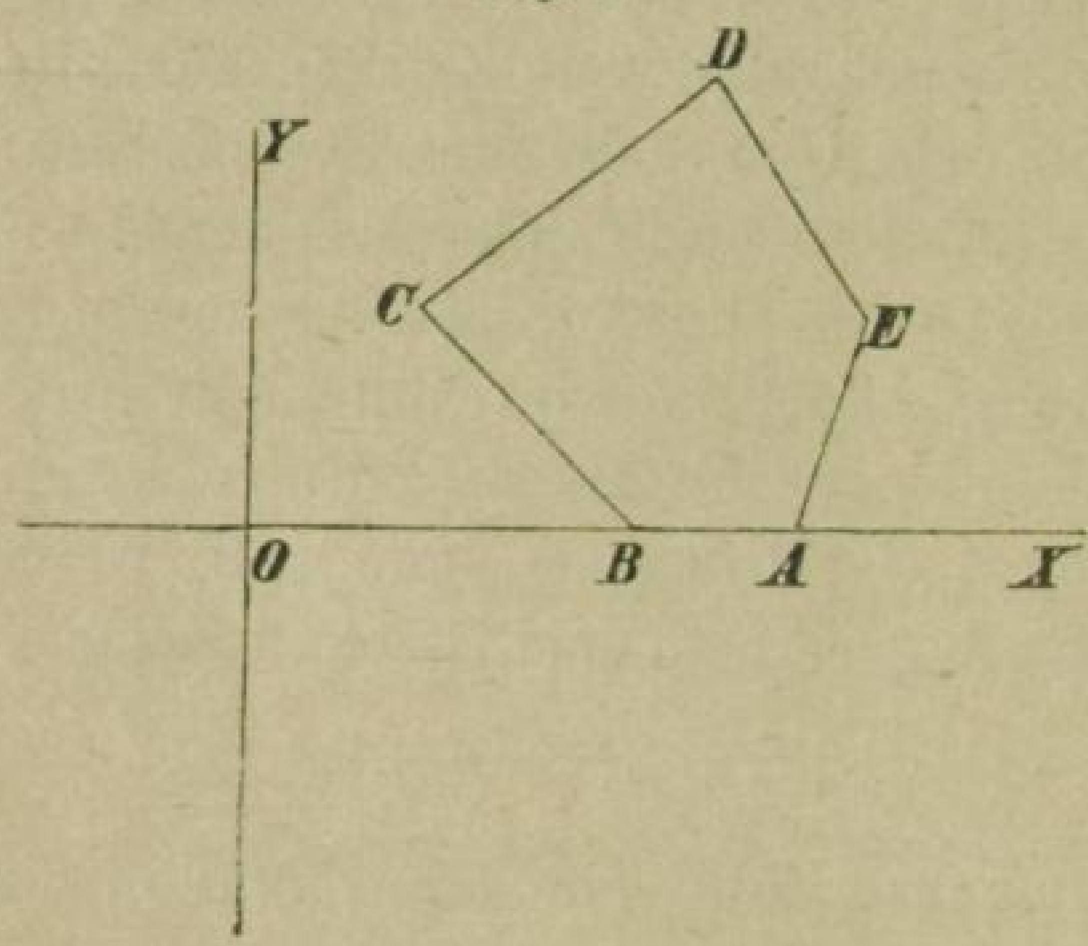
$$OB \,.\, i^0 + BA \,.\, i^0 + AB \,.\, i^2.$$

Diese Summe ist der genaue Repräsentant des von dem Beweglichen im Ganzen zurückgelegten Weges. Behandelt man nun aber die beiden Wege $BA \,.\, i^0$ und $AB \,.\, i^2$, da sie gleich und entgegengesetzt sind, nach dem Principe, dass gleiche entgegengesetzte Grössen sich aufheben, d. h. setzt man:

$$BA \,.\, i^0 + AB \,.\, i^2 = 0,$$

so kann dies offenbar nur unter der Voraussetzung geschehen, dass es sich blos um den Abstand handelt, den das Bewegliche, nachdem es die obigen drei Wege zurückgelegt hat, am Ende seiner Bahn vom Ursprunge noch hat; denn dieser hier in die x-Achse fallende Abstand $OB \,.\, i^0$ wird durch die genannten gleichen und entgegengesetzten Wege gar nicht beeinflusst.

Fig. 4.



Dieser Abstand $OB \,.\, i^0$ wird offenbar auch ungeändert verbleiben, wenn das Bewegliche von B aus irgend einen polygonalen, in sich geschlossenen Weg beschreibt, also z. B. von B nach C, dann nach D, nach E, nach A kommt und schliesslich nach B zurückkehrt.

Man muss demnach auch die Summe dieser ein geschlossenes Polygon bildenden Wege gleich Null setzen, also:

$$BC \,.\, i^\alpha + CD \,.\, i^\beta + DE \,.\, i^\gamma + EA \,.\, i^\delta + AB \,.\, i^2 = 0.$$

Die Exponenten α, β, γ, δ sind hier natürlich unbestimmt, da die betreffenden Seiten des Polygons beliebige Lagen haben können; nur für die letzte Seite AB ist der Exponent bestimmt, da sie in der Achse liegt. Addirt man zu dieser Gleichung die folgende:

$$BA \,.\, i^0 = BA \,.\, i^0,$$

so erhält man:

$$BC \,.\, i^\alpha + CD \,.\, i^\beta + DE \,.\, i^\gamma + EA \,.\, i^\delta = BA \,.\, i^0$$

denn $AB \,.\, i^2$ und $BA \,.\, i^0$ heben sich wiederum auf.

Man kann ohne eine Neuerung in die Terminologie einzuführen, die letzte Gleichung in folgende Worte kleiden:

Das Product aus der Grösse einer Seite eines geschlossenen Polygons in ihre Lage ist gleich der Summe der Producte aus den Grössen aller übrigen Seiten in ihre Lagen.

Es wird jedoch hier vorausgesetzt, dass die ausgewählte Seite und dann der übrige Theil des Polygons als Wege betrachtet, den nämlichen Ausgangspunkt — hier B — haben.

Als Folge des Gesagten hat man demnach auch, wenn (Fig. 5) $OP = x$ und $MP = y$ die Coordinaten des Punktes M sind und $OM = r$, ferner der Winkel $MOP = m\,\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird:

$$r \,.\, i^m = x \cdot i^0 + y \,.\, i^1$$

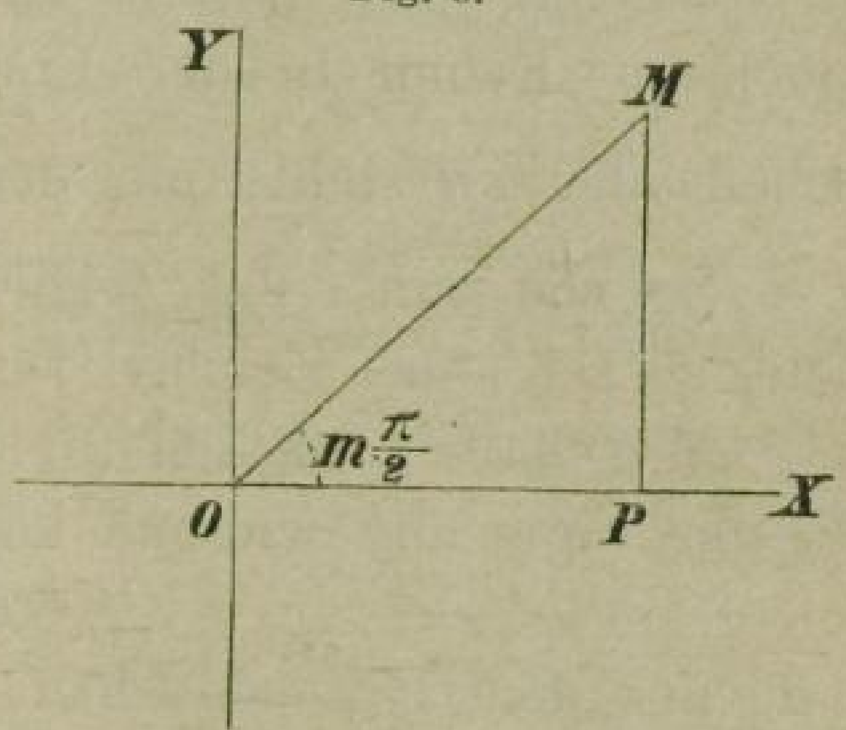
also auch, wenn für x und y die Werthe eingesetzt werden:

$$r \,.\, i^m = r \,.\, i^0 \cos m \frac{\pi}{2} + r \cdot i^1 \sin .\, m \frac{\pi}{2}$$

und somit auch: $i^m = i^0 \cos m \frac{\pi}{2} + i^1 \sin m \frac{\pi}{2}$.

Der zweite Theil dieser Gleichung stellt nun das trigonometrische Zeichen für die Lage der Geraden vor.

Fig. 5.



Setzt man $m = ns$, so folgt:

$$i^{ns} = \cos n\, s \frac{\pi}{2} + i \sin n\, s \frac{\pi}{2}$$

und wenn $s \frac{\pi}{2} = \varphi$ gesetzt wird:

$$(i^s)^n = \cos n\, \varphi + i \sin n\, \varphi.$$

d. h. die Multiplication des Winkels führt zu demselben Resultate, wie die Potenzirung der Lage.

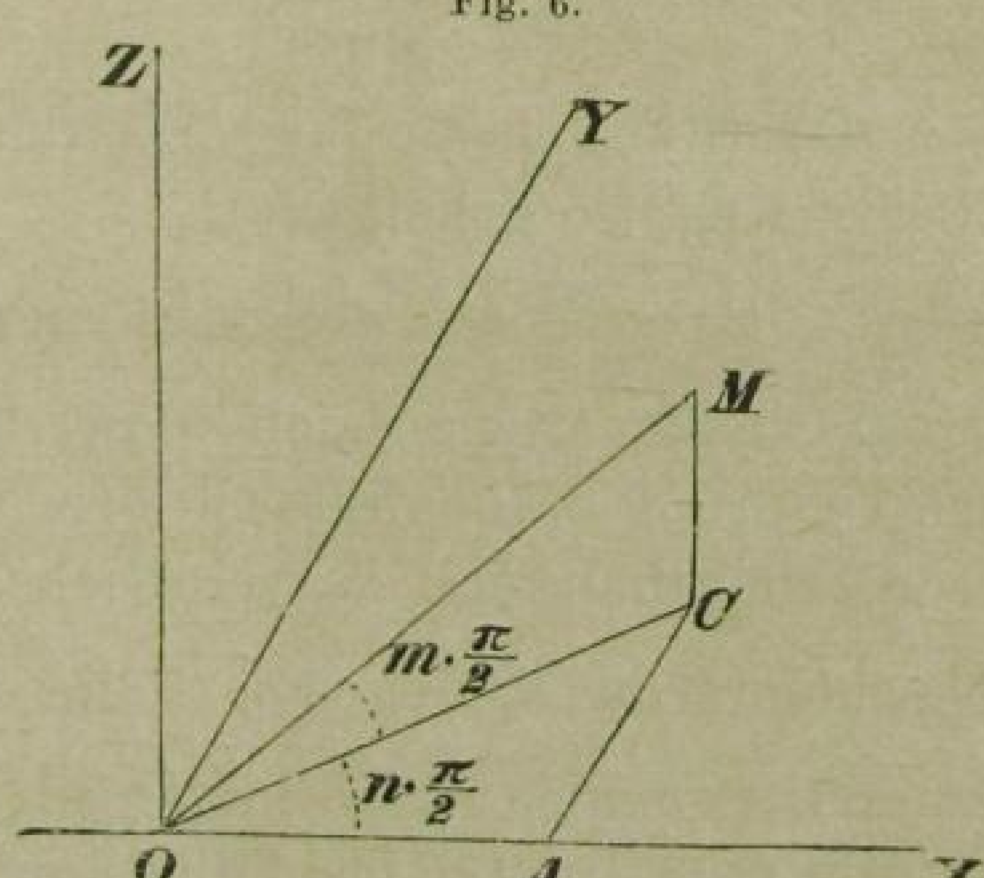
Schliesslich erhält man, wenn i^s mit dem trigonometrischen Zeichen vertauscht wird, Moivre's Formel:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\, \varphi + i \sin n\, \varphi.$$

§. 9. Bestimmung der Lage einer Geraden im Raume.

Es seien Ox, Oy und Oz (Fig. 6) die drei auf einander senkrecht stehenden Achsen und M ein beliebiger Punkt des Raumes. Die Coordinaten dieses Punktes sind: $OA = x$, $AC = y$ und $MC = z$.

Fig. 6.



Ist nun i das Zeichen für eine in der Ebene der xy liegende zur y-Achse parallele Gerade, so folgt aus dem Dreiecke OCA:

$OC \,.\, i^n = OA \,.\, i^0 + AC \,.\, i^1$,

wenn die Hypotenuse dieses Dreiecks mit der x-Achse einen Winkel von $n \,.\, \frac{\pi}{2}$ bildet.

Um nun ferner den analytischen Ausdruck für die Gerade OM, welche einen Winkel von $m \frac{\pi}{2}$ mit der Ebene der xy oder mit der Geraden OC bildet, aufzustellen; bedenke man, dass, wenn man sich diese Gerade zuerst in der x-Achse liegend denkt und sie nun aus dieser Achse schraubenlinks in der Ebene der xy um $n\frac{\pi}{2}$ dreht, man für sie erhält:

$$OM.i^n.$$

Sie hat jetzt dieselbe Lage wie OC. Nun ist sie aber ferner noch zu drehen in der Ebene COz, welche senkrecht auf der Ebene der xy steht, um den Winkel von $m\frac{\pi}{2}$.

So wie nun i das Zeichen ist für eine zur y-Achse Parallele, so sei j das Zeichen für eine zur z-Achse Parallele.

Wir haben folglich für die Gerade OM, sobald sie die ihr in der Figur angewiesene Lage erhält, den Ausdruck:

$$OM.i^n j^m,$$

und aus dem Dreiecke MOC folgt:

$$OM.i^n j^m = OC.i^n j^0 + MC.i^n j^1$$

oder wenn $OM = r$ gesetzt wird:

$$ri^n j^m = (xi^0 + yi^1).j^0 + zi^n j^1.$$

also auch:

$$ri^n j^m = xi^0 + yi^1 + zi^n j^1.$$

Nun ist $OC = r\cos m\frac{\pi}{2}$, folglich:

$$x = OC.\cos n\frac{\pi}{2} = r\cos n\frac{\pi}{2}\cos m\frac{\pi}{2}$$

$$y = OC.\sin n\frac{\pi}{2} = r\sin n\frac{\pi}{2}\cos m\frac{\pi}{2}$$

$$z = r\cdot\sin m\frac{\pi}{2}.$$

Substituirt man diese Werthe in die letzte Gleichung und lässt r weg, so erhält man:

$$i^n j^m = \cos n\frac{\pi}{2}\cos m\frac{\pi}{2} + i\sin n\frac{\pi}{2}\cos m\frac{\pi}{2} + i^n j^1\sin m\frac{\pi}{2}.$$

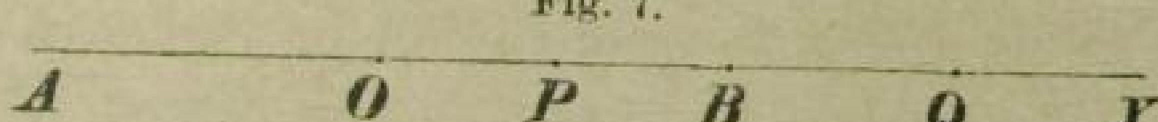
Verzeichnet man sich in der Ebene der xy einen Kreis um den Ursprung 0 allenfalls mit dem Halbmesser $= 1$, so ist dieser dem Azimuthalkreise zu vergleichen. Der Centriwinkel nR oder der entsprechende Bogen $n\frac{\pi}{2}$ dieses Kreises ist gleichsam das Azimuth. Jener Kreis hingegen, den man durch die Achse z und die Gerade OM ebenfalls um O beschreibt, ist gleichbedeutend mit dem Höhenkreise. Der Winkel mR oder der äquivalente Bogen $m\frac{\pi}{2}$ des Höhenkreises vertritt hier denselben Begriff, den man in der Astronomie mit Höhe bezeichnet, nur mit dem Unterschiede, dass in der Astronomie dieser Bogen höchstens bis zum Zenith gemessen wird, also höchstens die Grösse von $\frac{\pi}{2}$ erreicht, in welchem Falle $m = 1$ ist, während hier m von Null angefangen alle möglichen Werthe annehmen kann, wenn man sich nämlich die OM in dem Höhenkreise, immer in derselben Richtung, z. B. schraubenlinks gedreht denkt, — und sie somit auch beliebig viele Umläufe machen kann. Für den Höhenkreis ist somit die verlängerte OC als Achse zu betrachten, die natürlich ihre Lage mit dem Azimuth verändert. Der Winkel $m\frac{\pi}{2}$ ist immer derjenige, den die OM mit der OC als Achse bildet.

§. 10. Das Imaginäre bei der Analyse gewisser Curven.

Da in der stetigen Proportion die äusseren Glieder ganz willkürlich sind, so kann man jedes derselben auch abhängig machen von einer dritten variablen Geraden $= x$.

Es sei demnach eine Gerade AB (Fig. 7), deren Grösse $= 2a$ constant ist. Halbirt man sie in O, so ist $AO = BO = a$. Nehmen wir nun überdies einen Theilungspunkt P in der

Fig. 7.



Geraden an, den wir uns beweglich denken, so dass sein Abstand von O, nämlich $OP = x$, die gedachte Variable vorstellt. Andererseits werden wir die Abstände eben dieses Theilungspunktes P von den beiden Endpunkten A und B der Geraden zu äusseren Gliedern der stetigen Proportion machen. Es ist somit:

$$m = AP = a + x \text{ und}$$
$$n = BP = a - x$$

somit: $$y^2 = (a + x)(a - x) = a^2 - x^2 \ldots \quad \text{I.}$$

Nimmt man aber den Theilungspunkt in der Verlängerung der Geraden, in Q an, so erhält man für die gedachten Abstände:

$$m = QA = x + a$$
$$n = QB = x - a$$

somit: $$y^2 = (x + a)(x - a) = x^2 - a^2 \ldots \quad \text{II.}$$

Die Gleichung I. gilt also, wenn $x < a$ und die Gleichung II., wenn $x > a$ ist, und es sind beide Gleichungen wesentlich verschieden von einander.

Es geht aber die Gleichung I. in die Gleichung II. über, wenn man in ihr y^2 negativ nimmt, d. h. wenn man setzt:

$$y^2 = -(a^2 - x^2).$$

Daraus folgt aber, dass die Bedingung: $x > a$ so viel bedeutet, als dass man y^2 negativ zu nehmen habe.

Wenn man sich also in der Gleichung I. $x > a$ denkt, so muss man diese Bedingung in dieselbe auch wirklich einführen und dies geschieht, wenn y^2 negativ genommen wird.

Nimmt man nun Ox als Abscissen-Achse an und O als Ursprung des rechtwinkligen Systems und stellt man überdies die Bedingung, dass y senkrecht stehe auf der Achse, durch welche Voraussetzung das geometrische Mittel zur Ordinate wird, so hat man zu schreiben:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}. \pm i \quad \text{und}$$

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}. \pm i$$

Bezeichnet man aber den ganzen Coordinatenzug mit u, so ist:

$$u = x + y \cdot \pm i$$

und somit für den Kreis: $u = x \pm \sqrt{a^2 - x^2} \cdot i$

und für die gleichseitige Hyperbel: $u = x \pm \sqrt{x^2 - a^2} . i$

Es geht somit für $x > a$ die Gleichung des Kreises in die der gleichseitigen Hyperbel über, da in diesem Falle $a^2 - x^2$ in $-(a^2 - x^2)$ übergehet.

Das Capitel von der Aehnlichkeit der Figuren im propädeutisch-geometrischen Unterrichte.

(Fortsetzung von S. 353.)

Vom Herausgeber.

II. Die Aehnlichkeit der Dreiecke.

Der Uebergang von den Kennzeichen der Aehnlichkeit der Parallelogramme zu den verwandten Aehnlichkeitsmerkmalen der Dreiecke findet sich leicht, wenn man die in Fig. 1 immer einerseits der Diagonale AC liegenden Theildreiecke z. B. ABC, AB_1C_1, AB_2C_4 etc. (s. in Fig. 1. S. 348 die Dreiecke AHq, $A1p$, $A3r$, ABC) mit einander vergleicht. Dabei ist Folgendes zu bemerken: Dreiecke werden, gerade so wie Parallelogramme, ähnlich genannt, wenn sie in der Gestalt (Form) übereinstimmen. Die Gestalt hängt aber theils von den Winkeln, theils von den Seitenverhältnissen ab; denn Dreiecke haben gleiche Gestalt, wenn sie gleiche Winkel haben, aber auch, wenn sie, gerade so wie ähnliche Parallelogramme, gleiche Seitenverhältnisse haben. Nur ist dabei zu überlegen, ob beide Eigenschaften (Bedingungen) zugleich nothwendig sind, oder ob von denselben eine genügt. Wir wollen dies nun an den einzelnen Dreiecksgattungen, welche die vorherbetrachteten Parallelogramme bilden, untersuchen und beginnen mit den Theildreiecken*) ABC und AB_1C_1 der Oblonge $ABCD$ und $AB_1C_1D_1$ (Fig. 1 f. S.). Das Theildreieck eines Oblonges ist immer ein rechtwinkliges und zwar ein

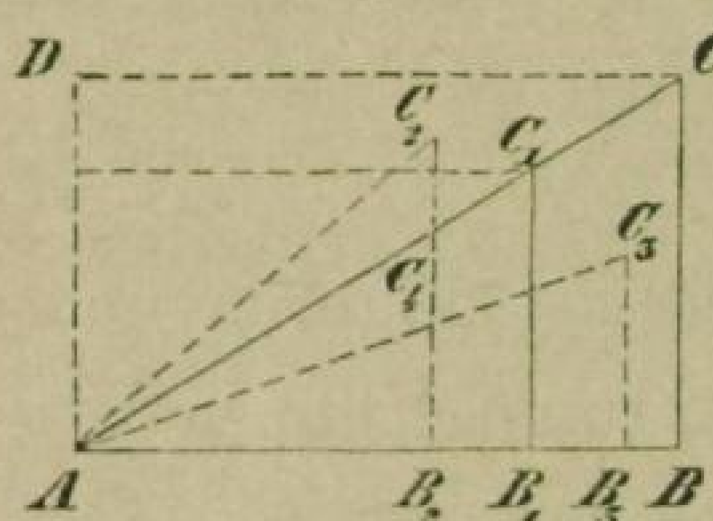
1) ungleichschenklig**)-rechtwinkliges Dreieck.

*) Dieser Ausdruck soll bezeichnen die congruenten Dreiecke, in welche sich ein Parallelogramm oder ein Vieleck zerlegen lässt.

**) Dieser Ausdruck — statt ungleichseitig — ist gewählt, um den Gegensatz zu gleichschenklig-rechtwinklig hervortreten zu lassen.

Die beiden Dreiecke ABC und AB_1C_1 sind winkelgleich*), weil der Winkel $B\widehat{A}C$ $(= B_1\widehat{A}C_1)$ beiden gemeinsam und die Seite $B_1C_1 \parallel BC$ ($\parallel AD$) ist und zwar stimmen die Dreiecke immer in jenen Winkeln überein, welche von den gleichnamigen oder ähnlichliegenden Seiten (z. B. der grösseren Kathete und der Hypotenuse) eingeschlossen oder gebildet werden. Diese Winkel mögen ähnlichliegende — mit dem Fremdwort „homologe" — heissen. Hinsichtlich der Seiten ergibt sich Folgendes: Bezeichnet man sie, wie es allgemein üblich ist, mit denselben gleichnamigen aber kleinen Buchstaben, welche die gegenüberliegenden Ecken tragen, also

Fig. 1.



$$\left.\begin{array}{llll} AB & \text{mit } c, & AB_1 & \text{mit } c' \\ BC & ,, \ a, & B_1C_1 & ,, \ a' \\ AC & ,, \ b, & AC_1 & ,, \ b' \end{array}\right\} \text{ so ist, ganz wie im Oblong}$$

$$c : a = c' : a' = 4 : 3$$
$$a : b = a' : b' = 4 : 5$$
$$b : c = b' : c' = 3 : 5$$

Diese drei Proportionen lassen sich bekanntlich in eine einzige zusammenfassen

$$c : a : b = c' : a' : b'$$

Von diesen drei Proportionen braucht man aber in unserm Falle nur die erste zu kennen, weil die andern beiden aus ihr sich ergeben, da ja nach dem Pythagoräischen Lehrsatze $b = \sqrt{c^2 + a^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ist. — Da zwei Seiten im Dreieck, welche man in Verhältniss setzt (vergleicht), immer an einander oder be-

*) Dieser Ausdruck „winkelgleich" (d. h. „in den Winkeln gleich") ist absichtlich gewählt zur Bezeichnung der Eigenschaft, dass jeder Winkel des einen Dreiecks einzeln genommen einem Winkel des andern gleich ist und er ist desshalb wohl zu unterscheiden von „gleichwinklig", welches ähnlich wie „gleichseitig" die Gleichheit der (drei) Winkel desselben Dreiecks bezeichnet. Der Ausdruck „winkelgleich" bezieht sich also immer auf zwei, der Ausdruck „gleichwinklig" aber auf ein und dasselbe Dreieck. Uebrigens findet sich der Ausdruck „winkelgleich" z. B. bei Helmes, Plan. II. §. 325.

nachbart liegen müssen, so wollen wir sie Nachbarseiten*) nennen und zwar mögen diejenigen Nachbarseiten, welche in den beiden Dreiecken gleiche Winkel einschliessen (bilden), ähnlichliegende — mit dem fremden Worte homologe — Seiten heissen**). Homologe (oder gleichnamige) Nachbarseiten sind also z. B.

$$\left.\begin{array}{llll} a, c & \text{und} & a', c' \\ b, c & ,, & b', c' \\ a, b & ,, & a', b' \end{array}\right\} \text{aber nicht } a, c \text{ und } b', c' \text{ etc.}$$

Nun ergeben sich leicht als Haupteigenschaften ähnlicher ungleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke folgende:

a) sie sind winkelgleich (stimmen in den homologen Winkeln überein).

b) das Verhältniss ihrer homologen Nachbarseiten ist gleich.

genau, wie beim Oblong, nur dass die Seite, welche hier Hypotenuse ist, dort Diagonale war. Die zweite Eigenschaft aber (unter b) lässt sich auch noch anders ausdrücken. Da nämlich die erste der obigen Proportionen auch geschrieben werden darf

$$c : c' = a : a'$$

und ähnlich die andern, so kann man, diese Proportion in Worte übersetzend, auch sagen: In ähnlichen Dreiecken ist das Verhältniss der gleichnamigen (homologen) Seiten gleich; oder: eine Seite des einen (z. B. kleineren) Dreiecks verhält sich zu der gleichnamigen des andern (grössern) Dreiecks, wie eine andere Seite des ersteren (kleineren) Dreiecks zu der ihr gleichnamigen Seite im andern (grössern) Dreieck. Man nennt diese gleichnamigen Seiten auch, weil sie zwischen denselben (gleichen) Winkeln liegen, ähnlichliegend oder mit

---

*) Dieser Name könnte als „überflüssig" erscheinen, da ja im Dreieck zwei Seiten immer benachbart sind und sein müssen. Doch sehe ich darin ein Schutzmittel gegen die Verwechslung der „homologen Seiten" in demselben und jener in verschiedenen Dreiecken.

**) Dies ist allerdings gegen das Herkommen; die meisten Autoren nennen diejenigen Seiten „homolog," welche gleichen Winkeln gegenüber liegen. S. z. B. Helmes, Planim. II, §. 325. Dann aber liegen die Seiten in verschiedenen Dreiecken.

dem fremden Worte „homolog.“*) Hiernach kannst du obigen Satz auch noch anders ausdrücken, wie? Wir wollen uns jedoch immer des ersten oben sub b) angegebenen Ausdrucks „Nachbarseiten“ bedienen, weil er sich durch seine Kürze empfiehlt; demgemäss wollen wir auch bei der Schreibweise der obigen Proportionen bleiben.

Es fragt sich nun, ob eine der sub a) und b) angegebenen Eigenschaften ähnlicher Dreiecke neben der andern und unabhängig von ihr bestehen kann oder ob eine von der andern abhängt d. h. ob, wenn die eine aufhört, auch die andre zu sein aufhört; m. a. W.: ob die eine mit der andern steht und fällt. Erinnere dich, wie dies beim Oblong war. Die Oblonge AHsIII und $A3tE$ (Fig. 1. S. 348) erhielten die neuen Seitenverhältnisse 8 : 9 und 2 : 1, aber die Gleichwinkligkeit blieb bestehen. Bei den schiefwinkligen Parallelogrammen ist dies nicht der Fall und ebensowenig bei den Dreiecken. Denn wenn du das Seitenverhältniss $c : a$ änderst, so tritt sofort der Eckpunkt C_1 aus der Diagonale AC des Oblongs $ABCD$ heraus; es ändern sich auch die andern Seitenverhältnisse und zugleich die spitzen Dreieckswinkel. Umgekehrt: ändert man einen der letztern, so ändert sich zugleich der andere und die Ecke C_1 tritt ebenfalls sofort aus der Diagonale AC heraus, die Dreiecke aber erhalten dadurch verschiedene Seitenverhältnisse, wie du an den Dreiecken AB_2C_2 und AB_3C_3 siehst. Eine Aenderung der einen Eigenschaft hat also die Aenderung der andern zur nothwendigen Folge oder: die beiden Eigenschaften bedingen einander gegenseitig. Hieraus folgt aber, dass eine einzige derselben schon hinreicht um die Aehnlichkeit der in Rede stehenden Dreiecke zu begründen oder zu erkennen. Daraus aber ergibt sich der

Satz: Ungleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie entweder in den homologen Winkeln übereinstimmen oder: wenn das Verhältniss ihrer homologen Nachbarseiten gleich ist.

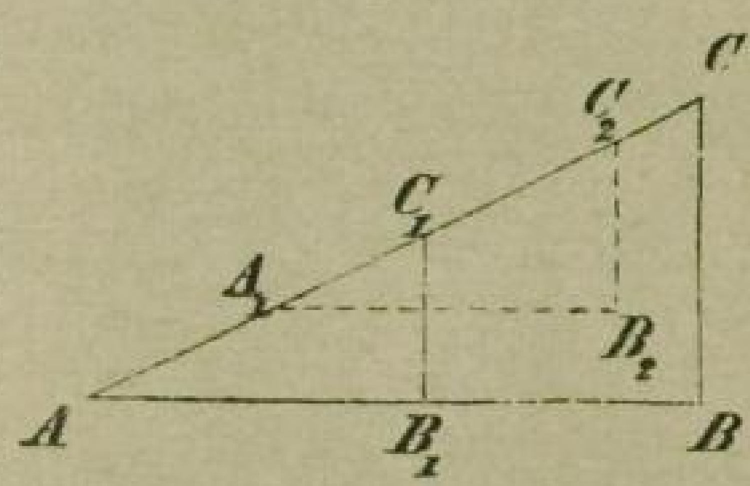
und zwar braucht nur das Verhältniss zweier Nachbarseiten

*) Dieser Ausdruck hat jedoch hier eine andere Bedeutung, als oben. Denn das „Aehnlichliegen“ ist hier ein anderes, als dort. S. die vorige Anmerkung.

bekannt zu sein, weil sich die Verhältnisse der andern daraus ergeben. Aehnliches werden wir bei den andern Dreiecken finden.

Es gibt noch ein anderes aber mehr äusserliches oder oberflächliches Kennzeichen der Aehnlichkeit solcher Dreiecke, das aber doch erwähnt zu werden verdient. Wenn man nämlich (Fig. 2) das kleinere der aufeinanderliegenden Dreiecke so auf dem grössern verschiebt, dass immer zwei gleichnamige (homologe) Seiten z. B. Hypotenusen b und b' aufeinandergleiten, dann bleiben die beiden andern Seiten a und c, a' und c' parallel, bis zuletzt die eine derselben — die zuerst freie Seite a' mit ihrer homologen a coincidirt.

Fig. 2.



Uebungen.

a) Zeichne ungleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke in den zuletzt angegebenen Lagen, indem du das kleinere Dreieck auch längs AB verschiebst.

Fig. 3.

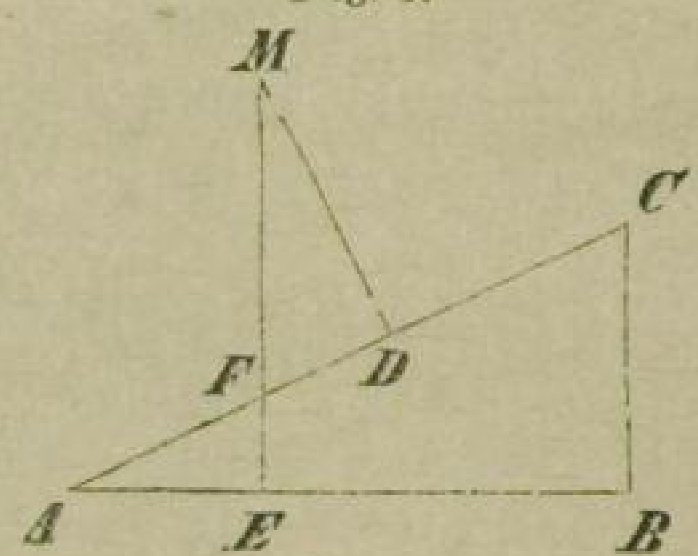
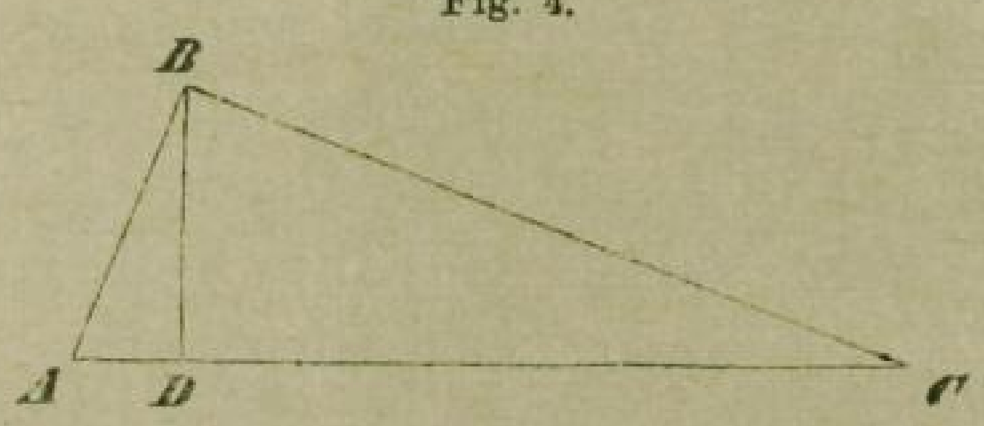


Fig. 4.



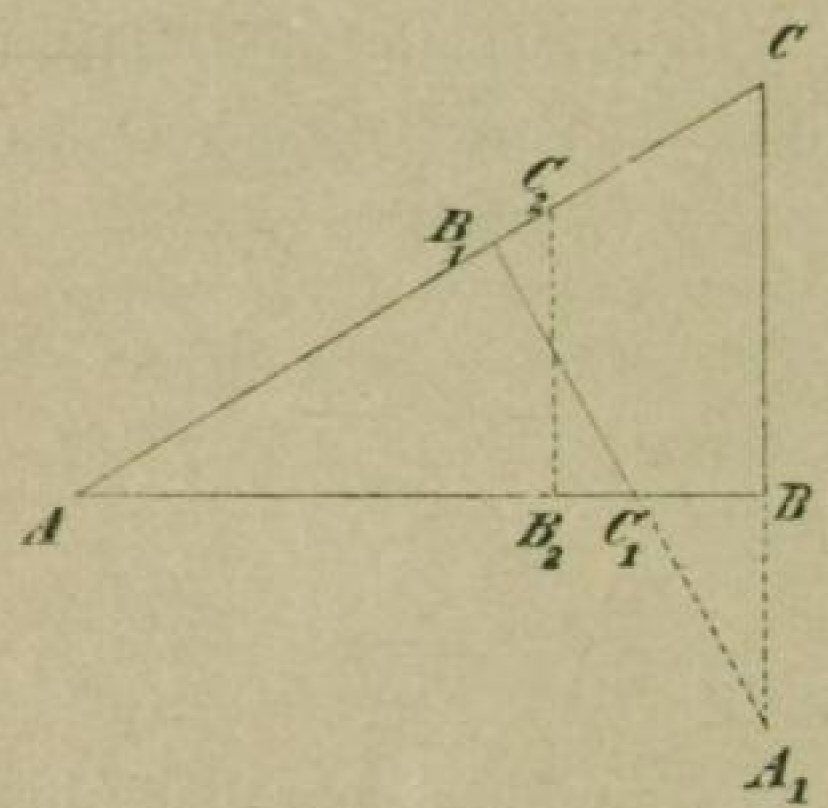
b) Construire ein ungleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 3) mit der grössern Kathete AB als Basis, fälle von einem Punkte M über der Hypotenuse auf AC und AB Winkelrechte MD und ME und bezeichne den Durchschnitt der AC und ME mit F*). Welche der entstehenden Dreiecke sind ähnlich? Beweise es!

c) Construire ein ungleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AC als Basis (Fig. 4), fälle dann vom Scheitel B des rechten Winkels auf AC die Winkelrechte BD. Welche dadurch entstehenden Dreiecke sind unter sich und dem ganzen (gegebenen) ähnlich? Warum? Sind sie es auch nach dem Seitenverhältniss? Miss zum Zwecke dieser Antwort die Seiten der (genau gezeichneten!) Figur mittelst Massstab!

*) Vergl. meine Vorschule der Geometrie. S. 58. Fig. 61.

d) Es kann der Fall sein, dass die zwei ähnlichen Dreiecke ABC und AB_1C_1 verwendet auf einander liegen, wie in Fig. 5. Dann muss man das eine (kleinere) Dreieck AB_1C_1 erst umwenden, so dass es in die Lage AB_2C_2 kommt und dadurch $B_1C_1 \parallel BC$ wird, um die Aehnlichkeit anschaulicher zu machen. Zeichne beide Lagen!

Fig. 5.



e) Verlängere B_1C_1 in Fig. 5 (über C_1 hinaus), und es treffe diese Verlängerung die Verlängerte CB in A_1, welche ähnlichen Dreiecke entstehen nun noch?

f) Ziehe in einem ungleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke zu jeder Seite eine Parallele und gib die dadurch entstehenden ähnlichen Dreiecke an!

2) Das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Dieses Dreieck ist immer die Hälfte (ein Theildreieck) eines Quadrats. Solche Dreiecke sind aber alle winkelgleich und die Verhältnisse der homologen Nachbarseiten sind in allen dieselben, nämlich das Verhältniss der Katheten (Schenkel) ist $1:1$, das Verhältniss der Katheten (Schenkel) zur Hypotenuse aber ist $1:\sqrt{2}$. Durch Aenderung der Seitenverhältnisse ändern sich sofort auch die Winkel und umgekehrt; es geht dann dieses Dreieck über in das ungleichschenklig-rechtwinklige. So erhält man, ähnlich wie beim Quadrat, den

Satz: Alle gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich.

Uebungen.

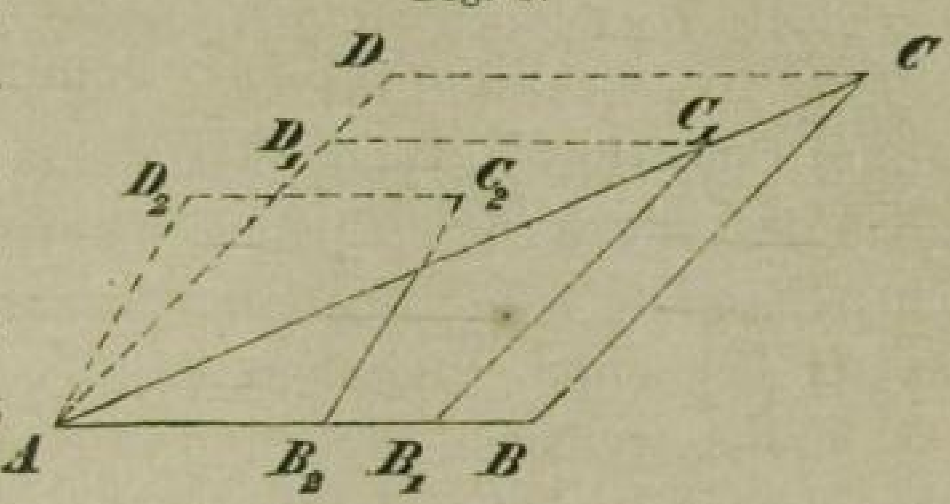
a) Construire ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB als Basis und fälle von der Spitze (dem Scheitel des rechten Winkels) C die Winkelrechte CD! Was für Dreiecke entstehen? Welche sind einander ähnlich, welche congruent?

b) Ziehe sodann in einem Dreiecke je eine Parallele zu einer Seite und gib die ähnlichen Dreiecke, welche entstehen, an!

c) Ziehe in einem symmetr. Trapeze beide Diagonalen! Wenn sie einander rechtwinklig schneiden, welche dadurch entstehenden Dreiecke sind ähnlich? Unterscheide sie von den congruenten!

3) Das gleichschenklig-schiefwinklige Dreieck ABC (Fig. 6) ist immer die Hälfte eines Rhombus $ABCD$ (s. auch S. 351. Fig. 2a wo $AHq = \frac{1}{2} AHqE$). Nun sind aber z. B. $\triangle AB_1C_1$ und $\triangle ABC$ winkelgleich als Hälften winkel-

Fig. 6.



gleicher Rhomben, also ist die eine Bedingung, die Winkelgleichheit erfüllt, die andere, das gleiche Verhältniss der Nachbarseiten und zwar hier des Schenkels zur Basis*) ergibt sich ebenfalls leicht, sie haben genau dasselbe Verhältniss wie beim Rhombus (S. 351), nämlich:

$$AB : BC = AB_1 : B_1C_1 = a : a = 1$$

$$\left.\begin{array}{r} AB : AC = AB_1 : AC_1 \\ \text{oder } BC : AC = B_1C_1 ; AC_1 \end{array}\right\} {}^{**)}$$

Auch hier hebt eine Aenderung des Seitenverhältnisses die Winkelgleichheit auf und umgekehrt: die Aenderung eines Winkels hebt das Verhältniss der ungleichen Seiten auf, wie man leicht an dem Dreiecke AB_2C_2 (Fig. 6) sieht, worin nur noch AC_2 zu ziehen ist. Man erhält so den

Satz: Gleichschenklig - schiefwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie winkelgleich sind oder: wenn das Verhältniss ihrer ungleichen Nachbarseiten gleich ist.

Zur Winkelgleichheit bedarf es aber hier der Gleichheit nur eines Winkels, weil in solchen Dreiecken alle Winkel durch einen bestimmt sind. Wie lässt sich sonach der Satz noch aussprechen?

Specieller Fall: Wenn die Basis gleich den Schenkeln wird ($AC = AB = BC$), so geht das gleichschenklige Dreieck über in ein gleichseitiges. Die Seitenverhältnisse sind dann alle $= 1 : 1$, die Winkel gleich und man erhält den

Satz: Alle gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich.

---

*) weil das Verhältniss der Schenkel (Rhombusseiten) ohnehin immer $= 1 : 1$ ist, so kann hier nur gemeint sein das Verhältniss des Schenkels zur Basis (beim Rhombus: das Verhältniss der Seite zur Diagonale). Um daher Missverständnisse zu vermeiden, soll im Folgenden immer gesagt werden: „das Verhältniss der ungleichen Seiten."

**) Bezeichnet man den Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks mit φ, so ist obiges Verhältniss $1 : 2\cos\varphi$.

Uebungen.

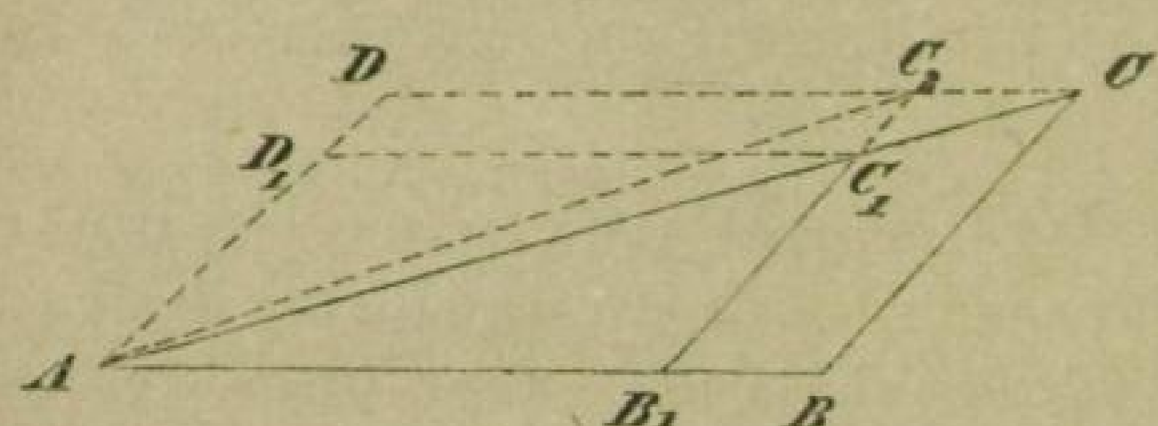
a) Construire in einen Kreis ein reguläres Sehnendreieck und um den Kreis das zugehörige Tangentendreieck, so erhältst du ähnliche gleichschenklige Dreiecke. Schreibe sie auf! Dasselbe thue mit den andern dir bereits bekannten Vielecken.

b) Bei welchem regulären Vieleck werden diese ähnlichen Dreiecke gleichseitig, bei welchem rechtwinklig?

c) Ziehe in einem gleichschenkligen Dreiecke eine Parallele zur Basis oder verlängere die Schenkel (geneigten Seiten) eines gleichschenkligen (symmetrischen) Trapezes bis zum Treffpunkt, so ergeben sich ähnliche Dreiecke. Welche?

4) Das ungleichseitig*)-schiefwinklige Dreieck ABC (Fig. 7). Dieses Dreieck ist immer die Hälfte eines Rhomboids. Die Hälften gleichwinkliger Rhomboide aber stimmen immer in den homologen Winkeln überein wie z. B. die Dreiecke ABC und AB_1C_1 (Fig. 7), worin Winkel $\widehat{A} = \widehat{A}$, $B = B_1$, $C = C_1$ ist. Sonach

Fig. 7.



ist hier die eine Bedingung, die Winkelgleichheit, erfüllt. Desshalb gibt auch die Verschiebung des kleineren Dreiecks AB_1C_1 längs AC oder AB dasselbe Resultat, wie in no. 1) beim rechtwinkligen Dreieck (s. S. 421).

Die andere Bedingung aber, die Verhältnissgleichheit der homologen Seiten ist ebenfalls erfüllt, da diese Verhältnisse genau dieselben sind, wie beim Rhomboid, nämlich

$$c : c' = a : a' = b : b'$$

Auch hier hängt die Gleichwinkligkeit mit der Gleichheit der Nachbarseitenverhältnisse so innig zusammen, dass die eine Eigenschaft als nothwendige Folge der andern betrachtet werden kann oder dass beide Eigenschaften einander bedingen oder, um die früheren Worte zu gebrauchen — dass die eine Eigenschaft mit der andern steht und fällt. Denn ändert man einen

*) Man müsste consequent nach dem Früheren auch hier sagen „ungleichschenklig." Doch wird dieses Dreieck, welches als allgemeinstes Dreieck oder als der Typus der Dreiecke gilt, wohl allgemein kurz „ungleichseitiges" genannt.

Winkel, z. B. $B\widehat{A}C$, so fällt, selbst wenn AB_1 bleibt, sofort die Ecke C_1 ausserhalb der Diagonale AC (z. B. in C_2) und die Seiten AC_1 und B_1C_1 erhalten andere Werthe. Aendert man aber eine Seite z. B. B_1C_1, wodurch zugleich die Seitenverhältnisse geändert werden, so ändern sich auch die Winkel A und C_1 und die Dreiecke ABC und AB_1C_2 sind nicht mehr ähnlich. Hiernach ergibt sich nun folgender

Satz: Ungleichseitig-schiefwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie winkelgleich sind oder wenn das Verhältniss ihrer homologen Nachbarseiten gleich ist.

Nennt man, wie oben, die Seiten eines solchen Dreiecks a, b, c und die entsprechenden (homologen) des andern a', b', c', so ist

$$\left.\begin{aligned} a : b &= a' : b' \\ a : c &= a' : c' \end{aligned}\right\} \text{ und aus diesen Proportionen folgt:}$$
$$\overline{b : c = b' : c'}$$

woraus erhellt, dass von den Dreiecken nur zwei Seitenverhältnisse bekannt zu sein brauchen, das dritte ergibt sich dann aus ihnen. Fasst man nun die für die verschiedenen Dreiecke gefundenen Sätze zusammen, so sieht man leicht, dass sie alle in dem letzten enthalten sind und man kann sagen:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie entweder winkelgleich sind oder wenn die Verhältnisse ihrer homologen Nachbarseiten gleich sind*)

oder noch bestimmter:

Dreiecke sind ähnlich, wenn sie entweder in zwei homologen Winkeln oder in zwei homologen Seitenverhältnissen übereinstimmen.

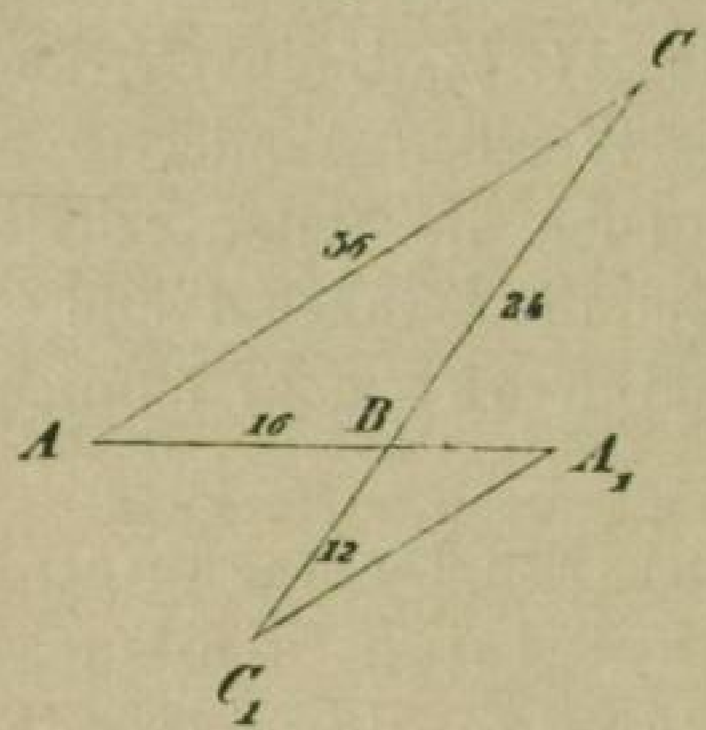
Uebungen.

a) In einem ungleichseitig-schiefwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 8), (worin $AB = 16^{mm}$, $BC = 24^{mm}$, $AC = 36^{mm}$ ist), verlängere zwei Seiten

---

*) In diesem Satze liegen die zwei Aehnlichkeitssätze, die man gewöhnlich als den 1. und 4. bezeichnet. S. Helmes, Plan. II. §. 329. „Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel gegenseitig gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich; und §. 332. „Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten in gleichen Verhältnissen stehen, so sind die Dreiecke ähnlich.“

Fig. 8.



AB und CB (über B hinaus) und zwar CB um eine Strecke, welche entweder kleiner oder grösser $\left(\lessgtr\right)$ ist, als CB selbst bis C_1 (in der Figur um die Hälfte von CB). Hierauf ziehe durch C_1 die Parallele zu AC, welche die verlängerte AB in A_1 schneide, so entstehen ähnliche Dreiecke. Welche? Beweise, dass sie ähnlich sind! Wie gross werden BA_1 u. C_1A_1?

b) Wiederhole die Construction, mache aber die Verlängerung BC_1 und BA_1 = der Hälfte der verlängerten Seiten. Entstehen nun auch ähnliche Dreiecke? Kannst du beweisen, dass sie es sind?

c) Wiederhole diese Construction, verlängere aber die Seiten über die andern Ecken und zwar um das Drittel, Viertel etc.

d) Zeichne zu obigem Dreiecke ABC ein andres mit halb so langen Seiten. Sind die beiden Dreiecke ähnlich und warum?

e) Wiederhole die Construction, nimm aber das Drittel und Viertel etc. der Seiten.

Andere derartige Aufgaben kommen besonders vor beim Feldmessen mittelst des Messtisches und beim Gebrauch des sogenannten Storchschnabels (Pantographen) zum Verjüngen (Reduciren) der Figuren (Dreiecke).

Von den Kennzeichen der Aehnlichkeit der Dreiecke wird in der geometrischen Praxis weitaus am meisten jenes der Winkelgleichheit gebraucht, weit weniger das der gleichen Seitenverhältnisse. Denn die Winkel sind meist bekannt oder leicht zu berechnen, während die Seitenverhältnisse weniger (seltener) bekannt sind.

Wenn man endlich die Aehnlichkeit der Dreiecke mit jener der Parallelogramme vergleicht, so findet man leicht, dass Dreiecke immer ähnlich sind, wenn ihre Doppelfiguren, die Parallelogramme, es sind und es lässt sich also allgemein sagen:

> Wenn zwei Parallelogramme ähnlich sind, so sind es auch ihre Hälften, die Dreiecke.

Da im rechtwinkligen Dreieck durch einen spitzen und im gleichschenkligen durch einen beliebigen Winkel die andern bestimmt sind, so bedarf es zur Erkennung der Aehnlichkeit solcher Dreiecke nur der Kenntniss eines gleichen (schiefen) Winkels; kennt man einen solchen nicht, dann erst braucht man das Merkmal der Seitenverhältniss-Gleichheit.

Beim schiefwinklig-ungleichseitigen (oder allgemeinen)

Dreiecke dagegen braucht man zwei Winkel, um die Winkelgleichheit und somit die Aehnlichkeit zu zeigen. Kennt man nur einen, dann reicht dieses Merkmal nicht aus; man braucht vielmehr — falls man nicht zwei gleiche Seitenverhältnisse kennt — mindestens noch ein Seitenverhältniss und dieser Fall ist also ein solcher, bei welchem die Kennzeichen der Aehnlichkeit gemischt sind, wir wollen ihn daher kurz den gemischten Fall nennen. Aber auch er gibt wieder zwei besondere Fälle, nämlich:

a) der gleiche Winkel liegt zwischen den homologen Seiten*)

b) „ „ „ „ einer Seite gegenüber.

Diese beiden Fälle aber, welche in der Praxis der Geometrie am seltensten vorkommen, gehören streng genommen in die wissenschaftliche Geometrie. Doch wollen wir in einem späteren Aufsatze zeigen, wie sie sich in der propädeutischen mit Frfolg behandeln lassen. —

*) Ein solcher Fall ist z. B. in der Uebung b) zu no. 4).

Kleinere Mittheilungen.

Zur mathematischen Zeichensprache.

Von G. Hellmann in Berlin.

Schon mehrfach sind in dieser Zeitschrift*) Beiträge zur Verbesserung der mathematischen Ausdrucksweise gegeben worden, wohl auch hie und da vereinzelte Bemerkungen, die an der Zeichensprache zu tadeln hatten. Verfasser dieser Notiz möchte nun besonders auf letztere aufmerksam machen, da sie nicht weniger Verkehrtes und Ueberflüssiges enthält, als die Sprache der Mathematik im Allgemeinen.. —

Während die Zeichen für die Gleichheit, Ungleichheit oder Aehnlichkeit zweier Grössen wohl allgemein die bekannten ($=$, $\gtrless$, $\sim$) sind, begegnet man folgenden verschiedenen Zeichen ($\cong$, $\overline{\underline{\sim}}$, $\overset{=}{\sim}$, $\equiv$ für die Congruenz. Welches ist nun vorzuziehen oder sind alle vier gleich berechtigt? An und für sich ist es gewiss gleichgültig, welches Symbol man der Congruenz beilegt — wenn man es nur consequent gebraucht, was leider nicht der Fall ist — aber wenn man einmal für den Ausdruck der Aehnlichkeit und Gleichheit die Zeichen $\sim$ resp. $=$ gewählt hat und Congruenz die Gleichheit und Aehnlichkeit zusammen involvirt, so sind die Zeichen $\cong$, $\overline{\underline{\sim}}$, $\overset{=}{\sim}$ dem vierten $\equiv$ vorzuziehen.

Bei der nun eintretenden engeren Wahl würde ich vorschlagen, sich allgemein für das erstere zu entscheiden, denn es verdient im Verein mit dem dritten unbedingt vor dem zweiten den Vorzug und ist überhaupt das zuerst für die Congruenz (von Leibnitz) eingeführte Zeichen.

Bei der Anwendung genannter Symbole ($=$, $\sim$, $\cong$) gibt es nun viel Ueberflüssiges zu verbannen. Meistens findet man

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF,\quad \sphericalangle A = \sphericalangle B,\quad \triangle ABC = (\sim, \cong)\ \triangle DEF$$

u. s. w.

Zunächst ist ersichtlich, dass hier überall das zweite Zeichen

---

*) s. Citate in dies. Jahrg. S. 279. Man vergl. auch Sickenberger math. Orthographie IV, 379 ff. D. Red.

($\sphericalangle$, $\triangle$) überflüssig wird; denn es ist von selbst verständlich, dass ein Winkel nicht gleich einem Dreiecke, ein Dreieck nicht ähnlich, congruent einem Winkel sein kann, überhaupt ungleichartige Dinge nicht durch die obigen Zeichen verbunden werden können. Demnach wäre also zu schreiben

$$\sphericalangle ABC = DEF, \quad \sphericalangle A = B, \quad \triangle ABC = (\sim, \cong)\, DEF;$$

aber auch hier steht noch manches Unnöthige.

Die Bezeichnungsweise $\sphericalangle ABC = DEF$ kann nicht mehr verkürzt werden, da $ABC = DEF$ auch die Gleichheit der Dreiecke ABC, DEF bezeichnen kann; umgekehrt muss also auch geschrieben werden $\triangle ABC = DEF$. Aber statt der Bezeichnung $\triangle ABC \sim DEF$, $\triangle ABC \cong DEF$ kann man kürzer schreiben

$$ABC \sim DEF, \quad ABC \cong DEF,$$

denn einerseits hat es keinen Sinn, zwei Winkel, die man ja auch mit drei Buchstaben zu bezeichnen pflegt, ähnlich zu nennen, andrerseits spricht man wohl nicht von der Congruenz der Winkel.

Aehnlich wie bei den Symbolen für die Congruenz, stösst man auf folgende Zeichen der Parallelität ($||$, $\ddagger$, $\#$, $\#$), welch' letzteres auch für „parallel und gleich" gebraucht wird. Da die in den drei letzten Zeichen angedeutete Transversale nicht zum Begriff der Parallelität nothwendig ist, so ist das erste zu wählen.

Dem Zeichen $=$ möchte ich zu seinem Rechte verhelfen bei der Proportion, aus der es oft verdrängt wird, wenn man schreibt

$$a:b \;::\; c:d \text{ statt}$$
$$a:b = c:d.$$

Die Proportion sagt doch nichts anderes aus, als dass der Quotient $\frac{a}{b}$ gleich dem Quotienten $\frac{c}{d}$ ist; warum also ein neues Zeichen für die Gleichheit einführen? zumal dasselbe von den englischen Mathematikern zur Abkürzung für „folglich, somit u. s. w." gebraucht wird. Deutsche Schriftsteller bringen dafür gewöhnlich einen horizontalen Strich in Anwendung, dazu ist aber meiner Ansicht nach die Zeichensprache nicht geschaffen; siehe auch III, 20.

Ich gehe nun über zur Bezeichnungsweise der Figuren. Indem ich zunächst das Dreieck ins Auge fasse, behaupte ich, man sollte allgemein nach dem Vorgange Eulers an die Eckpunkte die grossen lateinischen Anfangsbuchstaben setzen, die zugehörigen Winkel mit den kleinen griechischen und die Maasszahlen der Seiten mit den, den gegenüberliegenden Ecken entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Aber nur zu häufig findet man die Eckpunkte mit kleinen lateiniscben Buchstaben und in derselben Figur die gegenüberliegenden Seiten mit denselben kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, so dass ein und derselbe Buchstabe zugleich das Symbol eines Punktes und einer Linie ist! Zu welchen Missverständnissen eine solche Bezeichnung führen muss, ist klar. Die gleichzeitige Verwendung von grossen und kleinen Buchstaben z. B. bei den Congruenz- oder Aehnlichkeitssätzen ist auch zu vermeiden, weil der mündliche Vortrag durch die fortwährende Unterscheidung von „klein" und „gross" schwerfällig und breit wird. Wenn man ferner die Congruenz (Aehnlichkeit) zweier Dreiecke so aufnotirt, dass die analogen Eckpunkte gleiche Stellung haben, hat man den grossen Vortheil, aus der hingeschriebenen Congruenz die gleichen Seiten und Winkel herauszulesen.

Sowie man die Bezeichnung eines Winkels durch drei Buchstaben so wählt, dass man aus der Stellung derselben den Scheitel erkennt, sollte man auch in gleicher Weise das gleichschenklige Dreieck so bezeichnen, dass der Buchstabe der Spitze in der Mitte steht; man ersieht dann sofort aus „BAC ein gleichschenkliges Dreieck," dass $BA = CA$ ist.

Aehnlich bei der körperlichen Ecke; Tellkampf schreibt $(M)ABC$, wo M die Ecke selbst bezeichnet; es ist dies gewiss zu empfehlen, aber die Klammer vor M kann fortbleiben.

Im Allgemeinen lässt sich nur sagen, dass eine gut gewählte Bezeichnung das Verständniss sehr erleichtert; man sollte darauf mehr Acht geben, als bisher und es nicht als gleichgültig betrachten, wie man dieselbe wählt; im Grunde ist es zwar einerlei, wie die Figuren bezeichnet werden, aber die Vortheile eines guten Bezeichnungssystemes sind eben viel zu gross, als dass man auch hierin nicht rationell verfahren sollte. Ich habe in dieser Beziehung immer das Werk Schröters über die Kegelschnitte bewundert, wo wirklich jeder Buchstabe mit Ueberlegung gewählt und beibehalten worden ist.

Vor allem ist darauf zu halten, dass man mit der Aufeinanderfolge der Buchstaben fortschreitet, so z. B. den Fusspunkt der zur Seite BC gehörigen Höhe mit D bezeichnet, den zur Seite AC gehörigen mit E u. s. w., nicht umgekehrt. Es scheint dies Pedanterie zu sein, hat aber den entschiedensten Nutzen, namentlich beim Unterricht. Dahin rechne ich auch die Sanctionirung gewisser Buchstaben, ich meine, dass z. B. für die merkwürdigen Punkte des Dreiecks stets dieselben angemessen gewählten Buchstaben gebraucht werden. Man hat dann den Vortheil bei weniger complicirten Lehrsätzen und Aufgaben ohne Figur im Kopfe operiren zu können — was auch sehr wenig geübt wird —; zugleich können aber auch kurzsichtige Schüler, welche von der Tafel entfernt sitzen, dem Vortragenden mit Leichtigkeit folgen, da sie wissen, welche Bedeutung die angewandten Buchstaben ein- für allemal haben.

In der Algebra hat man nicht minder Acht zu geben auf die Wahl der Buchstaben wie in der Geometrie. Das Resultat der Operation nimmt bei gut getroffener Wahl gewöhnlich einen symmetrischen Charakter an; Symmetrie des Ausdrucks ist aber in vielen Fällen ein Zeichen der Richtigkeit, wie Crelle einmal in seinen Aufsätzen (Berlin 1821) sagt.

Es liesse sich bei genauer Musterung wohl noch manches Uncorrecte oder wenigstens Vortheilhaftere beibringen, ich erinnere z. B. an den Gebrauch der Accente und Indices, an Schreibweisen, wie AB^2, $\overline{AB}^2$, AB_q, $\overline{AB}_q$ u. s. w. Verfasser wollte mit vorstehender Notiz nur eine Anregung geben, dass man auch von dieser Seite säubere und reinige.*)

Mathematische Miscellen.

Von G. Hellmann in Berlin.

1. Beweis des Steinerschen Satzes IV, 188 d).

Mit Bezugnahme auf die Figur 6**) des Affolter'schen Aufsatzes beweist man den citirten Satz kürzer, wie folgt:

Es ist nach dem erweiterten pythagoräischen Lehrsatze und einer einfachen Reduction:

$$\overline{AA_1}^2 = \overline{Ac}^2 + \overline{A_1c}^2 + 2\overline{A_1c}\,.\,\overline{c\alpha} = \overline{Ac}^2 + 2\overline{A_1c}\,.\,\overline{cA_1}, \text{ ebenso}$$
$$\overline{BB_1}^2 = \overline{Bc}^2 + \overline{B_1c}^2 + 2\overline{B_1c}\,.\,\overline{c\beta} = \overline{Bc}^2 + 2\overline{B_1c}\,.\,\overline{cB_1},$$

somit, da $\overline{Ac} = \overline{Bc}$ und $A_1c\,.\,cA_1 = B_1c\,.\,cB_1$

$$AA_1 = BB_1, \text{ w. z. b. w.}$$

2) Eine zweistellige Zahl, deren letzte Ziffer 5 ist, hat die Form

$$m\,.\,10 + 5,$$

wo m eine der Zahlen 0, 1, 2, . . . 9 bedeutet.

Das Quadrat derselben ist

$$m(m+1)100 + 25$$

oder als dekadische Zahl geschrieben

$$\overline{m(m+1)}\,25,$$

daraus ergibt sich für die Quadrirung einer solchen Zahl eine praktische Regel, welche leicht ersichtlich ist; z. B.

$$85^2 = \overline{8\,.\,9}25 = 7225.$$

3) In allen mir bekannten Lehrbüchern finde ich die Sätze, welche von der Parallelität einer geraden Linie mit einer Ebene handeln, nach dem Vorgange Euklids indirect bewiesen; sie lassen sich aber auch direct beweisen.

---

*) Man sehe auch unsere „Anregung zu einer Arbeit“ im Briefkasten des 4. Heftes. D. Red.

**) S. IV, Taf. 3. D. Red.

a. Eine Gerade AB ist einer Ebene MN parallel, wenn sie einer in derselben gezogenen geraden Linie CD parallel ist. (Fig. 1.)

Zieht man in der Ebene MN noch $EF \parallel CD$, so ist auch $AB \parallel EF$, mithin AB der durch die Parallelen CD und EF bestimmten Ebene MN parallel.

Fig. 1.

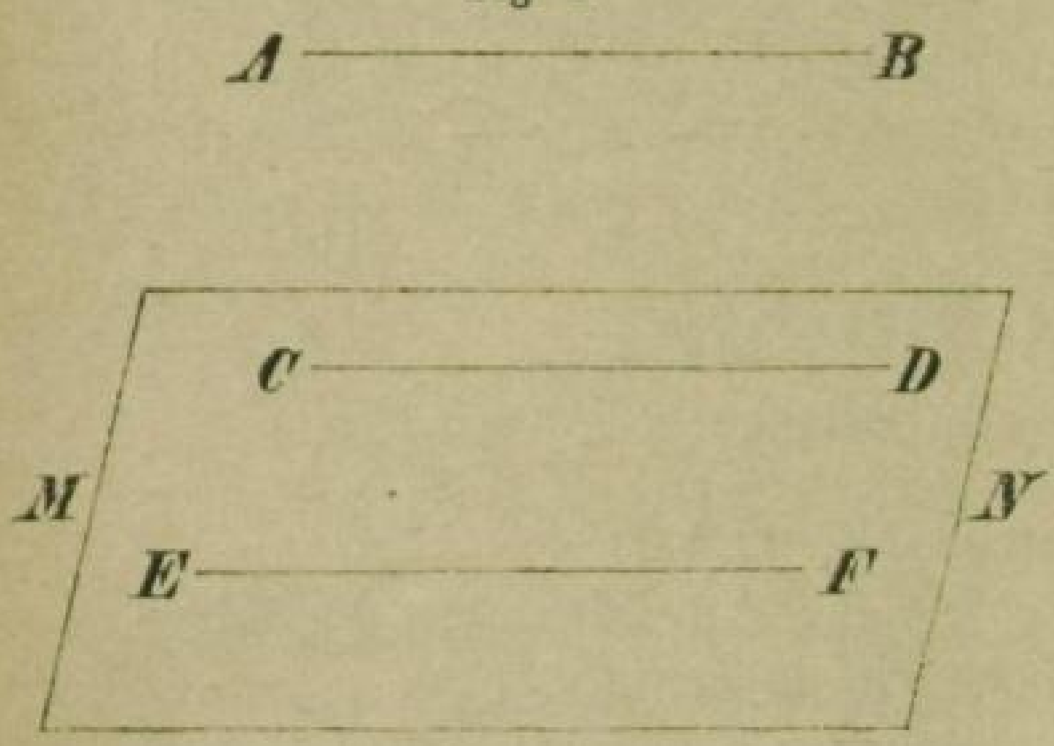
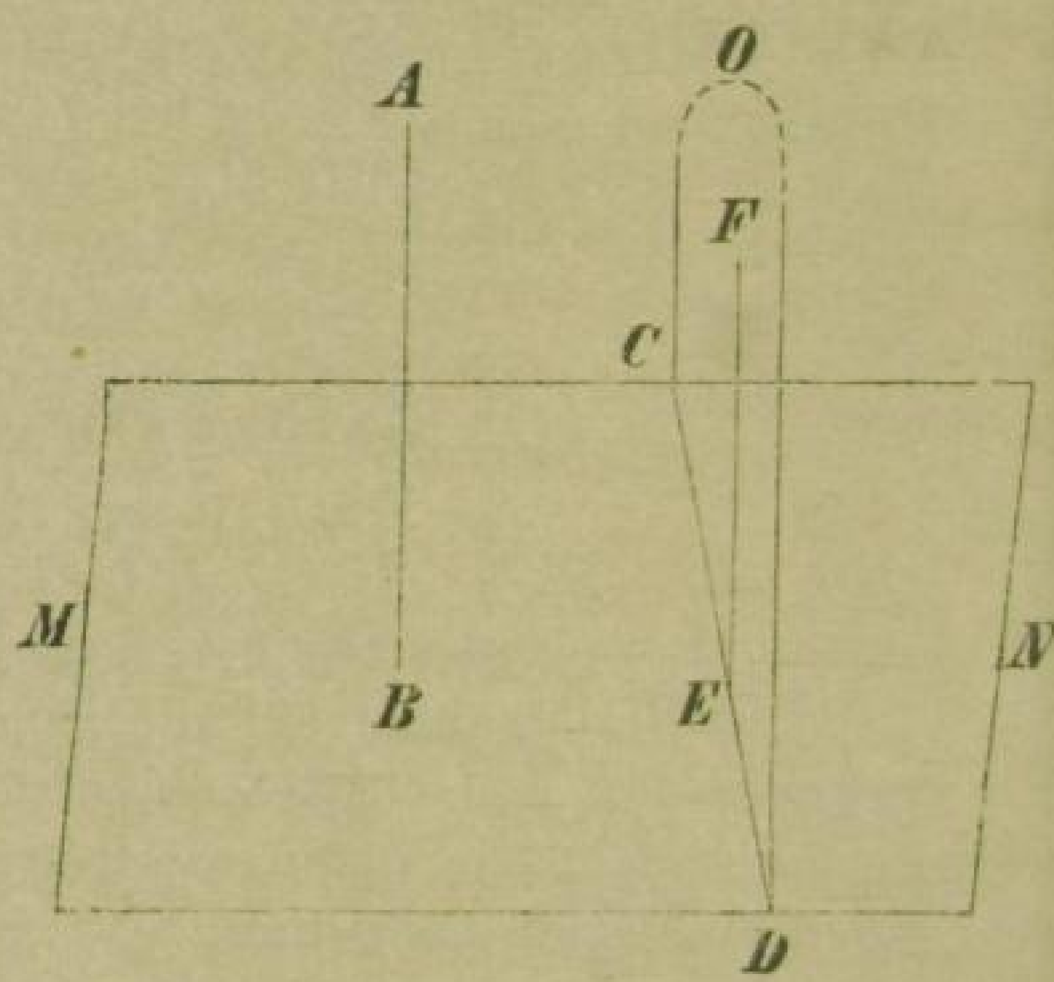


Fig. 2.



b. Eine Gerade AB ist einer Ebene COD parallel, wenn beide auf derselben Ebene MN senkrecht stehen. (Fig. 2.)

Errichtet man in der Ebene COD auf CD die beliebige Senkrechte FE, so ist $\parallel AB\ FE$, folglich nach (a) AB parallel der Ebene COD.

Kambly und Andre trennen sogar (b) von (a)!

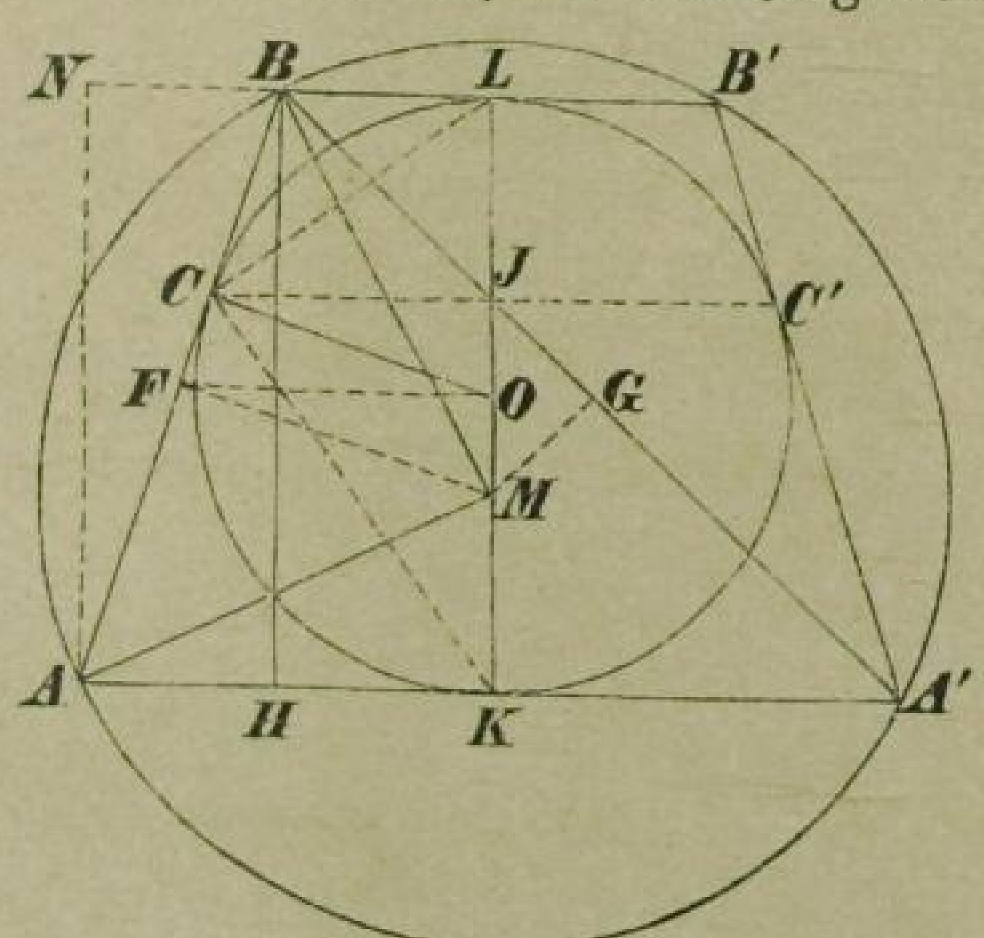
Das Antiparallelogramm, dem ein Kreis eingeschrieben werden kann.

Von Dr. Erler in Züllichau.

Besonders reich an einfachen Beziehungen und daher geeignet zu Aufgaben für Schüler ist das Antiparallelogramm, dem ein Kreis eingeschrieben werden kann. Einige finden sich mit Bezug auf eine andere später zu erwähnende Aufgabe bei J. H. T. Müller. Anh. zur Stereom. 117. Sie lassen sich ebenso leicht aus den allgemeinen Werthen für die zu betrachtenden Grössen, als aus ähnlichen Dreiecken ableiten, deren es eine grosse Zahl gibt. Ich theile in aller Kürze einige derselben im Nachstehenden mit.

Es seien (s. Fig. a. f. S.) die Grundlinien $AA' = a$, $BB' = b$, die Seitenkante $AB = c$, die Diagonale $A'B = d$, der spitze Winkel $BAA' = \alpha$, die Höhe $BH = h$, die Radien des um- und des eingeschriebenen Kreises (der grosse und der kleine Radius) $MA = r$, $OC = \varrho$, die Entfernung der Mittelpunkte dieser Kreise $MO = e$, die den Grundlinien parallele Berührungssehne, schlechtweg die parallele Sehne genannt $CC' = s$, die beiden andern Berührungssehnen, welche ich die schrägen Sehnen und jede der sie treffenden Grundlinien zugehörig nenne, $CK = s_1$, $CL = s_2$, der Abstand des Mittelpunktes M von der Seitenkante $MF = p$.

Natürlich ist $c = \frac{a+b}{2}$, $h = \sqrt{ab}$, „die Seitenkante ist gleich dem arithmetrischen, die Höhe gleich dem geometrischen Mittel beider Grundlinien;" daher ist „der Flächeninhalt des Antiparallelogramms gleich dem Produkte aus dem arithmetischen und geometrischen Mittel beider Grundlinien." Hierzu kommt $s = \frac{2\,ab}{a+b}$, d. h. „die parallele Sehne ist das harmonische Mittel beider Grundlinien." — $\operatorname{Sin}\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, $\cos\alpha = \frac{a-b}{a+b}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$ $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, also ist „der Sinus des Winkels gleich dem Quotienten des geometrischen und arithmetischen Mittels, der Cosinus gleich dem Quotienten der Differenz und Summe beider Grundlinien und das Quadrat der Tangente des halben Winkels gleich dem Quotienten dieser Grundlinien.



$\varrho = \frac{h}{2}$, $r = \frac{c}{2\,h}\sqrt{c^2 + h^2} = \frac{c}{2\sin\alpha}\sqrt{1 + \sin^2\alpha}$;

$e = \frac{1}{2}c\cot\alpha$; $d = \sqrt{c^2 + h^2}$.

Fällt man von einem Endpunkte einer Grundlinie ein Loth auf die andere, so ist der grössere dadurch bestimmte Abschnitt der letzteren $A'H$ oder $B'N$ gleich der Seitenkante c; f.*) $B'A'H \backsim CAK \backsim CKC' \backsim COL$ und natürlich ebenso $A'B'N \backsim CBL \backsim CLC' \backsim COK$, f. $CK : AK = CL : OL$ oder $s_1 : \frac{a}{2} = s_2 : \frac{h}{2}$, f. $s_1 h = s_2 a$ und $s_2 h = s_1 b$, f. $\frac{s_1}{s_2} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, d. h. die schrägen Sehnen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den zugehörigen Grundlinien. Ferner ist $CK : CC' = CO : CL$, oder $s_1 : s = \varrho : s_2$, f. $s_1 s_2 = \varrho s$, d. h. „das Rechteck aus den beiden schrägen Sehnen gleich dem Rechteck

*) Dies erscheint mir eine ganz angemessene Abkürzung für das in einer concisen mathematischen Beweisführung so oft wiederkehrende: „folglich."

aus der parallelen Sehne und dem kleinen Radius"; ferner $CC' : CK = CK : AK$, oder $s : s_1 = s_1 : \frac{a}{2}$, f. $s_1^2 = \frac{1}{2} sa$, d. h. „jede schräge Sehne die mittlere Proportionale zwischen der parallelen Sehne und der halben zugehörigen Grundlinie." —

Ferner ist $ABH \backsim MBG \backsim OCI \backsim MFO$, f. $MB : BG = OC : CI$ oder $r : \frac{d}{2} = \varrho : \frac{s}{2}$, f. $\frac{r}{\varrho} = \frac{d}{s}$, d. h. der grosse Radius verhält sich zum kleinen, wie die Diagonale zur parallelen Sehne; ferner $MO : OF = AH : HB$, oder $c : \frac{c}{2} = \frac{a-b}{2} : h$; $OC : CI = AB : BH$, oder $\varrho \left(= \frac{h}{2}\right) : \frac{s}{2} = c : h$, f. $h^2 = sc$, d. h. „die Höhe ist das geometrische Mittel aus der Seitenkante und der parallelen Sehne." Und $AB : BH = MB : BG$, oder $c : h = r : \frac{d}{2}$, f. $rh = \frac{1}{2} cd$, und $AB : BH = MF : FO$, oder $c : h = p : \frac{1}{2} c$; f. $c^2 = 2ph$. Beides folgt auch aus $BHA' \sim AFM$. Aus $rh = \frac{1}{2} cd$ folgt auch $4 r\varrho = cd$, d. h. „das Rechteck aus den Durchmessern beider Kreise ist gleich dem Rechteck aus der Seitenkante und der Diagonale."

Es ist auch $AOK \sim OBL \sim KCI \sim KLC \sim CLI \sim HB'B$, f. $OB \parallel KC$. Ferner folgt aus diesen Dreiecken $AK : KO = OL : LB$, oder $\frac{a}{2} : \frac{h}{2} = \frac{h}{2} : \frac{b}{2}$, f. $ab = h^2$ (s. o.). Aus $sc = h^2$ und $ab = h^2$ folgt auch $sc = ab$, f. $a : c = \frac{s}{2} : \frac{b}{2}$ oder $AA' : AB = CI : CB$, f. $ABA' \sim CBI$, f. geht BA' durch I, und natürlich ist ebenso $A'B'B \sim A'C'I$. Aus jenen Dreiecken folgt ferner $CK : KL = IC : CL$, oder $s_1 : h = \frac{s}{2} : s_2$, f. $s_1 s_2 = \frac{1}{2} hs = \varrho s$ (s. o.).

Lässt man die ganze Figur um KL als Achse rotiren, so entsteht ein gerader Kegelstumpf, dem eine Kugel eingeschrieben werden kann, und von diesem allein handelt Müller a. a. O. Ist nun M der von AB beschriebene Mantel, sind V, S und Σ die Volumina des Kegelstumpfes der um- und der eingeschriebenen Kugel, O, O_s, O_σ die Oberflächen dieser drei Körper, Z die vom Bogen AB beschriebene Kugelschicht; so ist $M = c^2\pi$, also unabhängig von r oder h, $M : O_\sigma = c^2 : h^2$, $N : O_s = h^2 : d^2$, $O = 2\pi\,(c^2 - \varrho^2)$, $Z = \frac{1}{3} M\varrho + V = M\varrho - \frac{1}{2}\Sigma$. — Dass $V = \frac{1}{3}\varrho O$ und daher $V : \Sigma = O : O_\sigma$, sind nur unmittelbare Folgerungen zweier allgemeiner Sätze, auf welche ich hier noch besonders aufmerksam mache: das Volumen jedes Körpers, dessen Oberfläche O sich in eine Ebene ausbreiten lässt und dem eine Kugel mit dem Radius ϱ eingeschrieben ist, ist

$\frac{1}{3}\varrho O$, folglich verhalten sich die Volumina derartiger Körper, die derselben Kugel umgeschrieben sind, unter einander und zu dem der Kugel, wie ihre Oberflächen unter einander und zu der Oberfläche der Kugel. Diesen Sätzen entsprechen natürlich analoge planimetrische.

Zur Berechnung der Bildweite optischer Linsen.*)

Von J. Bode in Mühlheim a/Rh.

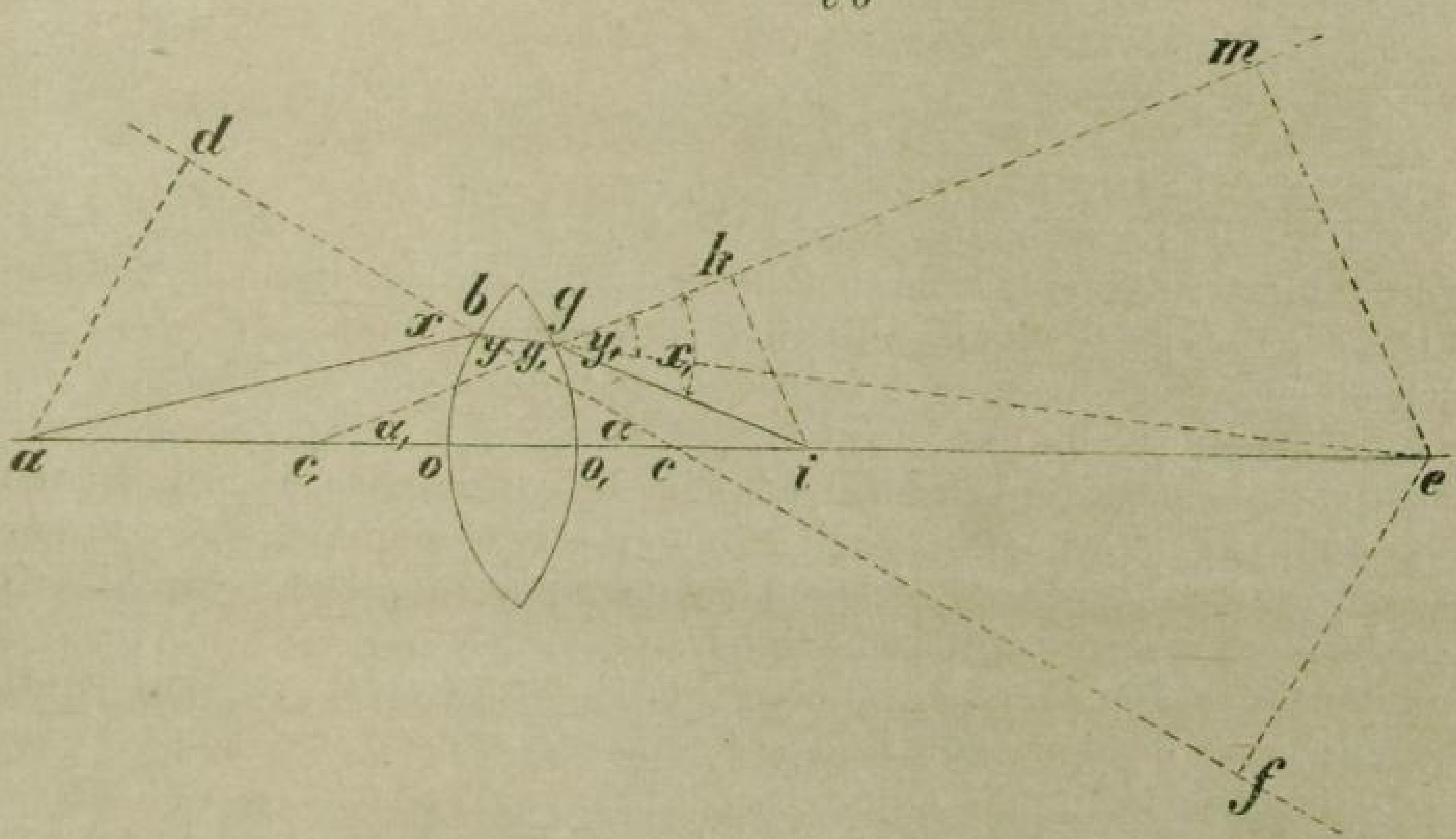
Bezeichnet in der nachstehenden, dem Sachkundigen verständlichen Figur der Punkt a eine Lichtquelle, so ist bei Vernachlässigung der Dicke der Linse für jeden Centralstrahl ab:

$$\sin x = \frac{ad}{ab} = \frac{ac.\sin\alpha}{ab} = \frac{(ao+r)\sin\alpha}{ao},$$

$$\sin y = \frac{ef}{eb} = \frac{ec.\sin\alpha}{eb} = \frac{(eo-r)\sin\alpha}{eo},$$

mithin

$$\frac{\sin x}{\sin y} = n = \frac{(ao+r).eo}{(eo-r).ao} = \frac{1+\frac{r}{ao}}{1-\frac{r}{eo}}. \qquad 1.$$



$$\sin x_1 = \frac{ik}{ig} = \frac{ic_1.\sin\alpha_1}{ig} = \frac{(io_1+r_1)\sin\alpha_1}{io_1},$$

$$\sin y_1 = \frac{em}{eg} = \frac{ec_1.\sin\alpha_1}{eg} = \frac{(eo_1+r_1)\sin\alpha_1}{eo_1} = \frac{(eo+r_1)\sin\alpha_1}{eo},$$

---

*) Siehe des Verfassers „Nachschrift" am Schlusse dieses Aufsatzes.
D. Red.

mithin

$$\frac{\sin x_1}{\sin y_1} = n = \frac{(io_1 + r_1) . eo}{(eo + r_1) . io_1} = \frac{1 + \frac{r_1}{io_1}}{1 + \frac{r_1}{eo}}. \quad 2.$$

Aus 1. und 2. erhält man zwecks Elimination der Bildweite eo zunächst:

$$n - \frac{nr}{eo} = 1 + \frac{r}{ao}.$$

$$n + \frac{nr_1}{eo} = 1 + \frac{r_1}{io_1},$$

und nach Multiplication einer jeden dieser Gleichungen mit -1, Translocirung des ersten Gliedes nach rechts und Division der so entstandenen Gleichungen durch r bezw. r_1:

$$+ \frac{n}{eo} = (n - 1)\frac{1}{r} - \frac{1}{ao},$$

$$- \frac{n}{eo} = (n - 1)\frac{1}{r_1} - \frac{1}{io_1},$$

deren Addition sofort die bekannte Formel

$$0 = (n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{ao} + \frac{1}{io_1}\right)$$

oder

$$\frac{1}{ao} + \frac{1}{io_1} = (n - 1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}\right)$$

liefert.

Dieselbe Bezeichnung der in Betracht kommenden Grössen führt durch blosses Ablesen von den nach derselben Methode construirten Figuren für jede andere Linsen-Art genau in derselben Weise zu denselben Gleichungen und zwar auch bezüglich der sichtbaren Rechnungszeichen $+$ und $-$, wenn von vornherein oder — didaktisch richtiger — nachträglich noch festgestellt wird, dass die Bildweiten eo und io_1, sowie der Radius $r = co$ der Vorderfläche mit der Gegenstandsweite ao gleiche bezw. entgegengesetzte, obwohl unsichtbare Vorzeichen führen sollen, je nachdem sie — wie in der vorstehenden Figur — auf deren Verlängerung oder auf ihr selbst liegen, und dass bezüglich des Radius $r_1 = c_1 o_1$ der Hinterfläche das Umgekehrte gelten solle.

Nach Ausweis der gebräuchlichen physikalischen Lehrbücher pflegt das obige Gesetz optischer Linsen zumeist nach Methoden abgeleitet zu werden, welche dem Anfänger wenig durchsichtig, häufig nicht völlig einleuchtend und nie so einfach, leicht fasslich und durchgreifend sind, wie die gegebene. Der Schüler sieht nämlich ein, dass die gesuchte Bildweite von den Grössen ao, n, r und r_1 abhängen, er also darauf Bedacht nehmen muss, von der bekannten Grösse n bezw. von $\sin x$ und $\sin y$ ausgehend, zu einem n gleichwerthigen Ausdruck zu gelangen, in welchem ausser jenen Grössen nur noch io_1 vorkommt, und, wenn dies nicht sofort gelingt, der gefundene Ausdruck vielmehr statt der gesuchten Bildweite io_1 jene eo enthält, mit Hülfe der Brechung an der Hinterfläche einen zweiten Ausdruck für n zu entwickeln, der dann aber ausser r, r_1 und io auch noch eo in sich schliesst. Sobald der Geist diese Direction hat, vermag der Schüler unter einiger Nachhilfe des Lehrers auch leicht die Figur gleichlaufend mit der Rechnung, dem Bedürfniss entsprechend selbst zu entwerfen, sowie die erforderlichen Substitutionen einzuführen. — Indem er hierbei aus Gründen des Rechnungszieles für ac die gleichwerthige Summe $ao + r$ setzt, sieht er sich unmittelbar nachher aus gleichem Grunde veranlasst, für den Einfallsstrahl ab den einfallenden Hauptstrahl ao zu substituiren und ebenso für die ausfallenden Strahlen eb, ig und eg die ausfallenden Hauptstrahlen eo, io_1 und eo_1: ihm wird so ersichtlich, dass und warum die Schlussformel nur für Centralstrahlen Gültigkeit hat. Indem er endlich aus gleicher Veranlassung in der Gleichung für $\sin y_1$ an Stelle von eo_1 schliesslich noch die Bildweite eo einführt, wird ihm erkenntlich, dass die Schlussformel überdies nur bei Vernachlässigung der Dicke der Linse besteht. — Die Ableitung der Bildweite der biconcaven Linse, einmal unter Zugrundelegung der absoluten Werthe der in Betracht kommenden Grössen, wie vorher bei der biconvexen Linse, sodann unter Berücksichtigung der besprochenen Vorzeichen, und die Vergleichung der Resultate beider Verfahren flösst Vertrauen ein in die Rechnung mit algebraischen Grössen, was auf dieser Stufe nicht zu verachten ist. — Die Symmetrie der Operationen und Gleichungen unterstützt endlich das Gedächtniss und wirkt anregend auch auf das Gefühl für Schönheit mathematischer Entwickelungen.

Nachschrift. — Durch die inzwischen mir bekannt gewordene dankenswerthe classische Arbeit des Herrn Professors J. Müller über „die Beziehungen der Brennweite und der conjugirten Punkte einer Linse"*) ist die seitherige, vorstehend wieder abgeleitete Formel für die Bildweite optischer Linsen zwar nunmehr mit Recht ausser Cours gesetzt, immerhin bleibt dieselbe aber eine Station, um zu der Müller-schen Formel zu gelangen, und es dürfte daher die vorgeführte Methode ihrer Ableitung auch jetzt noch einiges Interesse haben.

---

*) Cfr. diese Zeitschrift, IV., 279 ff.

Noch einmal der Anwinkel

u. d. immer noch bestehende Confusion d. Winkelnamen i. d. Parallentheorie.

Vom Herausgeber.

Von mehreren Seiten*) ist der Vorschlag gemacht worden, den in Oesterreich gebräuchlichen**) Ausdruck „Anwinkel" wegen seiner Kürze zu adoptiren. Verfasser dieses will jedoch dem geehrten Leserpublicum dieser Blätter vor der event. allgemeinen Annahme dieses Vorschlages seine Bedenken gegen diesen Ausdruck vorzubringen sich erlauben.

Die Kürze des Wortes „Anwinkel" ist gewiss sehr gewinnend. Auch lässt sich gegen die Bildung desselben kaum etwas einwenden. Denn wenn man sagen darf **Innen**winkel (Aussenwinkel) abgekürzt für „Winkel, welche innerhalb oder ausserhalb einer Figur oder der Parallelen etc. liegen," so dürfte wohl auch die Zusammensetzung mit der Präposition an und die dabei stattfindende Satzcontraction erlaubt sein. Aber wie steht es mit dem Sinn des fraglichen Wortes? Was kann denn „Anwinkel" eigentlich bedeuten? Doch wohl nur einen Winkel, der an einer Seite (Parallele, Geraden etc.) liegt! Lässt sich das aber nicht von allen Winkeln, welche bei dem Durchschnitt von Parallelen mittelst einer (dritten) Geraden entstehen, ja sogar von allen Winkeln überhaupt sagen? Liegen sie denn nicht alle „an," d. h. an einer Parallele oder an der Schneidenden oder überhaupt an einer Seite? Ergo ist dieses „Anliegen" gar kein charakteristisches und unterscheidendes Merkmal dieser Winkel! Solche Merkmale haben wir vielmehr in der Lage der Winkel innerhalb der Flächenräume, in welche die Ebene durch die Parallelen und durch die Schneidende zerlegt wird, zu suchen. Diese Lage kann aber sein einerseits auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Schneidenden, andrerseits innerhalb oder ausserhalb der Parallelen. Dieser wichtigen und naheliegenden Merkmale aber haben sich schon Snell***) und Schlömilch†) in ihren Lehrbüchern der Geometrie zum Zwecke einer naturgemässen Eintheilung dieser Winkel bedient und wir haben seiner Zeit diese Eintheilung empfohlen (I., 278/79 Anm.).††) Wir sind also aus dem angeführten Grunde gegen das Wort An-

---

*) s. z. B. von Kober V, 56. 1. Hft. und in der Recension von Müller-Bauers Geom. durch Hr. Scherling S. 379. 5. Hft. u. ds. Hft. S. 447.

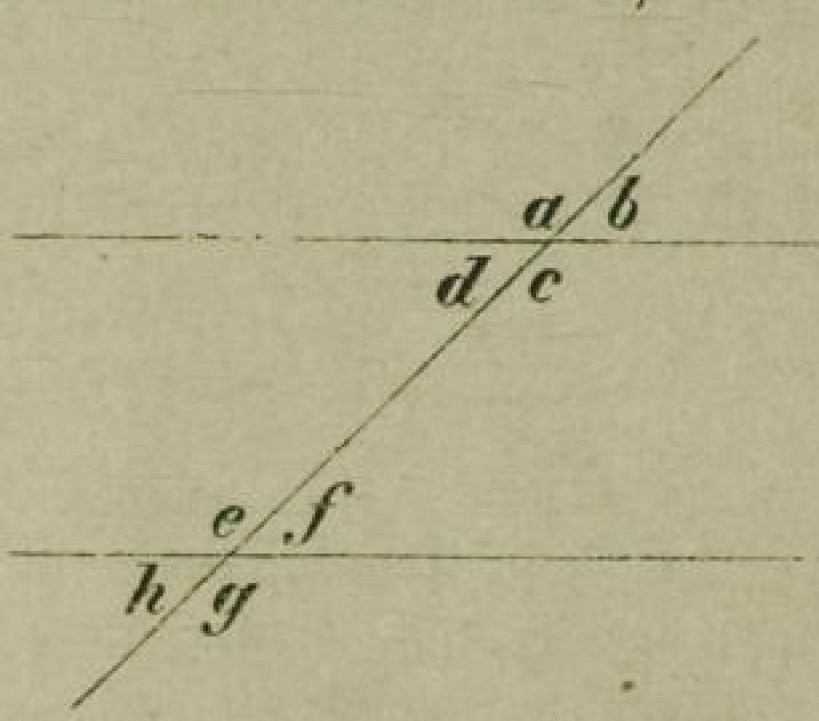
**) s. meine Bem. V, 56. 1. Hft.

***) s. Lehrb. der Geom. I, S. 23—24.

†) neueste (5.) Aufl. der Geometrie des Masses 1874. S. 16 ff.

††) Wir hatten dort diese Autoren (Snell, Schlömilch) „bahnbrechend" und die Eintheilung „höchst zweckmässig" genannt, was Hr. Rühle in seiner Recension des 1. Jahrg. d. Zeitschr. in der Zeitschr. für Gymnasialwesen (XXV, 2. 3. S. 203) bestreitet (indem er — nebenbei bemerkt — das „bahnbrechend" auf die Eintheilung, nicht auf die Eintheiler bezieht). Doch weiss er etwas Besseres auch nicht zu bieten.

winkel und wenn es in ganz Europa — statt nur in Oesterreich — gebräuchlich wäre! Wir sehen uns, da immer noch die verschiedensten Vorschläge für diese Benennungen beigebracht werden,*) veranlasst, auszurufen: „Warum denn etwas Neues einführen, wenn man schon etwas Bewährtes und Zweckmässiges hat?“ Wenn man in der Snell'schen Terminologie den allerdings zu bekämpfenden Ausdruck „Gegenwinkel“ streicht (vergl. Kober V, 55, 1. H.) und dafür consequent schreibt „correspondirende Winkel“ (s. Schlömilch a. a. O. S. 16), so lässt das Uebrige der Snell'schen Nomenclatur und Eintheilung kaum etwas zu wünschen übrig; nur muss man dann auch statt „Gegenwechselwinkel“ sagen: „correspondirender Wechselwinkel.“ Hiernach also würde die Nomenclatur, wie folgt, sich stellen (vgl. I. 279):



Winkel, welche bezügl. der Schneidenden liegen

A. auf derselben Seite		B. auf verschiedenen Seiten	
correspondirende Winkel	a, e b, f c, g d, h	correspondirende Wechselwinkel	a, f b, e c, h d, g
Innenwinkel	d, e, c, f	Innenwechselwinkel (kurz: Wechselwinkel)	d, f c, e
Aussenwinkel	a, h b, g	Aussenwechselwinkel	a, g b, h

Durch diese Eintheilung zieht die scharfe Unterscheidung zwischen ausserhalb und innerhalb des durch die Parallele gebildeten Streifens (Bandes) und jener zwischen rechts und links (ober- und unterhalb) von der Schneidenden und dieser letzte Unterschied wird in jedem Falle durch das einzige nicht misszuverstehende Wort „Wechsel“ ausgedrückt (denn einer der beiden Winkel hat mit seinem Supplemente auf der andern Seite der Schneidenden die Stelle gewechselt). Durch die Zusammensetzung mit „Innen“ und „Aussen“ wird übrigens einer Verwechslung mit den „innern“ und „äussern“ Winkeln einer Figur vorgebeugt, welche man ja überdies durch den Zusatz „hohl“ (concav) und „erhaben“ (convex) verhüten könnte. Mit dem Begriffe Aussenwinkel (am Dreieck) aber kann diese Benennung nicht in Collision kommen; denn dieser Aussenwinkel ist ja ganz dasselbe, aber — bei geneigten (unparallelen) Geraden.

*) Auch in mehreren uns zugesandten, das 1. Capitel der Geometrie behandelnden, Beiträgen für diese Zeitschr.

Wir empfehlen also auf's Neue die Annahme der modificirten Snell-Schlömilch'schen Bezeichnung, nicht allein weil sie logisch und naturgemäss ist, sondern auch, weil sie, wie wir aus Erfahrung wissen, von den Schülern leicht behalten wird.

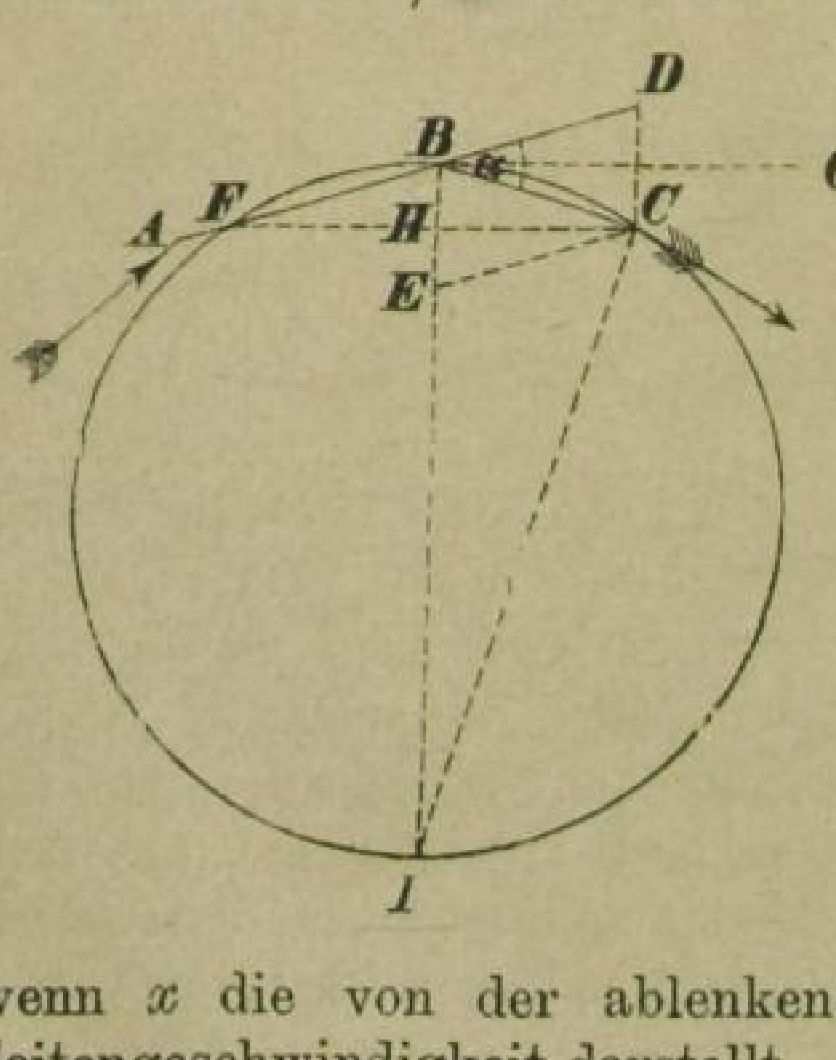
Noch einmal die Centripetalkraft (bearbeitet für physikalische Lehrbücher)*).

Von Julius Bode, Oberlehrer in Mühlheim am Rhein.

Seit meiner in dieser Zeitschrift III, 327 nach der Newton'schen Methode des Grenzenüberganges gegebenen ausführlichen Ableitung jener Kraft sind wiederholt Lehrbücher der Physik für Schulzwecke erschienen, welche die Ursache der krummlinigen Bewegung noch immer in der älteren, durchaus unzulänglichen Weise erörtern. Bei der Wichtigkeit der Sache habe ich mich daher bemüht, unbeschadet der Strenge und Ueberzeugungskraft, in wünschenswerther und womöglich üblicher Kürze mittelst der Leibnitz'schen Methode des Unendlichkleinen zum Ziele zu gelangen. Hier das Ergebniss:

1. Ist die Bahn eines Beweglichen eine Curve, so wirkt die Ursache der stetigen Bewegungsänderung nach jedem unendlich kleinen Zeittheilchen τ und kann dieselbe in jedem Moment ihrer Wirksamkeit in zwei Componenten zerlegt gedacht werden, von welcher die eine nur beschleunigend, die andere nur ablenkend wirkt.

2. Sind daher A, B und C drei auf einander folgende Punkte der Bahn, in welchen die Ursache der Bewegungsänderung zur Wirksamkeit kommt, so sind die Bahnstrecken AB und BC geradlinig.



Ist ferner die Summe der Ankunftsgeschwindigkeit des Beweglichen in B und der hier, selbstverständlich in der Richtung AB, eintretenden Beschleunigung gleich v, so ist $BC = v\tau =$ der Verlängerung BD von AB, welche das Bewegliche in derselben Zeit τ ohne Einwirkung der nur ablenkenden Kraft zurückgelegt haben würde.

3. Hieraus folgt, dass in dem Parallelogramm $BDCE$ die Seite BE die Richtung der ablenkenden Kraft anzeigt und gleich $x\tau$ ist, wenn x die von der ablenkenden Kraft in B momentan erzeugte Seitengeschwindigkeit darstellt. Trägt man nunmehr auf BA, $BC =$

*) Vergl. III, 327—335. D. Red.

BF ab und construirt man den durch F, B und C gehenden Kreis, welcher der „Krümmungskreis“ der Curve im Punkte B heisst, weil seine Krümmung, also auch sein Radius von der Grösse der Ablenkung α abhängt und daher umgekehrt dieser Radius r ein Maass der Krümmung der Bahn ist, so erkennt man leicht, dass:

a) die Richtung BE der ablenkenden Kraft α durch den Krümmungsmittelpunkt geht, wovon diese Kraft den Namen „Centripetalkraft“ führt, β) mithin senkrecht steht zur Tangente BG an den Krümmungskreis im Berührungspunkt B, welche Linie zugleich die Tangente an die Curve in B ist und den Ablenkungswinkel α halbirt;

b) die Verbindungslinie CF den Weg BE in H rechtwinklig halbirt und mithin, wenn man den Durchmesser BEJ zieht und J mit C verbindet, der Weg

$$BE = 2BH = 2\,.\,\frac{BC^2}{2r} = \frac{v^2\tau}{r}\,.\,\tau$$

sich ergibt;

c) daher die von der Centripetalkraft in B durch einmalige Wirkung erzeugte Seitengeschwindigkeit $x = \frac{v^2}{r}\,.\,\tau$ ist, dieselbe also nach $\frac{1}{\tau}$ Wirkungen d. i. bei continuirlicher Wirkung in der Zeiteinheit $\frac{v^2}{r}$ betragen würde, wovon letztere Geschwindigkeit den Namen „Centripetalbeschleunigung“ führt;

d) die Centripetalkraft demnach α) im Maass der Momentankräfte gleich $m\frac{v^2}{r}\,.\,\tau$, β) im Maass der constanten Kräfte (z. B. der Schwere) gleich $m\frac{v^2}{r}$ ist, wo m die Masse des Beweglichen bezeichnet.

Drei Schlussbemerkungen. — 1. Im mündlichen Unterricht lasse man die Schüler zu dem Einwurf gelangen, dass, wenn das Bewegliche unter übrigens gleichen Umständen dieselbe Bahn in umgekehrter Richtung durchlaufe, der Krümmungskreis alsdann ja durch die Punkte B und A gehen müsse, für die Krümmung der Bahn in B also ein anderer Werth als zuvor sich ergebe, und lasse sie finden, dass der bezügliche Unterschied unendlich klein ist, weil der von der Geschwindigkeitsänderung in B herstammende Unterschied AF selbst wieder unendlich klein ist in Bezug auf die unendlich kleine Strecke BC. — 2. Die Mängel der üblichen Entwickelungen der Centripetalkraft sowohl als des Satzes von der Flächengleichheit bei Centralbewegung beruhen in der Nichtbeachtung des oben ad 1. Vorausgeschickten, dass nämlich bei continuirlicher Wirkung einer Kraft die Wirkungen doch in Zeitzwischenräumen erfolgend angesehen werden müssen, welche gleich dem Differential der Zeit sind.

Randbemerkungen zu Aufsätzen dieser Zeitschrift.

Zur arithmetischen Lection über die Bruchrechnung in der Quarta eines Gymnasiums vom Herausgeber d. Bl. IV, 222—227*).

Von J. Belovic in Essek.

Gegen die vom Herrn H. in IV. 3. pag. 222—227 gegebene Entwickelung der Divisionsregeln, (wo Z eine ganze oder auch gebrochene Zahl sein kann)

$$1)\quad Z : \frac{m}{n} = \frac{Z.n}{n} : \frac{m}{n} = Z.\, n : m$$

und

$$2)\quad Z : \frac{m}{n} = Z \times \frac{n}{m},$$

lässt sich vom wissenschaftlichen Standpunkte mancherlei einwenden. Die erste Regel entwickelt Herr H. an einem besondern Beispiele auf folgende Weise.

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{15}{21} : \frac{14}{21} = 15 : 14 = 1\tfrac{1}{14}$$

Herr H. schliesst auf die Gleichheit der Quotienten $\frac{15}{21} : \frac{14}{21}$ und $15 : 14$ unter Anwendung des Satzes $a : b = am : b\, m$. Dieser Satz konnte aber Schülern, denen erst Divisionsregeln für Bruchzahlen entwickelt werden müssen, nur für solche Quotienten, deren Dividenden und Divisoren ganze Zahlen sind, bewiesen worden sein. Da nun dieser Satz auf den Quotienten $\frac{15}{21} : \frac{14}{21}$, dessen Dividend und Divisor Bruchzahlen sind, angewendet worden ist, so ist offenbar in der Entwickelung der ersten Divisionsregel der Beweis für die Richtigkeit derselben erschlichen.

Wollte man die erste Divisionsregel nur für die Division des Theilens gelten lassen, dann könnte man sie unabhängig vom Satze $a : b = am : bm$ etwa folgendermassen ableiten: $\frac{5}{7}$ Pf. : $\frac{2}{3}$ Pf. = $\frac{15}{21}$ Pf. : $\frac{14}{21}$ Pf. = 15 Einundzwanzigstelpfund : 14 Einundzwanzigstelpfund = 15 : 14.

Des Verfassers Entgegnung.

Herr B. nennt die Anwendung des Lehrsatzes $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ (#), welche ich in dem Beispiele

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{15}{21} : \frac{14}{21} = 15 : 14 \quad (\S)$$

*) Vgl. Hft. 4. S. 282 u. Hft. 5. S. 365.

auch auf Brüche anwende, beim Unterrichte von Schülern, „denen erst Divisionsregeln beigebracht werden sollen," eine Erschleichung. Hierauf habe ich unter ausdrücklichem Hinweis darauf, dass ich für den Elementar- also für den propädeutischen Unterricht geschrieben habe, Folgendes zu erwidern:

1) Wo in aller Welt ist denn in meiner Entwicklung (IV, 223) gesagt, dass dieser Satz nicht schon vorher als „auch auf Brüche anwendbar" und also „allgemein gültig" den Schülern begreiflich gemacht worden sei und überhaupt gemacht werden müsse? Es wird doch wohl kein vernünftiger Lehrer die Division mit obigem Beispiele beginnen! Vielmehr sollte in diesem Beispiele nur die allgemeine Regel als an dem allgemeinsten Falle — gewissermassen als Schlusstein des ganzen Capitels, — abgeleitet werden. Der geschickte Lehrer wird zuerst an der Division mit Stammbrüchen zeigen, dass obiger Satz (#), welcher dem Schüler ja als ein „alter Bekannter" schon von der gemeinen Division mit ganzen Zahlen und aus der Rechnungsoperation des „Erweiterns der Brüche" erscheinen muss — auch für Division mit Brüchen gilt und wird etwa verfahren wie folgt: Es ist $\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1 = 2$

$$\begin{array}{llll} \text{Denn } \frac{1}{3} \text{ in } \frac{2}{3} & \text{ist} & \text{enthalten} & 2 \text{mal} \\ \phantom{\text{Denn }} \frac{1}{4} \text{ ,, } \frac{3}{4} & \text{,,} & \text{,,} & 3 \text{ ,,} \\ \phantom{\text{Denn }} \frac{1}{15} \text{ ,, } \frac{13}{15} & \text{,,} & \text{,,} & 13 \text{ ,,} \end{array}$$

gerade so wie ein Liter in 13 Litern 13 mal enthalten ist, so dass also der Name (z. B. 15 tel) betrachtet werden kann, wie eine Sachbenennung (Liter, Groschen etc.)*). Dem Schüler wird dabei bald klar werden, dass, sobald es sich nur um Auffindung des Quotienten handelt, man die (gleiche) Benennung bei der Division ganz weglassen darf, da 1 Liter in 13 Litern genau so oft enthalten ist, als die Einheit in der (reinen) Zahl 13, dass also $\frac{13}{15} : \frac{1}{15}$ auch geschrieben werden kann

$$13 \text{ Fünfzehntel} : 1 \text{ Fünfzehntel oder } 13 : 1 \left(= \frac{13}{1}\right) = 13$$

Nun findet der Schüler aber leicht (und zwar in jedem Falle) dass man dasselbe Resultat erhält, wenn man Divisor und Dividend (N. u. Z.**) mit dem gleichen Nenner multiplicirt und so beide in ganze Zahlen verwandelt (nach dem Satze: ein Bruch mit seinem N. multiplicirt, gibt den Z.)

---

*) Ganz ähnlich verfährt Herr B. selbst, indem er als Benennung nimmt „Einundzwanzigstelpfund".

**) Abkürzungen für „Zähler" und „Nenner".

$$\frac{\frac{2}{3} \cdot 3}{\frac{1}{3} \cdot 3} = \frac{2}{1} = 2$$

Da nun das erste Verfahren dem Schüler leicht evident erscheint,*) so kann das zweite, da es auf dasselbe richtige Resultat führt, nicht falsch sein. Eine genauere Betrachtung zeigt aber, dass beide Methoden im Wesen der Sache auf dasselbe hinauslaufen. Denn indem ich sage 13 Fünfzehntel statt $\frac{13}{15}$ mache ich die 13, die vorher nur Zähler war, zu einer ganzen Zahl; dasselbe geschieht aber mit dem Divisor.

Dass ich hier nur die Division des Enthaltenseins berücksichtige, hat seinen Grund darin, dass die Division des Theilens für einen Bruchdivisor dem Schüler auf dieser Stufe noch unverständlich sein und bleiben muss — falls sie überhaupt einen Sinn hat. Denn er wird wohl begreifen, was es heisst, eine Grösse (und wäre es auch nur ein Bruchtheil einer solchen) in zwei Theile (Hälften) theilen, er wird vielleicht auch noch fassen, dass eine Grösse „in einen Theil theilen“ identisch sei mit „gar nicht theilen“ (sie „ganz“ lassen), aber er wird nicht begreifen, was es heissen soll: eine Grösse „in $\frac{1}{2}$ Theile theilen,“ da sie ja schon bei „einem Theile“ „gar nicht getheilt“ werden darf! —

Der nächste Schritt ist nun, dass man übergeht zu Beispielen wie etwa $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$ od. $\frac{9}{10} : \frac{3}{10}$ und endlich zu solchen mit ungleichnamigen Brüchen, wie das oben in (§).

2) Aber selbst wenn man diesen Gang vom Einfachen zum Zusammengesetzten nicht einschlüge, sondern gleich mit dem Beispiele in (§) beginnen wollte, so lässt sich dieses Verfahren doch auch vertheidigen: denn wenn der Schüler die Brüche als „erweiterte Zahlenreihe“ auffasst und sich durch die Probe

$$\frac{15}{14} \times \frac{14}{21} = \frac{5}{7} \text{ (= Dividend)}$$

von der Richtigkeit des Quotienten überzeugt, so wird er er nicht mehr zweifeln an der Gültigkeit des fraglichen Satzes für Brüche.

Es dürfte vielleicht nicht uninteressant für die Leser d. Z. sein, wenn wir zu den IV, 226—227 mitgetheilten Methoden mehrerer Rechenbücher-Autoren noch einige hinzufügen. Wir hatten dort Helmes, Pick, Schwarz und Hesse erwähnt. Es ist zuvor noch hinzufügen, dass auch Schwarz in dem dort angeführten Werkchen (Grundzüge für den Rechenunterricht Halle 1870. S. 29), wo er die

*) Wenn dies bei wenig Befähigten nicht sein sollte, so muss man durch die Anschauung zu Hülfe kommen, indem man ein Ganzes in Theile zerschneidet oder sich dazu eines Modells (etwa eines Baukastens) bedient.

Anschauungsregel durch die Probe beweist, die zwei andern Beweise (die auch Pick hat) „nicht ganz einwendungsfrei“ nennt, ohne hinzuzufügen, was dagegen einzuwenden sei. Er nimmt das Beispiel (S. 30) $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}=\frac{5.4}{35}:\frac{3.7}{35}=$ etc. w. o. — Helmes (Arithm. §. 179. S. 137) wendet (wie Kober) den Satz an: Dividire Zähler durch Z. und N. durch N. und schreibt demgemäss $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}=\frac{a:b}{1}=\frac{a}{b}$.

Baltzer (Elem. d. M. 3. Aufl. I. S. 30) entwickelt die Regel an dem Beispiele $3:\frac{4}{5}$ indem er sagt: „Nun ist $3=\frac{3\times 5}{5}$ und $\frac{4}{5}$ in $\frac{3\times 5}{5}$ ist sovielmal enthalten, als 4 in 3×5 nämlich $\frac{3\times 5}{4}$ mal. Es entsteht aber $\frac{3\times 5}{4}$ dadurch aus 3, dass man mit dem Bruche $\frac{5}{4}$ multiplicirt, welcher durch Umkehrung des Bruchs $\frac{4}{5}$ gebildet ist.“

T. Müller (Lehrb. d. algem. Arithm. Halle 1836. S. 26. Nr. 29 β) schreibt: $\frac{a:m}{b:m}=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=\frac{a}{b}$, hat aber keinen Beweis hinzugefügt, sondern deutet ihn nur an für den Satz $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$.

Wittstein (Lehrb. d. Elementar-Math. I, §. 102) beweist die Umkehrungsregel durch die Probe und schweigt über die andern Lösungen.

Reidt (Elem. d. Math. 2. Aufl. I. S. 17) schreibt:

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}\,.$$

Beweis durch Multiplication der drei Seiten mit b.

(Fortsetzung folgt.)

Zur Beachtung.

Das hierher gehörige Repertorium für Aufgaben siehe diesmal S. 470.

Literarische Berichte.

I. Kober, Dr. Julius, Leitfaden der ebenen Geometrie mit 700 Uebungssätzen und -aufgaben. Lpzg. bei B. G. Teubner 1874.

II. Müller, Dr. Hubert, Leitfaden der ebenen Geometrie, mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule bearbeitet. 1. Theil, die geradlinigen Figuren und der Kreis. Leipzig bei B. G. Teubner 1874.

Die rühmlichst bekannte Verlagshandlung sorgt unablässig, in ausgiebiger Weise und in eleganter Ausstattung für die Bedürfnisse der Schule. So hat sie jetzt zu gleicher Zeit zwei Schulbücher ausgesandt, beide einander so ähnlich und wiederum so unähnlich, dass wir sie am besten zusammen besprechen. Beide Verfasser haben sich einer rühmlichen Kürze hinsichtlich der Auswahl des Stoffes und hinsichtlich des Ausdrucks befleissigt, die Beweise meistens nur angedeutet und die Zeichnung der Figuren zum grössten Theile den Schülern überlassen; beide haben, an geeigneten Stellen in der Entwickelung des Systemes Halt machend, Aufgaben ohne weitere Anleitung zur Lösung eingefügt. Dieselben sind relativ nicht schwer, weil sie zu häuslichen Uebungen der Schüler bestimmt sind. Kober sagt ganz richtig: „Uebungen müssen leicht sein: an leichten Aufgaben erstarkt Vertrauen und Kraft. Schwere Aufgaben werden stets nur wenige Schüler lösen, die übrigen schädigen durch misslungene Versuche ihr Selbstvertrauen oder schreiben ab. Uebungen müssen möglichst früh beginnen: je weniger Stoff vorausgesetzt werden kann, desto weniger kann der Schüler auf Irrwege gerathen; je früher die Kraft geübt wird, desto gründlicher wird sie gebildet.“

Während sich nun aber Kober auf das alte euklidische System beschränkt und nur im letzten Abschnitt das Wesentlichste über harmonische Theilungen, das Kreispolarsystem und die Chordale aufgenommen hat, ohngefähr in dem Umfange, wie Ziegler, nur in anderer Anordnung, ist Hubert Müller bemüht gewesen, von Anfang an Anschauungsweisen, welche der Geometrie der Lage entnommen sind, in den Lehrstoff einzuflechten und hat dualistisch zugeordnete Sätze oder solche, die in irgend einem andern Gegensatz stehen, vielfach neben einander gestellt.

Wir gehen nun auf das Einzelne ein, und beginnen mit

No. **I.** Der Verfasser geht über die geometrischen Vorbegriffe schnell hinweg, nimmt den Begriff der geraden Linie und der Richtung als an sich klar an und erwähnt kurz des Kreises mit dem Wichtigsten aus der Terminologie desselben. Der erste Abschnitt handelt von den Linien (worunter der Verf. immer die gerade versteht), von den Winkeln und den Parallelen. Die Parallelen werden als solche bezeichnet, welche die Richtung gemein haben, der Winkel als Richtungsunterschied, der durch Drehung gemessen wird. Hier wäre es am Platze gewesen, sogleich die Grundbegriffe vom Kreise einzufügen, weil die Grösse der Drehung durch Kreisbögen am anschaulichsten wird. Sonach wird der rechte Winkel als eine Viertelsdrehung (90^0), der gestreckte Winkel als eine halbe Drehung betrachtet. Von einer weiteren Drehung wird abgesehen, statt derselben die Bemerkung hinzugefügt: „von untergeordneter Bedeutung ist der Unterschied der hohlen und erhabenen Winkel.“ Wir können diese Bemerkung nicht unterschreiben; bei der Vergleichung der Peripherie- und Centriwinkel z. B. hat der convexe Winkel keine untergeordnete Bedeutung. Ebenso können Vierecke mit einem convexen Winkel nicht umgangen werden. Auch möchten wir hier bemerken, dass es doch wohl richtiger ist, die Bezeichnung Nebenwinkel einzig und allein für die besondere Lage zweier Winkel neben einander zu behalten und den Ausdruck Supplementwinkel für den allgemeinen Fall, wo $\alpha + \beta = 180^0$ ist, zu gebrauchen. Hiernach dürfte sich eine kleine Aenderung in dem §. 6. empfehlen. Den Namen Gegenwinkel, bei dem Durchgang zweier Linien durch eine dritte, hat der Verf. nur gebraucht, weil er keinen besser bezeichnenden gekannt hat: wir empfehlen ihm den Ausdruck: innere und äussere Anwinkel.*) Im zweiten Abschnitt, welcher von den geradlinigen Figuren handelt, werden nach einander betrachtet I. die Congruenz, II. der Flächeninhalt, III. die Aehnlichkeit, jede Abtheilung mit den nöthigen Unterabtheilungen, z. B. I. 1) die Winkel des a) Dreiecks, b) Polygons; 2) die Seiten, 3) die Seiten und Winkel in Wechselbeziehung und zwar a) das Dreieck, aa) die Congruenzsätze, bb) das gleichschenklige Dreieck, cc) Wechselbeziehung bei ungleichen Elementen, dd) Transversalen im Dreieck; dann folgen b) das Parallelogramm, aa) das allgemeine Parallelogramm, bb) besondere Fälle; c) das Trapez mit dem Antiparallelogramm u. s. w. Wir führen dies nur an, um zu zeigen, wie der Verf. bemüht gewesen ist, gehörig zu gruppiren. Die Congruenzsätze, welche in der Form: „ein Dreieck ist bestimmt durch u. s. w.“ aufgeführt sind, scheinen uns allzukurz behandelt zu sein, auch empfehlen wir eine Aenderung des §. 22. derart, dass die Fälle a, b, γ und a, b, α strenger auseinander gehalten und lieber in zwei §§. behandelt werden. Für die sehr jungen Verstandeskräfte, mit denen die Congruenzsätze

*) Siehe jedoch V, 55—56 u. 438. D. Red.

zu behandeln sind, ist und bleibt dieser Abschnitt immerhin ein recht schwieriger, das Lehrbuch oder der Leitfaden muss daher ihnen etwas mehr, als es hier geschehen ist, zu Hülfe kommen, resp. dem Lehrer die Sache erleichtern.

Mit dem Beweise des Satzes: „Die Transversale, welche die Mitten zweier Dreiecksseiten verbindet, ist halb so gross, wie die dritte Seite und mit der letzteren parallel,“ wird sich nicht jeder Lehrer befreunden. Es wird nämlich bewiesen, dass die Linien, die man von der Mitte einer Seite mit der anderen Seite parallel zieht, die Mitten der anderen Seiten treffen und dann hinzugefügt, dass also diese Parallelen mit den Verbindungslinien dieser Mitten zusammenfallen. Uns will es scheinen, als ob auf diese Weise bei den Schülern der Meinung, dass jede Umkehrung eines Satzes selbstverständlich wahr sein müsse, und keines Beweises bedürfe, Vorschub geleistet werde. Dass unser Verfasser selbt nicht dieser Ansicht ist, beweist er dadurch, dass er an andern Orten ausdrücklich zum Beweise der Umkehrung auffordert.

Dem Antiparallelogramm ist gebührend Rücksicht geschenkt worden, was wir lobend erwähnen. Erst in §. 47. werden die Fundamental-Constructionen der Geometrie angegeben, während alle Constructionen in den früheren §§. „in Gedanken“ ausgeführt betrachtet werden. Ob dies pädagogisch richtig sei, bezweifeln wir. Gerade die Art, wie der Verf. die Congruenzsätze vorführt, erfordert, dass der Schüler die Construction wirklich ausführe. Indess hat es der Verf. dem Lehrer überlassen, diese Constructionsaufgaben in die vorhergehenden Capitel zu vertheilen. Die Bestimmung des Flächeninhalts beginnt mit der directen Ausmessung des Rechtecks. Hieran schliessen sich die Verwandlungs- und Theilungsaufgaben mit zahlreichen Uebungen und der pythagoräische Lehrsatz mit den Verallgemeinerungen. Die Aehnlichkeit wird auf zwei Seiten abgethan. Der Aehnlichkeit der Vielecke ist nur ein einziger §. gewidmet, in welchem zugleich der Aehnlichkeitspunkt erklärt wird. Es wird angenommen, dass zwei ähnliche Vielecke so liegen, dass die homologen Seiten parallel sind und die Behauptung aufgestellt, dass die Verbindungslinien der homologen Ecken im Aehnlichkeitspunkte zusammentreffen. Der Beweis ist nur schwach angedeutet. Uns scheint es natürlicher und einfacher zu sein, vom Aehnlichkeitspunkte auszugehen und zu zeigen, wie man zwischen einem Strahlenbüschel (Aehnlichkeitsstrahlen) zwei ähnliche Vielecke erhalten könne. Im Allgemeinen wird vom Verf. vorausgesetzt, dass die Schüler auf dieser Stufe des geometrischen Unterrichts mit den Proportionen hinreichend bekannt und vertraut sind, was allerdings durch den gleichzeitigen arithmetischen Unterricht zu ermöglichen ist, wenn man von der Incommensurabilität abstrahiren will, die unsers Erachtens freilich erst durch die geometrischen Anschauungen bei den Schülern zum Verständniss gebracht werden kann, die aber von dem Verf. in §. 49.

mit der kurzen Bemerkung abgemacht wird: „Sind die Seiten zur Maasseinheit incommensurabel, so zeigt man, dass man dem Zahlenwerthe der Rechtecksfläche so nahe kommen kann, als man will.“ Und in der Vorrede sagt der Verfasser hierüber: „die erschöpfende Behandlung der Incommensurabilität dürfte nicht vor der Cyclometrie am Platze sein.“ Dort sucht man sie aber vergeblich!

Der dritte Abschnitt handelt vom Kreise mit den Unterabtheilungen: 1) Kreis um eine Gerade, 2) Kreis um mehrere Gerade, 3) Mehrere Kreise, 4) Kreismessung. Wir missbilligen den Namen Berührungswinkel als denjenigen, den eine Tangente mit einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne bildet, und dies um so mehr, als der Verf. sagt, er sei halb so gross, wie der zu seiner Sehne gehörige Bogen, indem ja zwei Bögen zu der Sehne gehören. Dieser Winkel ist durchaus nichts anderes, als ein Peripheriewinkel, der einen Bogen zwischen sich hat, wie jeder andere Peripheriewinkel und ist halb so gross wie der zwischen ihm liegende Bogen, so dass jede Zweideutigkeit schwindet. Ebenso müssen wir uns gegen den Namen „Berührungstangente“ erklären, worunter die durch den Berührungspunkt zweier Kreise gehende gemeinschaftliche Tangente verstanden wird. Wir sehen die Nothwendigkeit eines besondern noch dazu ganz eigenthümlich gebildeten Namens für diese Tangente nicht ein. Unter den zahlreichen Uebungen wird auch der Chordale oder der Linie der gleichen Potenz gedacht. Diese hätte wohl im Haupttext einen Platz verdient.

Der vierte Abschnitt enthält als Anhänge: 1) die algebraische Lösung geometrischer Aufgaben, 2) Geometrische Oerter, Polare, Chordale, harmonische Punkte, 3) Maxima und Minima, 4) das Apollonische Tactionsproblem.

Wenn wir uns auch über Einzelheiten missbilligend geäussert haben, so wollen wir damit nicht den Werth des ganzen Buchs herabsetzen, vielmehr sind wir überzeugt, dass dasselbe seinem Zweck, als „Leitfaden“ beim Unterricht zu dienen, für Gymnasien entsprechen wird, wozu es sich auch wegen seiner Kürze (es enthält nur 6 Bogen) bei einer recht reichhaltigen Sammlung von Uebungsaufgaben empfiehlt. Für höhere Realschulen würden wir es nicht empfehlen.

Nr. 2 haben wir mit besonderem Interesse gelesen und wir wünschen, um es gleich von vornherein zu sagen, diesem Buche eine möglichst grosse Verbreitung. Wenn wir daher einzelne Ausstellungen zu machen uns veranlasst fühlen, so geschieht dies nur, um unsrerseits etwas zur Vervollkommnung dieses Leitfadens beizutragen.

Wenn in §. 3. einander gegenüber gestellt werden

c) Gleiche Winkel können so auf einander gelegt werden, dass sie sich decken. Dann decken sich auch ihre Anfangsschenkel und ihre Endschenkel.	γ) Gleiche Strecken können so auf einander gelegt werden, dass sie sich decken. Dann decken sich auch ihre Anfangspunkte und ihre Endpunkte.

dann wieder

d) Wenn gleiche Winkel so auf einander gelegt werden, dass ihre Scheitel und Anfangsschenkel auf einander fallen, so decken sich auch ihre Endschenkel.	δ) Wenn gleiche Strecken so auf einander gelegt werden, dass ihre Anfangspunkte auf einander fallen, so decken sich auch ihre Endpunkte.

so erscheinen uns *c*) und γ) ganz überflüssig.

In einer Anmerkung zu §. 3. wird aufmerksam gemacht auf den Gegensatz der Lage zweier Winkel, je nachdem der eine oder der andere Schenkel als Anfangsschenkel betrachtet wird.

In den §§. 5. 6. werden die Grundeigenschaften des Kreises und die gegenseitigen Beziehungen zwischen Bogen und Winkeln behandelt und damit schon hier die Grundlage zu Constructionen gegeben. In §. 8. wünschten wir den neben „correspondirende Winkel“ in Parenthese stehenden Ausdruck „Gegenwinkel“ gestrichen; dieser Name ist für diese Winkel so unpassend als möglich. Die Parallelentheorie ist in den §§ 9. u. 10. entwickelt. Als Hauptsatz ist gewählt: Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind die durchschnittenen Linien parallel. In dem Beweise dürfte es sich empfehlen etwas weitläufiger zu sein und statt der kahlen Bemerkung: „Dann sind die Figuren *cabd* und *fbag* vollkommen übereinstimmend,“ was dem Anfänger nicht ohne Weiteres einleuchtend sein möchte, ähnlich wie der Verf. später bei der Congruenz verfahren ist, zu sagen: denkt man sich nun die ganze Figur längs der durchschneidenden Linie durchgeschnitten, den einen Theil weggeschoben, umgewendet und wieder an den andern herangeschoben, so dass die zwischen den durchschnittenen Linien liegenden Strecken der durchschneidenden sich wiederum decken, so liegen letztere mit verwechselten Endpunkten aufeinander. Denkt man sich nun den einen Theil der Figur um die gemeinschaftliche Linie, wie um eine Axe gedreht, so müssen nach § 3. *d*, sich beide Theile einmal decken, u. s. w. — Am Schluss dieser Theorie wird auf den unendlich weit entfernten Punkt aufmerksam gemacht. In den §§. 11—14. wird von den Winkeln geradliniger Figuren gesprochen, und zuerst die Entstehung eines Vielecks erklärt. Es wäre wünschenswerth, das Epitheton „einfach“ zu Vieleck hinzuzufügen, auch hier schon auf die verschiedenen Formen der einfachen Vielecke hinzuweisen, dann würde der Anfang des Satzes: „Wenn der Umring eines Vielecks sich nicht selbst schneidet“ das Befremdende für den Anfänger verlieren, was er jetzt hat. Nun werden die Sätze über die Winkel des Dreiecks, der Vielecke und insbesondere des Parallelogramms behandelt. Von letzteren wird bei der Congruenz der Dreiecke Gebrauch gemacht, deshalb ist wohl diese eine Eigenschaft des Parallelogramms abgesondert von den übrigen Eigenschaften hier schon eingeschoben.

Der §. 15. enthält 24 Uebungsaufgaben, womit der erste Cursus endigt. Der zweite Cursus umfasst die Congruenz und ihre Anwendung auf die Untersuchung ebener Figuren, in folgenden drei Abschnitten: 1) Congruenz der Dreiecke und Anwendung derselben, 2) Parallelogramme, 3) der Kreis und die regelmässigen Vielecke. Gleichwie Baltzer hat der Verf. den Sinn congruenter (und später auch ähnlicher) Figuren in die Betrachtung hineingezogen. In welcher Weise der Verf. die Gegensätze hier neben einander stellt, möge folgendes Beispiel zeigen:

c) Man denke sich zwei congruente Dreiecke in Deckung. Wenn man das eine derselben verschiebt ohne es umzuwenden, so erhält man neue Lagen der beiden Dreiecke. Die Dreiecke heissen in allen diesen Lagen congruent und von gleichem Sinne.	γ) Man denke sich zwei congruente Dreiecke in Deckung. Wenn man das eine derselben umwendet und sodann verschiebt, so erhält man neue Lagen der beiden Dreiecke. Die Dreiecke heissen in allen diesen Lagen congruent und von entgegengesetztem Sinne.
d) Wenn man congruente Dreiecke gleichen Sinnes so (auf einander R.) legt, dass zwei entsprechende Seiten mit entsprechenden Endpunkten auf einander fallen, so decken sich die Dreiecke (denn sie sind wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückgekommen).	δ) Wenn man congruente Dreiecke entgegengesetzten Sinnes so (aneinander R.) legt, dass zwei entsprechende Seiten mit entsprechenden Endpunkten auf einander fallen, so bilden sie ein Deltoid u. s. w.
e) Wenn man congruente Dreiecke gleichen Sinnes so (an einander R.) legt, dass entsprechende Seiten mit verwechselten Endpunkten auf einander fallen, so bilden sie ein Parallelogramm.	ε) Congruente Dreiecke entgegengesetzten Sinnes kann man nicht zur Deckung bringen, wenn man nicht das eine derselben umwendet.

Uns würde es mehr zusagen, wenn ε) neben *d*) und δ) neben *e*) gestellt wäre; auch scheinen uns die hier in Parenthese mit R. bezeichneten Zusätze nothwendig zu sein. Gleicherweise ist wohl in dem Beweise des dritten und vierten Congruenzfalles (§. 21.) das Einschiebsel „mit entsprechenden Endpunkten" hinter ac und $a'c'$ nothwendig. Der §. 23., in welchem der Begriff eines geometrischen Orts erklärt wird und einige geometrische Oerter, insbesondere auch der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Mittelsenkrechten der Seiten und der Winkelhalbirenden hinzugefügt werden, könnte unbedenklich später mit §. 28. zusammengestellt werden: dann würde neben dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der 3 Höhen auch der Schwerpunkt des Dreiecks eingefügt werden können, so dass man die 4 wichtigsten merkwürdigen Punkte des Dreiecks beisammen hätte. In §. 25. müsste der Deutlichkeit wegen sowohl bei a) als bei α) hinter „von gleichem Sinne" eingefügt werden „mit verwechselten Endpunkten." Unter den Anwendungen des 2. Abschnitts würde das Antiparallelogramm, welches wir ungern vermissen, eine passende Stelle gefunden haben. Die §. 30. aufgestellte Definition einer Tangente können wir als solche nicht gelten lassen. α) ist ein Lehrsatz, und demzufolge muss statt „heisst" „ist" gesetzt werden. Der von einer Tangente und einer durch den Berührungspunkt gezogenen Sehne gebildete Winkel ist ein Peripheriewinkel; daher durfte in §. 36. e nicht von c getrennt werden, vielmehr mussten die Fälle so gesondert werden: I. beide Schenkel des Peripheriewinkels sind Sehnen mit den Unterabtheilungen 1) 2) 3); II. der eine Schenkel ist eine Tangente. Wäre an passender Stelle schon früher auf den Unterschied zwischen Vieleck und Vielseit aufmerksam gemacht worden, so würde der Verf. wohl statt „umbeschriebenes Vieleck" das richtigere „umbeschriebenes Vielseit" gesetzt haben. Es empfehlen sich die kurzen Ausdrücke: Sehnenvieleck und Tangentenvielseit.

In einem Anhange zu dem zweiten Cursus sind entwickelt im 1. Abschnitt: das Princip der Dualität an den einfachen und vollständigen Vielecken und Vielseiten; die Beziehungen zwischen Vielecken und Curven; im 2. Abschnitt: die Congruenz der Figuren, ausgehend, wie bei den Dreiecken, von den Lagen ähnlicher Figuren gegen einander, wobei der Verf. auf die einaxig symmetrischen und centrisch symmetrischen Figuren kommt und auf die zweiaxig symmetrischen Figuren hindeutet. Eine Reihe recht zweckmässiger Uebungen macht den Beschluss des zweiten Cursus.

Zweierlei Bemerkungen haben wir noch zu §. 43. dieses Cursus zu machen. Die erste betrifft die mit der von J. H. T. Müller gegebenen gleichlautende Definition einer krummen Linie (Curve). Eine Definition, die nur eine negative Eigenschaft angibt, hat immer etwas Bedenkliches. Man gestehe sich nur, dass sich eben so wenig eine befriedigende Definition der krummen Linie, wie der geraden geben lässt. Noch bedenklicher aber erscheint der Satz: „Eine Curve kann als ein Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten angesehen werden." So oft man auch diesen Satz unter der Kreislehre in verschiedenen Lehrbüchern liest, ist und bleibt er ein falscher Satz. Der Satz, wie er hier ausgesprochen ist, könnte, wenn er zulässig wäre, überhaupt nur für geschlossene Curven gelten (nicht für Parabel oder Hyperbel), andrerseits ist auch die geschlossene Curve nichts anderes, als die Grenze, welcher sich der Perimeter eines Sehnenvielecks oder Tangentenvielseits immer mehr nähert, wenn die Seitenzahl fort und fort vergrössert wird. — Der Satz hat zumal an dieser Stelle nicht die geringste Bedeutung, er bleibe also ganz weg!

Der dritte Cursus handelt von den Flächen geradliniger Figuren, und zwar 1) von der Gleichheit, 2) von der Berechnung der Flächen. Hiebei wird, allerdings nur in Anmerkungen, aber hinreichend ausführlich der Fall der Incommensurabilität mit berücksichtigt. Im Uebrigen ist uns nichts Besonderes aufgefallen. Den Schluss dieses Cursus bildet die Darstellung algebraischer Ausdrücke, mit einer Reihe entsprechender Uebungen.

Im vierten Cursus wird die Proportionalität der Linien behandelt und zwar im 1. Abschnitt der „Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen," wobei nicht nur auf die Länge, sondern auch auf die Richtung der Strecken Rücksicht genommen wird. Der Verf. beurtheilt das Vorzeichen des Verhältnisses oder des Products zweier Strecken auf einer Geraden, die einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, nach der Richtung, welche dieselben vom gemeinschaftlichen Punkte aus haben, wie es sein muss. Wenn also a, b, c drei aufeinander folgende Punkte auf einer Geraden sind, so ist $\frac{ab}{ac}$ oder $\frac{ca}{cb}$ positiv, dagegen $\frac{ba}{bc}$ negativ. Liegt b genau in der Mitte von ac, so ist $\frac{ba}{bc} = -1$. Wir wissen uns nicht zu erklären und die Vorrede gibt keinen Aufschluss darüber, warum der Verf. das leichtere Capitel über die Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke nicht hier eingefügt und dem schwereren über harmonische und involutorische Punktreihen und was sonst damit zusammenhängt, einen spätern Platz angewiesen hat. Diese und die Transversalen des Dreiecks mit den Eigenschaften des vollständigen Vierseits bilden den 2. Abschnitt dieses Cursus. Der Satz des Menelaus wird in seiner richtigen und verständlichsten Form $\frac{a'c}{a'b} \cdot \frac{c'b}{c'a} \cdot \frac{b'a}{b'c} = +1$ vorgeführt. Der damit verwandte Satz des Ceva ist unter die Uebungen verwiesen. — Der dritte Abschnitt handelt von der Ausmessung und Berechnung des Kreises.

Im fünften Cursus wird 1) die Aehnlichkeit der Dreiecke mit Anwendungen auf das rechtwinklige Dreieck und den Kreis betrachtet, wobei auch die Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis sowie die stetige Theilung einer Strecke zur Sprache kommt, 2) wird die Aehnlichkeit der Figuren im allgemeineren Sinne behandelt; es wird die Entstehung ähnlicher Figuren in einem Strahlenbüschel (perspectivische Lage) gezeigt, dann werden die Eigenschaften ähnlicher Figuren in perspectivischer und in beliebiger Lage erörtert und endlich wird die Bestimmung ähnlicher Systeme durch Paare homologer Stücke auseinandergesetzt. Der dritte Abschnitt handelt von den Potenzlinien zweier und mehrerer Kreise und den Büscheln von Kreisen, der vierte Abschnitt von dem Kreispolarsystem, der fünfte Abschnitt endlich von der Aehnlichkeit der

Kreise und den Kreisberührungen. Die blose Angabe des Inhalts des 5. Cursus wird genügen, um auf den reichen Inhalt auch dieser letzten Abtheilung des Buchs hinzuweisen. Die Auswahl aus dem grossen Schatz der neueren Geometrie für den Schulunterricht ist keine kleine Arbeit. Der Verf. scheint uns überall das Rechte getroffen zu haben, um bei aufgeweckten und strebsamen Schülern das Interesse an der Geometrie zu wecken und zu heben, und indem wir das vorliegende Werk nochmals der Beachtung der Lehrer der Mathematik auf das Wärmste empfehlen, schliessen wir uns dem Urtheile des sel. Prof. Clebsch über das Manuscript desselben an, der eine Umbildung vieler Theile der in den Schulen gelehrten Geometrie an der Hand der neuern Geometrie für ein Bedürfniss der Zeit erklärte, und den vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule betrachtete, und wünschen, dass es dem Verf. vergönnt sein möge, bald eine neue Auflage seines Buchs bearbeiten zu müssen.

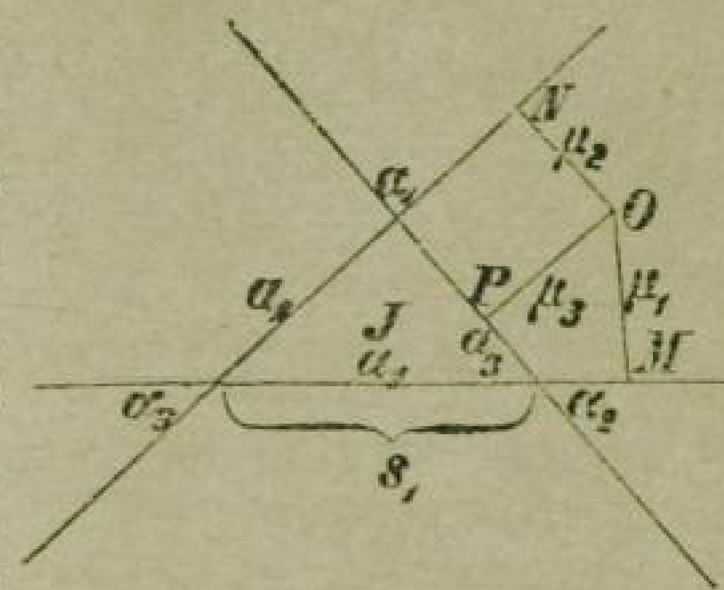
Lübeck. Chr. Scherling.

Schendel, Leop., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten. Für Mathematiker und Studirende. Jena. 1874. IV. 184.

In dieser eigenthümlichen, mit grossem Scharfsinn und ausgezeichneter Combinationsgabe abgefassten Schrift legt der Herr Verf. nicht einfach die senkrechten Abstände eines Punktes von den Seitenlinien eines Dreiecks, sondern die von ihm mit den Eckpunkten desselben bestimmten Dreiecksflächen als Coordinaten zum Grunde, wodurch die analytische Geometrie eine sehr allgemeine Gestalt erhält und das Princip der Dualität in ganzer Vollständigkeit und Allgemeinheit hervortritt. Um nun aber die Darstellung durchsichtig und übersichtlich zu machen, war der Verf. genöthigt, viele Bezeichnungen zu ändern und neue einzuführen und die in dieser Beziehung selbst aufgeworfene Frage, ob er darin glücklich gewesen? müssen wir bejaen.

Um dem Leser, der das Buch selbst noch nicht kennt, eine Vorstellung von dieser neuen Methode zu verschaffen, reproduciren wir aus dem ersten Capitel, welches den Punkt und die Gerade behandelt und das Princip der Dualität klarstellt, die ersten Nummern in möglichster Kürze.

Die drei Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bestimmen die drei Geraden a_1, a_2, a_3, sowie gegenseitig die 3 Geraden (Fundamentalgerade) die drei Punkte (Fundamentalpunkte) und das Dreieck, dessen Flächeninhalt J ist (Fundamentaldreieck), bestimmen. Ein in der Ebene dieses Dreiecks angenommener Punkt O hat von den Fundamentallinien a_1, a_2, a_3 gewisse Entfernungen $OM = \mu_1$, $ON = \mu_2$, $OP = \mu_3$. Diese Ent-



fernungen werden als positiv angenommen, wenn sie, vom Punkte O aus gerechnet, so liegen, wie sie gegen die betreffende Gerade liegen würden, wenn der Punkt O innerhalb des Dreiecks läge, andernfalls negativ, wie OP, so dass also $OP = -\mu_3$ gesetzt werden muss. Sind nun s_1, s_2, s_3 die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks, so sind $\frac{s_1 \cdot \mu_1}{2}$, $\frac{s_2 \cdot \mu_2}{2}$, $\frac{s_3 \cdot \mu_3}{2}$, absolut genommen, die Flächeninhalte der drei Dreiecke, welche der Punkt O mit den Ecken des Fundamentaldreiecks bildet. Sind diese Inhalte bekannt, so ist die Lage des Punktes O bestimmt; denn wenn $\frac{s_1 \cdot \mu_1}{2} = J_1$; $\frac{s_2 \cdot \mu_2}{2} = J_2$; $\frac{s_3 \cdot \mu_3}{2} = -J_3$ ist, so hat man $\mu_1 = \frac{2 \cdot J_1}{s_1}$; $\mu_2 = \frac{2 \cdot J_2}{s_2}$; $\mu_3 = -\frac{2 \cdot J_3}{s_3}$, es kann also die Lage von O angegeben werden. Diese Inhalte sind die Coordinaten des Punktes O; der Verfasser bezeichnet sie kurz durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$, welche Zeichen also nun die Bedeutung von Grössen erhalten, den Punkt O, der diese Coordinaten hat, bezeichnet er symbolisch durch $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und nennt dieses Zeichen die Form des Punktes. In unsrer Figur wäre z. B. $\alpha_3 = -J_3$; und die Form eines Punktes auf der Geraden a_1, z. B. des Punktes M, wäre nun $(0, \alpha_2', a_3')$; ebenso die Form eines Punktes auf $a_2 = (\alpha_1'', 0, \alpha_3'')$ und die Form eines Punktes auf $a_3 = (\alpha_1''', \alpha_2''', 0)$. Die Formen der Fundamentalpunkte sind: $(\alpha_1, 0, 0)$; $(0, \alpha_2, 0)$; $(0, 0, \alpha_3)$.

Zwischen den Coordinaten eines Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ besteht hiernach die Relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = J.$$

Es ist daher nicht nöthig, unter α_1, α_2 und α_3 die Flächeninhalte der drei Dreiecke zu verstehen, sondern man kann sich unter denselben Grössen vorstellen, die mit einer Constanten c multiplicirt, absolut genommen, jene drei Flächeninhalte geben. Indem man dann setzt $c(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = J$, wird diese Constante c bestimmt, welche also auch $= 1$ sein kann. Die Entfernungen des gesuchten Punktes von den Fundamentallinien oder die eigentlichen Coordinaten desselben sind dann

$$\mu_1 = \frac{J.\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \ \mu_2 = \frac{J.\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \ \mu_3 = \frac{J.\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

Um unsererseits dieses Fundament der neuen Methode an einem einfachen Beispiele zu erläutern, sei das Fundamentaldreieck ein rechtwinkliges mit den Seiten 3, 4 und 5; und man nehme an, es sei $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, also $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5$ und $J = 6$; so hat man $5.c = 6$, also $c = 1{,}2$.

$$J_1 = \frac{3\,\mu_1}{2} = c.\,\alpha_1 = -\,2{,}4 \text{ also } \mu_1 = -\,1{,}6$$

$$J_2 = \frac{4\,\mu_2}{2} = c.\,\alpha_2 = \quad 3{,}6 \quad ,, \quad \mu_2 = \quad 1{,}8$$

$$J_3 = \frac{5\,\mu_3}{2} = c.\,\alpha_3 = \quad 4{,}8 \quad ,, \quad \mu_3 = \quad 1{,}92.$$

μ_1 und μ_2 bestimmen schon den gesuchten Punkt O und μ_3 dient nur zur Controle.

Auf diesem Fundament weiter bauend entwickelt nun der Verf. die Gleichung der Geraden:

$$a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + a_3\,\alpha_3 = 0.$$

Die Grössen a_1, a_2, a_3 nennt er die Coordinaten der Geraden und das Zeichen $|a_1, a_2, a_3|$ die Form der Geraden. Demgemäss besteht also für jeden Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Geraden $|a_1, a_2, a_3|$ die homogene Gleichung des ersten Grades

$$a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + a_3\,\alpha_3 = 0.$$

und für jede Gerade $|a_1, a_2, a_3|$, die durch den Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ geht, besteht dieselbe Gleichung. Sie heisst aber Gleichung der Geraden $|a_1, a_2, a_3|$, wenn die Coordinaten der Geraden constant und die des Punktes variabel sind, und Gleichung des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, wenn die Coordinaten des Punktes constant und die der Geraden variabel sind.

Dieser Dualismus wird nun weiter nachgewiesen in den Ausdrücken für die Verbindungslinie zweier Punkte und den Durchschnittspunkt zweier Geraden. Sodann werden die Winkel, die von zwei Geraden gebildet werden, und die Entfernung zweier Punkte voneinander bestimmt. Aus dem Ausdruck für die Tangente dieses Winkels wird der Parallelismus zweier Geraden hergeleitet, d. h. wenn der Durchschnitt derselben auf der unendlich fernen Geraden liegt, deren Symbol $|1, 1, 1|$ ist, und auf welchen die unendlich fernen Punkte liegen, welche die Eigenschaft haben, dass ihre Coordinatensumme $= 0$ ist. Die weitere Betrachtung der Entfernung zweier Punkte führt den Verf. darauf, einen innern und äussern Mittelpunkt zu unterscheiden; letzterer ist der unendlich ferne Punkt. Die inneren Mittelpunkte der Fundamentallinien sind durch die Formen $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ dargestellt, aus welchen geschlossen wird, dass die Verbindungslinien dieser Mittelpunkte mit den gegenüberliegenden Fundamentalpunkten durch den Punkt $(1, 1, 1)$ gehen, welcher der Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks ist. Diesen Punkt $(1, 1, 1)$, der dieselben Coordinaten hat, wie die unendlich ferne Gerade $|1, 1, 1|$ nennt der Verf. vorzugsweise den endlich fernen Punkt und alle durch ihn gehenden Geraden die endlich fernen Geraden, deren Coordinatensumme jebenfalls $= 0$ ist.

Dies möge genügen, um dem Leser einen, wenn auch nur schwachen, Einblick in die Methode des Verfassers zu verschaffen und denselben vielleicht zu veranlassen, das Werk sich anzuschaffen und — nicht zu lesen: dazu ist es zu schwierig, — sondern zu studiren.

Ch. Sch.

Reuschle, Dr. C. G., Prof. am Gymnasium zu Stuttgart. Elemente der Trigonometrie mit ihrer Anwendung in der mathematischen Geographie. Als Lehrbuch für den Unterricht und zum Selbststudium. Mit 2 lithogr. Figurentafeln. E. Schweizerbart'sche Verlagshandl. (E. Koch) 1873. XII und 147 S. 1 Thlr.

Die vorliegenden Elemente gliedern sich in drei Theile, deren jedem ein Anhang, theils strengere Begründungen, theils Erweiterungen enthaltend sich anschliesst. Der erste Theil umfasst die Goniometrie. Die goniometrischen Functionen werden sogleich in grösster Allgemeinheit für alle Winkelgrössen u. z. nicht als Verhältnisse von Linien des rechtwinkligen Dreiecks sondern als Relationen zwischen den rechtwinkligen und Polarcoordinaten erklärt, ganz in der Weise, wie dies Helmes in seinem trefflichen Werke thut; nur schickt Helmes aus didaktischen Gründen ein Capitel „die Goniometrie in einstweiliger Einschränkung auf spitze Winkel" voraus, wogegen übrigens der Herr Verf. laut Vorrede nichts einzuwenden hat. Im ersten Paragraphen wird erklärt, was man unter entgegengesetzten Strecken und Winkeln zu verstehen habe. Gegen den ersten Satz dieses Paragraphen, den ersten des Werkes also überhaupt, haben wir ein schwerwiegendes Bedenken, obzwar es sich nur um einen Ausdruck handelt, der für das Folgende von keinem Einfluss ist. Es heisst da nämlich: „An und für sich sind alle Masszahlen geometrischer Grössen wesentlich positiv." An und für sich sind geometrische Masszahlen, wie überhaupt alle Grössen weder positiv noch negativ. Positiv ist etwas nur im Hinblick auf ein Entgegengesetztes, ein Negatives. Dieses Nicht-aus-einanderhalten der Begriffe des Absoluten und Positiven kann nicht genug gerügt werden. Freilich sieht man aus dem Zusammenhange deutlich, dass der Verf. die beiden Begriffe wohl unterscheidet und nur im Ausdruck liegt die Uncorrectheit; aber uncorrecte Ausdrücke führen zur Unklarheit der Begriffe, was namentlich in der Lehre entgegengesetzter Grössen so vielfach der Fall ist. Findet man doch in vielen Schulbüchern dutzendweise nichtssagende Beweise, weil das Positive einfach für das Absolute hineineskamotirt wird. — Nachdem der zweite Paragraph die Begriffe rechtwinkliger Coordinaten auseinandersetzt, beginnt mit dem dritten die eigentliche Goniometrie. Der Verfasser steht (s. Vorr.) auf Seite derjenigen, „welche die Trigonometrie als einen rechnenden Zweig der Geometrie auffassen und sucht, nachdem die ersten Grundlagen aus der Anschauung der Figur geschöpft sind, alles Uebrige durch Rechnung aus jenen Grundlagen herzuleiten. Dagegen ist nichts einzuwenden, nur darf man sich, um diesem Grundsatz zu huldigen, nicht zu mehr oder weniger hinkenden Beweisen verleiten lassen. Als ein solcher erscheint uns aber der für $\cos(\varphi+\psi)$ des §. 5. Nachdem die Formel für $\sin(\varphi+\psi)$ in üblicher Weise abgeleitet worden, wird die Formel für $\cos(\varphi+\psi)$ aus $\cos^2(\varphi+\psi) = 1 - \sin^2(\varphi+\psi)$ durch Einsetzung des Werthes für $\sin(\varphi+\psi)$ gefunden, woraus sich aber eigentlich ergibt

$$\cos(\varphi+\psi) = \pm \cos\varphi \cos\psi \mp \sin\varphi \sin\psi.$$

Allerdings wird in einer Note an speciellen Fällen gezeigt, dass die untern Zeichen zu einem Widerspruch führen und auch bemerkt, dass sich $\cos(\varphi+\psi)$ aus derselben Figur wie $\sin(\varphi+\psi)$ ableiten lasse; wir hätten jedoch die directe Ableitung aus der Figur in den Text und jene andere in die Note gewünscht*). Hierauf werden die vorzüglichsten übrigen goniometr. Formeln entwickelt und insbesondere die Proportionaltheile und Logarithmen ausführlicher, als sonst üblich behandelt. Den Proportionaltheilen und was damit zusammenhängt sind noch 6 Seiten des Anhangs gewidmet; der übrige Theil des Anhangs enthält die Lösung goniometrischer Bestimmungsgleichungen und die goniometrische Lösung der quadratischen und cubischen Gleichungen. Es muss auffallen, dass ein Werk, das einerseits die Wissenschaftlichkeit und Gründlichkeit so weit treibt, dass es Lemmen aus der Logarithmenlehre (Arithmetik) aufnimmt und beweist, dass es ferner einen unmittelbaren Beweis der Proportionaltheile für die trigonometrischen Logarithmen durchführt, für die quadratischen und cubischen Gleichungen nur Lösungen bei reellen Werthen gibt.

Der zweite Theil umfasst die Trigonometrie im engeren Sinne. Ohne jene schöne Uebersichtlichkeit, welche die Helmes'sche Trigono-

---

*) Will man durchaus nur Eine Formel für die Function der Summe und Differenz der Winkel aus der Figur ableiten, so scheint folgender Weg der correcteste:

Man beweiset aus der Figur, dass

1. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, durch Einsetzen von $-b$ statt b hat man dann, wie bekannt

2. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Setzt man in 1. und 2. für a $90-a$, so erhält man aus 1.

$$\sin(90-a+b) = \sin(90-[a-b]) = \cos(a-b) =$$
$$\sin(90-a)\cos b + \cos(90-a)\sin b =$$
$$\cos a \cos b - \sin a \sin b$$

aus 2.

$$\sin(90-a-b) = \sin(90-(a+b)) = \cos(a+b) =$$
$$\sin(90-a)\cos b - \cos(90-a)\sin b =$$
$$\cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

metrie (wie seine Mathematik überhaupt) so vortheilhaft auszeichnet, zu zeigen, enthält doch dieser Theil des Guten so manches, was man in andern Lehrbüchern der Trigonometrie nicht findet. Ausser mannigfaltigen, meist gut gewählten Beispielen, wollen wir hervorheben: eine weitgehende Anwendung auf die Kreisrechnung; Projectionen mit Einbeziehung des windschiefen Polygons; Ausführliches über die Bestimmung eines unzugänglichen Punktes (Pothenot'sche Aufgabe) und einer unmessbaren Strecke (Hansen'sche Aufgabe) u. a. d. — Am Schlusse dieses Theiles wird (ohne eine sphärische Trigonometrie im weitern Sinne zu beabsichtigen) eine Reihe von Sätzen über das sphärische Dreieck entwickelt, um eine weitergehende Anwendung der Trigonometrie auf mathematische Geographie zu ermöglichen, was wir nur billigen können. Der Anhang zu diesem Theile umfasst Erweiterungen des Vorhergehenden.

Der dritte Theil, durch den sich das vorliegende Werk von andern besonders zu unterscheiden sucht, führt den Titel: „Anwendung der Trigonometrie auf die Geographie oder Elemente der mathematischen Geographie.“ „Elemente der mathematischen Geographie“ sagt nun entschieden zu viel. Anschauungen und Begriffe aus der mathematischen Geographie werden, wie natürlich, vorausgesetzt und nur die Anwendung der Trigonometrie auf die Probleme der mathematischen Geographie gezeigt. Wir wollen den Inhalt dieses Theiles ausführlicher angeben. Der erste Paragraph dieses Theiles (§. 22. des ganzen Werkes) zeigt wie bei Berechnung einer durchgeführten Triangulation zu verfahren sei und wie sich hieraus die Grössen eines Meridianbogens und daraus alle auf die Grösse der Erde bezugnehmenden Zahlen ableiten lassen. Sehr zu loben ist, dass hier eine wirklich stattgefundene Triangulation (der Würtemberg'schen Landesvermessung durch Bohnenberger entnommen) als Beispiel gewählt und gerechnet wird. Hierauf folgt Bestimmung der Länge der Parallelkreise; des Flächeninhalts der Zonen, ihre Entfernung von Punkten der Erdoberfläche, deren Länge und Breite gegeben, mit passend gewählten Beispielen (Weite der Oceane etc.); der Zusammenhang der Uhrzeit mit Höhe und Azimut der Sonne (Morgen- und Abendweite); Tagesdauer, Modification der Tagesdauer durch die (scheinbare) Grösse der Sonne und durch Strahlenbrechung und endlich Dämmerung.

Aus dem Anhang zu diesem Theile wollen wir den Abschnitt über die Kartenprojectionen hervorheben.

Wie man aus der im Vorhergehenden gegebenen Inhaltsübersicht des dritten Theiles ersieht, findet man hier die in andern Trigonometrien zerstreuten Beispiele aus der mathematischen Geographie in systematischer Zusammenstellung und namhafter Erweiterung beisammen. Möchten wir auch Manches gern aufgenommen sehen, was übergangen, Manches von einem andern Standpunkte aus behandelt, Manches gekürzt sehen, so unterliegt dies doch zu sehr subjectiven Anschauungen, um daraus einen Tadel erheben zu wollen. Einige dieser Wünsche wollen wir jedoch andeuten. Bezüglich der Parallelkreise wäre es gewiss belehrend die Beispiele auch auf die Himmelskugel zu übertragen und zu zeigen, wie sich unter Annahme des Ptolomäischen Systems die Geschwindigkeit der Sonne und des Mondes bei gleichbleibender Entfernung in Folge ihrer Declinationsänderung ändern müsste. Dass die Aufgabe, aus Beobachtung derselben Culmination des Mondes an Orten verschiedener Breite die Entfernung desselben zu finden und ebenso die Entfernung der Sonne aus dem rechtwinkligen Dreiecke von Sonne-Mond-Erde zur Zeit des ersten und letzten Viertels nicht aufgenommen worden, ist ebenso zu verwundern wie, dass Gnomon-Aufgaben fehlen und der Sonnenuhren nicht gedacht wird. Länge der Tag- und Nachtbogen, Morgen- und Abendweiten hätten füglich allgemein aufgefasst d. h. auf alle Gestirne für alle Polhöhen ausgedehnt werden können, woraus sich die Sätze für die Sonne als specielle Fälle ergeben hätten. Ja statt der grossen Ausführlichkeit, mit der das Problem der Dämmerung behandelt wird, dürfte die Aufgabe interessanter sein, welches die grösste und kleinste mögliche Declination des Mondes nach verschiedener Lage der Knoten sei; auch hätte ein Beispiel von Coordinaten-Verwandlung (cölestische Länge und Breite in Rectascension und Declination u. d.) Aufnahme finden können.

Aus den Andeutungen, die wir im Vorhergehenden über das Werk gegeben, ist zu ersehen, dass dasselbe manches Eigenartige, manches in andern Lehrbüchern Uebergangene enthält, wodurch es sich den bessern Lehrbüchern der Trigonometrie anreiht; dass es aber anderseits an einer Ungleichmässigkeit in der Ausführung leidet und dass hin und wieder die Uebersichtlichkeit mangelt, wodurch es namentlich dem schon oben angeführten Helmes'schen Werke nachsteht. Auch die Ausstattung und typographische Gliederung lässt manches zu wünschen übrig. Die immer mehrere Seiten langen Paragraphen, welche durch Nummern untergetheilt sind, die bei jedem Paragraphen von eins gezählt werden, erschweren bei Hinweisungen das Auffinden und vor allem ist es störend, dass die Figuren nicht in den Text aufgenommen, sondern auf zwei Tafeln zusammengestellt sind. Bringt man, auch abgesehen von der Unbequemlichkeit, den Zeitverlust in Anschlag, der durch den letzterwähnten Umstand dem Lernenden erwächst, so ist kaum erklärlich, was den Herrn Verfasser oder Verleger bewogen habe, bei einem auch zum Selbstudium bestimmten Buche, dessen einfache Figuren im Holzschnitt leicht ausführbar sind, diese vom Texte zu trennen. Trotz der Ausstellungen aber, die wir machen zu müssen glaubten, sei das Werk um des Guten willen, das es vielfach enthält, bestens empfohlen.

Dr. Pick.

Bibliographie.

Juli, August, September.

Unterrichts- und Erziehungswesen.

Bericht über die erste sächsische Realschulmänner-Versammlung in Dresden am 26. und 27. Mai 1874. Dresden. Höckner. 5 Sgr..

Ganster, die Gesundheitspflege im Allgemeinen und hinsichtlich der Schule im Besonderen. Uebersichtlich dargestellt für Lehrer. Wien. Pichler. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

Hanschmann, das Strafrecht der Schule. Ein Wort der Verständigung zwischen Schule und Haus. 3. Aufl. Lpzg. Theile. 5 Sgr.

Lauckhard, Katechismus des Unterrichts und der Erziehung. 2. Aufl. Lpzg. Weber. 12 Sgr.

Niemeyer, über Lessings Pädagogik. Dresden. Höckner. $7\frac{1}{2}$ Sgr.

Völker, Gedanken und Vorschläge für eine durchgreifende Volksbildung. Schaffhausen. Brodtmann. 6 Sgr.

Mathematik.

A. Reine Mathematik.

1) Arithmetik.

Adam, 7 Hefte Aufgaben für das elementare Rechnen. 2. Aufl. Potsdam. Stein. à $2\frac{1}{2}$ Sgr.

—, dass. Auflösungen. 6 Sgr.

Bremiker, Tafel vierstelliger Logarithmen. Berlin. Weidmann. 6 Sgr.

Diesterweg-Heuser's praktisches Rechenbuch für Elementar- und höhere Bürgerschulen. 24. Aufl. Von Langenberg. Gütersloh. Bertelsmann. 18 Sgr.

Esersky, ausgeführte Multiplication und Division bis zu jeder beliebigen Grösse. 5. Ausg. Lpz. Brockhaus. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Feaux, Rechenbuch. 3. Aufl. Paderborn. Schöningh. 3 Sgr.

Foth, Leitfaden für den Unterricht im Rechnen. 3. Aufl. Hannover. Meyer. 16 Sgr.

Frickhöffer, Uebungsbuch zum mündl. und schriftlichen Rechnen. Neu bearb. von Welcker. 2. Aufl. Wiesbaden. Limbarth. 4 Sgr.

Haberl, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Zum Gebrauch für Oberrealschulen und verwandte Lehranstalten. Wien. Braumüller. 2 Thlr.

Harms, Rechenbuch für Volksschulen und die unteren Classen höherer Schulen. 5. Aufl. Oldenburg. Stalling. 15 Sgr.

Hattendorf, die Sturm'schen Functionen. 2. Aufl. Hannover. Rümpler. 20 Sgr.

Hermes, Sammlung von Aufgaben aus der Algebra und niederen Analysis. Berlin. Springer. 20 Sgr.

Köstler, Leitfaden für den Anfangsunterricht in der Mathematik an höheren Lehranstalten. 1. Thl. Anfangsunterricht in der Arithmetik. Halle. Nebert. $7\frac{1}{2}$ Sgr.

Kuckuck, die Rechenkunst im 16. Jahrh. Berlin. Weidmann. 8 Sgr.

Kurzbauer, Lehrbuch des kaufmännischen Rechnens. 7. Aufl. Wien. Gerold. $2\frac{1}{3}$ Thlr.

Ott, die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. 3. Aufl. Prag. Calve. 1 Thlr.

Paufler, Leitfaden für das Zahlenrechnen in Realschulen. Lpz. Brockhaus. 15 Sgr.

Pfenninger, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Volksschulen und Seminarien. 1. Thl. Arith. Zürich. Schulthess. 24 Sgr.

Ruland, praktische Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Buchstabenrechnung. Ausführliche Auflösung der in Dr. Ed. Heis' Sammlung von Beispielen enth. Aufg. 1. Thl. die allg. Arithm. und Algebra. 3. Aufl. Bonn. Cohenn. $1^5/_6$ Thlr.

Ryssel und Löhrens, Handbuch zu Krancke's arithm. Exempelbuch für Schulen. Hannover. Hahn. 1 Thlr.

Salomon, Lehrbuch der Elementararithmetik für Oberrealschulen. Neu hrsg. von Sevcik. 1. Thl. die Elemente der Algebra. 4. Aufl. Wien. Gerold. 1½ Thlr.

Sass, Buchstabenrechnung und Algebra. 1. Thl. 5. Aufl. Altona. Schlüter. 24 Sgr.

Schlömilch, 5stellige logarithmische und trignometrische Tafeln. Galvanoplast. Stereotypie. 3. Aufl. Braunschweig. Vieweg. 10 Sgr.

Schröder, Abriss der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. 1. Heft. Die sieben algebraischen Operationen. Lpz. Teubner. 6 Sgr.

Walter, Rechenbuch für Mittelschulen. Im Verein mit Collegen der Knabenschule in Bremerhaven bearb. Bremerhaven. 7½ Sgr.

Wienbold, Lehrbuch der elementaren Mathematik für Seminaristen und Lehrer. 1. Thl. Arithmetik. Lpz. Hahn. 1⅓ Thlr.

2) Geometrie und Trigonometrie.

Feaux, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 5. Aufl. Paderborn. Schöningh. 24 Sgr.

Fritsche, Aufgaben und Fragen aus der geometrischen Formenlehre für Real- und höhere Bürgerschulen. 2. Aufl. Lpz. Klinkhardt. 8 Sgr.

Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie. 3. Aufl. Stuttgart. Metzler. 2⅔ Thlr.

Hartmann, genetischer Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie in Form methodisch geordneter Fragen und Aufg. bearbeitet und für Schüler bestimmt. 4. Heft. Aehnlichkeitslehre und Kreislehre. Bautzen. Riehl. 10 Sgr.

Hochheim, über die Diffentialcurven der Kegelschnitte. Halle. Nebert. 1 Thlr.

Hoffmann, die Raumlehre in der Elementarschule. Köln. Schwann. 10 Sgr.

Kieseritzki, Lehrbuch der elementaren Geometrie für den Schulgebrauch bearb. 2. Bd. Stereometrie. Petersburg. Deubner. 20 Sgr.

Kober, Leitfaden der ebenen Geometrie. Lpz. Teubner. 10 Sgr.

Koppe, die Planimetrie für den Schul- und Selbstunterricht. 12. Aufl. Essen. Bädeker. 21 Sgr.

—, die Stereometrie. 9. Aufl. Ebd. 16 Sgr.

Kunze, der geometrische Unterricht in der Oberclasse der Volksschule. Brandenburg. Müller. 15 Sgr.

Leitfaden der Geometrie. Herausg. von einem Verein von Lehrern. 2. Aufl. Potsdam. Rendel. 5 Sgr.

Liersemann, planimetrische Constructionen. 1. Thl. Systemaufgaben. Reichenbach i. Schl. 10 Sgr.

Mehler, Hauptsätze der Elementarmathematik zum Gebrauch an Gymnasien und Realschulen. Berlin. Reimer. 15 Sgr.

Schweder, Lehrbuch der Planimetrie zum Schulgebrauch bearb. Riga. Brutzer. 12½ Sgr.

Weyr, die Raumcurven 7. Ordnung. Wien. Gerold. 3 Sgr.

Wunderlich, die Raumlehre in der Volksschule. 2. Aufl. Langensalza Schulbuchhandlung. 6 Sgr.

B. Angewandte Mathematik.

(Astronomie, Geodäsie und Mechanik.)

Atlas des südlich gestirnten Himmels. Darstellung der zwischen dem Südpol und dem 20. Grad südl. Abweichung mit blossen Augen sichtbaren Sterne nach ihren wahren, unmittelbar vom Himmel entnommenen Grössen. 7 Taf. in Stahlst. Lpz. Brockhaus. 3⅓ Thlr.
Grimm, mathematische Geographie für die unteren Classen höherer Schulen. Freiburg. Herder. 4 Sgr.
Haberl, das Orientiren des Messtisches und Bestimmen von Standpunkten mit dem Messtische oder einem Winkelinstrument. 2. Aufl. Wien. Seidel. 12 Sgr.
Jahn, Katechismus der Astronomie. Belehrungen über den gestirnten Himmel, die Erde und den Kalender. 5. Aufl. von Drechsler. 72 Abb. Lpz. Weber. 15 Sgr.
Klein, Fortschritte auf dem Gebiet der Astronomie. 1870—72. Lpz. Meyer. 10 Sgr.
Vogel, Untersuchungen über die Spektra der Planeten. Eine von der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Kopenhagen gekrönte Preisschrift. Lpz. Engelmann. 1 Thlr.
Weiss, 2 Sternkarten. Lithogr. Berlin. Reimer. 20 Sgr.

Physik.

Bänitz, Lehrbuch der Physik in populärer Darstellung. Nach method. Grundsätzen für gehobene Lehranst. bearb. 197 Holzschn. 3. Aufl. Berlin. Stubenrauch. 20 Sgr.
Bezold, die Farbenlehre mit Hinsicht auf Kunst und Kunstgewerbe. 63 Fig. Braunschweig. Westermann. 4½ Thlr.
Franz, neue Untersuchungen über die Identität von Licht und strahlender Wärme. Berlin. Weidmann. 4 Sgr.
Gerding, populäre Vorlesungen über Naturkräfte und deren Anwendung. Schaffhausen. Brodtmann. $1\frac{7}{10}$ Thlr.
Huguenin, über Sinnestäuschungen. Basel. Schweighauser. 8 Sgr.
Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Lpz. Teubner. 3 Thlr.
Klein, Fortschritte auf dem Gebiete der Physik und Meteorologie. 1872—73. Lpz. Meyer. $1\frac{1}{5}$ Thlr.
Koppe, Anfangsgründe der Physik in den oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. 345 Holzschn. 12. Aufl. Essen. Bädeker. $1\frac{2}{5}$ Thlr.
Mousson, die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 3. Bd. Galvanismus. 291 Fig., 2. Aufl. Zürich. Schulthess. $2\frac{1}{5}$ Thlr.
Naturlehre in der Volks und Mittelschule. Ein Leitfaden für den Lehrer. Bearb. von Schulmännern in Düsseldorf. Köln. Schwann. 10 Sgr.
— dass. Aufgabenbüchlein. Ebd. 1½ Sgr.
Schoder, Hülfstafeln zur barometrischen Höhenbestimmung nebst Anleitung zur Untersuchung und zum Gebrauch der Feldbarometer. 2. Aufl. Stuttg Schweizerbart. 20 Sgr.
Stricker, die Feuerzeuge. Berlin. Lüderitz. 7½ Sgr.
Subic, Lehrbuch der Physik für Obergymnasien und Oberrealschulen. 3. Aufl. Pest. Heckenast. 3 Thlr.
Tyndall, der Schall. 8 Vorles. Autor. deutsche Ausg. von Helmholtz und Wiedemann. 169 Holzschn. 2. Aufl. Braunschweig. Vieweg. 2 Thlr.
Wirth, Wiederholungs- und Hülfsbuch für den Unterricht in der Physik. 3. Aufl. Berlin. Wohlgemuth. 7½ Sgr.
Zetzsche, kurzer Abriss der Geschichte der elektrischen Telegraphie. 51 Holzschn. Berlin. Springer. 1 Thlr.

Chemie.

Fittig, Grundriss der Chemie. 2. Thl. Wöhler's Grundriss der organischen Chemie von Prof. Dr. Fittig. 9. Aufl. Lpz. Dunker und Humblot. 2⅔ Thlr.

Gorup-Besanez, Lehrbuch der Chemie. 3. Bd. Lehrbuch der physiolog. Chemie. 3. Aufl. Braunschweig. Vieweg. 1. Lfg. 1½ Thlr.

Handwörterbuch, neues, der Chemie. Auf Grundlage der von Liebig, Poggendorff, Wöhler, Kolbe und Fehling her. Handw. bearb. von Fehling. Braunschweig. Vieweg. 1. Bd. $9^3/_5$ Thlr.

Klein, Fortschritte auf dem Gebiet der theoretischen Chemie. Lpz. Mayer. 10 Sgr.

Wagner, Grundriss der chemischen Technologie. 2. Aufl. Lpz. Wigand. 1⅔ Thlr.

Mineralogie.

Behrens, die Krystalliten. Mikroskopische Studien über verzögerte Krystallbildung. Kiel. Wechmar. 1⅓ Thlr.

Blum, Lehrbuch der Mineralogie (Oryktognosie). Mit 457 krystallogr. Fig. Stuttg. Schweizerbart. 4 Thlr.

Hochstetter, die Fortschritte der Geologie. Vortrag geh. in der feierl. Sitz. der k. Akad. der Wissensch. am 30. Mai 1874. Wien. Gerold. 5 Sgr.

Laubmann, das Vorkommen, die Production und Circulation der Mineralkohle in Bayern und Umgebung. München. Lit. art. Anstalt. 20 Sgr.

Müller, das Wachsen der Steine. Basel. Schweighauser. 10 Sgr.

Naumann, die Hohburger Porphyrberge in Sachsen. Stuttg. Schweizerbart. 15 Sgr.

Pezirka, Krystallnetze zu den sämmtlichen einfachen Krystallgestalten und einigen Combinationen. 3. Aufl. Mit 6 Taf. Prag. Tempsky. 10 Sgr.

Peters, Leitfaden zum ersten Anschauungsunterricht in der Mineralogie. Mit 58 Holzschn. Graz. Leuschner. 18 Sgr.

Rothe, Krystallnetze zur Verfertigung der beim mineralog. Unterricht vork. wichtigsten Krystallgestalten. 2. Aufl. Wien. Pichler. 6 Sgr.

Botanik.

Gremli, Excursionsflora für die Schweiz. Nach der analytischen Methode bearb. 2. Aufl. Aarau. Christen. 1⅓ Thlr.

Haller, Excursionsbuch enth. eine praktische Anleitung zum Bestimmen der im deutschen Reich heimischen Phanerogamen durch Holzschn. erläutert. Jena. Mauke. 1 Thlr.

Jerzykiewicz, Botanik für die unteren und mittleren Classen höherer Lehranstalten. Mit 145 Holzschn. Posen. Jolowicz. ¾ Thlr.

Lenz, nützliche, schädliche und verdächtige Schwämme. 5. Aufl. Bearb. von Röse. Mit nach der Natur gemalten Abb. Gotha. Thiememann. 2 Thlr.

Möller, Flora von Nordwestthüringen. Ein Handbuch für Botaniker. 2. Ausg. Eisenach. Bacmeister. 1 Thlr.

Riedel, Pflanzenheft. Heidelberg. Weiss. 2½ Sgr.

—, der erste Unterricht in der Pflanzenkunde auf Anschauung gegründet. Ebd. ¼ Thlr.

Schnack, Leitfaden der allgemeinen Botanik für höhere Bürgerschulen. Hamburg. Meissner. 8 Sgr.

Wessel, Grundriss zur Lippischen Flora. 2. Aufl. Phanerogamen und Gefässkryptogamen. Detmold. Meyer. 10 Sgr.

Zoologie.

Altum, Forstzoologie. III. Insecten. 1. Abth. Allgemeines und Käfer. Mit 38 Fig. Berlin. Springer 2⅔ Thlr.

Giebel, insecta epizoa. Die auf Säugethieren und Vögeln schmarotzenden Insecten nach Chr. L. Nitzch's Nachlass bearb. Mit 20 Taf. Lpz. Wigand. 45 Thlr.

Hummel, methodischer Leitfaden der Naturgeschichte. 1. Thl. Thierkunde. 37 Holzschn. Halle. Anton. 4 Sgr.

Koch, Grundriss der Zoologie. Für Studirende bearb. 1. Hälfte. Jena. Deistung. 1⅙ Thlr.

Schlapp, Grundzüge der systematischen Zoologie, sowie der vergleichenden Anatomie der Organe der Beweguug, Ernährung und Empfindung. Zum Gebrauch an höheren Schulen. 3. Aufl. Erfurt. Villaret. 25 Sgr.

Spengel, die Fortschritte des Darwinismus. Neuer unveränd. Abdruck aus Klein Revue der Naturw. Lpz. Mayer. 16 Sgr.

Werneburg, der Schmetterling und sein Leben. Eine naturgeschichtliche Skizze. Berlin. Springer. 24 Sgr.

Willibald, die Nester und Eier der in Deutschland und den angrenzenden Ländern brütenden Vögel. In systemat. Folge beschrieben und durch 228 nach der Natur gefertigte Abbild. erl. 2. Aufl. Lpz. Koch. 24 Sgr.

Geographie.

Baur, Elementarschulatlas. 10 K. Wien. Hölzel. 8 Sgr.

Beck-Bernard, die argentinische Republik. 2. Aufl. Mit 3 K. Bern. Huber. 18 Sgr.

Böhm, Leitfaden für den Unterricht in der Geographie. Lpz. Wöller. 6 Sgr.

Elwenspoek und Müller, Wandkarten von Ost- und Westpreussen. 9 Blatt. Königsberg. Beyer. 2⅔ Thlr.

Kiepert, compendiöser allg. Atlas der Erde und des Himmels. In 36 Karten. 15. Aufl. Nach Dr. Richter und Graef neu bearb. Weimar. Geogr. Instit. 1⅔ Thlr.

Kiepert, Schulwandkarte des deutschen Reichslandes Elsass-Lothringen in 6 Blättern. 1 : 180,000. Berlin. Reimer. 2⅔ Thlr., auf Leinw. 4⅔ Thlr.

Klein, Fortschritte auf dem Gebiete der Geographie. 1872—73. Lpz. Mayer. 24 Sgr.

Klöden, Kleine Schulgeographie. Im Auftrage der städt. Stadtschuldeputation zu Berlin verfasst. Berlin. Weidmann. 8 Sgr.

Marno, Reisen im Gebiete des blauen und weissen Nil, im egypt. Sudan und den angrenzenden Negerländern. Wien. Gerold. 6⅔ Thlr.

Mundy, Wanderungen in Australien und Vandiemensland. Deutsch von Gerstäker. 3. Aufl. Lpz. Senf. 25 Sgr.

Schacht, Lehrbuch der Geographie. 8. Aufl. von Rohmeder. Mainz. Kunze. 2½ Thlr.

Schweinfurt, im Herzen von Afrika. Reisen und Entdeckungen im centralen Aequatorial-Afrika. 2 Thle. Lpz. Brockhaus. 10 Thlr.

Wagner, Wandkarten des deutschen Reichs und seiner Nachbarländer. Gotha. Perthes. 3⅙ Thlr.

Wohlers, Grundriss eines stufenweis zu erweiternden Unterrichts in der Erdbeschreibung. 9. Aufl. Mit 8 Karten. Berlin. Mauck. 12 Sgr.

Biographie.

Rossmässler, mein Leben und Streben im Verkehr mit der Natur und dem Volke. Nach dem Tode des Verf. herausgeg. von Dr. Karl Russ. Hannover. Rümpler. 2⅓ Thr.

Zur Erinnerung an Jacob Steiner von Dr. Geiser. Ein Vortrag geh. in der mathemat. Section der schweiz. Naturf. Versammlung in Schaffhausen. Zürich. Schabelitz. 10 Sgr. A.

Pädagogische Zeitung.

(Berichte über Versammlungen, Auszüge aus Zeitschriften u. dgl.)

Nekrologe.

Dr. C. Fr. Meissner, Prof. der Botanik an der Universität Basel. † 2. V.

F. H. v. Kittlitz, k. preuss. Hauptmann a. D. † 10. IV. zu Mainz, 76 Jahre alt. Er nahm an der von 1826—29 auf dem Schiff Senjawin unter Kapitän Lüttke von der russ. Regierung veranstalteten Weltumsegelung Theil. Verschiedene zool. Mittheilungen, das Ergebniss dieser Reise, veröffentlichte er in Oken's Isis und in den Abh. der Petersburger Akademie der Wissenschaften. Die Beschreibung der Reise selbst erschien 1858 in 2 Bden. unter dem Titel „Denkwürdigkeiten etc." Gotha Perthes. Sein bedeutendstes Werk sind die „24 Vegetationsansichten von den Küstenländern und Inseln des stillen Oceans."

A. J. Angström, Prof. der Physik an der Universität Upsala. † das. 21. IV., 60 Jahre alt.

Ferd. Freih. v. Droste-Hülshoff, Präsident der deutschen Ornithologengesellschaft und Director der zool. Section für Westfalen und Lippe. † 21. VII. zu Münster, geb. auf dem Hause Hüllshoff bei Münster am 16. Februar 1841. Nekrolog. s.: „Gefiederte Welt" III. No. 35.

Dr. Abdullah Bey (Carl Hammerschmidt), Professor an der medicinischen Schule in Konstantinopel, ein geborener Wiener. Er studirte Jura, ward Dr. der Rechte, gab dies Studium auf und wandte sich der Medicin und den Naturwissenschaften zu. Im J. 1848 musste er aus Oesterreich fliehen und entkam in die Türkei, wo er Dienste nahm und zuletzt als Prof. der Zool. und Mineralogie wirkte. Er erhielt 1869 seitens Oesterreich die goldene Medaille für Kunst und Wissenschaft und im vorigen Jahre anlässlich seiner Thätigkeit als türkischer Ausstellungscommissar das Comthurkreuz des Franz-Josephs-Ordens. † 30. VIII., 75 Jahre alt.

Dr. Joh. Friedr. Hessenberg, bedeutender Mineraloge. † 8. VII. zu Frankfurt a. M.

Dr. Barnaba Tortolini, Prof. der Mathematik an der Sapienza zu Ariccio, † 31. VIII., im 66. Lebensjahre. A.

Otto Hesse.

M. C. Ludwig Otto Hesse ist am 22. April 1811 in Königsberg geboren. Er widmete sich den mathematischen Studien an der Hochschule seiner Vaterstadt, und gehörte in vollem Sinne des Worts zu jenen Männern, welche die Mitlebenden bereits als die mathematische Schule jener Anstalt bezeichnet haben — ein Name, welchen die Geschichte der Mathematik des 91. Jahrhunderts zuverlässig mit Anerkennung und Dankbarkeit aufbewahren wird. Hesse begann seine Lehrthätigkeit an derselben Universität, an welcher er unter Männern wie Bessel, Jacobi, Neumann gelernt hatte, und wir dürfen darin das äussere Zeichen der Doppelstellung erkennen, welche eine historische Betrachtung der Wissenschaft ihm zuzuweisen hat. Hesse war zugleich der grösste Schüler und, der Zeit aber nicht dem inneren Gehalte nach, der letzte Lehrer der alten Königsberger Schule. Seine dortige Thätigkeit dauerte von 1840—1856, ohne dass seine Stellung über die eines ausserordentlichen Professors sich erhoben hätte. Erst in seinem 45. Lebensjahr erhielt er eine Berufung als ordentlicher Professor der Mathematik nach Halle und fast gleichzeitig nach Heidelberg, wo er im Winter 1856/57 erstmalig, im Sommer 1868 zuletzt einen jährlich wachsenden Kreis aufmerksamer Schüler um sich versammelte. Im Herbst 1868 siedelte er nach München an das Polytechnikum über, dem er bis in diesen Sommer angehörte. Er hatte, mit Unterbrechung seiner Vorlesungen, in Karlsbad Heilung von einem schweren Leberleiden gesucht. Der Erfolg rechtfertigte nicht die auf dieses Bad gesetzten Hoffnungen. Am 4. Aug. 1874 erlag er in München seinen Leiden. Am 7. August wurde er in Heidelberg bestattet an der Seite eines geliebten Kindes, welches ihm 1861 vorausgegangen war.

Eine Darstellung der wissenschaftlichen Thätigkeit Hesse's im Einzelnen aufzunehmen, sind die Spalten einer fachgenössischen Zeitschrift allein berufen. Hier muss es genügen in allgemeinsten Umrissen den Charakter seiner Leistungen hervortreten zu lassen. Man kann sie fast insgesammt als algebraisch-geometrische bezeichnen. Seit dem 14. Jahrhundert begegnen wir den Anfängen einer Betrachtungsweise, welche im 17. Jahrhundert als Geometrie des Descartes, als analytische Geometrie, wie man gegenwärtig sagt, einen Weg geometrischer Forschung erkannte, der dem Alterthum durchaus fremd war. Geometrische Gebilde durch ihnen gleichwerthige algebraische Formeln darzustellen, mit diesen Formeln zu rechnen, das Schlussergebniss der Rechnung geometrisch zu deuten, das sind die drei Bestandtheile der analytisch-geometrischen Methode. Ein doppelter Fortschritt kennzeichnet nun die Thätigkeit der deutschen Geometer der ersten vierzig Jahre unseres Jahrhunderts. Die Rechnung nämlich, die mittlere für die Geometrie gewissermassen nebensächliche Operation, wird auf ein kleinstes Mass zurückgeführt, sowohl durch Benutzung einfacher Symbole für ganze Gleichungspolynome nach dem Vorgange Plückers (vergl. dessen „Analytisch-geometrische Entwickelungen. Essen 1828"), als auch durch Verwerthung der grossentheils von Jacobi herrührenden Sätze über gewisse symmetrische Grössenverbindungen, die er Determinanten nannte. Es wird den Verdiensten eines Möbius auf einem immerhin andern, wenn auch naheliegenden, Gebiete nichts benommen, wenn wir behaupten: weitere Fortschritte seien nach den beiden genannten Richtungen möglich gewesen, und Hesse's Name sei mit denselben unwiderruflich verknüpft. Aber damit sind seine Verdienste nicht erschöpft. Wie er auf der einen Seite die höchste Gewandtheit in dem Rechnen mit Gleichungssymbolen an den Tag legte, wie er auf der andern Seite mit durchdringendem Scharfsinn in die geheimen Eigenschaften algebraischer Formen sich vertiefte, so liess er auch nie die Wechselbeziehungen zwischen Algebra und Geometrie aus den Augen, so erkannte er, genauer als es vor ihm der Fall gewesen, die gegenseitige Förderung, welche jede dieser Disciplinen aus der andern ziehen könne und müsse. Er sah in jedem algebraischen Lehrsatz zugleich den geometrischen, und umgekehrt enthielt ihm jede geometrische Wahrheit eine algebraische mit eingeschlossen — ein Dualismus neuer Art, welcher wohl Hesse als Entdecker wird zugeschrieben bleiben.

Was die Reihenfolge seiner Arbeiten betrifft, so wird die Königsberger Periode als die erfindungsreichere Zeit seines Lebens bezeichnet werden müssen, in welcher er das Crelle'sche Journal für reine und angewandte Mathematik durch Beiträge von hervorragendem und bleibendem Werth bereicherte. Seit der Uebersiedelung nach Heidelberg war sein Bestreben mehr dahin gerichtet, die von ihm und andern gewonnenen Schätze in gangbare Münze umzuprägen, in Lehrbücher der Geometrie, wie er sich dieselbe dachte, zu sammeln, was in Abhandlungen hie und da ungeordnet zerstreut war. So entstanden seine Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, später die über analytische Geometrie der Ebene — Werke, denen man vielleicht die Eigenschaft zur ersten Einführung in die Wissenschaft dienen zu können absprechen darf, welche aber für den, dem die Wissenschaft kein fremdes Gebiet mehr ist, gewiss noch Jahrzehnte hindurch ein Muster grossartiger Uebersicht und methodischer Eleganz sein und bleiben werden.

Zu dem Bilde von Hesse's wissenschaftlicher Thätigkeit gehören auch seine eigentlichen Lehrvorträge. Der Schreiber dieser Zeilen muss darüber nach blossem Hörensagen berichten. Die Liebe und Verehrung aller Schüler des nunmehr dahingeschiedenen Meisters bezeugen aber übereinstimmend, wie grosse Verdienste er sich auf diesem Feld erworben hat. Der Lorbeerkranz, den ein Schüler des Verstorbenen auf seinen Sarg niederlegte, die thränenerstickten Worte des Abschiedes, die er ihm nachsandte, sind Beweise unwiderleglicher Natur. Und Hesse wusste, was seine Schüler ihm, was er seinen Schülern war. Hatte er doch die Doppelverfügung selbst getroffen, deren traurige Erfüllung dem gestrigen Tage zur Aufgabe ward: „Ich will in dem Blumengarten meines Heidelberg ruhen, zu Grabe geleitet von Schülern.“ (Beilage zur Allgem. Zeitung Nr. 226.)

Mathematisch-naturw. Universitäts-Seminare.

Strassburg.

Hr. Prof. Dr. Reye schreibt uns über das Univ. Seminar zu Strassburg Folgendes: „Ihrem Wunsche kann ich leider nicht ganz entsprechen; denn bis jetzt hat sich das Bedürfniss nach Statuten nicht geltend gemacht. Doch kann ich Ihnen über Zweck, Hülfsmittel und Leitung unsers Universitäts-Institutes folgende Mittheilungen machen:

Das mathematische Seminar ist bestimmt, den Studirenden zum selbständigen Arbeiten und Forschen in den verschiedenen Zweigen der Mathematik Anleitung zu geben; es ist demnach vorzugsweise für Mathematiker aus höheren Semestern berechnet. Die Uebungen der Theilnehmer werden von den ord. Professoren der Mathematik, also gegenwärtig von Prof. Christoffel und mir, geleitet; und zwar wählte Prof. Christoffel bisher vorzugsweise Probleme aus der Functionentheorie (elliptische und Abel'sche Functionen), ich dagegen solche aus der analytischen und synthetischen Geometrie des Raumes. Unterstützt werden diese Uebungen, welche sich an unsere Universitäts-Vorlesungen anzulehnen pflegen, durch eine auserlesene kleine Seminar-Bibliothek, die wir in den letzten 2 Jahren für etwa 2000 Thlr. zusammengebracht haben und durch eine meinen Wünschen ganz entsprechende Sammlung geometrischer Modelle. Die Bibliothek wird auch von solchen Studenten der Mathematik, welche an den Uebungen des Seminars noch nicht Theil nehmen können, fleissig benutzt; wir geben ihnen gerne, wenn die Zwecke des Seminars dadurch nicht beeinträchtigt werden, Bücher mit nach Haus.

Dem Seminar steht ausser dem math. Hörsaal noch ein eigenes, geräumiges Zimmer zur Verfügung, welches von den Studirenden auch abgesehen von den Uebungen vielfach benutzt wird.

Für Studirende der Naturwissenschaften bestehen an unserer Universität ausser dem math. Seminar noch sieben „Institute“ für Physik, Chemie, Astronomie, Mineralogie, Geognosie, Zoologie und Botanik, die mit Hülfsmitteln (Instrumenten, Sammlungen etc.) sehr reich ausgestattet sind; dazu kommen noch die Institute der medicinischen Facultät, z. B. das physiologisch-chemische und dasjenige für Experimental-Physiologie. Alle diese Institute wurden im Mai 1872 zugleich mit der Universität eröffnet.

Zur Statistik der Gymnasien und Realschulen.

Das Alter der im Jahre 1871 von den Preuss. Gymnasien und Realschulen I. O. mit dem Maturitätszeugniss entlassenen Abiturienten.*)

Nach dem Centralblatt für die Preuss. Unterrichtsverwaltung. Novemberheft, 1872.

Zuzammengestellt von Dr. Ackermann.

Provinzen	Gymnasien.							Realschulen I. O.						
	Unter 17 J.	17 J.	18 J.	19 J.	20 J.	über 21 J.	Gesammtzahl.	Unter 17 J.	17 J.	18 J.	19 J.	20 J.	über 21 J.	Gesammtzahl.
Preussen	6	15	39	56	53	64	233	—	4	11	17	8	4	44
Brandenburg	4	23	51	71	40	17	206	2	8	10	13	7	3	43
Pommern	1	11	16	21	13	9	71	—	3	3	3	1	—	10
Posen	—	6	19	18	21	25	89	—	5	4	3	3	2	17
Schlesien	3	18	49	59	38	33	200	1	6	11	8	5	2	33
Sachsen	—	10	27	61	40	38	176	—	3	3	8	5	2	21
Schleswig-Holstein	1	3	5	6	10	4	29	—	—	—	—	1	—	1
Hannover	2	12	20	44	36	27	141	4	5	9	12	4	2	36
Westphalen	1	16	43	66	67	77	270	—	8	14	6	2	1	31
Hessen-Nassau	3	5	13	20	12	2	55	—	4	3	3	—	—	10
Rheinprovinz u. Hohenzollern	5	26	79	88	78	64	340	5	14	18	13	5	2	57
Summe	26	145	361	510	408	360	1810**)	12	60	86	86	41	18	303***)
In Procent	1,4	8,0	19,9	28,2	22,5	19,9	(1381 weniger als im vor. Jahr.)	3,9	19,8	28,4	28,4	13,5	5,9	(110 weniger als im vor. Jah.)

*) Vergl. 1. Jahrgang dieser Zeitschrift. Seite 259.
**) Mathematik und Naturwissenschaften studirten hiervon 60, also $3\frac{1}{3}$%.
***) Hiervon wollten zu Universitätsstudien übergehen 18.

Repertorium für Aufgaben.*)

(Redigirt von Prof. Binder in Schönthal.)

III.

Auflösung der Aufgaben in Heft 4. d. J. p. 287.

Aufg. 1—3. Der gegebene Kreissector sei OAB, seine Achse OC. Ist $XYZW$ das gesuchte Rechteck, von dem die Ecken X und Y auf den Halbmessern OA und OB, Z und W auf dem Bogen AB liegen, so kann man,

1. wenn der Umfang $= 2s$ gegeben ist, zur Analysis WX nach D so verlängern, dass $XD = XY$, also $WD = s$ ist. Dann liegt der Punkt D einerseits, weil WD nach Richtung und Grösse gegeben, auf einer construirbaren Kreislinie, und andererseits, weil die Richtungen und das Verhältniss von XD und XY gegeben, auf einer bestimmten, durch O gehenden, Geraden. Daher ist Punkt D und damit das Uebrige bestimmt.

2. Wenn die Differenz zweier Seiten $= 2d$ gegeben ist, so ist die Analysis der vorigen vollkommen analog. In beiden Fällen werden Construction und Beweis sehr einfach.

3. Ist die Diagonale $WY = e$ gegeben, so schneiden sich WO und ZY in W', dem Gegenpunkt von W, und man hat zur Construction des Dreiecks WYW' die Strecken WW', WY und den Winkel $OYW' = BOC$. Die Construction gestaltet sich einfach so: Der durch O, B und A', den Gegenpunkt von A, gehende Kreis werde von einem aus A mit Halbmesser $= e$ beschriebenen Bogen in E geschnitten, so trifft OE die Peripherie des gegebenen Kreises in Z (und ein Kreis aus O mit OE die Halbmesser OA und OB in X und Y).

Aufg. 4—6. (1, *b*.) Ist wieder OAB der Sector, und liegen die Ecken X auf OA, Y und Z auf OB und W auf dem Bogen, so kann man wieder, wenn

4. der Umfang $= 2s$ gegeben ist, WX nach D verlängern, so dass $XD = XY$; wonach die weitere Analysis der zu (1.) vollkommen ähnlich wird. Dasselbe gilt, wenn

5. die Differenz der Seiten $= 2d$ gegeben ist.

6. Ist die Diagonale $= e$ gegeben, so hat man das Trapez $OZWX$ zu zeichnen, dessen Winkel und Diagonalen gegeben sind, oder auch das Trapez $OYWX$, von dem die Winkel des Dreiecks OXY, sowie die Diagonale OW und die nicht parallele Seite YW bekannt sind. Beide Aufgaben lassen sich zwar ohne die Lehre von der Aehnlichkeit lösen; bei der vorliegenden Anordnung der Bestimmungsstücke, da der Winkel O festliegt, wird es sich aber am meisten empfehlen, in den Winkel O ein dem Dreieck OXY ähnliches $OX'Y'$ zu zeichnen, und die durch X' zu OY' gezogene Parallele durch denjenigen Kreis in W' zu schneiden, für den die Entfernungen seiner Punkte von O und Y in dem gegebenen Verhältniss $OW : YW$ stehen. OW' gibt dann den Punkt W.

Aufg. 7—9. (2.) AB sei die Sehne des Segments, C deren Mitte, OC also Achse des Segmentes. Von dem gesuchten Rechteck $XYZW$ sollen die Ecken X und Y auf AB liegen. Ist nun

7. und 8. der Umfang oder die Differenz der Seiten gegeben, so

---

*) Aus Versehen an diesem Platze. Gehört auf S. 445. S. die Anmerkung dort!
D. Red.

fallen, wie Hr. Oberl. Dr. Lieber in Stettin bemerkt, die Aufgaben zusammen mit den in seiner „Sammlung“ § 119, 5 und 6 (und vielleicht auch sonst schon) gestellten: Ein gleichschenkliges Dreieck CWZ aus Summe oder Differenz von Grundlinie und Höhe in das Segment zu zeichnen. Ich enthalte mich daher, über die ohnedies leichten und von mir mehr nur der Symmetrie halber den übrigen beigegebenen Aufgaben etwas Weiteres zu bemerken.

9. Ist endlich die Diagonale $XZ = e$ gegeben, so sieht man leicht, dass ein aus C mit Halbmesser $= e$ beschriebener Kreis die verlängerte WZ (in E und F) so schneidet, dass $EF = 2\,WZ$. Daher ist die gemeinschaftliche Mitte D von WZ und EF ein Punkt, dessen Potenz in Bezug auf den Kreis C das Vierfache seiner Potenz in Bezug auf den Kreis O ist, und wird somit nach einer bekannten — im vorliegenden Fall ziemlich einfachen — Construction leicht gefunden. Die Rechnung führt auf eine ganz ähnliche Construction.

10. Ueber den Lehrsatz sind mir Einsendungen von den Herren Oberlehrer von Lühmann in Gartz, Professor Heel in Speyer und Realschullehrer Fuhrmann in Königsberg zugegangen. Die Beweise dieser Herren sind im Wesentlichen untereinander und dem meinigen ähnlich. Um den Gang des letzteren kurz wiederzugeben, so ist, wenn die gemeinschaftliche Tangente ED von der durch C gehenden Potenzlinie der Kreise A und B in M geschnitten wird, das Dreieck AMB bei M rechtwinklig und dem Dreieck FHG ähnlich, weshalb auch das letztere bei H rechtwinklig ist, wie man aus den Winkeln leicht erkennt. Die Hypotenusen beider Dreiecke sind aber in C in demselben Verhältnisse getheilt und da MC auf AB senkrecht ist, so ist auch HC auf FG senkrecht, woraus sofort der zweite Theil des Satzes folgt.

Notizen.

Bei der Redaction gingen ein:

1) Programm des Grossherzogl. Gymn. z. Bensheim 1873/74 enthält Abh. von Stoll: „Neue Beiträge zum Problem v. Apollonius I. Th. 4. S. 1—32.

2) Reliquiae Copernicanae von M. Curtze in Thorn; Separatabdruk aus Schlöm. Zeitschrift (kl. Mittheilungen) Fortsetzung (s. S. 76 d. J.) mit griech. und lat. Text. Man vergl. dort über die Trisection von Hippauf und Albrich die Anm. das. S. 452.

3) Schulordnung (Regulativ) für die Studienanstalten (= Gymnasien) und Realgymnasien (=Realschulen) Baierns. Ministerialblatt für Kirchen- und Schulangelegenheiten im Königr. Baiern. Nr. 32 u. 33 (1874). Nicht vom K. B. Minist. eingesandt.

4) Katechismus des Versicherungswesens v. O. Lemcke (1874) Lpzg. bei Weber.

5) Was ist der Raum? Als Stoff für convers. Unterricht dem gesammten Lehrerstande, insbesondere aber den Lehrern und Lehrerbildungsanstalten gewidmet von Dr. G. Freih. v. Leonhardi, o. Prof. d. Ph. zu Prag.

6) Krebs, Einleitung in die mechanische Wärmetheorie, Leipzig (Teubner) 1874.

Ausserdem wurden neuerdings (Ende November) noch folgende Bücher durch die Verlagshandlung eingesendet:

A) Werke über Mathematik:

Dölp, Aufgaben zur Diff.- und Int.-Rechnung **2.** Aufl. Giessen (Ricker) 1874.

Hochheim, Differentialcurven (neu) Halle (Nebert) 1874.

Wienhold, Lehrb. d. Element.-Math. I. Arithmetik. Leipzig (Hahn) 1874.

Feaux, Lehrb. d. element. Planimetrie, Paderborn (Schöningh) 1874.

Worpitzky, Elemente der Math. 3. Hft., Planimetrie. Berlin (Weidmann) 1874.

Gugler, Lehrb. d. descriptiven Geometrie 3. Aufl. Stuttgart (Metzler) 1874.

Spitz, Lehrb. d. allgemeinen Arithmetik 3. Aufl. I. Th. Leipzig — Heidelberg (Winter) 1874 nebst Anhang, enth. Andeutungen und Resultate zu den Lösungen.

Spitz, die ersten Sätze vom Dreieck und von den Parallelen (mit Rücksicht auf die „absolute“ Geometrie).

Gantzer, Schumanns Lehrb. d. Planimetrie 2. Aufl. Berlin (Weidmann) 1874.

Oehler, „die Winkelebene“ aus d. Progr. d. Realschule Teschen.

B) Werke über Naturwissenschaften.

Schütte, das Reich der Luft v. Flammarion. Leipzig (Brandstetter). 1875.

Gouzy, Klimatologie des Elsass. Markircher Progr. 1874.

Zizmann, propädeut. Unterricht in Physik. Prog. Coburg R.

Die gesammten Naturwissenschaften Lief. 12—19. Essen (Bädecker).

Weiss, zwei Sterntafeln.

C) Zeitschriften.

Schlömlich Ztschr. etc. Hft. 5 (19. J. 1874).

Revue de l'instruction publique XXII, 12 Livr.

Pädagog. Archiv Hft. 7—9 (Jahrg. 1874).

Nouv. Ann. d. Math. Octobr.-Hft. 1874.

Notiz, Weinhold's Vorschule der Geometrie betr.

Die Redaction macht auf Wunsch der betr. Verlagshandlung bekannt, dass Prof. Weinhold in Chemnitz auf seine Vorschule der Physik (Leipzig bei Quandt und Händel)*), von der eine neue Aufl. erschienen ist, die Fortschrittsmedaille erhalten hat.

Angebot.

Der Herausgeber bietet folgende Bände dieser Zeitschrift Schul-Anstalten zum Kauf an: Jahrg. I. II. III. IV., immer 3 Bde. Dabei ist zu bemerken, dass Bd. III gänzlich vergriffen ist und selbst von der Verlagshandlung gesucht wird.

*) Vgl. III, 294.

Jahrgang V.

Seite 49 Zeile 9 u. 11 v. o. setze in den Proportionen das Zeichen : statt .
,, 71 ,, 35 v. o. unter no. 6) schreibe *75* fl. statt 15 fl.
,, 179 ,, 4 v. u. lies *24*, 3902 u. *24*, 3907 st. 14 Ganze etc.
,, 191 ,, 22 v. o. ,, 4055,267 st. 4045,267.
,, 193 ,, 14 v. o. ,, 0,000438*4* st. 0,0004383.
,, 226 ,, 34 v. o. ,, Alkayyâmi st. Alkayâni.
,, 227 ,, 4 v. o. ,, Abul *Rihan* st. A. Rissan.
,, ,, ,, ,, v. o. ,, Albiruni st. Albirum.
,, 234 ,, 16 v. o. ,, zwe*ck*mässig st. zwecmässig.
,, 244 ,, 25 v. o. ,, *B*othkamp st. Rothkamp.
,, 249 ,, 7 v. u. ,, *C*antor st. Kantor.
,, 369 ,, 2 v. u. ,, $x^{\overset{b}{\log} x} = m$ st. $x \overset{b}{\log} x = m$ und ebenso $x^{\overset{5}{\log} x} = 3125$
st. $x \overset{5}{\log} x = 3125$.

NB. Die Redaction bittet die Mitarbeiter u. Leser ds. Zeitschrift um weitere Mittheilung von Druckfehlern.

Fig. 1.

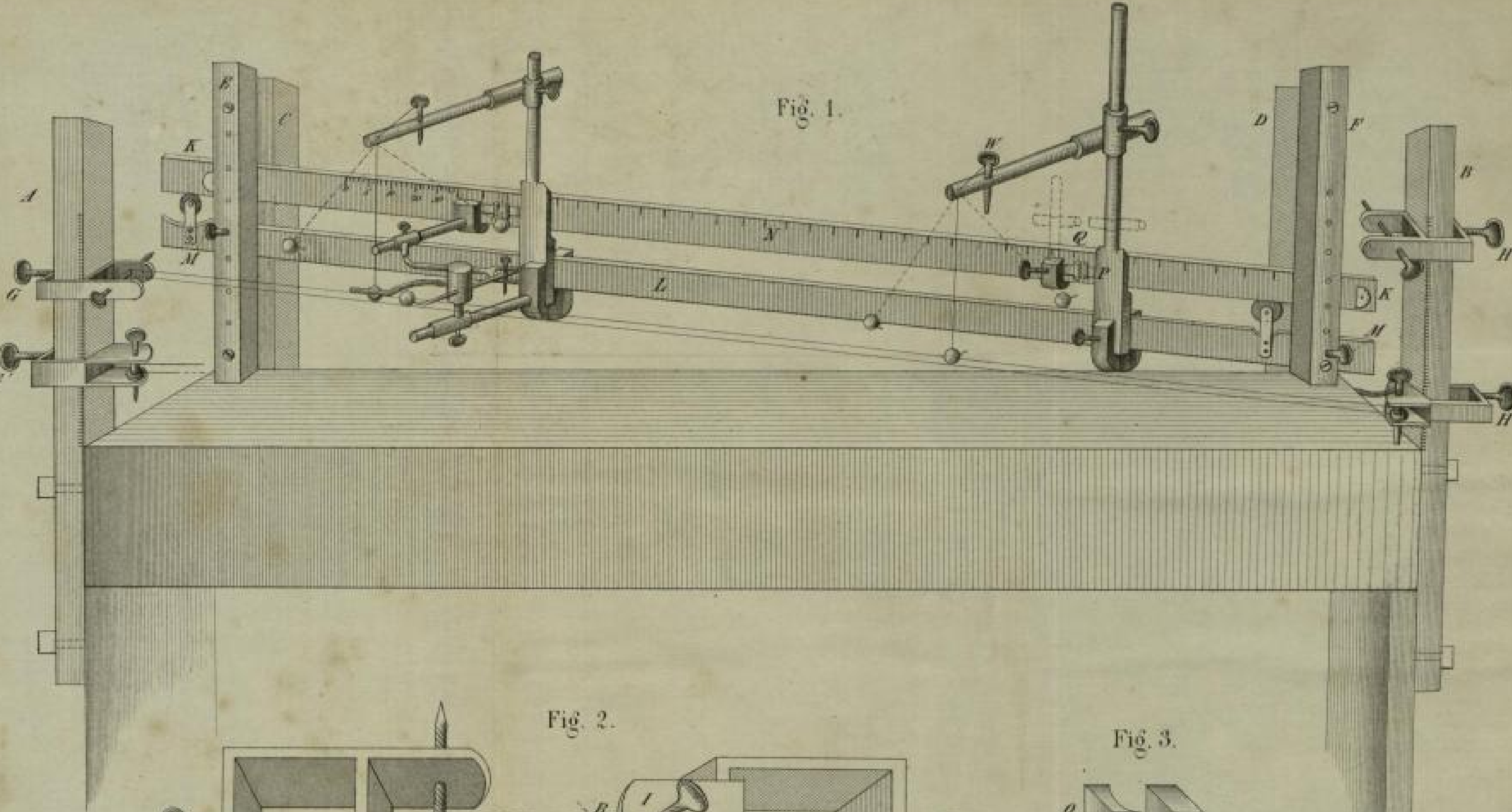


Fig. 2.

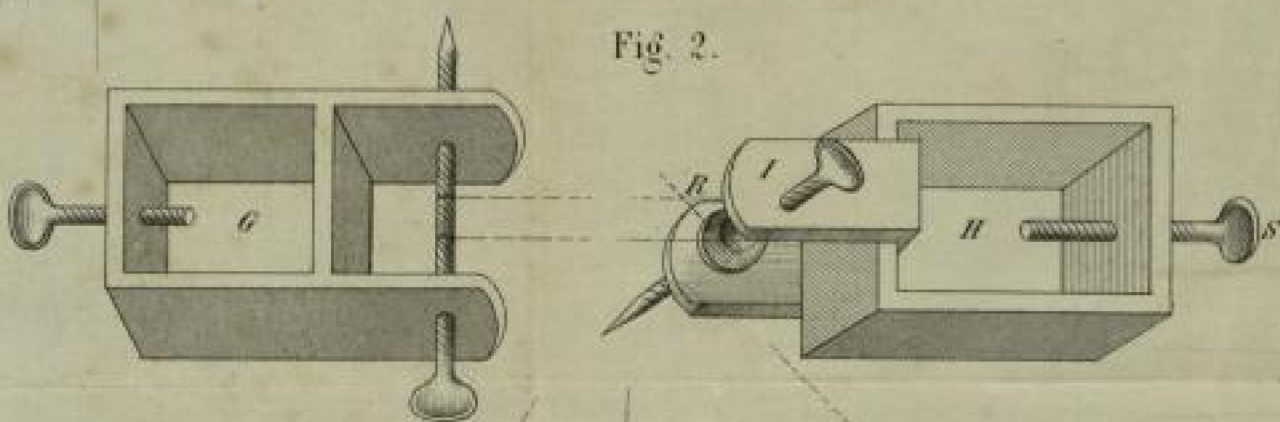


Fig. 3.

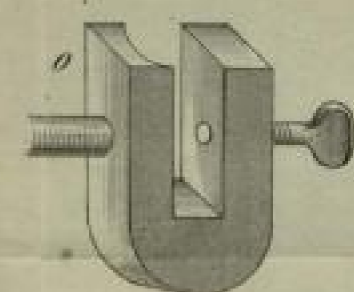


Fig. 4b.